Ortogonális polinomok

előadásvázlat

Dr. Blahota István

2012. december 13.

Pszeudo-skaláris (belső) szorzat

Legyen X lineáris tér (vektortér) $\mathbb{K}$ fölött. Ha $\langle x, y\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ olyan függvény, melyre

$$\begin{aligned}\langle x_1 + x_2, y\rangle &= \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle, \\ \langle \lambda x, y\rangle &= \lambda\langle x, y\rangle, \\ \langle x, y\rangle &= \overline{\langle y, x\rangle}, \\ \langle x, x\rangle &\geq 0\end{aligned}$$

teljesül $\forall x_1, x_2, x, y \in X$ vektorok és $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ skalár esetén, akkor $\langle x, y\rangle$-t az x és y elemek pszeudo-skaláris szorzatának nevezzük.

Schwarz-egyenlőtlenség

Ha $\langle x, y\rangle \to \mathbb{K}$ pszeudo-skaláris szorzat az X lineáris téren, akkor $\forall x, y \in X$ esetén

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Speciálisan $\left(l_2^{(n)}\right)$: CBS-egyenlőtlenség.

Schwarz-egyenlőtlenség

Ha $\langle x, y\rangle \to \mathbb{K}$ pszeudo-skaláris szorzat az X lineáris téren, akkor $\forall x, y \in X$ esetén

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Speciálisan $\left(l_2^{(n)}\right)$: CBS-egyenlőtlenség.

Skaláris (belső) szorzat, pre-Hilbert-tér

Ha $\langle x, y\rangle$ pszeudo-skaláris szorzat az X lineáris téren, valamint ha

$$\langle x, x\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$$

akkor skaláris szorzatról beszélünk.
A skaláris szorzattal ellátott lineáris teret pre-Hilbert-térnek nevezzük.

Schwarz-egyenlőtlenség

Ha $\langle x, y\rangle \to \mathbb{K}$ pszeudo-skaláris szorzat az X lineáris téren, akkor $\forall x, y \in X$ esetén

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Speciálisan $\left(l_2^{(n)}\right)$: CBS-egyenlőtlenség.

Skaláris (belső) szorzat, pre-Hilbert-tér

Ha $\langle x, y\rangle$ pszeudo-skaláris szorzat az X lineáris téren, valamint ha

$$\langle x, x\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$$

akkor skaláris szorzatról beszélünk.
A skaláris szorzattal ellátott lineáris teret pre-Hilbert-térnek nevezzük.

Lineáris normált tér

Legyen X lineáris tér (vektortér) $\mathbb{K}$ fölött. Ha $\|x\| : X \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre

$$
\begin{aligned}
\|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\|, \\
\|\lambda x\| &= |\lambda|\|x\|, \\
\|x\| &\geq 0, \\
\|x\| = 0 &\Rightarrow x = 0
\end{aligned}
$$

teljesül $\forall x, y \in X$ vektorok és $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ skalár esetén, akkor normának, X-et vele ellátva pedig lineáris normált térnek nevezzük.

Lineáris metrikus és normált tér

Legyen X egy lineáris metrikus tér $\mathbb{K}$ fölött. Metrikája pontosan akkor származtatható egy normából

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|$$

módon, ha $\forall x, y, z \in X$ vektorok és $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ skalár esetén teljesülnek az alábbiak:

$$\begin{aligned} \varrho(\lambda x, \lambda y) &= |\lambda| \varrho(x, y), \\ \varrho(x + z, y + z) &= \varrho(x, y). \end{aligned}$$

Konvergencia metrikus és normált térben.

Lineáris metrikus és normált tér

Legyen X egy lineáris metrikus tér $\mathbb{K}$ fölött. Metrikája pontosan akkor származtatható egy normából

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|$$

módon, ha $\forall x, y, z \in X$ vektorok és $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ skalár esetén teljesülnek az alábbiak:

$$\begin{aligned} \varrho(\lambda x, \lambda y) &= |\lambda| \varrho(x, y), \\ \varrho(x + z, y + z) &= \varrho(x, y). \end{aligned}$$

Konvergencia metrikus és normált térben.

Példák lineáris normált térre: $L_p(X, S, \mu)$, $l_p^{(n)}$, l_p, $C(X)$.

Lineáris metrikus és normált tér

Legyen X egy lineáris metrikus tér $\mathbb{K}$ fölött. Metrikája pontosan akkor származtatható egy normából

$$\varrho(x,y) = \|x-y\|$$

módon, ha $\forall x, y, z \in X$ vektorok és $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ skalár esetén teljesülnek az alábbiak:

$$\begin{aligned} \varrho(\lambda x, \lambda y) &= |\lambda| \varrho(x,y), \\ \varrho(x+z, y+z) &= \varrho(x,y). \end{aligned}$$

Konvergencia metrikus és normált térben.

Példák lineáris normált térre: $L_p(X, S, \mu)$, $l_p^{(n)}$, l_p, $C(X)$.

Banach-tér

A $\mathbb{K}$ fölötti X lineáris normált teret Banach-térnek nevezzük, ha teljes metrikus tér a $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ metrikában.

Véges dimenziós normált vektorterek mind Banach-terek, hiszen az azonos dimenziójúak topologikusan izomorfak (véges dimenziós térben minden norma ekvivalens).

Banach-tér

A $\mathbb{K}$ fölötti X lineáris normált teret Banach-térnek nevezzük, ha teljes metrikus tér a $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ metrikában.

Véges dimenziós normált vektorterek mind Banach-terek, hiszen az azonos dimenziójúak topologikusan izomorfak (véges dimenziós térben minden norma ekvivalens).

$\|x\|$ folytonos, $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ norma, ez pontosan egy skaláris szorzatból származik így.

Banach-tér

A $\mathbb{K}$ fölötti X lineáris normált teret Banach-térnek nevezzük, ha teljes metrikus tér a $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ metrikában.

Véges dimenziós normált vektorterek mind Banach-terek, hiszen az azonos dimenziójúak topologikusan izomorfak (véges dimenziós térben minden norma ekvivalens).

$\|x\|$ folytonos, $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ norma, ez pontosan egy skaláris szorzatból származik így.

Hilbert-tér

Az X pre-Hilbert-teret Hilbert-térnek nevezzük, ha teljes a $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ normából származó metrikában.

Banach-tér

A $\mathbb{K}$ fölötti X lineáris normált teret Banach-térnek nevezzük, ha teljes metrikus tér a $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ metrikában.

Véges dimenziós normált vektorterek mind Banach-terek, hiszen az azonos dimenziójúak topologikusan izomorfak (véges dimenziós térben minden norma ekvivalens).

$\|x\|$ folytonos, $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ norma, ez pontosan egy skaláris szorzatból származik így.

Hilbert-tér

Az X pre-Hilbert-teret Hilbert-térnek nevezzük, ha teljes a $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ normából származó metrikában.

Tehát $\varrho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$.

Banach-tér

A $\mathbb{K}$ fölötti X lineáris normált teret Banach-térnek nevezzük, ha teljes metrikus tér a $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ metrikában.

Véges dimenziós normált vektorterek mind Banach-terek, hiszen az azonos dimenziójúak topologikusan izomorfak (véges dimenziós térben minden norma ekvivalens).

$\|x\|$ folytonos, $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ norma, ez pontosan egy skaláris szorzatból származik így.

Hilbert-tér

Az X pre-Hilbert-teret Hilbert-térnek nevezzük, ha teljes a $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ normából származó metrikában.

Tehát $\varrho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$.

Könnyű látni, hogy a Hilbert-terek olyan Banach-terek, melyek normája skaláris szorzatból származik, méghozzá $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ módon.

Paralelogramma szabály

Az X lineáris normál tér normája pontosan akkor származik skaláris szorzatból az $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ módon, ha $\forall x, y \in X$ esetén

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Hilbert-terek

Könnyű látni, hogy a Hilbert-terek olyan Banach-terek, melyek normája skaláris szorzatból származik, méghozzá $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ módon.

Paralelogramma szabály

Az X lineáris normál tér normája pontosan akkor származik skaláris szorzatból az $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ módon, ha $\forall x, y \in X$ esetén

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Jordan–Neumann-tétel

Egy Banach-tér pontosan akkor Hilbert-tér, ha a tér normája teljesíti a paralelogramma-azonosságot.

Könnyű látni, hogy a Hilbert-terek olyan Banach-terek, melyek normája skaláris szorzatból származik, méghozzá $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ módon.

Paralelogramma szabály

Az X lineáris normál tér normája pontosan akkor származik skaláris szorzatból az $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ módon, ha $\forall x, y \in X$ esetén

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Jordan–Neumann-tétel

Egy Banach-tér pontosan akkor Hilbert-tér, ha a tér normája teljesíti a paralelogramma-azonosságot.

Példák Hilbert-térre: $L_2(X, S, \mu)$, $l_2^{(n)}$, l_2.

A skaláris szorzat folytonossága

Hilbert-térben a skaláris szorzat tényezőinek folytonos függvénye.

Példák Hilbert-térre: $L_2(X, S, \mu)$, $l_2^{(n)}$, l_2.

A skaláris szorzat folytonossága

Hilbert-térben a skaláris szorzat tényezőinek folytonos függvénye.

Ortogonális, ortonormált elemek

A Hilbert-tér x, y elemeit ortogonálisnak (merőlegesnek) nevezzük, ha $\langle x, y \rangle = 0$. Jelölés: $x \perp y$. Ha még $\|x\| = \|y\| = 1$ is teljesül, az elemeket ortonormáltnak nevezzük.

Ortogonális halmazok, ortogonális komplementer

A H Hilbert-tér M és N részhalmazát ortogonálisnak nevezzük, ha $\forall x \in M$ és $\forall y \in N$ esetén $x \perp y$. Jelölés: $M \perp N$.
Az $M \subseteq H$ halmaz bármely elemére ortogonális H-beli elemek összességét M ortogonális komplementerének nevezzük. Jelölés: $M^\perp$.

Ortogonális, ortonormált elemek

A Hilbert-tér x, y elemeit ortogonálisnak (merőlegesnek) nevezzük, ha $\langle x, y\rangle = 0$. Jelölés: $x \perp y$. Ha még $\|x\| = \|y\| = 1$ is teljesül, az elemeket ortonormáltnak nevezzük.

Ortogonális halmazok, ortogonális komplementer

A H Hilbert-tér M és N részhalmazát ortogonálisnak nevezzük, ha $\forall x \in M$ és $\forall y \in N$ esetén $x \perp y$. Jelölés: $M \perp N$.
Az $M \subseteq H$ halmaz bármely elemére ortogonális H-beli elemek összességét M ortogonális komplementerének nevezzük. Jelölés: $M^\perp$.

Az ortogonális komplementer tulajdonságai

Legyen H Hilbert-tér. $\forall M \subseteq H$ esetén $M^{\perp}$ zárt altere H-nak.

Ortogonális felbontás tétele

Legyen H' a H Hilbert-tér zárt altere. Ekkor $\forall x \in H$ egyértelműen előállítható az

$$x = x' + x''$$

alakban, ahol $x' \in H'$ és $x'' \in H'^{\perp}$

Az ortogonális komplementer tulajdonságai

Legyen H Hilbert-tér. $\forall M \subseteq H$ esetén $M^{\perp}$ zárt altere H-nak.

Ortogonális felbontás tétele

Legyen H' a H Hilbert-tér zárt altere. Ekkor $\forall x \in H$ egyértelműen előállítható az

$$x = x' + x''$$

alakban, ahol $x' \in H'$ és $x'' \in H'^{\perp}$

x'-t $x \in H$ ortogonális projekciójának nevezzük H'-re.

Az ortogonális komplementer tulajdonságai

Legyen H Hilbert-tér. $\forall M \subseteq H$ esetén $M^{\perp}$ zárt altere H-nak.

Ortogonális felbontás tétele

Legyen H' a H Hilbert-tér zárt altere. Ekkor $\forall x \in H$ egyértelműen előállítható az

$$x = x' + x''$$

alakban, ahol $x' \in H'$ és $x'' \in H'^{\perp}$

x'-t $x \in H$ ortogonális projekciójának nevezzük H'-re.

Ortogonális, ortonormált rendszer

Egy Hilbert-tér elemeinek egy rendszerét ortogonális rendszernek nevezzük, ha közülük bármely két különböző elem ortogonális. Ha bármely két különböző elem ortonormált, ortonormált rendszerről beszélünk.

Ortogonális, ortonormált sorozat

Ha ψ_n egy ortogonális, illetve ortonormált elemekből álló sorozat egy Hilbert-térben, akkor ortogonális, illetve ortonormált sorozatról beszélünk.

Ortonormált rendszerek

Ortogonális, ortonormált rendszer

Egy Hilbert-tér elemeinek egy rendszerét ortogonális rendszernek nevezzük, ha közülük bármely két különböző elem ortogonális. Ha bármely két különböző elem ortonormált, ortonormált rendszerről beszélünk.

Ortogonális, ortonormált sorozat

Ha ψ_n egy ortogonális, illetve ortonormált elemekből álló sorozat egy Hilbert-térben, akkor ortogonális, illetve ortonormált sorozatról beszélünk.

Ha szükséges, véges ortogonális, illetve ortonormált sorozattal is foglalkozunk.

Ortonormált rendszerek

Ortogonális, ortonormált rendszer

Egy Hilbert-tér elemeinek egy rendszerét ortogonális rendszernek nevezzük, ha közülük bármely két különböző elem ortogonális. Ha bármely két különböző elem ortonormált, ortonormált rendszerről beszélünk.

Ortogonális, ortonormált sorozat

Ha ψ_n egy ortogonális, illetve ortonormált elemekből álló sorozat egy Hilbert-térben, akkor ortogonális, illetve ortonormált sorozatról beszélünk.

Ha szükséges, véges ortogonális, illetve ortonormált sorozattal is foglalkozunk.

Az ortogonális rendszer lineárisan független rendszer.

Ortogonális, ortonormált rendszer

Egy Hilbert-tér elemeinek egy rendszerét ortogonális rendszernek nevezzük, ha közülük bármely két különböző elem ortogonális. Ha bármely két különböző elem ortonormált, ortonormált rendszerről beszélünk.

Ortogonális, ortonormált sorozat

Ha ψ_n egy ortogonális, illetve ortonormált elemekből álló sorozat egy Hilbert-térben, akkor ortogonális, illetve ortonormált sorozatról beszélünk.

Ha szükséges, véges ortogonális, illetve ortonormált sorozattal is foglalkozunk.
Az ortogonális rendszer lineárisan független rendszer.

Gram–Schmidt-féle ortogonalizálás

Legyen $I = \mathbb{N}^+$ vagy $I = \{1, \dots, n\}$ valamely $n \in \mathbb{N}^+$-re. Ha $\{x_i, i \in I\}$ egy Hilbert-tér lineárisan független elemeinek rendszere (véges, vagy végtelen sorozata), akkor létezik olyan $\{\psi_i,\ i \in I\}$ ortonormált sorozat, hogy

$$\begin{aligned} \psi_k &= c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \cdots + c_{kk}x_k, \\ x_k &= \gamma_{k1}\psi_1 + \gamma_{k2}\psi_2 + \cdots + \gamma_{kk}\psi_k, \end{aligned}$$

ahol $c_{kj}, \gamma_{kj},\ j \in \{1, \dots, k\}$ skalárok, valamint $c_{kk}, \gamma_{kk} > 0,\ \ k \in I$.

Ortogonális sor

Ha $\{\psi_i,\ i \in I\}$ ortonormált sorozat egy Hilbert-térben, α_n skalárok sorozata, akkor a $\sum_{n \in I} \alpha_n \psi_n$ sort ortogonális sornak nevezzük.

Gram–Schmidt-féle ortogonalizálás

Legyen $I = \mathbb{N}^+$ vagy $I = \{1, \ldots, n\}$ valamely $n \in \mathbb{N}^+$-re. Ha $\{x_i, i \in I\}$ egy Hilbert-tér lineárisan független elemeinek rendszere (véges, vagy végtelen sorozata), akkor létezik olyan $\{\psi_i,\ i \in I\}$ ortonormált sorozat, hogy

$$\begin{aligned} \psi_k &= c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \cdots + c_{kk}x_k\,, \\ x_k &= \gamma_{k1}\psi_1 + \gamma_{k2}\psi_2 + \cdots + \gamma_{kk}\psi_k\,, \end{aligned}$$

ahol $c_{kj}, \gamma_{kj},\ j \in \{1, \ldots, k\}$ skalárok, valamint $c_{kk}, \gamma_{kk} > 0,\ k \in I$.

Ortogonális sor

Ha $\{\psi_i,\ i \in I\}$ ortonormált sorozat egy Hilbert-térben, α_n skalárok sorozata, akkor a $\sum_{n \in I} \alpha_n \psi_n$ sort ortogonális sornak nevezzük.

Sorok felbontási lemmája

Legyen H Hilbert-tér, $x_k \in H$, $k \in \mathbb{N}^+$ és legyen a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ sor (normában) konvergens, akkor $\forall y \in H$ esetén

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} x_k, y \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, y \rangle.$$

Ha $x_1, \ldots, x_n \in H$ elemek páronként ortogonálisak, akkor

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

Ortogonális sorok normakonvergenciája

A $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k$ ortogonális sor pontosan akkor konvergens (normában), ha a $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ numerikus sor konvergens.

Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k$ ortogonális sor konvergens és összege x, akkor

$$\alpha_n = \langle x, \psi_n \rangle\,, \;\; n \in \mathbb{N}^+, \text{ valamint } \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2.$$

Fourier-együtthatók és -sor

Legyen $\{\psi_k,\ k \in I\}$ ortonormált sorozat egy H Hilbert-térben. Legyen $x \in H$. Az $\hat{x}_k = \langle x, \psi_k \rangle$ számokat az x elem Fourier-együtthatóinak, a $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k \psi_k$ ortogonális sort pedig x Fourier-sorának nevezzük a $\{\psi_k,\ k \in I\}$ ortonormált sorozatra nézve.

n-edik részletösszeg, Fejér-közép (Fejér Lipót)

$$S_n x = \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_k \psi_k, \quad \sigma_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k x$$

Fourier-együtthatók és -sor

Legyen $\{\psi_k,\ k \in I\}$ ortonormált sorozat egy H Hilbert-térben. Legyen $x \in H$. Az $\hat{x}_k = \langle x, \psi_k \rangle$ számokat az x elem Fourier-együtthatóinak, a $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k \psi_k$ ortogonális sort pedig x Fourier-sorának nevezzük a $\{\psi_k,\ k \in I\}$ ortonormált sorozatra nézve.

n-edik részletösszeg, Fejér-közép (Fejér Lipót)

$$S_n x = \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_k \psi_k, \quad \sigma_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k x$$

$\hat{x}_n$, $S_n x$, $\sigma_n x$ linearitása.

Fourier-együtthatók és -sor

Legyen $\{\psi_k,\ k \in I\}$ ortonormált sorozat egy H Hilbert-térben. Legyen $x \in H$. Az $\hat{x}_k = \langle x, \psi_k \rangle$ számokat az x elem Fourier-együtthatóinak, a $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k \psi_k$ ortogonális sort pedig x Fourier-sorának nevezzük a $\{\psi_k,\ k \in I\}$ ortonormált sorozatra nézve.

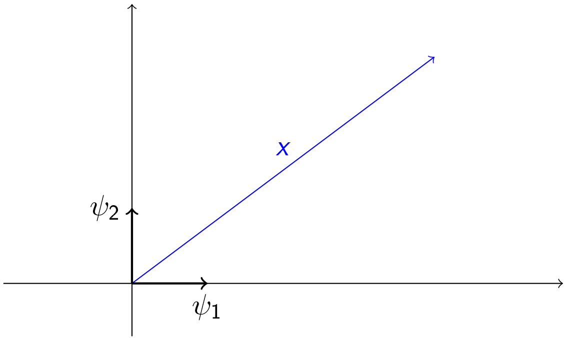
n-edik részletösszeg, Fejér-közép (Fejér Lipót)

$$S_n x = \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_k \psi_k, \quad \sigma_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k x$$

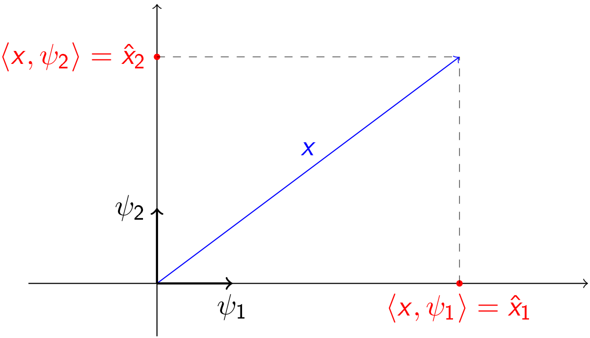
$\hat{x}_n,\ S_n x,\ \sigma_n x$ linearitása.

Ortonormált rendszerek

A $\psi_1 = (1,0), \psi_2 = (0,1)$ ortonormált sorozathoz tartozó Fourier-sor (l_2^2)

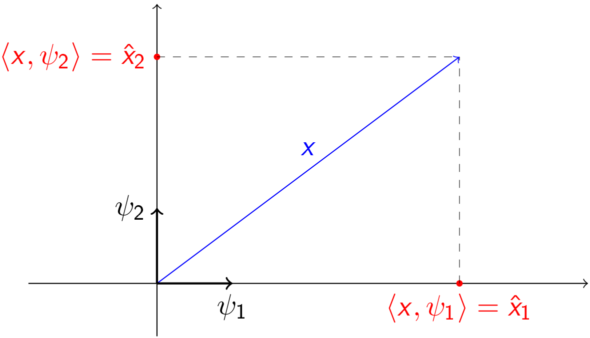


A $\psi_1 = (1,0), \psi_2 = (0,1)$ ortonormált sorozathoz tartozó Fourier-sor (l_2^2)



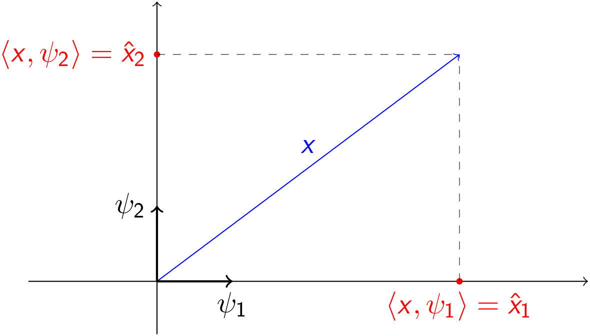
$$x = S_2 x = \hat{x}_1 \psi_1 + \hat{x}_2 \psi_2$$

A $\psi_1 = (1, 0), \psi_2 = (0, 1)$ ortonormált sorozathoz tartozó Fourier-sor (l_2^2)



$$x = S_2 x = \hat{x}_1 \psi_1 + \hat{x}_2 \psi_2, \quad \|x\|^2 = \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2$$

A $\psi_1 = (1,0), \psi_2 = (0,1)$ ortonormált sorozathoz tartozó Fourier-sor (l_2^2)



$$x = S_2 x = \hat{x}_1 \psi_1 + \hat{x}_2 \psi_2, \quad \|x\|^2 = \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2$$

Eltérés normanégyzetben

Legyen $\{\psi_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ ortonormált sorozat egy H Hilbert-térben, $\{\alpha_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ skalársorozat, akkor $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\hat{x}_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\hat{x}_k - \alpha_k|^2.$$

Konkrétan, ha $\alpha_k = \hat{x}_k$, akkor

$$\|x - S_n x\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\hat{x}_k|^2.$$

Eltérés normanégyzetben

Legyen $\{\psi_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ ortonormált sorozat egy H Hilbert-térben, $\{\alpha_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ skalársorozat, akkor $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\hat{x}_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\hat{x}_k - \alpha_k|^2.$$

Konkrétan, ha $\alpha_k = \hat{x}_k$, akkor

$$\|x - S_n x\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\hat{x}_k|^2.$$

Következmények

1. A $\{\psi_k,\ k \in \{1, \ldots, n\}\}$ ortonormált rendszer által generált altér x-hez legközelebbi eleme $S_n x$ (legjobb approximáció!).
2. $\forall x \in H$-ra fennáll a Bessel-egyenlőtlenség: $\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}_k|^2$.

Ortonormált rendszerek

Következmények

1. A $\{\psi_k,\ k \in \{1, \ldots, n\}\}$ ortonormált rendszer által generált altér x-hez legközelebbi eleme $S_n x$ (legjobb approximáció!).
2. $\forall x \in H$-ra fennáll a Bessel-egyenlőtlenség: $\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}_k|^2$.
3. Riemann–Lebesgue-lemma: Tetszőleges ortonormált sorozat esetén $\forall x \in H$-ra $\lim_{n\to\infty} |\hat{x}_n| = 0$.

Ortonormált rendszerek

Következmények

1. A $\{\psi_k,\ k \in \{1,\ldots,n\}\}$ ortonormált rendszer által generált altér x-hez legközelebbi eleme $S_n x$ (legjobb approximáció!).
2. $\forall x \in H$-ra fennáll a Bessel-egyenlőtlenség: $\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}_k|^2$.
3. Riemann–Lebesgue-lemma: Tetszőleges ortonormált sorozat esetén $\forall x \in H$-ra $\lim_{n\to\infty} |\hat{x}_n| = 0$.
4. $\forall x \in H$ elem Fourier-sora normában konvergens.

Következmények

1. A $\{\psi_k,\ k \in \{1, \ldots, n\}\}$ ortonormált rendszer által generált altér x-hez legközelebbi eleme $S_n x$ (legjobb approximáció!).
2. $\forall x \in H$-ra fennáll a Bessel-egyenlőtlenség: $\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}_k|^2$.
3. Riemann–Lebesgue-lemma: Tetszőleges ortonormált sorozat esetén $\forall x \in H$-ra $\lim_{n\to\infty} |\hat{x}_n| = 0$.
4. $\forall x \in H$ elem Fourier-sora normában konvergens.
5. Ahhoz, hogy egy $x \in H$ elem Fourier-sora normában konvergáljon x-hez, szükséges és elégséges, hogy teljesüljön a Parseval-egyenlet: $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}_k|^2$.

Ortonormált rendszerek

Következmények

1. A $\{\psi_k,\ k \in \{1,\ldots,n\}\}$ ortonormált rendszer által generált altér x-hez legközelebbi eleme $S_n x$ (legjobb approximáció!).
2. $\forall x \in H$-ra fennáll a Bessel-egyenlőtlenség: $\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}_k|^2$.
3. Riemann–Lebesgue-lemma: Tetszőleges ortonormált sorozat esetén $\forall x \in H$-ra $\lim_{n\to\infty} |\hat{x}_n| = 0$.
4. $\forall x \in H$ elem Fourier-sora normában konvergens.
5. Ahhoz, hogy egy $x \in H$ elem Fourier-sora normában konvergáljon x-hez, szükséges és elégséges, hogy teljesüljön a Parseval-egyenlet: $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}_k|^2$.
6. $\forall x \in H$-ra $\|S_n x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\hat{x}_k|^2$.

Következmények

1. A $\{\psi_k,\ k \in \{1,\ldots,n\}\}$ ortonormált rendszer által generált altér x-hez legközelebbi eleme $S_n x$ (legjobb approximáció!).
2. $\forall x \in H$-ra fennáll a Bessel-egyenlőtlenség: $\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}_k|^2$.
3. Riemann–Lebesgue-lemma: Tetszőleges ortonormált sorozat esetén $\forall x \in H$-ra $\lim_{n\to\infty} |\hat{x}_n| = 0$.
4. $\forall x \in H$ elem Fourier-sora normában konvergens.
5. Ahhoz, hogy egy $x \in H$ elem Fourier-sora normában konvergáljon x-hez, szükséges és elégséges, hogy teljesüljön a Parseval-egyenlet: $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}_k|^2$.
6. $\forall x \in H$-ra $\|S_n x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\hat{x}_k|^2$.

Zártság

A $\{\psi_k,\ k \in \mathbb{N}^+\}$ ortonormált sorozatot zártnak nevezzük, ha $\forall x \in H$-ra teljesül a Parseval-egyenlet.

Ez a tulajdonság ekvivalens a „klasszikus” zártsággal $(\overline{[\psi_1, \psi_2, \ldots]} = H)$.

Zártság

A $\{\psi_k,\ k \in \mathbb{N}^+\}$ ortonormált sorozatot zártnak nevezzük, ha $\forall x \in H$-ra teljesül a Parseval-egyenlet.

Ez a tulajdonság ekvivalens a „klasszikus” zártsággal $(\overline{[\psi_1, \psi_2, \ldots]} = H)$.

Teljesség

A $\{\psi_k,\ k \in \mathbb{N}^+\}$ ortonormált sorozatot teljesnek nevezzük, ha $(\hat{x}_k = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}^+) \Rightarrow x = 0$.

Zártság

A $\{\psi_k,\ k \in \mathbb{N}^+\}$ ortonormált sorozatot zártnak nevezzük, ha $\forall x \in H$-ra teljesül a Parseval-egyenlet.

Ez a tulajdonság ekvivalens a „klasszikus” zártsággal ($\overline{[\psi_1, \psi_2, \ldots]} = H$).

Teljesség

A $\{\psi_k,\ k \in \mathbb{N}^+\}$ ortonormált sorozatot teljesnek nevezzük, ha $(\hat{x}_k = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}^+) \Rightarrow x = 0$.

Zártság és teljesség ekvivalenciája

Egy ortonormált sorozatot pontosan akkor zárt, ha teljes.

Zártság

A $\{\psi_k,\ k \in \mathbb{N}^+\}$ ortonormált sorozatot zártnak nevezzük, ha $\forall x \in H$-ra teljesül a Parseval-egyenlet.

Ez a tulajdonság ekvivalens a „klasszikus” zártsággal $(\overline{[\psi_1, \psi_2, \dots]} = H)$.

Teljesség

A $\{\psi_k,\ k \in \mathbb{N}^+\}$ ortonormált sorozatot teljesnek nevezzük, ha $(\hat{x}_k = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}^+) \Rightarrow x = 0$.

Zártság és teljesség ekvivalenciája

Egy ortonormált sorozatot pontosan akkor zárt, ha teljes.

Szeparábilitás

Egy topologikus tér szeparábilis, ha van megszámlálható, sűrű részhalmaza.

Teljes ortonormált sorozat létezése Hilbert-térben

Egy Hilbert-térben pontosan akkor létezik teljes ortonormált sorozat, ha az végtelen dimenziós és szeparábilis.

Szeparábilitás

Egy topologikus tér szeparábilis, ha van megszámlálható, sűrű részhalmaza.

Teljes ortonormált sorozat létezése Hilbert-térben

Egy Hilbert-térben pontosan akkor létezik teljes ortonormált sorozat, ha az végtelen dimenziós és szeparábilis.

Ortogonalizálás sűrű altérben

Ha egy Hilbert-térben adott sorozat által generált altér sűrű, akkor a sorozatból a Gram–Schmidt-féle ortogonalizálással kapott ortonormált sorozat zárt.

Ortonormált rendszerek

Szeparábilitás

Egy topologikus tér szeparábilis, ha van megszámlálható, sűrű részhalmaza.

Teljes ortonormált sorozat létezése Hilbert-térben

Egy Hilbert-térben pontosan akkor létezik teljes ortonormált sorozat, ha az végtelen dimenziós és szeparábilis.

Ortogonalizálás sűrű altérben

Ha egy Hilbert-térben adott sorozat által generált altér sűrű, akkor a sorozatból a Gram–Schmidt-féle ortogonalizálással kapott ortonormált sorozat zárt.

Ortonormált rendszerek

Riesz–Fischer-tétel

Bármely végtelen dimenziós és szeparábilis Hilbert-tér izometrikus és izomorf l_2-vel.

Általános eset

Tetszőleges Hilbert-térbeli elemnek tetszőleges ortonormált rendszerre nézve csak megszámlálható nullától különböző Fourier-együtthatója van.

Ortonormált rendszerek

Riesz–Fischer-tétel

Bármely végtelen dimenziós és szeparábilis Hilbert-tér izometrikus és izomorf l_2-vel.

Általános eset

Tetszőleges Hilbert-térbeli elemnek tetszőleges ortonormált rendszerre nézve csak megszámlálható nullától különböző Fourier-együtthatója van.

Legyen $H = L_2(-\pi, \pi)$, vagyis $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ eleme a térnek, ha $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < \infty$. Legyen

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

n-edfokú trigonometrikus polinom

Ha c_k, d_k valós számsorozatok és $c_n^2 + d_n^2 > 0$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx)).$$

Trigonometrikus Fourier-sor

Legyen $H = L_2(-\pi, \pi)$, vagyis $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ eleme a térnek, ha $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < \infty$. Legyen

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

n-edfokú trigonometrikus polinom

Ha c_k, d_k valós számsorozatok és $c_n^2 + d_n^2 > 0$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx)).$$

$c_n^2 + d_n^2 \geq 0$ esetén a trigonometrikus polinom legfeljebb n-ed fokú.

Legyen $H = L_2(-\pi, \pi)$, vagyis $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ eleme a térnek, ha $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < \infty$. Legyen

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

n-edfokú trigonometrikus polinom

Ha c_k, d_k valós számsorozatok és $c_n^2 + d_n^2 > 0$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx)).$$

$c_n^2 + d_n^2 \geq 0$ esetén a trigonometrikus polinom legfeljebb n-ed fokú.

Trigonometrikus Fourier-sor

Teljes ortonormált sorozat $L_2(-\pi,\pi)$-ben

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}},\dots$$

Teljesség $L_1(-\pi,\pi)$-ben

Ha $f\in L_1(-\pi,\pi)$ és

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx=0\quad \forall n\in\mathbb{N}\text{-re},$$

akkor $f(x)=0$ majdnem mindenütt.

Teljes ortonormált sorozat $L_2(-\pi,\pi)$-ben

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}},\ldots$$

Teljesség $L_1(-\pi,\pi)$-ben

Ha $f\in L_1(-\pi,\pi)$ és

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0,\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx=0,\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx=0\quad \forall n\in\mathbb{N}\text{-re},$$

akkor $f(x)=0$ majdnem mindenütt.

$\Rightarrow$ Egyértelműségi tétel.

Teljes ortonormált sorozat $L_2(-\pi,\pi)$-ben

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}},\ldots$$

Teljesség $L_1(-\pi,\pi)$-ben

Ha $f\in L_1(-\pi,\pi)$ és

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0,\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx=0,\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx=0\quad \forall n\in\mathbb{N}\text{-re},$$

akkor $f(x)=0$ majdnem mindenütt.

$\Rightarrow$ Egyértelműségi tétel.

Trigonometrikus Fourier együtthatók

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt, \quad k \in \mathbb{N}$$

n-edik részletösszeg

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)), \quad n \in \mathbb{N}$$

Trigonometrikus Fourier-sor

Trigonometrikus Fourier együtthatók

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k \in \mathbb{N}$$

n-edik részletösszeg

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad n \in \mathbb{N}$$

Parseval-formula

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right).$$

Normakonvergencia

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))\right)^2 dx = 0.$$

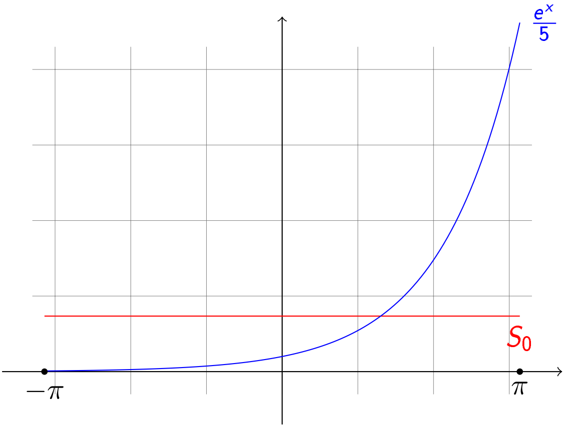
Parseval-formula

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right).$$

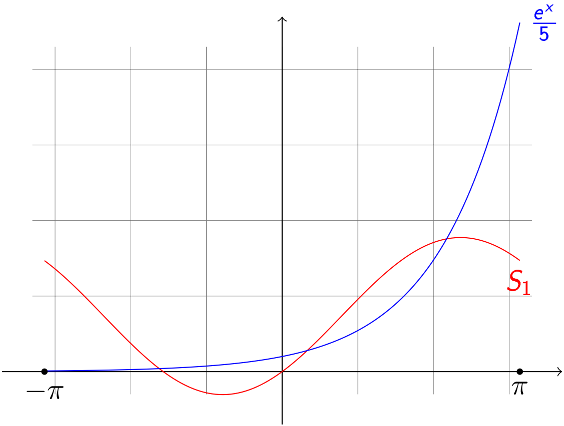
Normakonvergencia

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))\right)^2 dx = 0.$$

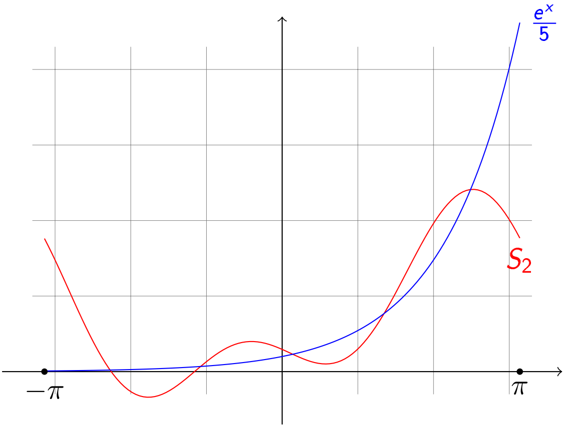
Az $\frac{e^x}{5}$, $x \in (-\pi, \pi)$ és trigonometrikus Fourier-sorának részletösszegei:



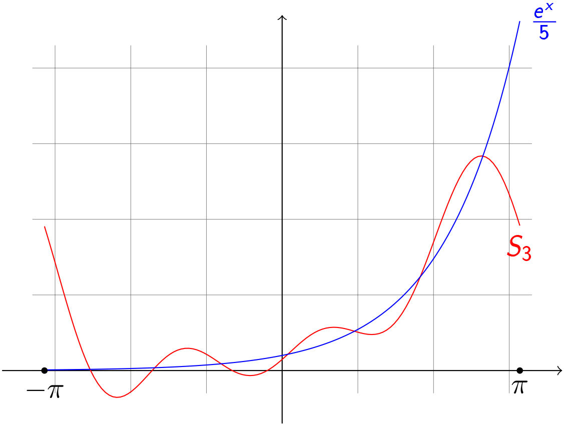
Az $\frac{e^x}{5}$, $x \in (-\pi, \pi)$ és trigonometrikus Fourier-sorának részletösszegei:



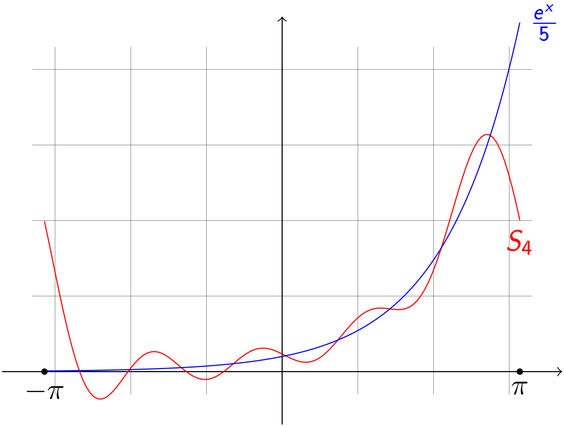
Az $\frac{e^x}{5}$, $x \in (-\pi, \pi)$ és trigonometrikus Fourier-sorának részletösszegei:



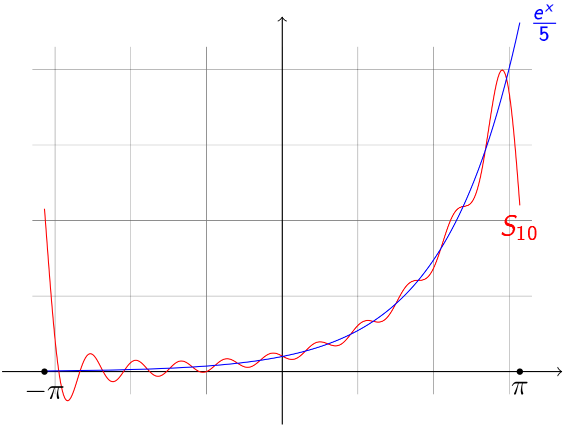
Az $\frac{e^x}{5}$, $x \in (-\pi, \pi)$ és trigonometrikus Fourier-sorának részletösszegei:



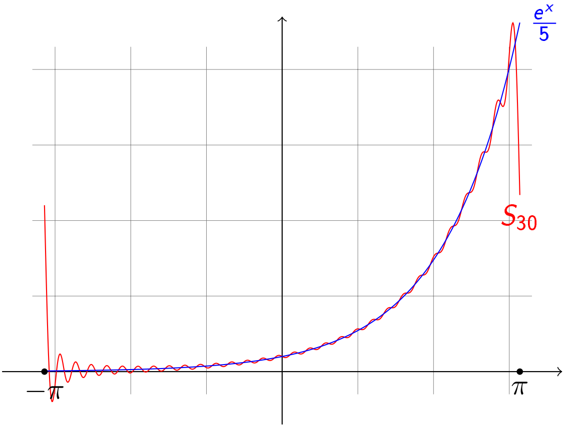
Az $\frac{e^x}{5}$, $x \in (-\pi, \pi)$ és trigonometrikus Fourier-sorának részletösszegei:



Az $\frac{e^x}{5}$, $x \in (-\pi, \pi)$ és trigonometrikus Fourier-sorának részletösszegei:



Az $\frac{e^x}{5}$, $x \in (-\pi, \pi)$ és trigonometrikus Fourier-sorának részletösszegei:



Trigonometrikus Fourier-sor

1. Gibbs-jelenség (1899)
2. A Parseval-egyenlet és a bázeli probléma. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$

Trigonometrikus Fourier-sor

1. Gibbs-jelenség (1899)
2. A Parseval-egyenlet és a bázeli probléma. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \;\; x \in [0, 2\pi]$
3. Tiszta koszinusz és szinusz rendszer és sor a $(-\pi, \pi)$ (páros és páratlan függvények) és a $(0, \pi)$ intervallumokon.

Trigonometrikus Fourier-sor

1. Gibbs-jelenség (1899)
2. A Parseval-egyenlet és a bázeli probléma. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$
3. Tiszta koszinusz és szinusz rendszer és sor a $(-\pi, \pi)$ (páros és páratlan függvények) és a $(0, \pi)$ intervallumokon.
4. Komplex eset: ha $f(x) = u(x) + iv(x) \in L_2(-\pi, \pi)$, akkor

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Azonosságok:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

illetve az Euler-képlet: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

1. Gibbs-jelenség (1899)
2. A Parseval-egyenlet és a bázeli probléma. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$
3. Tiszta koszinusz és szinusz rendszer és sor a $(-\pi, \pi)$ (páros és páratlan függvények) és a $(0, \pi)$ intervallumokon.
4. Komplex eset: ha $f(x) = u(x) + iv(x) \in L_2(-\pi, \pi)$, akkor

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Azonosságok:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

illetve az Euler-képlet: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Valós eset.

Egyenletesen konvergens trigonometrikus sorok

1. Ha egy függvény egyenletesen konvergens trigonometrikus sorba fejthető, akkor e sor együtthatói egyértelműen meg vannak határozva.

Valós eset.

Egyenletesen konvergens trigonometrikus sorok

1. Ha egy függvény egyenletesen konvergens trigonometrikus sorba fejthető, akkor e sor együtthatói egyértelműen meg vannak határozva.
2. Minden egyenletesen konvergens trigonometrikus sor összegfüggvényének Fourier-sora.

Valós eset.

Egyenletesen konvergens trigonometrikus sorok

1. Ha egy függvény egyenletesen konvergens trigonometrikus sorba fejthető, akkor e sor együtthatói egyértelműen meg vannak határozva.
2. Minden egyenletesen konvergens trigonometrikus sor összegfüggvényének Fourier-sora.
3. Ha $f \in L_1(-\pi, \pi)$ Fourier-sora egyenletesen konvergál, akkor f folytonos és $S_n f(x) \to f(x) \quad \forall x \in (-\pi, \pi)$ esetén.

Valós eset.

Egyenletesen konvergens trigonometrikus sorok

1. Ha egy függvény egyenletesen konvergens trigonometrikus sorba fejthető, akkor e sor együtthatói egyértelműen meg vannak határozva.
2. Minden egyenletesen konvergens trigonometrikus sor összegfüggvényének Fourier-sora.
3. Ha $f \in L_1(-\pi, \pi)$ Fourier-sora egyenletesen konvergál, akkor f folytonos és $S_n f(x) \to f(x) \quad \forall x \in (-\pi, \pi)$ esetén.

Trigonometrikus Fourier-sor

Riemann–Lebesgue-lemma

1. Ha $f \in L_2(-\pi, \pi)$, akkor $a_n \to 0$ és $b_n \to 0$.
2. Ha $f \in L_1(a, b)$, $-\infty \leq a \leq \alpha < \beta \leq b \leq \infty$, akkor $\mu \to \infty$ esetén

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\sin(\mu x)dx \to 0 \quad \text{és} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cos(\mu x)dx \to 0$$

a határokra nézve egyenletesen.

Riemann–Lebesgue-lemma

1. Ha $f \in L_2(-\pi, \pi)$, akkor $a_n \to 0$ és $b_n \to 0$.
2. Ha $f \in L_1(a, b)$, $-\infty \leq a \leq \alpha < \beta \leq b \leq \infty$, akkor $\mu \to \infty$ esetén

$$\int_\alpha^\beta f(x)\sin(\mu x)dx \to 0 \quad \text{és} \quad \int_\alpha^\beta f(x)\cos(\mu x)dx \to 0$$

a határokra nézve egyenletesen.

3. Ha $f \in L_1(-\pi, \pi)$ és $f \in V(-\pi, \pi)$, akkor $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ és $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Riemann–Lebesgue-lemma

1. Ha $f \in L_2(-\pi, \pi)$, akkor $a_n \to 0$ és $b_n \to 0$.
2. Ha $f \in L_1(a, b)$, $-\infty \leq a \leq \alpha < \beta \leq b \leq \infty$, akkor $\mu \to \infty$ esetén

$$\int_\alpha^\beta f(x)\sin(\mu x)dx \to 0 \quad \text{és} \quad \int_\alpha^\beta f(x)\cos(\mu x)dx \to 0$$

a határokra nézve egyenletesen.

3. Ha $f \in L_1(-\pi, \pi)$ és $f \in V(-\pi, \pi)$, akkor $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ és $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ez általában nem javítható, hiszen $\frac{\pi - x}{2} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ ha $x \in (0, 2\pi)$ (valójában egyenlőek).

Riemann–Lebesgue-lemma

1. Ha $f \in L_2(-\pi, \pi)$, akkor $a_n \to 0$ és $b_n \to 0$.
2. Ha $f \in L_1(a, b)$, $-\infty \le a \le \alpha < \beta \le b \le \infty$, akkor $\mu \to \infty$ esetén

$$\int_\alpha^\beta f(x)\sin(\mu x)dx \to 0 \quad \text{és} \quad \int_\alpha^\beta f(x)\cos(\mu x)dx \to 0$$

   a határokra nézve egyenletesen.
3. Ha $f \in L_1(-\pi, \pi)$ és $f \in V(-\pi, \pi)$, akkor $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ és $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Ez általában nem javítható, hiszen $\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ ha $x \in (0, 2\pi)$ (valójában egyenlőek).
4. Ha $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ és $b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (például $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$), a Fourier-sor konvergenciája egyenletes.

Riemann–Lebesgue-lemma

1. Ha $f \in L_2(-\pi,\pi)$, akkor $a_n \to 0$ és $b_n \to 0$.
2. Ha $f \in L_1(a,b)$, $-\infty \le a \le \alpha < \beta \le b \le \infty$, akkor $\mu \to \infty$ esetén
$$\int_\alpha^\beta f(x)\sin(\mu x)dx \to 0 \quad \text{és} \quad \int_\alpha^\beta f(x)\cos(\mu x)dx \to 0$$
a határokra nézve egyenletesen.
3. Ha $f \in L_1(-\pi,\pi)$ és $f \in V(-\pi,\pi)$, akkor $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ és $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
Ez általában nem javítható, hiszen $\frac{\pi-x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ ha $x \in (0,2\pi)$ (valójában egyenlőek).
4. Ha $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ és $b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (például $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$), a Fourier-sor konvergenciája egyenletes.

Dirichlet-féle magfüggvény és formula

$$S_n f(x) = (f * D_n)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt, \text{ ahol}$$

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t}.$$

$$\int_0^{\pi} D_n(t) dt = \frac{\pi}{2}, \text{ viszont } \forall 0 < \delta \leq \pi \text{ esetén } \int_{\delta}^{\pi} D_n(t) dt \to 0.$$

Dirichlet-féle magfüggvény és formula

$$S_n f(x) = (f * D_n)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt, \text{ ahol}$$

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}.$$

$$\int_0^{\pi} D_n(t)dt = \frac{\pi}{2}, \text{ viszont } \forall 0 < \delta \le \pi \text{ esetén } \int_{\delta}^{\pi} D_n(t)dt \to 0.$$

Trigonometrikus Fourier-sor

Dirichlet-féle képletek (a Dirichlet-féle magfüggvényre)

1. $$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x-t) + f(x+t)) D_n(t) dt,$$

2. $$S_n f(x) - c = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x-t) + f(x+t) - 2c) D_n(t) dt,$$

Dirichlet-féle képletek (a Dirichlet-féle magfüggvényre)

1. $$S_nf(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x-t)+f(x+t))D_n(t)dt,$$

2. $$S_nf(x) - c = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x-t)+f(x+t)-2c)D_n(t)dt,$$

3. Legyen $\phi_x(t) = f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$. Ekkor
$$S_nf(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \phi_x(t)D_n(t)dt.$$

Dirichlet-féle képletek (a Dirichlet-féle magfüggvényre)

1. $$S_nf(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x-t)+f(x+t))D_n(t)dt,$$

2. $$S_nf(x) - c = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x-t)+f(x+t)-2c)D_n(t)dt,$$

3. Legyen $\phi_x(t) = f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$. Ekkor
$$S_nf(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \phi_x(t)D_n(t)dt.$$

Első Riemann-féle lokalizációs tétel

Ha $f \in L_1(-\pi,\pi)$ és $f(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$ esetén, akkor $\forall x \in (a,b)$-ra $S_n f(x) \to 0$, valamint a konvergencia $\forall (a+\delta, b-\delta) \subset (a,b)$ intervallumon egyenletes.

Második Riemann-féle lokalizációs tétel

Ha $f, g \in L_1(-\pi,\pi)$ és $f(x) = g(x)$ $\forall x \in (a,b)$ esetén, akkor Fourier-soraik (a,b)-ben ekvikonvergensek, valamint az ekvikonvergencia $\forall (a+\delta, b-\delta) \subset (a,b)$ intervallumon egyenletes.

Első Riemann-féle lokalizációs tétel

Ha $f \in L_1(-\pi, \pi)$ és $f(x) = 0$ $\forall x \in (a, b)$ esetén, akkor $\forall x \in (a, b)$-ra $S_n f(x) \to 0$, valamint a konvergencia $\forall (a + \delta, b - \delta) \subset (a, b)$ intervallumon egyenletes.

Második Riemann-féle lokalizációs tétel

Ha $f, g \in L_1(-\pi, \pi)$ és $f(x) = g(x)$ $\forall x \in (a, b)$ esetén, akkor Fourier-soraik (a, b)-ben ekvikonvergensek, valamint az ekvikonvergencia $\forall (a + \delta, b - \delta) \subset (a, b)$ intervallumon egyenletes.

Tehát egy függvény Fourier-sorának viselkedése egy pontban csak az adott pont környezetében felvett függvényértékektől függ.

Első Riemann-féle lokalizációs tétel

Ha $f \in L_1(-\pi, \pi)$ és $f(x) = 0$ $\forall x \in (a, b)$ esetén, akkor $\forall x \in (a, b)$-ra $S_n f(x) \to 0$, valamint a konvergencia $\forall (a + \delta, b - \delta) \subset (a, b)$ intervallumon egyenletes.

Második Riemann-féle lokalizációs tétel

Ha $f, g \in L_1(-\pi, \pi)$ és $f(x) = g(x)$ $\forall x \in (a, b)$ esetén, akkor Fourier-soraik (a, b)-ben ekvikonvergensek, valamint az ekvikonvergencia $\forall (a + \delta, b - \delta) \subset (a, b)$ intervallumon egyenletes.

Tehát egy függvény Fourier-sorának viselkedése egy pontban csak az adott pont környezetében felvett függvényértékektől függ.

Dini-féle konvergencia kritérium

Ha valamely $x \in (-\pi, \pi)$-re $\frac{\phi_x(t)}{t}$ a $t = 0$ egy környezetében integrálható, akkor $S_n f(x) \to f(x)$.

Speciálisan:

Lipschitz-féle konvergencia kritérium

Ha valamely $x \in (-\pi, \pi)$-re a $t = 0$ egy környezetében $|\phi_x(t)| \leq c|t|^\alpha$, $(0 < \alpha \leq 1)$, akkor $S_n f(x) \to f(x)$.

Dini-féle konvergencia kritérium

Ha valamely $x \in (-\pi, \pi)$-re $\frac{\phi_x(t)}{t}$ a $t = 0$ egy környezetében integrálható, akkor $S_n f(x) \to f(x)$.

Speciálisan:

Lipschitz-féle konvergencia kritérium

Ha valamely $x \in (-\pi, \pi)$-re a $t = 0$ egy környezetében $|\phi_x(t)| \leq c|t|^\alpha$, $(0 < \alpha \leq 1)$, akkor $S_n f(x) \to f(x)$.

Félérintők feltétele

Ha valamely $x \in (-\pi, \pi)$-re létezik $f(x^-)$ és $f(x^+)$, valamint léteznek a

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t}, \quad \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x^-) - f(x-t)}{t}$$

véges határértékek, akkor $S_n f(x) \to \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$.

Speciálisan:

Differenciál-feltétel

Ha valamely $x \in (-\pi, \pi)$-re $\exists f'(x)$, akkor $S_n f(x) \to f(x)$.

Félérintők feltétele

Ha valamely $x \in (-\pi, \pi)$-re létezik $f(x^-)$ és $f(x^+)$, valamint léteznek a

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)-f(x^+)}{t}, \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x^-)-f(x-t)}{t}$$

véges határértékek, akkor $S_n f(x) \to \frac{1}{2}(f(x^-)+f(x^+))$.

Speciálisan:

Differenciál-feltétel

Ha valamely $x \in (-\pi, \pi)$-re $\exists f'(x)$, akkor $S_n f(x) \to f(x)$.

Lemma: $\exists C$ (x-től és n-től független konstans), melyre $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leq C$.

Dirichlet–Jordan-tétel, 1829, 1881

Legyen $f \in L_1(-\pi, \pi)$, valamint $f \in V[a, b]$. Ekkor

1. $\forall x \in (a, b)$-re $S_n f(x) \to \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$,

Lemma: $\exists C$ (x-től és n-től független konstans), melyre $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leq C$.

Dirichlet–Jordan-tétel, 1829, 1881

Legyen $f \in L_1(-\pi, \pi)$, valamint $f \in V[a, b]$. Ekkor

1. $\forall x \in (a, b)$-re $S_n f(x) \to \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$,
2. ha még $f \in C(a, b)$ is teljesül, akkor $\forall x \in [a - \delta, b + \delta]$ $(\delta > 0)$ intervallumon egyenletesen $S_n f(x) \to f(x)$.

Lemma: $\exists C$ (x-től és n-től független konstans), melyre $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leq C$.

Dirichlet–Jordan-tétel, 1829, 1881

Legyen $f \in L_1(-\pi, \pi)$, valamint $f \in V[a, b]$. Ekkor

1. $\forall x \in (a, b)$-re $S_n f(x) \to \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$,
2. ha még $f \in C(a, b)$ is teljesül, akkor $\forall x \in [a - \delta, b + \delta]$ $(\delta > 0)$ intervallumon egyenletesen $S_n f(x) \to f(x)$.

Divergencia példák és a Luzin-sejtés

1. (Du Bois Reymond, 1876) Példa folytonos függvényre, melynek Fourier-sora egy pontban divergál.
2. Példa folytonos függvényre, melynek Fourier-sora kontinuum számosságú, bár nullmértékű ponthalmazon divergál.

Divergencia példák és a Luzin-sejtés

1. (Du Bois Reymond, 1876) Példa folytonos függvényre, melynek Fourier-sora egy pontban divergál.
2. Példa folytonos függvényre, melynek Fourier-sora kontinuum számosságú, bár nullmértékű ponthalmazon divergál.
3. (Luzin-sejtés, 1915) Nincs folytonos függvény, melynek Fourier-sora pozitív mértékű ponthalmazon divergál.

Divergencia példák és a Luzin-sejtés

1. (Du Bois Reymond, 1876) Példa folytonos függvényre, melynek Fourier-sora egy pontban divergál.
2. Példa folytonos függvényre, melynek Fourier-sora kontinuum számosságú, bár nullmértékű ponthalmazon divergál.
3. (Luzin-sejtés, 1915) Nincs folytonos függvény, melynek Fourier-sora pozitív mértékű ponthalmazon divergál.
4. (Kolmogorov, 1926) Példa $L_1(-\pi, \pi)$-beli függvényre, melynek Fourier-sora minden pontban divergens.

Divergencia példák és a Luzin-sejtés

1. (Du Bois Reymond, 1876) Példa folytonos függvényre, melynek Fourier-sora egy pontban divergál.
2. Példa folytonos függvényre, melynek Fourier-sora kontinuum számosságú, bár nullmértékű ponthalmazon divergál.
3. (Luzin-sejtés, 1915) Nincs folytonos függvény, melynek Fourier-sora pozitív mértékű ponthalmazon divergál.
4. (Kolmogorov, 1926) Példa $L_1(-\pi,\pi)$-beli függvényre, melynek Fourier-sora minden pontban divergens.
5. (Steinhaus) Példa folytonos függvényre, melynek Fourier-sora minden pontban konvergens, de egyetlen intervallumon sem egyenletesen.

Divergencia példák és a Luzin-sejtés

1. (Du Bois Reymond, 1876) Példa folytonos függvényre, melynek Fourier-sora egy pontban divergál.
2. Példa folytonos függvényre, melynek Fourier-sora kontinuum számosságú, bár nullmértékű ponthalmazon divergál.
3. (Luzin-sejtés, 1915) Nincs folytonos függvény, melynek Fourier-sora pozitív mértékű ponthalmazon divergál.
4. (Kolmogorov, 1926) Példa $L_1(-\pi, \pi)$-beli függvényre, melynek Fourier-sora minden pontban divergens.
5. (Steinhaus) Példa folytonos függvényre, melynek Fourier-sora minden pontban konvergens, de egyetlen intervallumon sem egyenletesen.

Carleson-tétel, 1966

Ha $f \in L_2(-\pi, \pi)$, akkor $S_n f(x) \to f(x)$ m. m. .

Következmény: igaz a Luzin-sejtés.

Carleson-tétel, 1966

Ha $f \in L_2(-\pi, \pi)$, akkor $S_n f(x) \to f(x)$ m. m. .

Következmény: igaz a Luzin-sejtés.

Hunt-tétel, 1968

Ha $f \in L_p(-\pi, \pi)$ $(p > 1)$, akkor $S_n f(x) \to f(x)$ m. m. .

Carleson-tétel, 1966

Ha $f \in L_2(-\pi, \pi)$, akkor $S_n f(x) \to f(x)$ m. m. .

Következmény: igaz a Luzin-sejtés.

Hunt-tétel, 1968

Ha $f \in L_p(-\pi, \pi)$ $(p > 1)$, akkor $S_n f(x) \to f(x)$ m. m. .

Legyen $-1 < x < 1$. Ismert, hogy $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}$. Leibniz: $x \to 1^-$ miatt $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \overset{?}{=} \frac{1}{2}$ (valójában az összeg divergens).

Ráadásul $1 - x^2 + x^3 - x^5 + \cdots = \frac{1-x^2}{1-x^3} = \frac{1+x}{1+x+x^2} \xrightarrow{x \to 1^-} \frac{2}{3}$.

Legyen $-1 < x < 1$. Ismert, hogy $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}$. Leibniz: $x \to 1^-$ miatt $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \overset{?}{=} \frac{1}{2}$ (valójában az összeg divergens).
Ráadásul $1 - x^2 + x^3 - x^5 + \cdots = \frac{1-x^2}{1-x^3} = \frac{1+x}{1+x+x^2} \xrightarrow{x \to 1^-} \frac{2}{3}$.

Sorok összegzése

Legyen a_n valós vagy komplex számsorozat, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ és $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k$.
Ha $\exists \lim_{n\to\infty} s_n$, akkor $\exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n$, valamint a határértékek megegyeznek.

Legyen $-1 < x < 1$. Ismert, hogy $1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}$. Leibniz: $x \to 1^-$ miatt $1 - 1 + 1 - 1 + \dots \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}$ (valójában az összeg divergens).
Ráadásul $1 - x^2 + x^3 - x^5 + \dots = \frac{1-x^2}{1-x^3} = \frac{1+x}{1+x+x^2} \xrightarrow{x \to 1^-} \frac{2}{3}$.

Sorok összegzése

Legyen a_n valós vagy komplex számsorozat, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ és $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k$.
Ha $\exists \lim_{n\to\infty} s_n$, akkor $\exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n$, valamint a határértékek megegyeznek.

A tétel megfordítása nem igaz. Példa!

Legyen $-1 < x < 1$. Ismert, hogy $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}$. Leibniz: $x \to 1^-$ miatt $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}$ (valójában az összeg divergens).
Ráadásul $1 - x^2 + x^3 - x^5 + \cdots = \frac{1-x^2}{1-x^3} = \frac{1+x}{1+x+x^2} \xrightarrow{x \to 1^-} \frac{2}{3}$.

Sorok összegzése

Legyen a_n valós vagy komplex számsorozat, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ és $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k$.
Ha $\exists \lim_{n\to\infty} s_n$, akkor $\exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n$, valamint a határértékek megegyeznek.

A tétel megfordítása nem igaz. Példa!

Fejér-féle magfüggvény és formula

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt, \text{ ahol}$$

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \geq 0.$$

$\int_0^{\pi} K_n(t)dt = \frac{\pi}{2}$, viszont $\forall 0 < \delta \leq \pi$ esetén $\int_{\delta}^{\pi} K_n(t)dt \to 0$.

Fejér-féle magfüggvény és formula

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt, \text{ ahol}$$

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \geq 0.$$

$\int_0^{\pi} K_n(t)dt = \frac{\pi}{2}$, viszont $\forall 0 < \delta \leq \pi$ esetén $\int_{\delta}^{\pi} K_n(t)dt \to 0$.

Sőt fennáll $M_n(\delta) = \max\limits_{0<\delta\leq t\leq\pi} K_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ is.

Fejér-féle magfüggvény és formula

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt, \text{ ahol}$$

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \geq 0.$$

$\int_0^{\pi} K_n(t)dt = \frac{\pi}{2}$, viszont $\forall 0 < \delta \leq \pi$ esetén $\int_{\delta}^{\pi} K_n(t)dt \to 0$.

Sőt fennáll $M_n(\delta) = \max\limits_{0<\delta\leq t\leq\pi} K_n(t) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ is.

Az ezzel analóg állítás $D_n(t)$-re nem igaz!

Fejér-féle magfüggvény és formula

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt, \text{ ahol}$$

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \geq 0.$$

$\int_0^\pi K_n(t)dt = \frac{\pi}{2}$, viszont $\forall 0 < \delta \leq \pi$ esetén $\int_\delta^\pi K_n(t)dt \to 0$.

Sőt fennáll $M_n(\delta) = \max\limits_{0<\delta\leq t\leq\pi} K_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ is.

Az ezzel analóg állítás $D_n(t)$-re nem igaz!

Dirichlet-féle képletek (a Fejér-féle magfüggvényre)

1. $$\sigma_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x-t) + f(x+t)) K_n(t) dt,$$

2. $$\sigma_n f(x) - c = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x-t) + f(x+t) - 2c) K_n(t) dt,$$

Dirichlet-féle képletek (a Fejér-féle magfüggvényre)

1. $$\sigma_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x-t) + f(x+t)) K_n(t)\,dt,$$

2. $$\sigma_n f(x) - c = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x-t) + f(x+t) - 2c) K_n(t)\,dt,$$

3. $$\sigma_n f(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \phi_x(t) K_n(t)\,dt.$$

Dirichlet-féle képletek (a Fejér-féle magfüggvényre)

1.
$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x-t)+f(x+t))K_n(t)dt,$$

2.
$$\sigma_n f(x) - c = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x-t)+f(x+t)-2c)K_n(t)dt,$$

3.
$$\sigma_n f(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\phi_x(t)K_n(t)dt.$$

Korlátos függvény Fejér-közepe

Ha $\forall x$-re $m \leq f(x) \leq M$, akkor $m \leq \sigma_n f(x) \leq M$ teljesül $\forall x$-re és $\forall n \in \mathbb{N}$-re.

$S_n f(x)$-re az analóg állítás nem igaz! (Lásd pl.: Gibbs-jelenség!)

Korlátos függvény Fejér-közepe

Ha $\forall x$-re $m \leq f(x) \leq M$, akkor $m \leq \sigma_n f(x) \leq M$ teljesül $\forall x$-re és $\forall n \in \mathbb{N}$-re.

$S_n f(x)$-re az analóg állítás nem igaz! (Lásd pl.: Gibbs-jelenség!)

Fejér tétele, 1900

1. Ha valamely x-re létezik $f(x^-)$ és $f(x^+)$, akkor $\sigma_n f(x) \to \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$.
2. Ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor $\sigma_n f(x) \to f(x)$ egyenletesen $[a, b]$-n.

Fejér tétele, 1900

1. Ha valamely x-re létezik $f(x^-)$ és $f(x^+)$, akkor $\sigma_n f(x) \to \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$.
2. Ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor $\sigma_n f(x) \to f(x)$ egyenletesen $[a, b]$-n.

A Fejér-tétel egy következménye

Ha az $S_n f(x)$ konvergens egy olyan x_0 helyen, melyben $f(x_0^+)$ és $f(x_0^-)$ is léteznek, akkor $S_n f(x_0) \to \frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$.

Fejér tétele, 1900

1. Ha valamely x-re létezik $f(x^-)$ és $f(x^+)$, akkor $\sigma_n f(x) \to \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$.
2. Ha f folytonos az $[a,b]$ intervallumon, akkor $\sigma_n f(x) \to f(x)$ egyenletesen $[a,b]$-n.

A Fejér-tétel egy következménye

Ha az $S_n f(x)$ konvergens egy olyan x_0 helyen, melyben $f(x_0^+)$ és $f(x_0^-)$ is léteznek, akkor $S_n f(x_0) \to \frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$.

Fejér-féle approximációs tétel

Minden 2π szerint periodikus, folytonos függvény tetszés szerinti pontossággal egyenletesen megközelíthető Fejér-közepeivel.

Weierstrass második approximációs tétele

Minden 2π szerint periodikus, folytonos függvény tetszés szerinti pontossággal megközelíthető trigonometrikus polinomokkal.

Fejér-féle approximációs tétel

Minden 2π szerint periodikus, folytonos függvény tetszés szerinti pontossággal egyenletesen megközelíthető Fejér-közepeivel.

Weierstrass második approximációs tétele

Minden 2π szerint periodikus, folytonos függvény tetszés szerinti pontossággal megközelíthető trigonometrikus polinomokkal.

Sőt úgy is, hogy a konvergencia egyenletes.

Trigonometrikus Fourier-sor

Fejér-féle approximációs tétel

Minden 2π szerint periodikus, folytonos függvény tetszés szerinti pontossággal egyenletesen megközelíthető Fejér-közepeivel.

Weierstrass második approximációs tétele

Minden 2π szerint periodikus, folytonos függvény tetszés szerinti pontossággal megközelíthető trigonometrikus polinomokkal.

Sőt úgy is, hogy a konvergencia egyenletes.

Legesgue tétele a Fejér-közepek konvergenciájáról

Ha $f \in L_1(-\pi, \pi)$, akkor $\lim_{n\to\infty} \sigma_n f(x) = f(x)$ m. m. .

Fejér-féle approximációs tétel

Minden 2π szerint periodikus, folytonos függvény tetszés szerinti pontossággal egyenletesen megközelíthető Fejér-közepeivel.

Weierstrass második approximációs tétele

Minden 2π szerint periodikus, folytonos függvény tetszés szerinti pontossággal megközelíthető trigonometrikus polinomokkal.

Sőt úgy is, hogy a konvergencia egyenletes.

Legesgue tétele a Fejér-közepek konvergenciájáról

Ha $f \in L_1(-\pi, \pi)$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n f(x) = f(x)$ m. m. .

Ha $f(x)$ nem periodikus:

Fourier-transzformált

Ha $f \in L_1(-\infty, \infty)$, akkor legyen $\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt$.

Fourier-transzformált tulajdonságai

1. Linearitás: Ha $h(x) = af(x) + bg(x)$, akkor $\hat{h}(x) = a\hat{f}(x) + b\hat{g}(x)$.

Ha $f(x)$ nem periodikus:

Fourier-transzformált

Ha $f \in L_1(-\infty, \infty)$, akkor legyen $\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt$.

Fourier-transzformált tulajdonságai

1. Linearitás: Ha $h(x) = af(x) + bg(x)$, akkor $\hat{h}(x) = a\hat{f}(x) + b\hat{g}(x)$.
2. Konvolúciós tétel: $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$, ahol $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$.

Ha $f(x)$ nem periodikus:

Fourier-transzformált

Ha $f \in L_1(-\infty, \infty)$, akkor legyen $\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt$.

Fourier-transzformált tulajdonságai

1. Linearitás: Ha $h(x) = af(x) + bg(x)$, akkor $\hat{h}(x) = a\hat{f}(x) + b\hat{g}(x)$.
2. Konvolúciós tétel: $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$, ahol $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$.
3. Invertálhatóság: Ha $\hat{f} \in L_1(-\infty, \infty)$ is teljesül, $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{ixt}dt$.

Trigonometrikus Fourier-sor

Ha $f(x)$ nem periodikus:

Fourier-transzformált

Ha $f \in L_1(-\infty, \infty)$, akkor legyen $\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt$.

Fourier-transzformált tulajdonságai

1. Linearitás: Ha $h(x) = af(x) + bg(x)$, akkor $\hat{h}(x) = a\hat{f}(x) + b\hat{g}(x)$.
2. Konvolúciós tétel: $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$, ahol
   $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$.
3. Invertálhatóság: Ha $\hat{f} \in L_1(-\infty, \infty)$ is teljesül, $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{ixt}dt$.

Hang, kép (2 dimenziós változat) szűrése.

Trigonometrikus Fourier-sor

Ha $f(x)$ nem periodikus:

Fourier-transzformált

Ha $f \in L_1(-\infty, \infty)$, akkor legyen $\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt$.

Fourier-transzformált tulajdonságai

1. Linearitás: Ha $h(x) = af(x) + bg(x)$, akkor $\hat{h}(x) = a\hat{f}(x) + b\hat{g}(x)$.
2. Konvolúciós tétel: $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$, ahol $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$.
3. Invertálhatóság: Ha $\hat{f} \in L_1(-\infty, \infty)$ is teljesül, $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{ixt}dt$.

Hang, kép (2 dimenziós változat) szűrése.

Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT)

Legyenek $f_0, \ldots, f_{N-1}$ komplex számok. $F_n = \sum_{t=0}^{N-1} f_t e^{-2\pi i \frac{n}{N} t}$, ahol $n = 0, \ldots, N-1$.

Inverz transzformáció: $f_n = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} F_t e^{2\pi i \frac{n}{N} t}$, ahol $n = 0, \ldots, N-1$.

Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT)

Legyenek $f_0, \ldots, f_{N-1}$ komplex számok. $F_n = \sum_{t=0}^{N-1} f_t e^{-2\pi i \frac{n}{N} t}$, ahol $n = 0, \ldots, N-1$.

Inverz transzformáció: $f_n = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} F_t e^{2\pi i \frac{n}{N} t}$, ahol $n = 0, \ldots, N-1$.

DFT: N^2 szorzás $\to$ Gyors Fourier-transzformáció (FFT, Cooley-Tukey, 1965): $N \log_2 N$ szorzás.

Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT)

Legyenek $f_0, \ldots, f_{N-1}$ komplex számok. $F_n = \sum_{t=0}^{N-1} f_t e^{-2\pi i \frac{n}{N} t}$, ahol $n = 0, \ldots, N-1$.

Inverz transzformáció: $f_n = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} F_t e^{2\pi i \frac{n}{N} t}$, ahol $n = 0, \ldots, N-1$.

DFT: N^2 szorzás $\to$ Gyors Fourier-transzformáció (FFT, Cooley-Tukey, 1965): $N \log_2 N$ szorzás.

Legendre-polinomok

Tekintsük az $L_2[-1,1]$ Hilbert-teret és a $1, x, x^2, \dots$ polinomsorozatot. Ebből a sorozatból a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással nyert $p_0, p_1, p_2, \dots$ sorozat tagjait Legendre-polinomoknak nevezünk.

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad p_2(x) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}, \dots$$

Rodrigues-formula

$$p_n(x) = C_n \left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$$

Ha $C_n = \frac{1}{(2n)!!}$, akkor $P_n(1) = 1$ és

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \dots$$

Legendre-polinomok

Tekintsük az $L_2[-1,1]$ Hilbert-teret és a $1, x, x^2, \dots$ polinomsorozatot. Ebből a sorozatból a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással nyert $p_0, p_1, p_2, \dots$ sorozat tagjait Legendre-polinomoknak nevezünk.

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad p_2(x) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}, \dots$$

Rodrigues-formula

$$p_n(x) = C_n \left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$$

Ha $C_n = \frac{1}{(2n)!!}$, akkor $P_n(1) = 1$ és

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \dots$$

A Legendre-polinomok néhány tulajdonsága

1. A Legendre-polinom minden nem negatív egész n esetén páros, illetve páratlan függvény aszerint, hogy n páros, vagy páratlan.
2. A Legendre-polinomoknak minden nemnegatív egész n esetén a $(-1,1)$ intervallumban n különböző valós gyöke van.

A Legendre-polinomok néhány tulajdonsága

1. A Legendre-polinom minden nem negatív egész n esetén páros, illetve páratlan függvény aszerint, hogy n páros, vagy páratlan.
2. A Legendre-polinomoknak minden nemnegatív egész n esetén a $(-1, 1)$ intervallumban n különböző valós gyöke van.
3. A Legendre-polinomok sorozata az $L_2[-1, 1]$ Hilbert-térben zárt ortonormált sorozat.

A Legendre-polinomok néhány tulajdonsága

1. A Legendre-polinom minden nem negatív egész n esetén páros, illetve páratlan függvény aszerint, hogy n páros, vagy páratlan.
2. A Legendre-polinomoknak minden nemnegatív egész n esetén a $(-1, 1)$ intervallumban n különböző valós gyöke van.
3. A Legendre-polinomok sorozata az $L_2[-1, 1]$ Hilbert-térben zárt ortonormált sorozat.

Következmény: Bármely $L_2[-1, 1]$-beli $f(x)$ függvény Legendre-sora normában konvergál $f(x)$-hez.

A Legendre-polinomok néhány tulajdonsága

1. A Legendre-polinom minden nem negatív egész n esetén páros, illetve páratlan függvény aszerint, hogy n páros, vagy páratlan.
2. A Legendre-polinomoknak minden nemnegatív egész n esetén a $(-1, 1)$ intervallumban n különböző valós gyöke van.
3. A Legendre-polinomok sorozata az $L_2[-1, 1]$ Hilbert-térben zárt ortonormált sorozat.

Következmény: Bármely $L_2[-1, 1]$-beli $f(x)$ függvény Legendre-sora normában konvergál $f(x)$-hez.

Súlyfüggvény

Legyen $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $\rho(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ és $0 < \rho(x) < K$ m. m. . Akkor mondjuk, hogy $f \in L_2^{(\rho)}[a,b]$, ha $f(x)\sqrt{\rho(x)} \in L_2[a,b]$. Ha $\forall n \in \mathbb{N}$-re $x^n \in L_2^{(\rho)}[a,b]$, $\rho(x)$-et súlyfüggvénynek nevezzük $[a,b]$-n.

Súlyfüggvényre nézve ortonormált polinomsorozat

Legyen $\rho(x)$ súlyfüggvény $[a,b]$-n, $p_n(x)$ pedig pontosan n-edfokú algebrai polinom. Ha $\forall k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$-re teljesül $\int\limits_a^b x^k p_n(x)\rho(x)dx = 0$, a $p_n(x)$ polinomsorozatot ortogonálisnak nevezzük a $\rho(x)$ súlyfüggvényre nézve $[a,b]$-n. Amennyiben $\forall n \in \mathbb{N}$-re $\int\limits_a^b p_n^2(x)\rho(x)dx = 1$ is igaz, súlyfüggvényre nézve ortonormált polinomsorozatról beszélünk.

Súlyfüggvény

Legyen $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $\rho(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ és $0 < \rho(x) < K$ m. m. . Akkor mondjuk, hogy $f \in L_2^{(\rho)}[a,b]$, ha $f(x)\sqrt{\rho(x)} \in L_2[a,b]$. Ha $\forall n \in \mathbb{N}$-re $x^n \in L_2^{(\rho)}[a,b]$, $\rho(x)$-et súlyfüggvénynek nevezzük $[a,b]$-n.

Súlyfüggvényre nézve ortonormált polinomsorozat

Legyen $\rho(x)$ súlyfüggvény $[a,b]$-n, $p_n(x)$ pedig pontosan n-nedfokú algebrai polinom. Ha $\forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}$-re teljesül $\int\limits_a^b x^k p_n(x)\rho(x)dx = 0$, a $p_n(x)$ polinomsorozatot ortogonálisnak nevezzük a $\rho(x)$ súlyfüggvényre nézve $[a,b]$-n. Amennyiben $\forall n \in \mathbb{N}$-re $\int\limits_a^b p_n^2(x)\rho(x)dx = 1$ is igaz, súlyfüggvényre nézve ortonormált polinomsorozatról beszélünk.

Elégséges feltétel ortonormált polinomsorozat zártságára $L_2^{(\rho)}[a,b]$-ben

Legyen $\rho(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan súlyfüggvény, melyre valamely M valós szám mellett az $e^{|Mx|}\rho(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható. Ekkor a $\rho(x)$ súlyfüggvényre nézve ortonormált polinomsorozat zárt az $L_2^{(\rho)}[a,b]$ Hilbert-térben.

Klasszikus ortogonális polinomok

1. Legendre: $a = -1, \; b = 1, \; \rho(x) = 1.$
2. Elsőfajú Csebisev: $a = -1, \; b = 1, \; \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Klasszikus ortogonális polinomok

1. Legendre: $a = -1, \ b = 1, \ \rho(x) = 1.$
2. Elsőfajú Csebisev: $a = -1, \ b = 1, \ \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
3. Másodfajú Csebisev: $a = -1, \ b = 1, \ \rho(x) = \sqrt{1 - x^2}.$

Klasszikus ortogonális polinomok

1. Legendre: $a = -1,\ b = 1,\ \rho(x) = 1$.
2. Elsőfajú Csebisev: $a = -1,\ b = 1,\ \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. Másodfajú Csebisev: $a = -1,\ b = 1,\ \rho(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
4. Jacobi: $a = -1,\ b = 1,\ \rho(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta,\ -1 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Klasszikus ortogonális polinomok

1. Legendre: $a = -1,\ b = 1,\ \rho(x) = 1.$
2. Elsőfajú Csebisev: $a = -1,\ b = 1,\ \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
3. Másodfajú Csebisev: $a = -1,\ b = 1,\ \rho(x) = \sqrt{1-x^2}.$
4. Jacobi: $a = -1,\ b = 1,\ \rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta,\ -1 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
5. Laguerre: $a = 0,\ b = \infty,\ \rho(x) = x^\alpha e^{-x},\ -1 < \alpha \in \mathbb{R}.$

Klasszikus ortogonális polinomok

1. Legendre: $a = -1,\ b = 1,\ \rho(x) = 1.$
2. Elsőfajú Csebisev: $a = -1,\ b = 1,\ \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
3. Másodfajú Csebisev: $a = -1,\ b = 1,\ \rho(x) = \sqrt{1-x^2}.$
4. Jacobi: $a = -1,\ b = 1,\ \rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta,\ -1 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
5. Laguerre: $a = 0,\ b = \infty,\ \rho(x) = x^\alpha e^{-x},\ -1 < \alpha \in \mathbb{R}.$
6. Hermite: $a = -\infty,\ b = \infty,\ \rho(x) = e^{-x^2}.$

Klasszikus ortogonális polinomok

1. Legendre: $a=-1,\ b=1,\ \rho(x)=1.$
2. Elsőfajú Csebisev: $a=-1,\ b=1,\ \rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
3. Másodfajú Csebisev: $a=-1,\ b=1,\ \rho(x)=\sqrt{1-x^2}.$
4. Jacobi: $a=-1,\ b=1,\ \rho(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta,\ -1<\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$
5. Laguerre: $a=0,\ b=\infty,\ \rho(x)=x^\alpha e^{-x},\ -1<\alpha\in\mathbb{R}.$
6. Hermite: $a=-\infty,\ b=\infty,\ \rho(x)=e^{-x^2}.$

Mind zártak a megfelelő Hilbert-térben.

Klasszikus ortogonális polinomok

1. Legendre: $a = -1,\ b = 1,\ \rho(x) = 1.$
2. Elsőfajú Csebisev: $a = -1,\ b = 1,\ \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
3. Másodfajú Csebisev: $a = -1,\ b = 1,\ \rho(x) = \sqrt{1-x^2}.$
4. Jacobi: $a = -1,\ b = 1,\ \rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta,\ -1 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
5. Laguerre: $a = 0,\ b = \infty,\ \rho(x) = x^\alpha e^{-x},\ -1 < \alpha \in \mathbb{R}.$
6. Hermite: $a = -\infty,\ b = \infty,\ \rho(x) = e^{-x^2}.$

Mind zártak a megfelelő Hilbert-térben.

Elsőfajú Csebisev-polinomok tulajdonságai

1. $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$
2. $T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$

Elsőfajú Csebisev-polinomok tulajdonságai

1. $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$
2. $T_0(x) = 1, \;\; T_1(x) = x$
3. $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$

Elsőfajú Csebisev-polinomok tulajdonságai

1. $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$
2. $T_0(x) = 1, \ T_1(x) = x$
3. $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$
4. Főegyütthatója $n = 1, 2, \ldots$ esetén 2^{n-1}. Legyen $t_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$.

Elsőfajú Csebisev-polinomok tulajdonságai

1. $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$
2. $T_0(x) = 1, \; T_1(x) = x$
3. $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$
4. Főegyütthatója $n = 1, 2, \ldots$ esetén 2^{n-1}. Legyen $t_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$.
5. Gyökei: $x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ Csebisev-alappontok (interpoláció!).

Elsőfajú Csebisev-polinomok tulajdonságai

1. $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$
2. $T_0(x) = 1, \;\; T_1(x) = x$
3. $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$
4. Főegyütthatója $n = 1, 2, \ldots$ esetén 2^{n-1}. Legyen $t_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$.
5. Gyökei: $x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ Csebisev-alappontok (interpoláció!).
6. Minden 1-főegyütthatós, $p_n(x) : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ polinomra, melynek n gyöke van $[-1, 1]$-en $\frac{1}{2^{n-1}} = \|t_n\|_\infty \leq \|p_n\|_\infty$.

Elsőfajú Csebisev-polinomok tulajdonságai

1. $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$
2. $T_0(x) = 1,\ \ T_1(x) = x$
3. $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$
4. Főegyütthatója $n = 1, 2, \ldots$ esetén 2^{n-1}. Legyen $t_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$.
5. Gyökei: $x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n},\ \ k = 0, 1, \ldots, n-1$ Csebisev-alappontok (interpoláció!).
6. Minden 1-főegyütthatós, $p_n(x) : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ polinomra, melynek n gyöke van $[-1, 1]$-en $\frac{1}{2^{n-1}} = \|t_n\|_\infty \leq \|p_n\|_\infty$.

Haar-rendszer (Haar Alfréd, 1909)

Legyen $\chi_0^{(0)} = 1$, valamint $n = 0, 1, \dots$ és $1 \leq k \leq 2^n$.

$$\chi_n^{(k)} = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \text{ha } \frac{k-1}{2^n} < x < \frac{k-1/2}{2^n}, \\ -2^{\frac{n}{2}}, & \text{ha } \frac{k-1/2}{2^n} < x < \frac{k}{2^n}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A Haar-rendszer teljes ortonormált sorozat $L_2[0,1]$-ben, sőt minden folytonos függvényre vonatkozó Fourier-sora egyenletesen konvergál a függvényhez.

További ortogonális rendszerek

Haar-rendszer (Haar Alfréd, 1909)

Legyen $\chi_0^{(0)} = 1$, valamint $n = 0, 1, \ldots$ és $1 \le k \le 2^n$.

$$\chi_n^{(k)} = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \text{ha } \frac{k-1}{2^n} < x < \frac{k-1/2}{2^n}, \\ -2^{\frac{n}{2}}, & \text{ha } \frac{k-1/2}{2^n} < x < \frac{k}{2^n}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A Haar-rendszer teljes ortonormált sorozat $L_2[0,1]$-ben, sőt minden folytonos függvényre vonatkozó Fourier-sora egyenletesen konvergál a függvényhez.

További ortogonális rendszerek

Rademacher-rendszer (Rademacher, 1922)

Legyen $r_n(x) = \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi x))$, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $x \in [0, 1]$.

A Rademacher-rendszer ortonormált $L_2[0, 1]$-ben, de nem teljes. (Walsh!)

Rademacher-rendszer (Rademacher, 1922)

Legyen $r_n(x) = \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi x))$, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $x \in [0,1]$.

A Rademacher-rendszer ortonormált $L_2[0,1]$-ben, de nem teljes. (Walsh!)

Rademacher–Hincsin–Kolmogorov-tétel

Legyen c_n valós számsorozat. A $\sum_{k=1}^{n} c_k r_k(x)$ függvénysor akkor és csak akkor konvergens majdnem mindenütt, ha a $\sum_{k=1}^{n} c_k^2$ sor konvergens.

További ortogonális rendszerek

Rademacher-rendszer (Rademacher, 1922)

Legyen $r_n(x) = \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi x))$, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $x \in [0, 1]$.

A Rademacher-rendszer ortonormált $L_2[0, 1]$-ben, de nem teljes. (Walsh!)

Rademacher–Hincsin–Kolmogorov-tétel

Legyen c_n valós számsorozat. A $\sum_{k=1}^{n} c_k r_k(x)$ függvénysor akkor és csak akkor konvergens majdnem mindenütt, ha a $\sum_{k=1}^{n} c_k^2$ sor konvergens.

Kolmogorov-tétel

Legyen c_n valós számsorozat. A $\sum_{k=1}^{n} \pm c_k$ (az előjelek véletlenszerűek) sor $\sum_{k=1}^{n} c_k^2 < \infty$ esetén konvergens, egyébként divergens 1 valószínűséggel.

További ortogonális rendszerek

Rademacher-rendszer (Rademacher, 1922)

Legyen $r_n(x) = \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi x))$, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $x \in [0,1]$.

A Rademacher-rendszer ortonormált $L_2[0,1]$-ben, de nem teljes. (Walsh!)

Rademacher–Hincsin–Kolmogorov-tétel

Legyen c_n valós számsorozat. A $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k r_k(x)$ függvénysor akkor és csak akkor konvergens majdnem mindenütt, ha a $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2$ sor konvergens.

Kolmogorov-tétel

Legyen c_n valós számsorozat. A $\sum\limits_{k=1}^{n} \pm c_k$ (az előjelek véletlenszerűek) sor $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 < \infty$ esetén konvergens, egyébként divergens 1 valószínűséggel.

Legyen $X = L_1[0,1)$, vagyis $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ eleme a térnek, ha $\int_0^1 |f(x)|dx < \infty$. Legyen

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Írjuk fel $n \in \mathbb{N}$-et és $x \in [0,1)$-et kettes számrendszerben:

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k, \quad n_k \in \{0,1\}, \ k \in \mathbb{N}$$

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 2^{-k-1}, \quad x_k \in \{0,1\}, \ k \in \mathbb{N}$$

Legyen $X = L_1[0,1)$, vagyis $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ eleme a térnek, ha $\int_0^1 |f(x)|dx < \infty$. Legyen

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Írjuk fel $n \in \mathbb{N}$-et és $x \in [0,1)$-et kettes számrendszerben:

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k, \quad n_k \in \{0,1\}, \ k \in \mathbb{N}$$

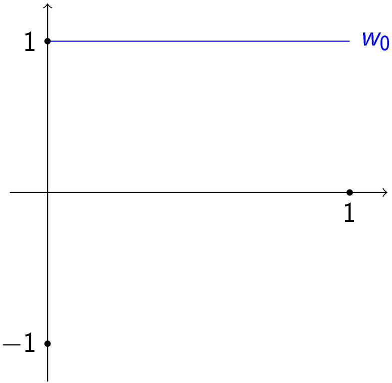
$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 2^{-k-1}, \quad x_k \in \{0,1\}, \ k \in \mathbb{N}$$

Az $L_1[0,1)$ Hilbert-térben teljes ortonormált rendszer a következő:

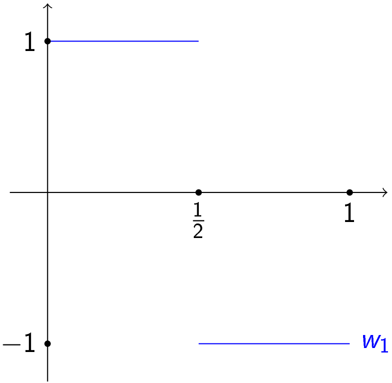
Walsh–Paley-rendszer (Walsh, 1923; Paley, 1932)

$$w_n(x) = (-1)^{\sum_{k=0}^{\infty} x_k n_k}, \quad n \in \mathbb{N}$$

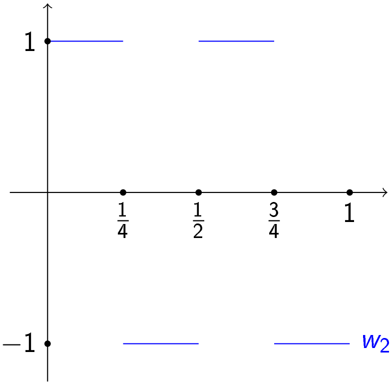
A rendszer függvényei:



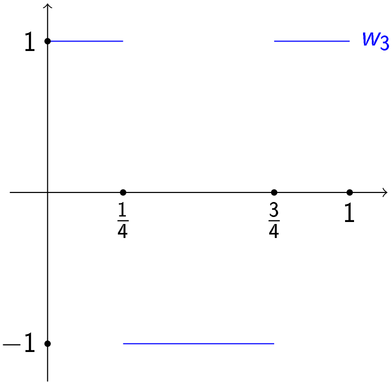
A rendszer függvényei:



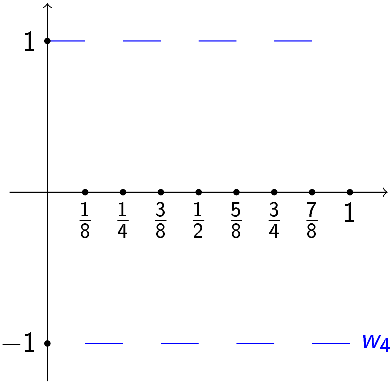
A rendszer függvényei:



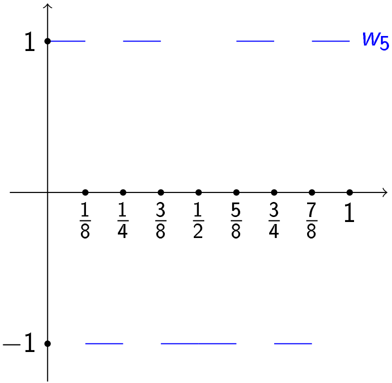
A rendszer függvényei:



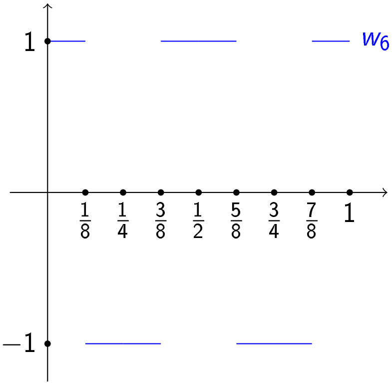
A rendszer függvényei:



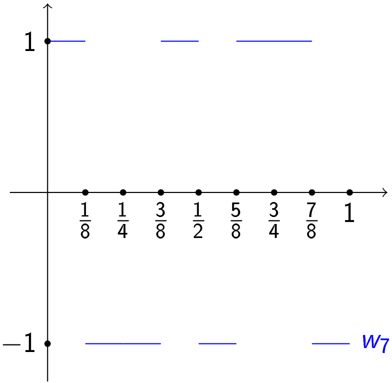
A rendszer függvényei:



A rendszer függvényei:



A rendszer függvényei:



Dirichlet-féle magfüggvény

$$S_n f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) w_k(x) = (f * D_n)(x) = \int_0^1 f(x-t) D_n(t) dt, \text{ ahol}$$

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k(x).$$

Paley-lemma

$$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n & , \text{ha } x < 2^{-n} \\ 0 & , \text{egyébként.} \end{cases}$$

Dirichlet-féle magfüggvény

$$S_nf(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)w_k(x) = (f * D_n)(x) = \int_0^1 f(x-t)D_n(t)dt, \text{ ahol}$$

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k(x).$$

Paley-lemma

$$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n & , \text{ ha } x < 2^{-n} \\ 0 & , \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Az L_2-beli normakonvergencia természetesen itt is igaz.

Példák további konvergencia tételekre

1. Onneweer (1970): Ha f folytonos és korlátos változású $[0,1)$-en, akkor $\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = f(x) \quad \forall x \in [0,1)$-re. (A konvergencia egyenletes.)

Az L_2-beli normakonvergencia természetesen itt is igaz.

Példák további konvergencia tételekre

1. Onneweer (1970): Ha f folytonos és korlátos változású $[0,1)$-en, akkor $\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = f(x)\quad \forall x \in [0,1)$-re. (A konvergencia egyenletes.)
2. Ha f folytonos $[0,1)$-en, akkor $\lim_{n\to\infty} S_{2^n} f(x) = f(x)\quad \forall x \in [0,1)$-re.

Az L_2-beli normakonvergencia természetesen itt is igaz.

Példák további konvergencia tételekre

1. Onneweer (1970): Ha f folytonos és korlátos változású $[0,1)$-en, akkor $\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = f(x) \quad \forall x \in [0,1)$-re. (A konvergencia egyenletes.)
2. Ha f folytonos $[0,1)$-en, akkor $\lim_{n\to\infty} S_{2^n} f(x) = f(x) \quad \forall x \in [0,1)$-re.
3. Ha $f \in L_1[0,1)$, akkor $\lim_{n\to\infty} S_{2^n} f(x) = f(x)$ m. m. $x \in [0,1)$-re.

Az L_2-beli normakonvergencia természetesen itt is igaz.

Példák további konvergencia tételekre

1. Onneweer (1970): Ha f folytonos és korlátos változású $[0,1)$-en, akkor $\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = f(x) \quad \forall x \in [0,1)$-re. (A konvergencia egyenletes.)
2. Ha f folytonos $[0,1)$-en, akkor $\lim_{n\to\infty} S_{2^n} f(x) = f(x) \quad \forall x \in [0,1)$-re.
3. Ha $f \in L_1[0,1)$, akkor $\lim_{n\to\infty} S_{2^n} f(x) = f(x)$ m. m. $x \in [0,1)$-re.
4. Ha $f \in L_p[0,1)$ és $p > 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = f(x)$ m. m. $x \in [0,1)$-re.

Az L_2-beli normakonvergencia természetesen itt is igaz.

Példák további konvergencia tételekre

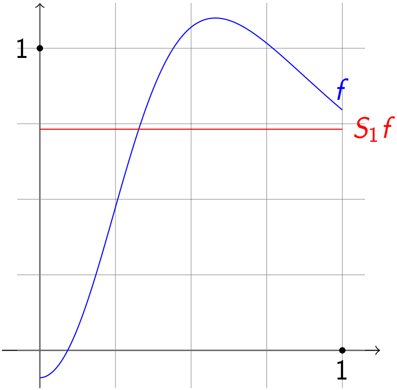
1. Onneweer (1970): Ha f folytonos és korlátos változású $[0,1)$-en, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} S_n f(x) = f(x)$ $\forall x \in [0,1)$-re. (A konvergencia egyenletes.)
2. Ha f folytonos $[0,1)$-en, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n} f(x) = f(x)$ $\forall x \in [0,1)$-re.
3. Ha $f \in L_1[0,1)$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n} f(x) = f(x)$ m. m. $x \in [0,1)$-re.
4. Ha $f \in L_p[0,1)$ és $p > 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} S_n f(x) = f(x)$ m. m. $x \in [0,1)$-re.
5. Ha $f \in L_1[0,1)$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n f(x) = f(x)$ m. m. $x \in [0,1)$-re.

Az L_2-beli normakonvergencia természetesen itt is igaz.

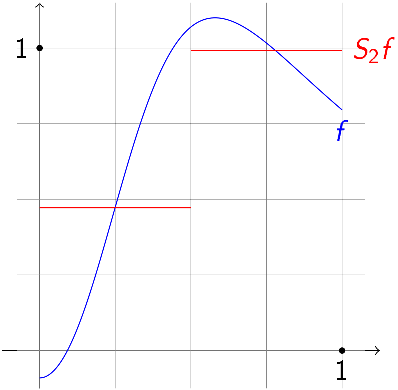
Példák további konvergencia tételekre

1. Onneweer (1970): Ha f folytonos és korlátos változású $[0,1)$-en, akkor $\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = f(x)$ $\forall x \in [0,1)$-re. (A konvergencia egyenletes.)
2. Ha f folytonos $[0,1)$-en, akkor $\lim_{n\to\infty} S_{2^n} f(x) = f(x)$ $\forall x \in [0,1)$-re.
3. Ha $f \in L_1[0,1)$, akkor $\lim_{n\to\infty} S_{2^n} f(x) = f(x)$ m. m. $x \in [0,1)$-re.
4. Ha $f \in L_p[0,1)$ és $p > 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = f(x)$ m. m. $x \in [0,1)$-re.
5. Ha $f \in L_1[0,1)$, akkor $\lim_{n\to\infty} \sigma_n f(x) = f(x)$ m. m. $x \in [0,1)$-re.

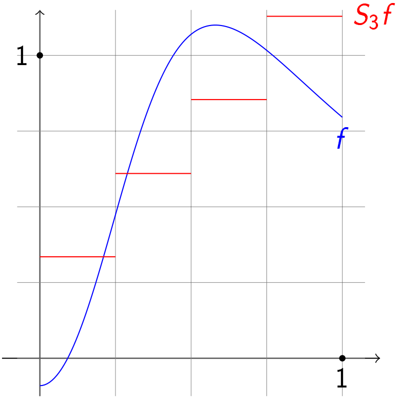
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0,3}\right) + 0,1$ és Walsh-Fourier sorának részletösszegei:



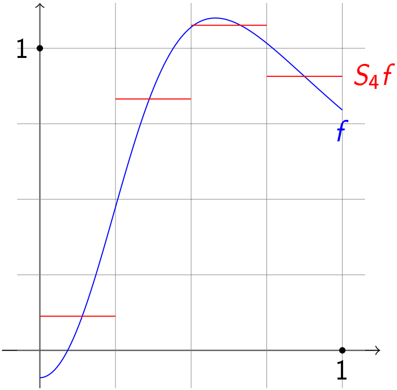
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0,3}\right) + 0,1$ és Walsh-Fourier sorának részletösszegei:



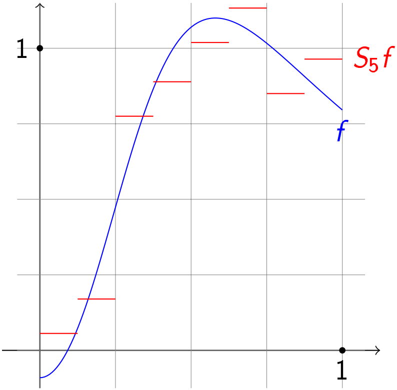
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0{,}3}\right) + 0,1$ és Walsh-Fourier sorának részletösszegei:



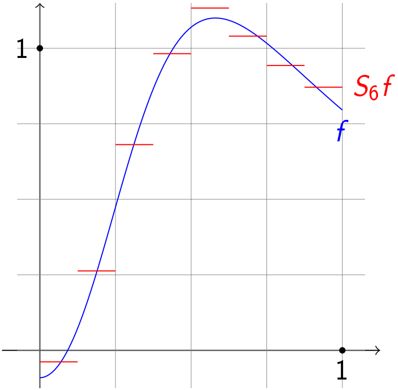
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0{,}3}\right) + 0,1$ és Walsh-Fourier sorának részletösszegei:



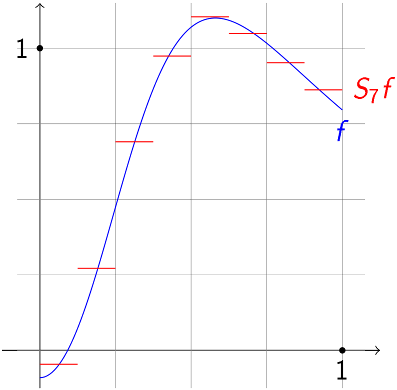
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0{,}3}\right) + 0,1$ és Walsh-Fourier sorának részletösszegei:



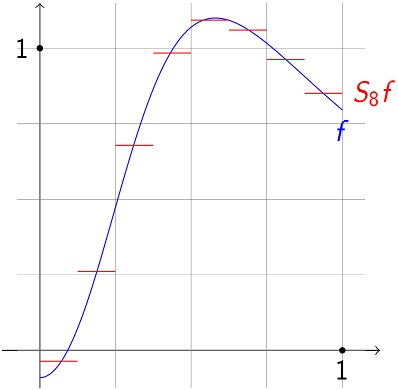
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0{,}3}\right) + 0{,}1$ és Walsh-Fourier sorának részletösszegei:



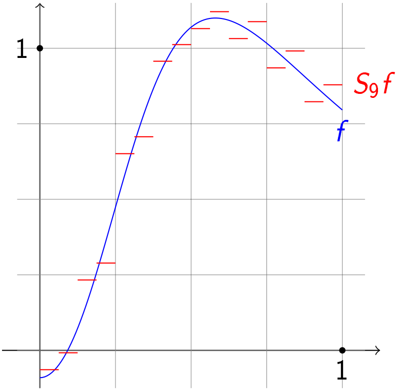
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0{,}3}\right) + 0,1$ és Walsh-Fourier sorának részletösszegei:



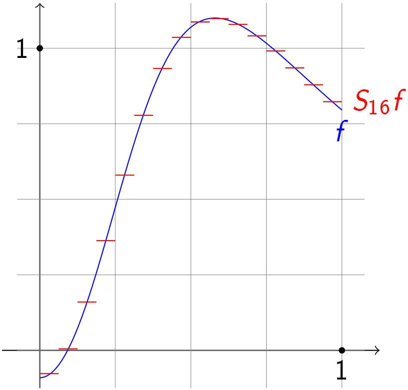
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0{,}3}\right) + 0,1$ és Walsh-Fourier sorának részletösszegei:



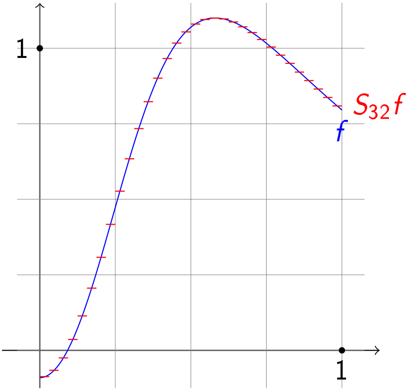
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0{,}3}\right) + 0,1$ és Walsh-Fourier sorának részletösszegei:



Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0{,}3}\right) + 0,1$ és Walsh-Fourier sorának részletösszegei:



Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0,3}\right) + 0,1$ és Walsh-Fourier sorának részletösszegei:



Pontonkénti konvergencia $L_2(a, b)$-n

Legyen (a, b) véges intervallum, ψ_n ortonormált sorozat az $L_2(a, b)$ Hilbert-térben, és c_n olyan komplex számsorozat, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$.

Ekkor a $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ függvénysor m. m. abszolút konvergens.

Konvergencia-rendszer

Akkor mondjuk, hogy $\psi_n \subseteq L_2(a, b)$ ortonormált sorozat konvergenciarendszer, ha $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ esetén $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ m. m. konvergens.

Pontonkénti konvergencia $L_2(a, b)$-n

Legyen (a, b) véges intervallum, ψ_n ortonormált sorozat az $L_2(a, b)$ Hilbert-térben, és c_n olyan komplex számsorozat, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$.

Ekkor a $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ függvénysor m. m. abszolút konvergens.

Konvergencia-rendszer

Akkor mondjuk, hogy $\psi_n \subseteq L_2(a, b)$ ortonormált sorozat konvergenciarendszer, ha $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ esetén $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ m. m. konvergens.

A trigonometrikus (Carleson-tétel), a Rademacher- és a Walsh–Paley-rendszer konvergencia-rendszer.

Pontonkénti konvergencia $L_2(a,b)$-n

Legyen (a,b) véges intervallum, ψ_n ortonormált sorozat az $L_2(a,b)$ Hilbert-térben, és c_n olyan komplex számsorozat, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$.

Ekkor a $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ függvénysor m. m. abszolút konvergens.

Konvergencia-rendszer

Akkor mondjuk, hogy $\psi_n \subseteq L_2(a,b)$ ortonormált sorozat konvergenciarendszer, ha $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ esetén $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ m. m. konvergens.

A trigonometrikus (Carleson-tétel), a Rademacher- és a Walsh–Paley-rendszer konvergencia-rendszer.

Olevszkij–Uljanov-tétel

Minden teljes ortonormált rendszernek van olyan átrendezése, amely nem konvergencia-rendszer.

Weyl-sorozat

A w_n valós sorozatot Weyl-sorozatnak nevezzük, ha

$w_1 < w_2 < \dots,\ \lim w_n = \infty$, és $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 w_n < \infty$-ből következik, hogy

minden L_2-beli ψ_n ortonormált rendszerre $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ m. m. konvergens.

Példák Weyl-sorozatokra: n^α $(\alpha > 0)$, $\sqrt{n}$, $\log^3 n$.

Weyl-sorozat

A w_n valós sorozatot Weyl-sorozatnak nevezzük, ha

$w_1 < w_2 < \dots$, $\lim w_n = \infty$, és $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 w_n < \infty$-ből következik, hogy

minden L_2-beli ψ_n ortonormált rendszerre $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ m. m. konvergens.

Példák Weyl-sorozatokra: n^α $(\alpha > 0)$, $\sqrt{n}$, $\log^3 n$.

Rademacher–Menysov-tétel

Legyen (a, b) véges intervallum, ψ_n ortonormált sorozat az $L_2(a, b)$ Hilbert-térben, és c_n olyan komplex számsorozat, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \log^2 n < \infty$. Ekkor a $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ függvénysor m. m. konvergens.

Weyl-sorozat

A w_n valós sorozatot Weyl-sorozatnak nevezzük, ha

$w_1 < w_2 < \ldots$, $\lim w_n = \infty$, és $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 w_n < \infty$-ből következik, hogy

minden L_2-beli ψ_n ortonormált rendszerre $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ m. m. konvergens.

Példák Weyl-sorozatokra: n^α $(\alpha > 0)$, $\sqrt{n}$, $\log^3 n$.

Rademacher–Menysov-tétel

Legyen (a, b) véges intervallum, ψ_n ortonormált sorozat az $L_2(a, b)$ Hilbert-térben, és c_n olyan komplex számsorozat, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \log^2 n < \infty$. Ekkor a $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ függvénysor m. m. konvergens.

Vagyis $\log^2 n$ is Weyl-sorozat. Az eredmény nem javítható!

Weyl-sorozat

A w_n valós sorozatot Weyl-sorozatnak nevezzük, ha

$w_1 < w_2 < \dots,\ \lim w_n = \infty$, és $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 w_n < \infty$-ből következik, hogy

minden L_2-beli ψ_n ortonormált rendszerre $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ m. m. konvergens.

Példák Weyl-sorozatokra: n^α $(\alpha > 0)$, $\sqrt{n}$, $\log^3 n$.

Rademacher–Menysov-tétel

Legyen (a, b) véges intervallum, ψ_n ortonormált sorozat az $L_2(a, b)$ Hilbert-térben, és c_n olyan komplex számsorozat, melyre

$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \log^2 n < \infty$. Ekkor a $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ függvénysor m. m. konvergens.

Vagyis $\log^2 n$ is Weyl-sorozat. Az eredmény nem javítható!

Folytonossági modulus

Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges (akár elfajuló) intervallum, $\delta > 0$, valamint $f(x) : I \to \mathbb{K}$. Ekkor legyen

$$\omega(\delta) = \omega(\delta, f) = \sup_{|x-y| \le \delta} |f(x) - f(y)|.$$

1. $\omega(\delta)$ monoton növekvő.

Folytonossági modulus

Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges (akár elfajuló) intervallum, $\delta > 0$, valamint $f(x) : I \to \mathbb{K}$. Ekkor legyen

$$\omega(\delta) = \omega(\delta, f) = \sup_{|x-y| \le \delta} |f(x) - f(y)|.$$

1. $\omega(\delta)$ monoton növekvő.
2. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\omega(n\delta) \le n\omega(\delta)$.

Folytonossági modulus

Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges (akár elfajuló) intervallum, $\delta > 0$, valamint $f(x) : I \to \mathbb{K}$. Ekkor legyen

$$\omega(\delta) = \omega(\delta, f) = \sup_{|x-y| \le \delta} |f(x) - f(y)|.$$

1. $\omega(\delta)$ monoton növekvő.
2. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\omega(n\delta) \le n\omega(\delta)$.
3. Ha $\lambda > 0$, akkor $\omega(\lambda\delta) \le (\lambda + 1)\omega(\delta)$.

Folytonossági modulus

Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges (akár elfajuló) intervallum, $\delta > 0$, valamint $f(x) : I \to \mathbb{K}$. Ekkor legyen

$$\omega(\delta) = \omega(\delta, f) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|.$$

1. $\omega(\delta)$ monoton növekvő.
2. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$.
3. Ha $\lambda > 0$, akkor $\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\delta)$.
4. Ahhoz, hogy az $f(x)$ függvény egyenletesen folytonos legyen I-n, szükséges és elégséges, hogy $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$.

Folytonossági modulus

Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges (akár elfajuló) intervallum, $\delta > 0$, valamint $f(x) : I \to \mathbb{K}$. Ekkor legyen

$$\omega(\delta) = \omega(\delta, f) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|.$$

1. $\omega(\delta)$ monoton növekvő.
2. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$.
3. Ha $\lambda > 0$, akkor $\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\delta)$.
4. Ahhoz, hogy az $f(x)$ függvény egyenletesen folytonos legyen I-n, szükséges és elégséges, hogy $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$.
5. Ha $\lim\limits_{\delta \to 0} \frac{\omega(\delta)}{\delta} = 0$, akkor $f(x)$ konstans.

Folytonossági modulus

Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges (akár elfajuló) intervallum, $\delta > 0$, valamint $f(x) : I \to \mathbb{K}$. Ekkor legyen

$$\omega(\delta) = \omega(\delta, f) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|.$$

1. $\omega(\delta)$ monoton növekvő.
2. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$.
3. Ha $\lambda > 0$, akkor $\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\delta)$.
4. Ahhoz, hogy az $f(x)$ függvény egyenletesen folytonos legyen I-n, szükséges és elégséges, hogy $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega(\delta) = 0$.
5. Ha $\lim\limits_{\delta\to 0} \frac{\omega(\delta)}{\delta} = 0$, akkor $f(x)$ konstans.

Jackson első tétele, 1911

Legyen $f(x) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{K}$ r-szer differenciálható függvény úgy, hogy $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ teljesül $\forall x \in [-\pi, \pi]$ esetén. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$-ra $\exists T_{n-1}(x)$ legfeljebb $n-1$-ed fokú trigonometrikus polinom úgy, hogy

$$|f(x) - T_{n-1}(x)| \leq \frac{C_r}{n^r} \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Akhiezer–Krein–Favard-tétel

$$C_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}$$

Jackson első tétele, 1911

Legyen $f(x) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{K}$ r-szer differenciálható függvény úgy, hogy $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ teljesül $\forall x \in [-\pi, \pi]$ esetén. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$-ra $\exists T_{n-1}(x)$ legfeljebb $n-1$-ed fokú trigonometrikus polinom úgy, hogy

$$|f(x) - T_{n-1}(x)| \leq \frac{C_r}{n^r} \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Akhiezer–Krein–Favard-tétel

$$C_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}$$

Következmény: $C_r \leq \max\left(\frac{4}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right) < 1,58.$

Jackson első tétele, 1911

Legyen $f(x) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{K}$ r-szer differenciálható függvény úgy, hogy $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ teljesül $\forall x \in [-\pi, \pi]$ esetén. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$-ra $\exists T_{n-1}(x)$ legfeljebb $n-1$-ed fokú trigonometrikus polinom úgy, hogy

$$|f(x) - T_{n-1}(x)| \leq \frac{C_r}{n^r} \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Akhiezer–Krein–Favard-tétel

$$C_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}$$

Következmény: $C_r \leq \max\left(\frac{4}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right) < 1,58.$

Jackson második tétele (Jackson–Sztecskin egyenlőtlenség), 1911

Legyen $f(x) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{K}$ r-szer differenciálható függvény. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}^{+}$-ra $\exists T_{n-1}(x)$ legfeljebb $n-1$-ed fokú trigonometrikus polinom úgy, hogy

$$|f(x) - T_{n-1}(x)| \leq \frac{D_r\, \omega\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right)}{n^r} \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

1. Ismert, hogy $D_r \leq 3$.

Jackson második tétele (Jackson–Sztecskin egyenlőtlenség), 1911

Legyen $f(x) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{K}$ r-szer differenciálható függvény. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$-ra $\exists T_{n-1}(x)$ legfeljebb $n-1$-ed fokú trigonometrikus polinom úgy, hogy

$$|f(x) - T_{n-1}(x)| \leq \frac{D_r\,\omega\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right)}{n^r} \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

1. Ismert, hogy $D_r \leq 3$.
2. Ha $f(x)$ folytonos és $r = 0$, megkapjuk következményként Weierstrass második approximációs tételét.

Jackson második tétele (Jackson–Sztecskin egyenlőtlenség), 1911

Legyen $f(x) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{K}$ r-szer differenciálható függvény. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$-ra $\exists T_{n-1}(x)$ legfeljebb $n-1$-ed fokú trigonometrikus polinom úgy, hogy

$$|f(x) - T_{n-1}(x)| \leq \frac{D_r\,\omega\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right)}{n^r} \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

1. Ismert, hogy $D_r \leq 3$.
2. Ha $f(x)$ folytonos és $r = 0$, megkapjuk következményként Weierstrass második approximációs tételét.
3. Analóg állítás igaz algebrai polinomokra is (szintén Jackson eredménye) $\Rightarrow$ Weierstrass I.

Jackson második tétele (Jackson–Sztecskin egyenlőtlenség), 1911

Legyen $f(x) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{K}$ r-szer differenciálható függvény. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$-ra $\exists T_{n-1}(x)$ legfeljebb $n-1$-ed fokú trigonometrikus polinom úgy, hogy

$$|f(x) - T_{n-1}(x)| \leq \frac{D_r\, \omega\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right)}{n^r} \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

1. Ismert, hogy $D_r \leq 3$.
2. Ha $f(x)$ folytonos és $r = 0$, megkapjuk következményként Weierstrass második approximációs tételét.
3. Analóg állítás igaz algebrai polinomokra is (szintén Jackson eredménye) $\Rightarrow$ Weierstrass I.

Bohmann–Korovkin-tétel, 1952, 1953

Legyen $A_n : C[a,b] \to C[a,b]$ lineáris operátorok sorozata, melyre:

1. $\forall x \in [a,b]$-re $A_n(f(x)) \geq 0$, ha $f(x) \geq 0$,
2. ha $k = 0, 1, 2$, akkor $\forall x \in [a,b]$-re $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(x^k) = x^k$.

Ekkor $\forall f \in C[a,b]$ esetén $\forall x \in [a,b]$-re $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(f(x)) = f(x)$.

Bernstein-polinomok

Legyen $f \in C[0,1]$.

$$B_n(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Bohmann–Korovkin-tétel, 1952, 1953

Legyen $A_n : C[a,b] \to C[a,b]$ lineáris operátorok sorozata, melyre:

1. $\forall x \in [a,b]$-re $A_n(f(x)) \geq 0$, ha $f(x) \geq 0$,
2. ha $k = 0, 1, 2$, akkor $\forall x \in [a,b]$-re $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(x^k) = x^k$.

Ekkor $\forall f \in C[a,b]$ esetén $\forall x \in [a,b]$-re $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(f(x)) = f(x)$.

Bernstein-polinomok

Legyen $f \in C[0,1]$.

$$B_n(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$B_n : C[0,1] \to C[0,1]$ lineáris operátorok sorozata, melyre teljesülnek a Bohmann–Korovkin-tétel feltételei.

Bohmann–Korovkin-tétel, 1952, 1953

Legyen $A_n : C[a,b] \to C[a,b]$ lineáris operátorok sorozata, melyre:

1. $\forall x \in [a,b]$-re $A_n(f(x)) \geq 0$, ha $f(x) \geq 0$,
2. ha $k = 0, 1, 2$, akkor $\forall x \in [a,b]$-re $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(x^k) = x^k$.

Ekkor $\forall f \in C[a,b]$ esetén $\forall x \in [a,b]$-re $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(f(x)) = f(x)$.

Bernstein-polinomok

Legyen $f \in C[0,1]$.

$$B_n(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$B_n : C[0,1] \to C[0,1]$ lineáris operátorok sorozata, melyre teljesülnek a Bohmann–Korovkin-tétel feltételei.

Weierstrass első approximációs tétele

Minden $f \in C[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ függvény tetszés szerinti pontossággal megközelíthető algebrai polinomokkal.

Stone-tétel

Legyen X kompakt metrikus tér és $\mathcal{H}$ a $C(X,\mathbb{R})$ olyan lineáris altere, melyre:

1. a konstans függvények $\mathcal{H}$-ban vannak,
2. ha $u \in \mathcal{H}$, akkor ha $|u| \in \mathcal{H}$,
3. $\mathcal{H}$ szétválasztja X pontjait.

Ekkor $\mathcal{H}$ sűrű $C(X,\mathbb{R})$-ban.

Weierstrass első approximációs tétele

Minden $f \in C[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ függvény tetszés szerinti pontossággal megközelíthető algebrai polinomokkal.

Stone-tétel

Legyen X kompakt metrikus tér és $\mathcal{H}$ a $C(X,\mathbb{R})$ olyan lineáris altere, melyre:

1. a konstans függvények $\mathcal{H}$-ban vannak,
2. ha $u \in \mathcal{H}$, akkor ha $|u| \in \mathcal{H}$,
3. $\mathcal{H}$ szétválasztja X pontjait.

Ekkor $\mathcal{H}$ sűrű $C(X,\mathbb{R})$-ban.

Müntz tétele

Minden $f \in C[0,1]$ függvény pontosan akkor közelíthető meg tetszés szerinti pontossággal és egyenletesen a $\sum_{i=0}^{m} c_i x^{n_i}$ polinomokkal, ahol $0 = n_0 < n_1 < \dots$ természetes számok, ha $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i} = \infty$.

Legjobb approximáció polinommal

$E_n(f) = \inf_{P \in P_n} \|f - P\|_\infty = \inf_{P \in P_n} \sup_{x \in D_f} |f(x) - P(x)|$, ahol P_n jelöli az n-edfokú algebrai polinomok halmazát.

Alternáló pontok tétele (Csebisev, 1854)

Legyen $f \in C[a,b]$ és $P \in P_n$. $E_n(f) = \|f - P\|_\infty$ akkor és csakis akkor, ha $\exists x_1, \ldots, x_{n+2} \in [a,b]$ melyre $\forall k \in \{1, \ldots, n+2\}$ esetén $f(x_k) - P(x_k) = (-1)^k \|f - P\|_\infty$.

Legjobb approximáció polinommal

$E_n(f) = \inf_{P \in P_n} \|f - P\|_\infty = \inf_{P \in P_n} \sup_{x \in D_f} |f(x) - P(x)|$, ahol P_n jelöli az n-edfokú algebrai polinomok halmazát.

Alternáló pontok tétele (Csebisev, 1854)

Legyen $f \in C[a, b]$ és $P \in P_n$. $E_n(f) = \|f - P\|_\infty$ akkor és csakis akkor, ha $\exists x_1, \ldots, x_{n+2} \in [a, b]$ melyre $\forall k \in \{1, \ldots, n+2\}$ esetén $f(x_k) - P(x_k) = (-1)^k \|f - P\|_\infty$.

Remez-algoritmus, 1934

1. Legyen $\varepsilon > 0$, $i = 1$ és $a \leq x_1^{(i)} < \cdots < x_{n+2}^{(i)} \leq b$.
2. Oldjuk meg az $f\left(x_k^{(i)}\right) - P^{(i)}\left(x_k^{(i)}\right) = (-1)^k E^{(i)}$ $(k = 1, \ldots, n+2)$ lineáris egyenletrendszert, ahol $P^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(i)} x^j$ (most $0^0 = 1$).

Remez-algoritmus, 1934

1. Legyen $\varepsilon > 0$, $i = 1$ és $a \leq x_1^{(i)} < \cdots < x_{n+2}^{(i)} \leq b$.
2. Oldjuk meg az $f\left(x_k^{(i)}\right) - P^{(i)}\left(x_k^{(i)}\right) = (-1)^k E^{(i)}$ $(k = 1, \ldots, n+2)$ lineáris egyenletrendszert, ahol $P^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(i)} x^j$ (most $0^0 = 1$).
3. Legyen a $h^{(i)}(x) = f(x) - P^{(i)}(x)$ függvény abszolút értékének maximumhelye $[a, b]$-n $\xi^{(i)}$. Ekkor $\|f - P^{(i)}\|_\infty = |h^{(i)}(\xi^{(i)})|$. Ha $\left|\|f - P^{(i)}\|_\infty - |E^{(i)}|\right| \leq \varepsilon$, készen vagyunk.

Remez-algoritmus, 1934

1. Legyen $\varepsilon > 0$, $i = 1$ és $a \leq x_1^{(i)} < \cdots < x_{n+2}^{(i)} \leq b$.
2. Oldjuk meg az $f\left(x_k^{(i)}\right) - P^{(i)}\left(x_k^{(i)}\right) = (-1)^k E^{(i)}$ $(k = 1, \ldots, n+2)$ lineáris egyenletrendszert, ahol $P^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(i)} x^j$ (most $0^0 = 1$).
3. Legyen a $h^{(i)}(x) = f(x) - P^{(i)}(x)$ függvény abszolút értékének maximumhelye $[a, b]$-n $\xi^{(i)}$. Ekkor $\|f - P^{(i)}\|_\infty = |h^{(i)}(\xi^{(i)})|$. Ha $\left|\|f - P^{(i)}\|_\infty - |E^{(i)}|\right| \leq \varepsilon$, készen vagyunk.
4. Egyébként $\xi^{(i)}$-t cseréljük be a megfelelő $x_k^{(i)}$ helyére. A $h^{(i)}(x)$ hibafüggvény előjelváltása maradjon meg! Növeljük i-t eggyel és térjünk vissza a 2. lépésre.

Remez-algoritmus, 1934

1. Legyen $\varepsilon > 0$, $i = 1$ és $a \leq x_1^{(i)} < \cdots < x_{n+2}^{(i)} \leq b$.
2. Oldjuk meg az $f\left(x_k^{(i)}\right) - P^{(i)}\left(x_k^{(i)}\right) = (-1)^k E^{(i)}$ $(k = 1, \ldots, n+2)$ lineáris egyenletrendszert, ahol $P^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(i)} x^j$ (most $0^0 = 1$).
3. Legyen a $h^{(i)}(x) = f(x) - P^{(i)}(x)$ függvény abszolút értékének maximumhelye $[a, b]$-n $\xi^{(i)}$. Ekkor $\|f - P^{(i)}\|_\infty = |h^{(i)}(\xi^{(i)})|$. Ha $\left|\|f - P^{(i)}\|_\infty - |E^{(i)}|\right| \leq \varepsilon$, készen vagyunk.
4. Egyébként $\xi^{(i)}$-t cseréljük be a megfelelő $x_k^{(i)}$ helyére. A $h^{(i)}(x)$ hibafüggvény előjelváltása maradjon meg! Növeljük i-t eggyel és térjünk vissza a 2. lépésre.

Az így kapott polinomsorozat egyenletesen konvergál a legjobb közelítéshez.

Remez-algoritmus, 1934

1. Legyen $\varepsilon > 0$, $i = 1$ és $a \le x_1^{(i)} < \cdots < x_{n+2}^{(i)} \le b$.
2. Oldjuk meg az $f\left(x_k^{(i)}\right) - P^{(i)}\left(x_k^{(i)}\right) = (-1)^k E^{(i)}$ $(k = 1, \ldots, n+2)$ lineáris egyenletrendszert, ahol $P^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(i)} x^j$ (most $0^0 = 1$).
3. Legyen a $h^{(i)}(x) = f(x) - P^{(i)}(x)$ függvény abszolút értékének maximumhelye $[a, b]$-n $\xi^{(i)}$. Ekkor $\|f - P^{(i)}\|_\infty = |h^{(i)}(\xi^{(i)})|$. Ha $\left|\|f - P^{(i)}\|_\infty - |E^{(i)}|\right| \le \varepsilon$, készen vagyunk.
4. Egyébként $\xi^{(i)}$-t cseréljük be a megfelelő $x_k^{(i)}$ helyére. A $h^{(i)}(x)$ hibafüggvény előjelváltása maradjon meg! Növeljük i-t eggyel és térjünk vissza a 2. lépésre.

Az így kapott polinomsorozat egyenletesen konvergál a legjobb közelítéshez.

A 2. lépésben található egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} f\left(x_1^{(i)}\right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f\left(x_{n+2}^{(i)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(i)} & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \left(x_1^{(i)}\right)^n & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+2}^{(i)} & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \left(x_{n+2}^{(i)}\right)^n & (-1)^{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n^{(i)} \\ E^{(i)} \end{pmatrix}$$

Vandermonde-mátrix

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & . & . & . & x_1^{n-1} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 1 & x_n & . & . & . & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

A Vandermonde-mátrix determinánsa

$$|V| = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

Vandermonde-mátrix

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & . & . & . & x_1^{n-1} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 1 & x_n & . & . & . & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

A Vandermonde-mátrix determinánsa

$$|V| = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

Így különböző alappontokhoz tartozó Vandermonde-determináns nullától különböző, sőt ha $x_1 < \cdots < x_n$, akkor $|V| > 0$.

Vandermonde-mátrix

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & . & . & . & x_1^{n-1} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 1 & x_n & . & . & . & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

A Vandermonde-mátrix determinánsa

$$|V| = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

Így különböző alappontokhoz tartozó Vandermonde-determináns nullától különböző, sőt ha $x_1 < \cdots < x_n$, akkor $|V| > 0$.

Approximáció racionális függvényekkel — Padé-approximáció

Legyen $a < 0 < b$ és $f(x)$ akárhányszor differenciálható (a, b)-n, $p(x) = a_0 + a_1x + \dots a_mx^m$ és $q(x) = b_0 + b_1x + \dots b_kx^k$, ahol $b_0 = 1$. Keressük azt az $R_{m,k}(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ függvényt, melyre $f^{(n)}(0) = R^{(n)}_{m,k}(0)$ teljesül $\forall n \in \{0, 1, \dots, m + k\}$ esetén.

Ekvivalens feltételek

Ha $f(x)$-et MacLaurin-sora előállítja, $R_{m,k}(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ pontosan akkor $f(x)$ Padé-függvénye, ha $f(x) - R_{m,k}(x) = O(x^{m+k+1})$, ahol $x \to 0$, ami pedig éppen akkor teljesül, ha $f(x)q(x) - p(x) = O(x^{m+k+1})$, szintén $x \to 0$ esetén.

Approximáció racionális függvényekkel — Padé-approximáció

Legyen $a < 0 < b$ és $f(x)$ akárhányszor differenciálható (a, b)-n, $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_m x^m$ és $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots b_k x^k$, ahol $b_0 = 1$. Keressük azt az $R_{m,k}(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ függvényt, melyre $f^{(n)}(0) = R_{m,k}^{(n)}(0)$ teljesül $\forall n \in \{0, 1, \ldots, m + k\}$ esetén.

Ekvivalens feltételek

Ha $f(x)$-et MacLaurin-sora előállítja, $R_{m,k}(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ pontosan akkor $f(x)$ Padé-függvénye, ha $f(x) - R_{m,k}(x) = O(x^{m+k+1})$, ahol $x \to 0$, ami pedig éppen akkor teljesül, ha $f(x)q(x) - p(x) = O(x^{m+k+1})$, szintén $x \to 0$ esetén.

Padé-együtthatók tétele

Ha $f(x)$ MacLaurin-sora $\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j = f(x)$, a Padé-függvény együtthatóit a

$$\sum_{i=0}^{\min\{t,k\}} c_{t-i} b_i = a_t \quad (t = 0, \dots, m) \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{\min\{t,k\}} c_{t-i} b_i = 0 \quad (t = m+1, \dots, m+k) \tag{2}$$

egyenletrendszer adja (amennyiben megoldható).

Példák:

1. Ha $m = k = 1$, akkor $\frac{\ln(x+1)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots \approx \frac{1+\frac{1}{6}x}{1+\frac{2}{3}x}$ ($x = 0$-ban határértéket veszünk).
2. Ha $m = 1$ és $k = 2$, akkor $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots \approx \frac{x}{1+\frac{1}{6}x^2}$.

Példák:

1. Ha $m = k = 1$, akkor $\frac{\ln(x+1)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots \approx \frac{1+\frac{1}{6}x}{1+\frac{2}{3}x}$ ($x = 0$-ban határértéket veszünk).
2. Ha $m = 1$ és $k = 2$, akkor $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots \approx \frac{x}{1+\frac{1}{6}x^2}$.

A Padé-approximáció tulajdonságai

1. A közelítés a 0 körül a legjobb, nem egyenletes.

Példák:

1. Ha $m = k = 1$, akkor $\frac{\ln(x+1)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots \approx \frac{1+\frac{1}{6}x}{1+\frac{2}{3}x}$ ($x = 0$-ban határértéket veszünk).
2. Ha $m = 1$ és $k = 2$, akkor $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots \approx \frac{x}{1+\frac{1}{6}x^2}$.

A Padé-approximáció tulajdonságai

1. A közelítés a 0 körül a legjobb, nem egyenletes.
2. Általában nem legjobb racionális közelítő függvényt adja (mint az általánosított Remez-algoritmus), de elég jó és egyszerű, így elterjedt.

Példák:

1. Ha $m = k = 1$, akkor $\frac{\ln(x+1)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots \approx \frac{1+\frac{1}{6}x}{1+\frac{2}{3}x}$ ($x = 0$-ban határértéket veszünk).
2. Ha $m = 1$ és $k = 2$, akkor $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots \approx \frac{x}{1+\frac{1}{6}x^2}$.

A Padé-approximáció tulajdonságai

1. A közelítés a 0 körül a legjobb, nem egyenletes.
2. Általában nem legjobb racionális közelítő függvényt adja (mint az általánosított Remez-algoritmus), de elég jó és egyszerű, így elterjedt.

Adottak a $\psi_1(x), ..., \psi_n(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ ún. alapfüggvények.

Alapfüggvények interpolációs polinomja

Ismerjük $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ értékeit az $x_1, ..., x_N \in [a, b]$ különböző alappontokban. Keressük az $c_1, ..., c_n$ konstansokat, melyek azt az

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x)$$

általánosított polinomot állítják elő, melyre

$$L(x_i) = f(x_i), \qquad \forall i \in \{1, ..., N\}.$$

Ekkor $L(x)$ függvényt az alapfüggvények interpolációs polinomjának nevezzük.

Adottak a $\psi_1(x), ..., \psi_n(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ ún. alapfüggvények.

Alapfüggvények interpolációs polinomja

Ismerjük $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ értékeit az $x_1, ..., x_N \in [a, b]$ különböző alappontokban. Keressük az $c_1, ..., c_n$ konstansokat, melyek azt az

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x)$$

általánosított polinomot állítják elő, melyre

$$L(x_i) = f(x_i), \qquad \forall i \in \{1, ..., N\}.$$

Ekkor $L(x)$ függvényt az alapfüggvények interpolációs polinomjának nevezzük.

Az n és N viszonya. Mostantól legyen $n = M$.

Az n és N viszonya. Mostantól legyen $n = M$.

A

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x_i) = f(x_i), \ \forall i \in \{1, ..., n\}$$

egyenlőségeket mátrixos alakban is felírhatjuk:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x_1) & \cdots & \psi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(x_n) & \cdots & \psi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Az n és N viszonya. Mostantól legyen $n = M$.

A

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x_i) = f(x_i),\ \forall i \in \{1, ..., n\}$$

egyenlőségeket mátrixos alakban is felírhatjuk:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x_1) & . & . & . & \psi_n(x_1) \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ \psi_1(x_n) & . & . & . & \psi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ . \\ . \\ . \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Polinom interpoláció

$$\psi_i(x) = x^{i-1}, \; i \in \{1, ..., n\} \text{ (most } 0^0 = 1)$$

Vandermonde-mátrix!

Polinom interpoláció

$$\psi_i(x) = x^{i-1},\ i \in \{1, ..., n\}\ (\text{most } 0^0 = 1)$$

Vandermonde-mátrix!

Unicitás és egzisztencia

Polinom interpoláció esetén – n különböző alappontot véve – mindig létezik legfeljebb $n-1$-edfokú interpolációs polinom, és az egyértelmű.

Interpoláció

Polinom interpoláció

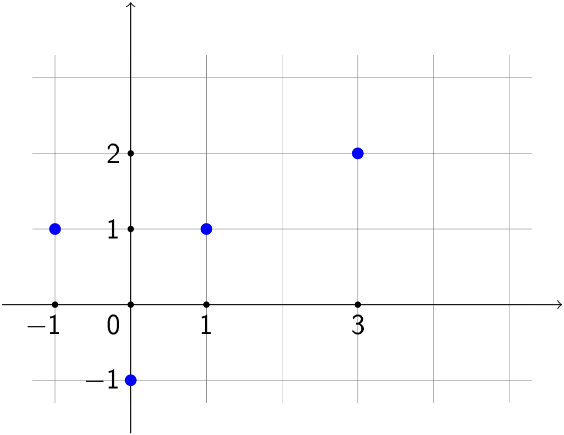
$$\psi_i(x) = x^{i-1}, \ \ i \in \{1, ..., n\} \ (\text{most } 0^0 = 1)$$

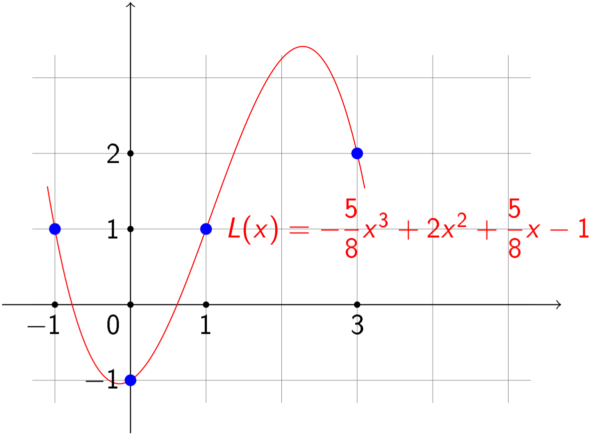
Vandermonde-mátrix!

Unicitás és egzisztencia

Polinom interpoláció esetén – n különböző alappontot véve – mindig létezik legfeljebb $n-1$-edfokú interpolációs polinom, és az egyértelmű.

Interpoláció





2
1
−1
0
1
3
−1
$L(x) = -\frac{5}{8}x^3 + 2x^2 + \frac{5}{8}x - 1$

Előállítjuk azon $l_i(x)$ függvényeket, melyekre

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = i \\ 0 & \text{ha } k \neq i. \end{cases}$$

Ilyen, $n-1$-edfokú polinomot kapunk így:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

Előállítjuk azon $l_i(x)$ függvényeket, melyekre

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = i \\ 0 & \text{ha } k \neq i. \end{cases}$$

Ilyen, $n-1$-edfokú polinomot kapunk így:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

A Lagrange-interpolációs polinom

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right)$$

Előállítjuk azon $l_i(x)$ függvényeket, melyekre

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = i \\ 0 & \text{ha } k \neq i. \end{cases}$$

Ilyen, $n-1$-edfokú polinomot kapunk így:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

A Lagrange-interpolációs polinom

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right)$$

Jelölje $L_{(k,\dots,n)}$ az $x_k, \dots, x_n$ $(1 \leq k \leq n)$ alappontok által generált Lagrange-interpolációs polinomot $(L_{(k)} = f(x_k))$.

Neville-féle iterált interpoláció tétele

Ha $1 \leq k < n$, akkor

$$L_{(k,\dots,n)}(x) = \frac{1}{x_n - x_k} \begin{vmatrix} L_{(k,\dots,n-1)}(x) & x_k - x \\ L_{(k+1,\dots,n)}(x) & x_n - x \end{vmatrix}.$$

Jelölje $L_{(k,\ldots,n)}$ az $x_k, \ldots, x_n$ $(1 \le k \le n)$ alappontok által generált Lagrange-interpolációs polinomot $(L_{(k)} = f(x_k))$.

Neville-féle iterált interpoláció tétele

Ha $1 \le k < n$, akkor

$$L_{(k,\ldots,n)}(x) = \frac{1}{x_n - x_k} \begin{vmatrix} L_{(k,\ldots,n-1)}(x) & x_k - x \\ L_{(k+1,\ldots,n)}(x) & x_n - x \end{vmatrix}.$$

Módszer

$$\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_1 - x & L_{(1)} & & & & \\
x_2 & x_2 - x & L_{(2)} & L_{(1,2)} & & & \\
x_3 & x_3 - x & L_{(3)} & L_{(2,3)} & L_{(1,2,3)} & & \\
x_4 & x_4 - x & L_{(4)} & L_{(3,4)} & L_{(2,3,4)} & L_{(1,2,3,4)} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Jelölje $L_{(k,\dots,n)}$ az $x_k, \dots, x_n$ $(1 \le k \le n)$ alappontok által generált Lagrange-interpolációs polinomot $(L_{(k)} = f(x_k))$.

Neville-féle iterált interpoláció tétele

Ha $1 \le k < n$, akkor

$$L_{(k,\dots,n)}(x) = \frac{1}{x_n - x_k} \begin{vmatrix} L_{(k,\dots,n-1)}(x) & x_k - x \\ L_{(k+1,\dots,n)}(x) & x_n - x \end{vmatrix}.$$

Módszer

$$\begin{array}{lllllll}
x_1 & x_1 - x & L_{(1)} & & & & \\
x_2 & x_2 - x & L_{(2)} & L_{(1,2)} & & & \\
x_3 & x_3 - x & L_{(3)} & L_{(2,3)} & L_{(1,2,3)} & & \\
x_4 & x_4 - x & L_{(4)} & L_{(3,4)} & L_{(2,3,4)} & L_{(1,2,3,4)} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Tekintsük az $a \leq x_1 < \ldots < x_n \leq b$ alappontokat. Jelölés:

$$\omega(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j).$$

A polinom interpoláció hibabecslése I.

Legyen az f függvény n-szer differenciálható az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor $\forall x \in [a, b]$-hez $\exists \xi \in [a, b]$, hogy

$$f(x) - L(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega(x).$$

Tekintsük az $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$ alappontokat. Jelölés:

$$\omega(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_j).$$

A polinom interpoláció hibabecslése I.

Legyen az f függvény n-szer differenciálható az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor $\forall x \in [a, b]$-hez $\exists \xi \in [a, b]$, hogy

$$f(x) - L(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega(x).$$

Egyenletes konvergencia

Legyen $L_n(x)$ az $a \leq x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leq b$ alappontrendszerre illeszkedő polinom interpolációs függvénysorozat. Ha $\exists M > 0$, melyre $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ teljesül $\forall x \in [a, b]$ esetén, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x) - L_n(x)\|_\infty = 0.$$

Legyen

$$h = \max_{k=1,\ldots,n-1} (x_{k+1} - x_k).$$

Segédtétel

Ha $x \in [a, b]$, akkor

$$|\omega(x)| \leq \frac{h^n (n-1)!}{4}.$$

A polinom interpoláció hibabecslése II.

Ha $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$ teljesül $\forall x \in [a, b]$ esetén, akkor $\forall x \in [a, b]$-ra fennáll

$$|f(x) - L(x)| \leq \frac{M_n h^n}{4n}.$$

Legyen

$$h = \max_{k=1,\dots,n-1} (x_{k+1} - x_k).$$

Segédtétel

Ha $x \in [a, b]$, akkor

$$|\omega(x)| \le \frac{h^n (n-1)!}{4}.$$

A polinom interpoláció hibabecslése II.

Ha $|f^{(n)}(x)| \le M_n$ teljesül $\forall x \in [a, b]$ esetén, akkor $\forall x \in [a, b]$-ra fennáll

$$|f(x) - L(x)| \le \frac{M_n h^n}{4n}.$$

Hibabecslés Csebisev alappontokkal

Tegyük fel, hogy $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$ teljesül $\forall x \in [-1, 1]$ esetén. Ha az interpoláció alappontjai Csebisev-félék, akkor $\forall x \in [-1, 1]$-ra

$$|f(x) - L(x)| \leq \frac{M_n}{2^{n-1} n!}.$$

Ha a $[-1, 1]$ intervallum helyett tetszőleges $[a, b]$ valódi intervallumot veszünk, az előző tétel analóg feltételeivel $\tilde{x}_k = x_k \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}$ alappontokkal $\forall x \in [a, b]$-ra

$$|f(x) - L(x)| \leq \frac{M_n (b-a)^n}{2^{2n-1} n!}.$$

Hibabecslés Csebisev alappontokkal

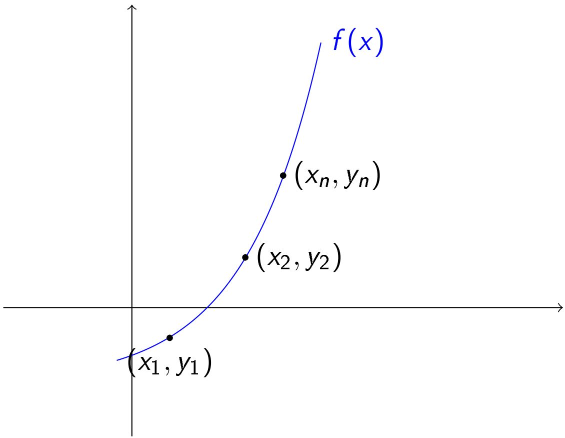
Tegyük fel, hogy $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$ teljesül $\forall x \in [-1, 1]$ esetén. Ha az interpoláció alappontjai Csebisev-félék, akkor $\forall x \in [-1, 1]$-ra

$$|f(x) - L(x)| \leq \frac{M_n}{2^{n-1} n!}.$$

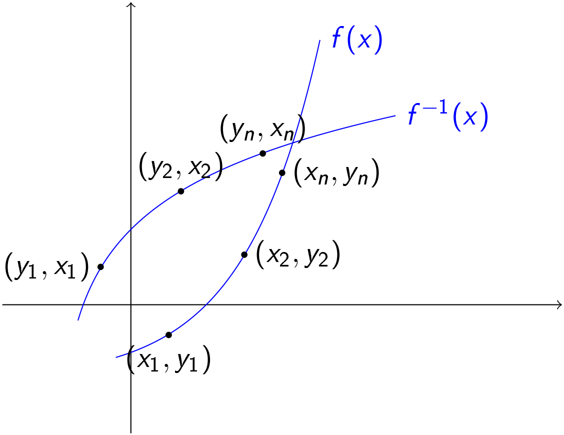
Ha a $[-1, 1]$ intervallum helyett tetszőleges $[a, b]$ valódi intervallumot veszünk, az előző tétel analóg feltételeivel $\tilde{x}_k = x_k \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}$ alappontokkal $\forall x \in [a, b]$-ra

$$|f(x) - L(x)| \leq \frac{M_n (b-a)^n}{2^{2n-1} n!}.$$

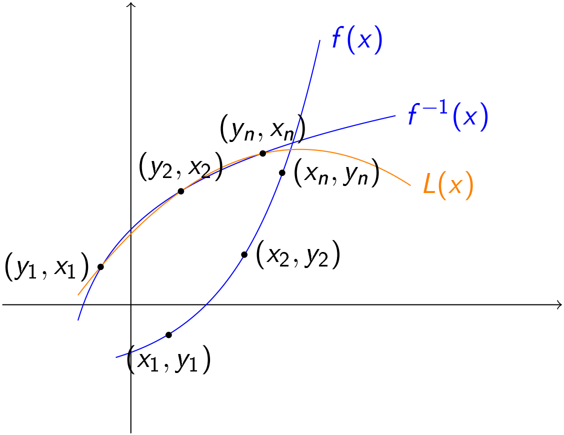
Inverz interpoláció



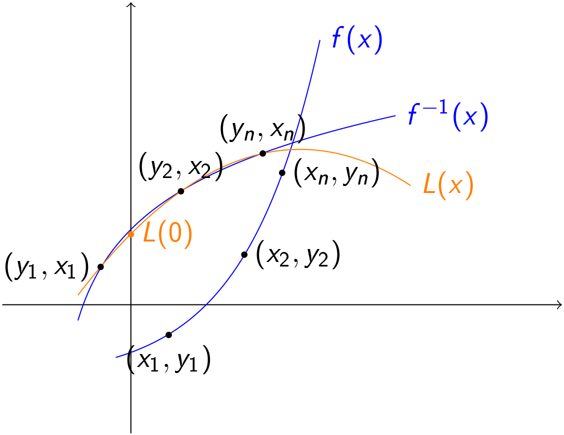
Inverz interpoláció



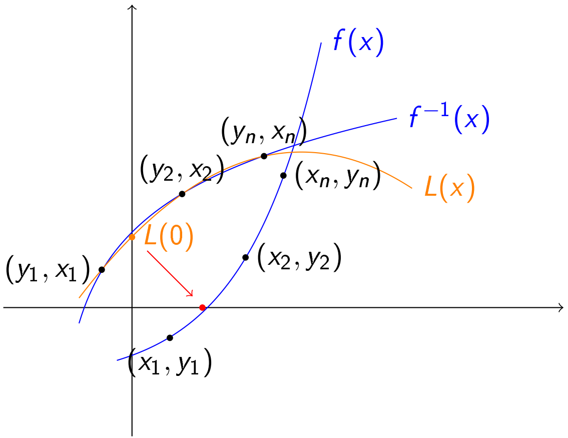
Inverz interpoláció



Inverz interpoláció



Inverz interpoláció



A spline interpoláció alapötlete, hogy a szomszédos alappontok közt polinomokkal interpolálunk.

A köbös spline egyenlete

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x), & \text{ha} \quad a = x_1 \le x < x_2 \\ s_2(x), & \text{ha} \quad x_2 \le x < x_3 \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x), & \text{ha} \quad x_{n-1} \le x \le x_n = b \end{cases}$$

A spline interpoláció alapötlete, hogy a szomszédos alappontok közt polinomokkal interpolálunk.

A köbös spline egyenlete

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x), & \text{ha} \quad a = x_1 \le x < x_2 \\ s_2(x), & \text{ha} \quad x_2 \le x < x_3 \\ & \vdots \\ s_{n-1}(x), & \text{ha} \quad x_{n-1} \le x \le x_n = b \end{cases}$$

ahol

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

A spline interpoláció alapötlete, hogy a szomszédos alappontok közt polinomokkal interpolálunk.

A köbös spline egyenlete

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x), & \text{ha } a = x_1 \le x < x_2 \\ s_2(x), & \text{ha } x_2 \le x < x_3 \\ & \vdots \\ s_{n-1}(x), & \text{ha } x_{n-1} \le x \le x_n = b \end{cases}$$

ahol

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Köbös spline interpoláció

A köbös spline négy definiáló tulajdonsága

1. $S(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
2. $s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \ldots, n-1\} \quad (S(x) \in C[a, b])$,

A köbös spline négy definiáló tulajdonsága

1. $S(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
2. $s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \ldots, n-1\} \ \ (S(x) \in C[a, b])$,
3. $s_i'(x_i) = s_{i-1}'(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \ldots, n-1\} \ \ (S'(x) \in C[a, b])$,

A köbös spline négy definiáló tulajdonsága

1. $S(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
2. $s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \ldots, n-1\} \ \ (S(x) \in C[a, b])$,
3. $s_i'(x_i) = s_{i-1}'(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \ldots, n-1\} \ \ (S'(x) \in C[a, b])$,
4. $s_i''(x_i) = s_{i-1}''(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \ldots, n-1\} \ \ (S''(x) \in C[a, b])$.

A köbös spline négy definiáló tulajdonsága

1. $S(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
2. $s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \ldots, n-1\} \ \ (S(x) \in C[a, b])$,
3. $s_i'(x_i) = s_{i-1}'(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \ldots, n-1\} \ \ (S'(x) \in C[a, b])$,
4. $s_i''(x_i) = s_{i-1}''(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \ldots, n-1\} \ \ (S''(x) \in C[a, b])$.

Az egyszerűség kedvéért mostantól tételezzünk fel ekvidisztáns alappontválasztást, tehát $h = x_{i+1} - x_i$, $\forall i \in \{1, 2, .., n-1\}$ esetén.

$s_i(x)$-ek együtthatói

$$
\begin{aligned}
a_i &= \frac{M_{i+1} - M_i}{6h} \\
b_i &= \frac{M_i}{2} \\
c_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - h\frac{M_{i+1} + 2M_i}{6} \\
d_i &= y_i
\end{aligned}
$$

Köbös spline interpoláció

Az egyszerűség kedvéért mostantól tételezzünk fel ekvidisztáns alappontválasztást, tehát $h = x_{i+1} - x_i, \ \forall i \in \{1, 2, .., n-1\}$ esetén.

$s_i(x)$-ek együtthatói

$$
\begin{aligned}
a_i &= \frac{M_{i+1} - M_i}{6h} \\
b_i &= \frac{M_i}{2} \\
c_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - h\frac{M_{i+1} + 2M_i}{6} \\
d_i &= y_i
\end{aligned}
$$

ahol $\quad M_i + 4M_{i+1} + M_{i+2} = 6\dfrac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{h^2}$

$$(M_i = s_i''(x_i) = S''(x_i)) \qquad \forall i \in \{1, 2, .., n-1\}.$$

Az egyszerűség kedvéért mostantól tételezzünk fel ekvidisztáns alappontválasztást, tehát $h = x_{i+1} - x_i, \ \forall i \in \{1, 2, .., n-1\}$ esetén.

$s_i(x)$-ek együtthatói

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{M_{i+1} - M_i}{6h} \\ b_i &= \frac{M_i}{2} \\ c_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - h\frac{M_{i+1} + 2M_i}{6} \\ d_i &= y_i \end{aligned}$$

ahol $$M_i + 4M_{i+1} + M_{i+2} = 6\frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{h^2}$$

$$(M_i = s_i''(x_i) = S''(x_i)) \quad \forall i \in \{1, 2, .., n-1\}.$$

Utóbbi összefüggést mátrixos alakba írva:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n
\end{pmatrix}
= \frac{6}{h^2}
\begin{pmatrix}
y_1 - 2y_2 + y_3 \\
y_2 - 2y_3 + y_4 \\
y_3 - 2y_4 + y_5 \\
\vdots \\
y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\
y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\
y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n
\end{pmatrix}
$$

A lineáris egyenletrendszer alul-determinált: a bal oldali mátrixnak n oszlopa és $n-2$ sora van.

Utóbbi összefüggést mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix}$$

A lineáris egyenletrendszer alul-determinált: a bal oldali mátrixnak n oszlopa és $n - 2$ sora van.

Néhány gyakori köbös spline típus

1. Természetes spline

Utóbbi összefüggést mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & & & . & . & . & . \\ . & . & . & . & & . & & . & . & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ . \\ . \\ . \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix}$$

A lineáris egyenletrendszer alul-determinált: a bal oldali mátrixnak n oszlopa és $n-2$ sora van.

Néhány gyakori köbös spline típus

1. Természetes spline
2. Parabolikus lefutású spline

Utóbbi összefüggést mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & & & . & . & . & . \\ . & . & . & . & & . & & . & . & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ . \\ . \\ . \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix}$$

A lineáris egyenletrendszer alul-determinált: a bal oldali mátrixnak n oszlopa és $n-2$ sora van.

Néhány gyakori köbös spline típus

1. Természetes spline
2. Parabolikus lefutású spline
3. Köbös lefutású spline

Utóbbi összefüggést mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & & & . & . & . & . \\ . & . & . & . & & . & & . & . & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ . \\ . \\ . \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix}$$

A lineáris egyenletrendszer alul-determinált: a bal oldali mátrixnak n oszlopa és $n-2$ sora van.

Néhány gyakori köbös spline típus

1. Természetes spline
2. Parabolikus lefutású spline
3. Köbös lefutású spline

Természetes spline

$$M_1 = M_n = 0$$

Az egyenlőség bal oldala ekkor így alakul (a jobb oldal nem változik):

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & & & . & . & . \\ . & . & . & & . & & . & . & . \\ . & . & . & & & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix}$$

Természetes spline

$$M_1 = M_n = 0$$

Az egyenlőség bal oldala ekkor így alakul (a jobb oldal nem változik):

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & & & . & . & . \\ . & . & . & & . & & . & . & . \\ . & . & . & & & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix}$$

Köbös spline interpoláció

Parabolikus lefutású spline

$$M_1 = M_2 \quad \text{és} \quad M_{n-1} = M_n$$

Az egyenlőség bal oldala ekkor így alakul (a jobb oldal nem változik):

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & & & . & . & . \\ . & . & . & & . & & . & . & . \\ . & . & . & & & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix}$$

Parabolikus lefutású spline

$$M_1 = M_2 \quad \text{és} \quad M_{n-1} = M_n$$

Az egyenlőség bal oldala ekkor így alakul (a jobb oldal nem változik):

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & & & . & . & . \\ . & . & . & & . & & . & . & . \\ . & . & . & & & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix}$$

Köbös lefutású spline

$$M_1 = 2M_2 - M_3 \quad \text{és} \quad 2M_{n-1} - M_{n-2} = M_n$$

Az egyenlőség bal oldala ekkor így alakul (a jobb oldal nem változik):

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & & & . & . & . \\ . & . & . & & . & & . & . & . \\ . & . & . & & & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix}$$

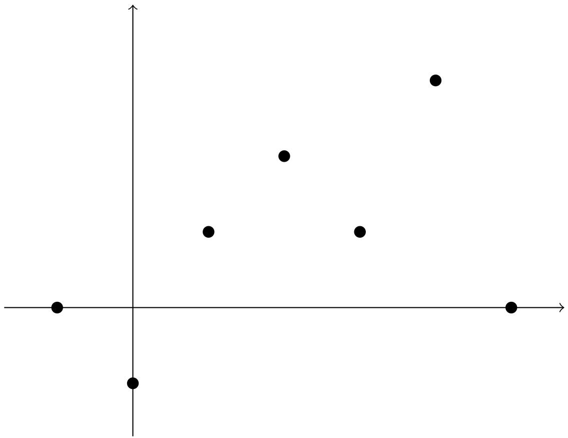
Köbös lefutású spline

$$M_1 = 2M_2 - M_3 \quad \text{és} \quad 2M_{n-1} - M_{n-2} = M_n$$

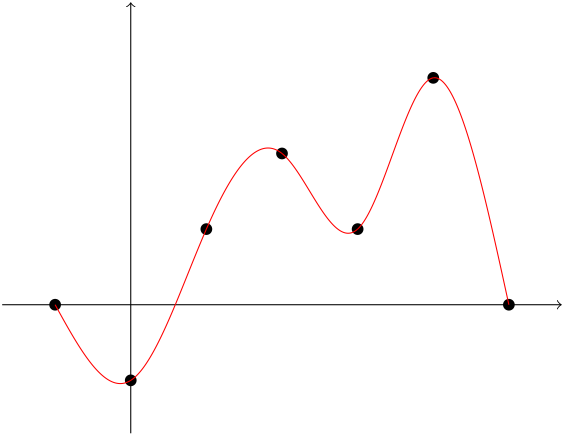
Az egyenlőség bal oldala ekkor így alakul (a jobb oldal nem változik):

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & & & . & . & . \\ . & . & . & & . & & . & . & . \\ . & . & . & & & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix}$$

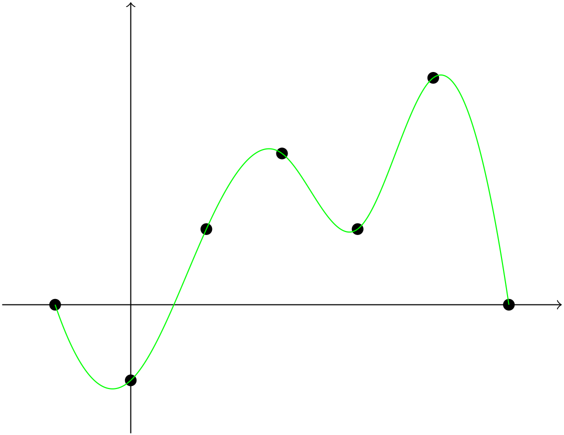
Köbös spline interpoláció



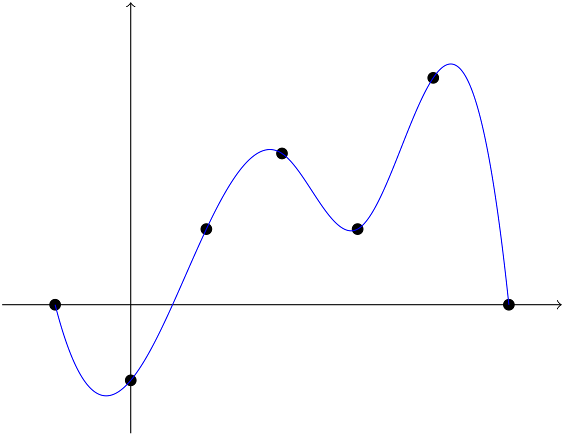
Természetes spline



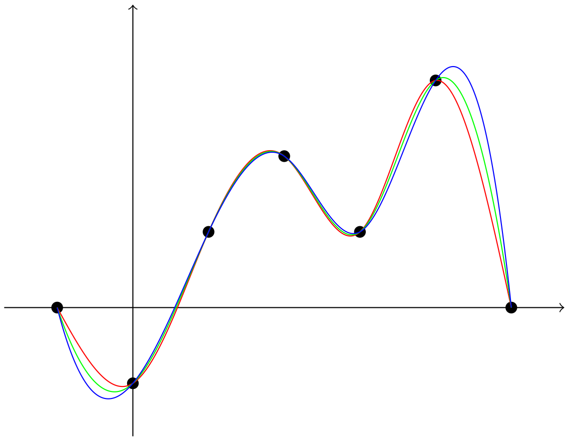
Parabolikus lefutású spline



Köbös lefutású spline



Természetes, parabolikus lefutású és köbös lefutású spline



Irodalomjegyzék:

1. Paál L. Gy.: Ortogonális függvénysorok, Tankönyvkiadó, 1982.
2. Szőkefalvi-Nagy B.: Valós függvények és függvénysorok, Tankönyvkiadó, 1977.
3. I. P. Natanszon: Konstruktív függvénytan, Tankönyvkiadó, 1952.
4. N. I. Ahijezer: Előadások az approximáció elméletéről, Akadémiai Kiadó, 1951.
5. Losonczi László: Funkcionálanalízis I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
6. Járai Antal: Modern alkalmazott analízis, Typotex, Budapest, 2007.
7. C. W. Onneweer: On uniform convergence for Walsh–Fourier series, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 34, No. 1, 1970.
8. Székelyhidi László: Ortogonális sorok, Debrecen, 2006
9. Galántai Aurél-Jeney András: Numerikus módszerek, 2005

Készült LaTeXBeamer, TikZ, PDFLaTeX, Maxima és Gnuplot segítségével.

Ha bármilyen hibát talál a prezentációban, kérem jelezze a blahota@nyf.hu címen! Köszönöm!