Alkalmazott matematika kidolgozott feladatok

Blahota István

2006. szeptember 25.

1. Sorozatok

a. Vizsgálja meg monotonitás és korlátosság szempontjából az alábbi sorozatokat! Ha konvergens, számolja ki a határértékét, valamint keressen $\epsilon = 0,01$-hoz küszöbindexet!

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{6n-1}{2n+3}(\text{sz. m. nő,} 1 \leq a_n < 3, a_n \to 3, n_0 = 498) \\
b_n &= \frac{2^n-3}{2^n-9}(\text{nem mon.}, -5 \leq b_n \leq \frac{13}{7}, b_n \to 1, n_0 = 9) \\
c_n &= \frac{-n^2-1}{2n^2+3n}(\text{nem mon.}, -\frac{1}{2} < c_n \leq -\frac{10}{27}, c_n \to -\frac{1}{2}, n_0 = 72)
\end{aligned}$$

b. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékeit!

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2n^2-3n^3+1}{n^2+1}(= -\infty), \qquad b_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}(= 0), \\
c_n &= \frac{2n^2-\sqrt[4]{3n^7+2n}+\sqrt{n^4+\pi}}{n^2+1}(= 3), \qquad d_n = \left(\frac{n-1}{2n+2}\right)^{2006n}(= 0), \\
e_n &= \frac{2^{3n+3}+e3^{n+2}+n^{13}2^{n+3}}{8^{n-1}-\pi 5^n}(= 64), \qquad f_n = \left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)^{n+17}(= e^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

2. Sorok

a. Mennyivel egyenlő az alábbi sorok összege?

$$\sum_{n=2}^{\infty} 3\left(-\frac{2}{3}\right)^n \left(= \frac{4}{5}\right), \quad \sum_{n=3}^{\infty} 22\frac{2^{4n-2}}{3^{2n+7}}(= \infty)$$

b. Mennyivel egyenlő az alábbi mértani sorok összege?

$$\frac{4}{9}-\frac{1}{3}+\ldots\left(= \frac{16}{63}\right), \quad \frac{4}{7}-\frac{3}{5}+\ldots(\text{nem létezik})$$

c. Végesek vagy nem az alábbi sorok?

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{17n}{31^n}(< \infty), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(3n)!}(< \infty), \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+|\sin n|}{n^2}(= \infty), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(30n)!}{2006^n}(= \infty)$$

3. Függvényhatárérték.

a. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = 1$ b. $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = e-1$ c. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \infty$

d. $\lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 2$ e. $\lim_{x\to 5}(x-5)3^x = 0$ f. $\lim_{x\to -1} \frac{x^4+3x^3+2}{x^2+1} = 0$

g. $\lim_{x\to 0} \frac{3^x-1}{x} = \ln 3$ h. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^3-x} = \frac{5}{2}$ i. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-4}{x^3-x} = 0$

j. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(13x)}{\sin(6x)} = \frac{13}{6}$ k. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2(3x)-\sin^6(5x)}{7x^2} = \frac{9}{7}$ l. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = 0$

4. Függvények deriválja.

a. $\left(-\operatorname{ctg}\left(\log_2(x^{-0,23})3^{e^x}\right) - e^{2006}\right)' =$

$$\frac{1}{\sin^2(\log_2(x^{-0,23})3^{e^x})}\left(\frac{1}{x^{-0,23}\ln 2}(-0,23)x^{-1,23}3^{e^x} + \log_2(x^{-0,23})3^{e^x}\ln 3\cdot e^x\right)$$

b. $\left(\frac{(x^3+1)^2\sin(3x)}{x^4+4\operatorname{tg}(\sin x)}\right)' =$

$$\frac{(2(x^3+1)3x^2\sin(3x)+(x^3+1)^2\cos(3x)3)(x^4+4\operatorname{tg}(\sin x))-(x^3+1)^2\sin(3x)(4x^3+\frac{4\cos x}{\cos^2(\sin x)})}{(x^4+4\operatorname{tg}(\sin x))^2}$$

c. $\left(\frac{\sin(\sin(\sin(x)))}{\cos(\cos(x))}\right)' =$

$$\frac{\cos(\sin(\sin(x)))\cos(\sin(x))\cos(x)\cos(\cos(x))-\sin(\sin(\sin(x)))\sin(\cos(x))\sin(x)}{\cos^2(\cos(x))}$$

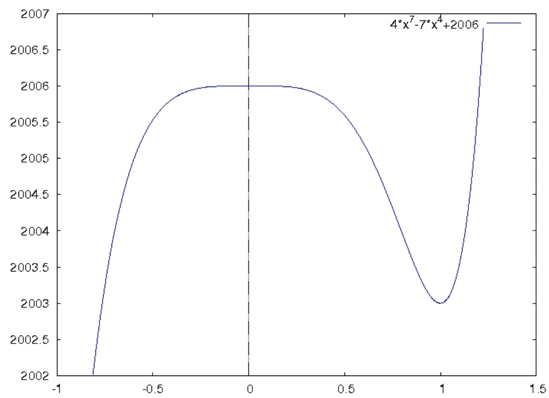
d. $\left(x^2 2^x\sin^2(2x)\right)' =$

$$2x2^x\sin^2(2x)+x^2(2^x\ln(2)\sin^2(2x)+2^x 2\cos(2x)\sin(2x)2)$$

5. Függvényvizsgálat

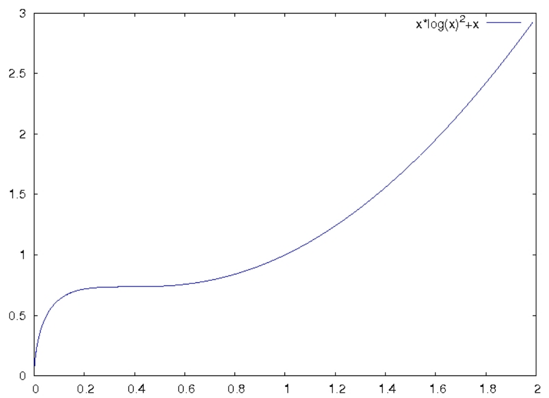
Hol monoton növekvőek az alábbi függvények? Mik a szélsőértékhelyeik? Hol konvexek? Hol vannak az inflexiós pontjaik? Mik a határértékeik az értelmezési tartományaik határain?

a. $f(x) = 4x^7 - 7x^4 + 2006$. Monoton növekvő ha $x < 0$ vagy ha $x > 1$, lokális minimuma van az 1 helyen, lokális maximuma van a 0 helyen. Globális szélsőértékhelyei nincsenek. Konvex, ha $x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, inflexiós pont az $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ helyen.



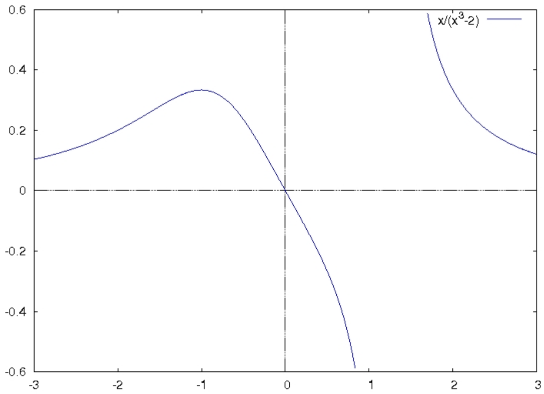
1. ábra. $f(x) = 4x^7 - 7x^4 + 2006$

b. $g(x) = x\ln^2(x) + x$. Mindenütt monoton növekvő ahol értelmezve van, vagyis ha $x > 0$. Semmilyen értelemben véve nincsenek szélsőértékhelyei. Konvex, ha $x = \frac{1}{e}$, inflexiós pont az $\frac{1}{e}$. $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$



2. ábra. $g(x) = x\ln^2(x) + x$

c. $h(x) = \frac{x}{x^3-2}$. Monoton növekvő ha $x < -1$, lokális maximuma van a -1 helyen. Egyéb szélsőértékhelyei nincsenek. Konvex, ha $x < -\sqrt[3]{4}$ vagy ha $x > \sqrt[3]{2}$, inflexiós pontja a $-\sqrt[3]{4}$ helyen van.



3. ábra. $h(x) = \frac{x}{x^3-2}$

6. Határozatlan integrál

$$a. \int \sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}dx = \frac{6x^{\frac{13}{6}}}{13} + c$$

$$b. \int xe^{2x}dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c$$

$$c. \int \frac{6x^2+8}{x^3+4x}dx = 2\ln|x^3+4x| + c$$

$$d. \int (e^x+x)(2e^x+x^2)^6 dx = \frac{(2e^x+x^2)^7}{14} + c$$

$$e. \int \frac{6x^2}{7x^3} + \ln(2x+1)dx = \frac{6}{7}\ln|x| + x\ln(2x+1) - x + \frac{\ln|2x+1|}{2} + c$$

7. Határozott integrál

$$a.\quad \int_0^1 \sqrt[3]{x^2}\sqrt{x^3}dx = \left[\frac{6x^{\frac{19}{6}}}{19}\right]_0^1 = \frac{6}{19}$$

$$b.\quad \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sin^2(x)}dx = \left[\ln\left|\sin^2(x)\right|\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$c.\quad \int_0^{\pi} x\sin(2x)dx = \left[-x\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

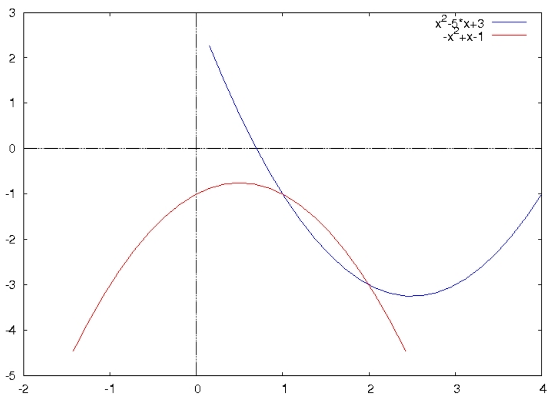
$$d.\quad \int_0^{\pi} (\cos(x)+3x)\left(\frac{2}{3}\sin(x)+x^2\right)^7 dx = \left[\frac{3}{2}\frac{\left(\frac{2}{3}\sin(x)+x^2\right)^8}{8}\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi^{16}}{16}$$

$$e.\quad \int_2^3 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{(\sqrt[3]{x})^5} + \mathrm{tg}(-x+3\pi)dx = [\ln|x| + \ln|\cos(-x+3\pi)|]_2^3 = \ln\left|\frac{3\cos(3)}{2\cos(2)}\right|$$

8. Területszámítás

Számítsuk ki az alábbi függvények által határolt idomok területét!

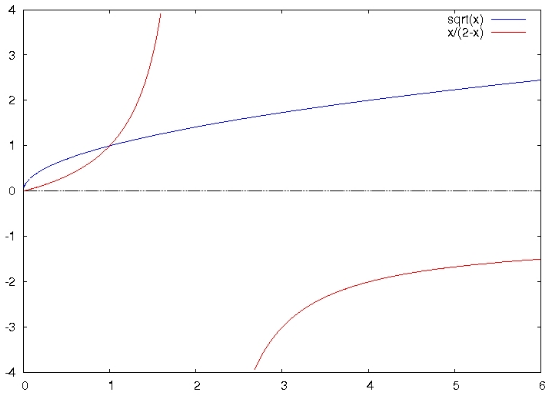
a.



4. ábra. $f(x) = x^2 - 5x + 3,\ g(x) = -x^2 + x - 1$

$$T_a = \left|\int_1^2 -x^2 + x - 1 - (x^2 - 5x + 3)dx\right| = \left|\left[-2\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 4x\right]_1^2\right| = \frac{1}{3}$$

b.



5. ábra. $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = \frac{x}{2-x}$

$$T_a = \left| \int_0^1 \sqrt{x} - \frac{x}{2-x} dx \right| = \left| \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + x + 2\ln|x-2| \right]_0^1 \right| = \frac{5}{3} - 2\ln(2)$$

Ha hibát talál benne, nekem szóljon :-) `blahota@nyf.hu`