Metrikus terek, többváltozós függvények

2003.10.15

Készítette: Dr. Toledo Rodolfo és Dr. Blahota István

1. Metrikus terek, metrika tulajdonságai

1.1. *A valós, komplex, racionális, természetes és egész számok halmazát* $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{N}$ *és* $\mathbf{Z}$ *módon jelöljük.*

1.2. Definició. *Legyen* $M \neq \emptyset$ *egy adott halmaz és* $\varrho : M \times M \to \mathbf{R}$ *olyan függvény, amelyre teljesül*

$$\varrho(x,y) \geq 0 \qquad \text{és} \qquad \varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \tag{i}$$

$$\varrho(x,y) = \varrho(y,x), \tag{ii}$$

$$\varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y), \tag{iii}$$

minden $x, y, z \in M$ *esetén. Ekkor az* (M, ϱ) metrikus tér*nek nevezzük. Ugyanakkor azt mondjuk, hogy* ϱ *egy* metrika *vagy* távolságfüggvény M*-en.*

1.3. Tétel. *Legyen* (M, ϱ) *egy metrikus tér,* $M_1 \subset M$ *és* $\varrho_1 : M_1 \times M_1 \to \mathbf{R}$ *a* ϱ $M_1 \times M_1$*-re való leszűkítése. Ekkor* (M_1, ϱ_1) *egy metrikus tér.*

1.4. *A fenti tételben szereplő* (M_1, ϱ_1) *egy metrikus teret az* (M, ϱ) *metrikus tér* alterének, ϱ_1*-t pedig* relatív metrikának *nevezzük. Általában* (M_1, ϱ_1) *helyett* (M_1, ϱ)*-t írunk.*

1.5. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbf{N}$ *és* $M = R^n$*, valamint*

$$\varrho(x,y) := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

minden $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R^n}$ *és* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R^n}$ *esetén. Ekkor* (M, ϱ) *metrikus tér és a* ϱ *függvényt* természetes metrikának *nevezzük.*

Feladatok

1.1. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\varrho(x,y) := |x - y| \qquad (x, y \in \mathbf{R})$$

metrika a valós számok halmazán. (*természetes metrika*)

1.2. Legyen $M \neq \emptyset$. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\varrho(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{ha } x = y, \\ 1 & \text{ha } x \neq y \end{cases} \qquad (x, y \in M)$$

metrika M-en. (*diszkrét metrika*)

1.3. Döntsük el a következő függvényekről, hogy metrikák-e a valós számok halmazán.

$$\varrho_1(x,y) := (x-y)^2, \qquad \varrho_2(x,y) := \sqrt{|x-y|}, \qquad \varrho_3(x,y) := |x^2 - y^2|,$$

$$\varrho_4(x,y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|, \qquad \varrho_5(x,y) := |2x - y|, \qquad \varrho_6(x,y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|},$$

$$\varrho_7(x,y) := \begin{cases} |x-y| & \text{ha } x \leq y, \\ 1 + |x-y| & \text{ha } x > y \end{cases}, \qquad \varrho_8(x,y) := |e^x - e^y|.$$

1.4. Igaz-e, hogy minden nemüres halmaz metrizálható, azaz minden nemüres halmazon lehet metrikát értelmezni? Válaszát indokolja!

1.5. Igaz-e, hogy minden nemüres halmazon lehet végtelen sok metrikát értelmezni? Válaszát indokolja!

1.6. Legyen $M := \{\blacklozenge, \blacksquare, \bigstar\}$. Döntsük el a következő függvényekről, hogy metrikák-e M-en.

ϱ_1	$\blacklozenge$	$\blacksquare$	$\bigstar$
$\blacklozenge$	0	1	2
$\blacksquare$	1	0	1
$\bigstar$	2	1	0

ϱ_2	$\blacklozenge$	$\blacksquare$	$\bigstar$
$\blacklozenge$	0	1	2
$\blacksquare$	1	0	3
$\bigstar$	2	3	0

ϱ_3	$\blacklozenge$	$\blacksquare$	$\bigstar$
$\blacklozenge$	0	1	2
$\blacksquare$	1	0	5
$\bigstar$	2	5	0

1.7. Legyen M egy háromelemű halmaz. Adjuk meg a szükséges és elégséges feltételeket ahhoz, hogy a ϱ függvény metrika legyen M-en.

1.8. Legyen $M := \{\diamondsuit, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$. Adjon a diszkrét metrikától eltérő metrikát M-en.

1.9. Legyen $M \neq \emptyset$ és $f : M \to \mathbf{R}$ egy kölcsönösen egyértelmű függvény. Bizonyítsuk be, hogy

$$\varrho(x,y) := |f(x) - f(y)| \qquad (x, y \in M)$$

metrika M-en.

1.10. Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér és $f : [0, \infty[\to \mathbf{R}$ egy valós függvény. Az f függvény milyen feltételei mellett lesz a

$$\varrho_1(x, y) := f(\varrho(x, y)) \qquad (x, y \in M)$$

függvény metrika M-en.

1.11. Legyen $M := \mathbf{N}^+$, valamint

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} |x - y| & \text{ha } |x - y| < 10 \\ 10 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Bizonyítsuk be, hogy (M, ϱ) metrikus tér.

1.12. Legyen $M := \mathbf{R}$, valamint

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{ha } x = y \\ 1 & \text{ha } x - y \in \mathbf{Q} \setminus \{0\} \\ 3 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Bizonyítsuk be, hogy (M, ϱ) metrikus tér.

1.13. Legyen $M := \mathbf{R^2}$, valamint

$$\begin{aligned} \varrho_1(x, y) &:= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \\ \varrho_2(x, y) &:= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \\ \varrho_3(x, y) &:= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \end{aligned}$$

minden $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R^2}$ és $y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R^2}$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy ϱ_1, ϱ_2 és ϱ_3 metrika M-en.

1.14. Általánosítsa az 1.13. feladatot $M := \mathbf{R^n}$ $(n \in \mathbf{N},\ n \geq 2)$ és sorozatok esetére is.

1.15. Legyen $M := \mathcal{C}([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbf{R} :\ f \text{ folytonos}\}$, valamint

$$\begin{aligned} \varrho_1(f, g) &:= \sqrt{\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)^2 \, dx}, \\ \varrho_2(f, g) &:= \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx, \\ \varrho_3(f, g) &:= \max_{a \leq x \leq b} \{|f(x) - g(x)|\}, \end{aligned}$$

minden $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy ϱ_1, ϱ_2 és ϱ_3 metrika M-en.

1.16. Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér, C egy pozitív szám, valamint

$$\varrho_1(x,y) := C\varrho(x,y), \qquad \varrho_2(x,y) := \frac{\varrho(x,y)}{1+\varrho(x,y)}, \qquad \varrho_3(x,y) := \sqrt{\varrho(x,y)},$$

minden $x, y \in M$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy ϱ_1, ϱ_2 és ϱ_3 metrika M-en.

1.17. Legyen $M \neq \emptyset$, valamint ϱ_a és ϱ_b metrika M-en. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\varrho_1 := \sqrt{\varrho_a^2 + \varrho_b^2}$, $\varrho_2 := \varrho_a + \varrho_b$ és $\varrho_3 := \max\{\varrho_a, \varrho_b\}$ szintén metrika M-en.

1.18. Bizonyítsuk be, hogy a metrikus tér definíciójában szereplő három tulajdonság egymástól függetlenek, vagyis adjunk példát olyan $\varrho : M \times M \to \mathbf{R}$ függvényekre, amelyekre teljesül a metrika két tulajdonsága de a harmadik nem.

1.19. Legyen $M \neq \emptyset$ egy adott halmaz és $\varrho : M \times M \to \mathbf{R}$ olyan függvény, amelyre teljesül

$$\varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \tag{i}$$
$$\varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(y,z), \tag{ii}$$

minden $x, y, z \in M$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy (M, ϱ) metrikus tér.

1.20. Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér és $x, y, z, u, v \in M$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\varrho(x,y) \leq \varrho(x,u) + \varrho(u,v) + \varrho(v,y), \tag{1}$$
$$|\varrho(x,y) - \varrho(u,v)| \leq \varrho(x,u) + \varrho(y,v), \tag{2}$$
$$|\varrho(x,y) - \varrho(x,z)| \leq \varrho(y,z). \tag{3}$$

2. Környezet, belső-, külső-, határpontok. Torlódási pontok

2.1. Definició. *Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér, $x \in M$ és $r > 0$. Az*

$$G(x,r) := \{y \in M : \ \varrho(x,y) < r\}$$

halmazt az x középpontú *r* sugarú nyílt gömb*nek vagy* környezet*nek nevezzük.*

2.2. Tétel. *Legyen (M_1, ϱ) altere az (M, ϱ) metrikus térnek, $x \in M_1$ és $r > 0$. Továbbá jelölje $G(x,r)$ és $G_1(x,r)$ az x középpontú r sugarú környezet az M és M_1 metrikus térben. Ekkor*

$$G_1(x,r) = G(x,r) \cap M_1.$$

2.3. Definició. *Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér és $A \in M$.*

(1) $x \in M$ belső pont*ja* A*-nak, ha* $\exists r > 0$ *úgy, hogy* $G(x,r) \subseteq A$*. Az* A *halmaz összes belső pontjainak halmazát* a halmaz belsejének *nevezzük és* int A*-val jelöljük.*

(2) $x \in M$ külső pont*ja* A*-nak, ha* $\exists r > 0$ *úgy, hogy* $G(x,r) \subseteq \overline{A}$*. Az* A *halmaz összes külső pontjainak halmazát* a halmaz külsejének *nevezzük és* ext A*-val jelöljük.*

(3) $x \in M$ határpont*ja* A*-nak, ha minden* $r > 0$ *esetén* $G(x,r)$ *tartalmaz* A*-beli és nem* A*-beli elemet. Az* A *halmaz összes határpontjainak halmazát a* halmaz határának *nevezzük és* mar A*-val jelöljük.*

(4) $x \in M$ torlódási pont*ja* A*-nak, ha minden* $r > 0$ *esetén* $G(x,r)$ *tartalmaz* x*-től különböző* A*-beli elemet. Az* A *halmaz összes torlódási pontjainak halmazát* A'*-gal jelöljük.*

(5) $x \in A$ izolált pont*ja* A*-nak, ha nem torlódási pontja* A*-nak.*

(6) *Az* A halmaz lezártja*:* $\widehat{A} := A \cup A'$.

Feladatok

2.1. Legyen $M = \mathbf{R}$, valamint

$$\varrho_1(x,y) := |x-y|, \qquad \varrho_2(x,y) := \sqrt{|x-y|}, \qquad \varrho_3(x,y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|},$$

$$\varrho_4(x,y) := |e^x - e^y|, \quad \varrho_5(x,y) := |f(x)-f(y)|, \text{ ahol } f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x \neq 0. \end{cases},$$

minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén. Továbbá, legyen ϱ_6 a diszkrét metrika. Adjuk meg minden esetben a $G(0, \frac{1}{2})$ halmazt.

2.2. Legyen $M := \mathbf{R}^+$ és $\varrho(x,y) := |f(x) - f(y)|$, ahol

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{ha } 0 < x < 1, \\ x & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}.$$

Adjuk meg az 1 középpontú $\frac{1}{3}$ sugarú környezetet ebben a metrikus térben.

2.3. Legyen $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbf{R}$ egy kölcsönösen egyértelmű függvény és $\varrho(x,y) := |f(x) - f(y)|$ minden $x, y \in M$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy

$$G(x,r) = f^{-1}(f(x) - r, f(x) + r) \qquad (x \in M,\ r > 0).$$

2.4. Adjuk meg a 3 középpontú 4 sugarú környezetet az 1.11. feladatban megadott metrikus térben.

2.5. A 1.12 feladatban megadott metrikus térben adjuk meg a következő halmazokat.

$$a)\ G(2003,2), \qquad b)\ G(\pi,2), \qquad c)\ G(0,4).$$

2.6. Bizonyítsuk be, hogy diszkrét metrikus térben a környezetek az egyelemű halmazok és maga az egész tér.

2.7. A 1.13. feladatban megadott metrikus terek esetén adjuk meg az origó középpontú 1 sugarú környezetet és ábrázoljuk a koordinátarendszerben.

2.8. Legyen $M := \mathcal{C}([a,b])$, valamint $\varrho(f,g) := \max_{a\le x\le b}\{|f(x)-g(x)|\}$ minden $f,g\in\mathcal{C}([a,b])$ esetén. Mit jelent ebben a metrikus térben a $G(f,r)$ környezetet?

2.9. Legyen $M := [0,1]\cup]2,4]$ és $\varrho(x,y) := |x-y|$ minden $x,y\in\mathbf{R}$ esetén. Adjuk meg a következő halmazokat:

$$a)\ G(0,1),\quad b)\ G(1,2),\quad c)\ G(1,4),\quad d)\ G(4,2),\quad e)\ G(4,3),\quad f)\ G(4,4).$$

2.10. Bizonyítsuk be, hogy a környezetek eleget tesznek a Hausdorff-féle tulajdonságokra, azaz:

(1) Minden környezet tartalmazza saját középpontját.

(2) Minden környezet tartalmazza bármely pontjának egy környezete.

(3) A tér bármely két különböző pontjának van diszjunkt környezetei.

2.11. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges metrikus térben bármely pont egyenlő környezeteinek metszetével.

2.12. Adjuk meg olyan metrikus teret, ahol egy 3 sugarú környezet valódi része lehet egy 2 sugarú környezetnek.

2.13. Bizonyítsuk be, hogy bármely metrikus térben egy $2r$ vagy annál nagyobb sugarú környezet nem lehet valódi része egy r sugarú környezetnek.

2.14. Bizonyítsuk be, hogy bármely metrikus térben egy elem torlódási pontja egy halmaznak, ha bármely környezete tartalmaz végtelen sok halmazbeli elemet.

2.15. A 2.1. feladatban és az 1.11. feladatban megadott metrikus terek esetén adjuk meg a következő halmazok belső, külső és határpontjait, valamint torlódási és izolált pontjait.

$$a)\ ]0,1[,\quad b)\ [0,1],\quad c)\ ]-\infty,1[,\quad d)\ \mathbf{Z},\quad e)\ \mathbf{Q},\quad d)\ \left\{\frac{1}{n}\ :\ n\in\mathbf{N}^+\right\},$$

2.16. A 1.13. feladatban megadott metrikus terek esetén adjuk meg a

$$A := \left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)\ :\ n,m\in\mathbf{N}^+\right\}$$

halmaz belső, külső és határpontjait, valamint torlódási és izolált pontjait.

2.17. Bizonyítsuk be, hogy diszkrét metrikus térben egyetlen halmaznak sincs határpontja.

2.18. Bizonyítsuk be, hogy egyetlen metrikus térben, egyetlen halmaz határának sincs belső pontja.

2.19. Bizonyítsuk be, hogy ha $M := \mathbf{R}$ és ϱ a természetes metrika, akkor minden $A \subseteq M$ esetén $\operatorname{int} A \subseteq A'$.

2.20. Legyen (M,ϱ) egy metrikus tér és $A \subseteq M$. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $\operatorname{int} A$, $\operatorname{ext} A$ és $\operatorname{mar} A$ páronként diszjunkt halmazok, és egyesítésük M.

(b) $\operatorname{mar} A = \operatorname{mar} \overline{A}$.

(c) $\widehat{A} = A \cup \operatorname{mar} A$ és $\operatorname{int} A = A \setminus \operatorname{mar} A$.

(d) $\overline{(\widehat{A})} = \operatorname{int}(\overline{A})$ és $\overline{\operatorname{int} A} = \widehat{(\overline{A})}$

(e) $\operatorname{mar} A = \widehat{A} \setminus \operatorname{int} A$

2.21. Legyen (M,ϱ) egy metrikus tér és $A, B \subseteq M$. Bizonyítsuk be, hogy

(a) ha $A \subseteq B$, akkor $\operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int} B$ és $\widehat{A} \subseteq \widehat{B}$.

(b) $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$ és $\widehat{(\widehat{A})} = \widehat{A}$.

(c) $\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$ és $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$.

2.22. Igaz-e, hogy bármely metrikus térben egy halmaz lezártja egyenlő a halmaz belsejének lezártjával? Válaszát indokolja!

2.23. Legyen (M,ϱ) egy metrikus tér, $x \in M$ és $r > 0$. Az $F(x,r) := \{y \in M\ :\ \varrho(x,y) \le r\}$ halmaz az x *középpontú* r *sugarú zárt gömb*nek nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy $F(x,r) = \widehat{G(x,r)}$.

2.24. Legyen (M_1, ϱ) altere az (M, ϱ) metrikus térnek és $A \subseteq M_1$. Milyen kapcsolata van az A (M_1, ϱ)-beli és (M, ϱ)-beli belseje, lezártja, határa között?

2.25. Legyen M egy végtelen halmaz. Adjuk meg olyan metrikát M-en, hogy az M halmaznak legyen torlódási pontja.

2.26. Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér és $A \subseteq M$. Igaz-e, hogy A és $\widehat{A}$, illetve A és A' torlódási pontjainak halmaza egyenlő? Válaszát indokolja!

3. Nyílt, zárt halmazok

3.1. Definició. *Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér és $A \in M$. Az A halmazt* nyíltnak *nevezzük, ha minden eleme belső pontja a halmaznak. Egy halmazt* zártnak *nevezzük, ha komplementere nyílt halmaz.*

3.2. Tétel. *Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér. Ekkor*

(1) az M és az üres halmaz nyílt halmaz.

(2) nyílt halmazok egyesítése nyílt.

(3) véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.

3.3. Tétel. *Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér. Ekkor*

(1) az M és az üres halmaz zárt halmaz.

(2) véges sok zárt halmaz egyesítése zárt.

(3) zárt halmazok metszete zárt.

3.4. Tétel. *Metrikus térben egy halmaz akkor és csak akkor zárt ha tartalmazza az összes torlódási pontjait.*

3.5. Tétel. *Legyen (M_1, ϱ) altere az (M, ϱ) metrikus térnek és $A_1 \subseteq M_1$. Az A_1 halmaz nyílt (zárt) az (M_1, ϱ) metrikus térben, ha van olyan $A \subseteq M$ nyílt (zárt) halmaz úgy, hogy $A_1 = A \cap M_1$.*

Feladatok

3.1. Bizonyítsuk be, hogy bármely metrikus térben egy halmaz nyílt akkor és csak akkor, ha komplementere zárt.

3.2. Állapítsuk meg hogy a 2.15. feladatban megadott halmazok a feladathoz kapcsolódó metrikus terekben nyílt, zárt halmazok, vagy egyik sem.

3.3. Állapítsuk meg hogy a 2.16. feladatban megadott halmaz a feladathoz kapcsolódó metrikus térben nyílt, zárt halmaz, vagy egyik sem.

3.4. Bizonyítsuk be, hogy a 1.11. és a 1.12. feladatban megadott metrikus térben minden halmaz nyílt és zárt egyszerre.

3.5. Bizonyítsuk be, hogy diszkrét metrikus térben minden halmaz nyílt és zárt egyszerre.

3.6. Bizonyítsuk be, hogy egy metrikus térben akkor és csak akkor nyílt minden halmaz, ha benne az egyelemű halmazok környezetek.

3.7. Legyen $M :=]-3,0] \cup [1,2] \cup]3,5[$ és ϱ a természetes metrikából származó relatív metrika M-en. Bizonyítsuk be, hogy ebben a metrikus térben a $]-3,0]$, $[1,2]$ és $]3,5[$ halmaz nyílt és zárt egyszerre.

3.8. Bizonyítsuk be, hogy a 2.2. feladatban megadott metrikus térben a $]0,2[$ halmaz nyílt, de a $]\frac{1}{2},2[$ halmaz nem nyílt.

3.9. Bizonyítsuk be, hogy a 2.1. feladatban megadott első négy metrikus térben ugyanazok a nyílt halmazok.

3.10. Legyen M egy intervallum (akár nem korlátos is) és $f : M \to \mathbf{R}$ egy kölcsönösen egyértelmű folytonos függvény. Továbbá, legyen $\varrho(x,y) := |f(x) - f(y)|$ minden $x, y \in M$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy ebben a metrikus térben az f függvénytől függetlenül ugyanazok a nyílt halmazok.

3.11. Bizonyítsuk be, hogy metrikus térben minden nyílt gömb nyílt halmaz és minden zárt gömb zárt halmaz.

3.12. Bizonyítsuk be, hogy bármely metrikus térben minden véges elemű halmaz és minden halmaz határa zárt halmaz.

3.13. Bizonyítsuk be, hogy bármely metrikus térben egy halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha előáll az általa tartalmazott nyílt halmazok egyesítéseként. Hasonlóképpen, egy halmaz akkor és csak akkor zárt, ha előáll az őt tartalmazó zárt halmazok metszeteként.

3.14. Legyen (M,ϱ) egy metrikus tér és $A, B \subseteq M$. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $\operatorname{int} A$ és $\operatorname{ext} A$ nyílt halmaz.

(b) A akkor és csak akkor nyílt halmaz, ha $A = \operatorname{int} A$.

(c) ha $A \subseteq B$ és A nyílt, akkor $A \subseteq \operatorname{int} B$.

(d) ha A nyílt és B zárt, akkor $A \setminus B$ nyílt halmaz.

(e) ha A zárt és B nyílt, akkor $A \setminus B$ zárt halmaz.

(f) A' és $\widehat{A}$ zárt halmaz.

(g) A akkor és csak akkor zárt halmaz, ha $A = \widehat{A}$.

(h) ha $A \subseteq B$ és B zárt, akkor $\widehat{A} \subseteq B$.

3.15. Legyen $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho)$ a 2.8. feladatban megadott metrikus tér, valamint

$$A_1 : = \left\{ f \in \mathcal{C}([a,b]) : \inf_{a \le x \le b} \{f(x)\} > 0 \right\}, \quad A_2 : = \{ f \in \mathcal{C}([a,b]) : f(a) = 0 \},$$
$$A_3 : = \{ f \in \mathcal{C}([a,b]) : f(a) + f(b) = 1 \}, \quad A_4 := \{ f \in \mathcal{C}([a,b]) : f(a) = f(b) \}.$$

Bizonyítsuk be, hogy A_1 nyílt halmaz és A_2, A_3, A_4 zárt halmaz.

4. Korlátos, kompakt halmazok

4.1. Definició. *Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér és $A \in M$. Az A halmazt* korlátosnak *nevezzük, ha van a térnek olyan környezete, ami tartalmazza az A halmazt, azaz $\exists x \in M, r > 0$ úgy, hogy $A \subseteq G(x,r)$.*

4.2. Definició. *Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér és $A \in M$. Az A halmazt* kompaktnak *nevezzük, ha minden olyan $\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ nyílt halmazrendszerből, amely lefedi az A halmazt ($A \subseteq \cup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$), kiválasztható véges sok olyan $\{G_{i_1}, G_{i_2}, \dots G_{i_n}\}$ halmazt, amely lefedi az A halmazt ($A \subseteq \cup_{k=1}^n G_{i_k}$).*

4.3. Tétel. *Egy metrikus térben minden kompakt halmaz korlátos és zárt.*

4.4. Tétel. *Egy metrikus térben a kompakt halmazok zárt részhalmazai is kompaktak.*

4.5. Tétel. *Egy metrikus térben egy kompakt halmaz minden végtelen részhalmazának van torlódási pontja.*

4.6. Tétel. (Heine-Borel) *Legyen $n \in \mathbf{N}$ és $M = \mathbf{R}^n$, valamint ϱ a természetes metrika $\mathbf{R}^n$-en. Ebben a metrikus térben egy halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Feladatok

4.1. A 2.1. feladatban megadott metrikus terek esetén döntsük el, hogy a következő halmazok korlátosak-e és ha igen, akkor kompakt halmazok-e.

$$a)\ ]-\infty,0], \qquad b)\ [0,1].$$

4.2. Legyen (M,ϱ) egy metrikus tér és $x_0 \in M$ a térnek egy fix pontja. Bizonyítsuk be, hogy egy $A \subseteq M$ halmaz akkor és csak akkor korlátos, ha van olyan $r > 0$ szám, hogy $A \subseteq G(x_0, r)$.

4.3. Bizonyítsuk be, hogy diszkrét metrikus térben minden halmaz korlátos.

4.4. Legyen $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbf{R}$ egy kölcsönösen egyértelmű függvény és $\varrho(x,y) := |f(x) - f(y)|$ minden $x, y \in M$ esetén. Továbbá $A \subseteq M$. Bizonyítsuk be, hogy az A halmaz akkor és csak akkor korlátos ebben a metrikus térben, ha az $f(A)$ halmaz korlátos a természetes metrika szerint.

4.5. Bizonyítsuk be, hogy metrikus térben minden véges halmaz korlátos, sőt kompakt is.

4.6. Igaz-e a 4.3. tétel megfordítása? Válaszát indokolja!

4.7. Legyen (M,ϱ) egy metrikus tér és A, $B \subseteq M$. Bizonyítsuk be, hogy ha A kompakt és B zárt, akkor $A \cap B$ kompakt halmaz.

4.8. Bizonyítsuk be, hogy metrikus térben véges sok korlátos halmaz egyesítése is korlátos.

4.9. Bizonyítsuk be, hogy metrikus térben véges sok kompakt halmaz egyesítése is kompakt.

4.10. Bizonyítsuk be, hogy metrikus térben kompakt halmazok metszete is kompakt.

4.11. Adjunk meg olyan metrikus teret, ahol található olyan H_n $(n \in \mathbf{N})$ zárt és egymást tartalmazó $(H_{n+1} \subseteq H_n\ (n \in \mathbf{N}))$ halmazokból álló sorozatot, amely tagjainak metszete üres $(\cap_{k=1}^{\infty} H_k = \emptyset)$. Bizonyítsuk be, hogy kompakt halmazok ilyen sorozata nem létezik.

4.12. Igaz-e a 4.5. tétel, ha kompakt halmaz helyett korlátos halmazt tételezzük fel? Válaszát indokolja!

4.13. Legyen $M := \mathbf{R}$, $f : M \to \mathbf{R}$ egy szigorúan monoton folytonos függvény és $\varrho(x,y) := |f(x) - f(y)|$ minden $x, y \in M$ esetén. Továbbá $A \subseteq M$. Bizonyítsuk be, hogy az A halmaz akkor és csak akkor kompakt ebben a metrikus térben, ha az $f(A)$ halmaz korlátos és zárt a természetes metrika szerint.

4.14. Legyen (M_1, ϱ) altere az (M, ϱ) metrikus térnek és $A \subseteq M_1$. Bizonyítsuk be, hogy az A halmaz kompakt az (M_1, ϱ) metrikus térben, ha az (M, ϱ) metrikus térben is az.

5. Sorozatok metrikus terekben

5.1. Definició. *Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér. Az $a : \mathbf{N} \to M$ függvényt* sorozatnak *nevezzük. Jelölése: $\langle a_n \rangle$.*

5.2. Definició. *Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér és $\langle a_n \rangle$ egy sorozat.*

(1) Azt mondjuk, hogy az $\langle a_n \rangle$ sorozat konvergens a ϱ metrika szerint és határértéke *az $a \in M$ (a-hoz tart), ha bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > n_0$ index esetén $\varrho(a_n, a) < \varepsilon$. Jelölés: $a_n \xrightarrow{\varrho} a$. (Ha ϱ a természetes metrika akkor csak a $a_n \to a$ jelölést alkalmazzuk.*

(2) Az $\langle a_n \rangle$ sorozat divergens *ha nem konvergens, vagyis nincs határértéke.*

(3) Az $\langle a_n \rangle$ sorozat korlátos *ha értékkészlete korlátos halmaz a metrikus térben.*

(4) Azt mondjuk, hogy az $\langle a_n \rangle$ sorozat Cauchy-sorozat, *ha bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > n_0$ index esetén $\varrho(a_n, a_m) < \varepsilon$.*

(5) Az $x_0 \in M$ torlódási pontja *az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak, ha az x_0 minden környezete végtelen sok sorozatbeli elemet tartalmaz*

5.3. Tétel. *Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér és $\langle a_n \rangle$ egy sorozat.*

(1) Ha az $\langle a_n \rangle$ sorozat konvergens, akkor Cauchy-sorozat.

(2) Ha az $\langle a_n \rangle$ Cauchy-sorozat, akkor korlátos.

(3) ha az $\langle a_n \rangle$ korlátos sorozat és értékkészlete egy kompakt halmaz részhalmaza, akkor a sorozatnak van torlódási pontja.

5.4. Definició. *Egy metrikus teret* teljes metrikus térnek *nevezünk ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens.*

5.5. Definició. *Az M halmazon értelmezett két metrikát* ekvivalensnek *nevezünk, ha minden sorozat, amely konvergens az egyik metrika szerint, konvergens a másik metrika szerint is.*

Feladatok

5.1. Bizonyítsuk be, hogy $a_n \xrightarrow{\varrho} a$ akkor és csak akkor ha $\varrho(a_n, a) \to 0$.

5.2. Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér és $a_n \xrightarrow{\varrho} a$, $b_n \xrightarrow{\varrho} b$ a tér két konvergens sorozata. Bizonyítsuk be, hogy $\varrho(a_n, b_n) \to \varrho(a, b)$.

5.3. Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér és $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$ a tér két Cauchy-sorozata. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $\langle \varrho(a_n, b_n) \rangle$ sorozat konvergens a természetes metrika szerint.

5.4. Bizonyítsuk be, hogy $a_n \xrightarrow{\varrho} a$ akkor és csak akkor, ha az a minden környezetéből legfeljebb véges sok sorozatbeli elem marad ki.

5.5. Bizonyítsuk be, hogy egy sorozatnak legfeljebb egy határértéke lehet ugyanabban a metrikában.

5.6. Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér. Bizonyítsuk be, hogy ha az M halmaznak van legalább két eleme, akkor van a térnek korlátos és divergens sorozata.

5.7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy sorozat konvergens, akkor egyetlen torlódási pontja van.

5.8. Bizonyítsuk be, hogy ha egy sorozatnak van két torlódási pontja, akkor nem konvergens. Igaz-e, hogy ha pontosan egy torlódási pontja van, akkor konvergensnek kell lennie? Válaszát indokolja!

5.9. Bizonyítsuk be, hogy ha egy sorozat értékkészletének van torlódási pontja, akkor ez egyben a sorozat torlódási pontja is. Igaz-e az előző állítás megfordítása? Válaszát indokolja!

5.10. Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér és $A \subseteq M$. Bizonyítsuk be, hogy x_0 akkor és csak akkor torlódási pontja az A halmaznak, ha van olyan az $A \setminus \{x_0\}$ halmaz elemeiből álló sorozat, amely x_0-hoz tart.

5.11. Igazoljuk a 5.3. tételt.

5.12. Adjuk példát teljes és nem teljes metrikus terekre.

5.13. Bizonyítsuk be, hogy diszkrét metrikus térben egy sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha véges sok elemétől eltekintve állandó sorozat. Bizonyítsuk be, hogy minden diszkrét metrikus tér teljes.

5.14. Bizonyítsuk be, hogy minden kompakt metrikus tér teljes.

5.15. Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér és $A \subseteq M$. Bizonyítsuk be, hogy az A halmaz akkor és csak akkor zárt, ha minden az A halmaz elemeiből álló konvergens sorozat határértéke az A halmaz eleme.

5.16. Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér és $A \subseteq M$. Bizonyítsuk be, hogy az A halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha minden az A halmaz elemeiből álló Cauchy-sorozat konvergens és határértéke az A halmaz eleme.

5.17. Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér és $A, B \subseteq M$. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B diszjunkt halmazok, az A kompakt és a B zárt halmaz, akkor

$$\inf\{\varrho(a, b) : a \in A,\, b \in B\} > 0.$$

Igaz-e a fenti állítás két zárt halmaz esetében? Válaszát indokolja!

5.18. Legyen $M :=]0, 1]$ és ϱ a természetes metrika. Bizonyítsuk be, hogy az $a_n := \dfrac{1}{n}$ sorozat divergens, de Cauchy-sorozat.

5.19. Bizonyítsuk be, hogy az 1.12. feladatban megadott metrikus tér teljes.

5.20. Döntsük el, hogy a 2.2. feladatban megadott metrikus térben a következő sorozatok konvergensek-e és ha igen, akkor mi a határértékük.

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = 1 - \frac{1}{n+1}, \qquad c_n = 1 + \frac{1}{n}.$$

5.21. Döntsük el, hogy a 2.1. feladatban megadott metrikák szerint a következő sorozatok konvergensek-e és ha igen, akkor mi a határértékük.

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = -n, \qquad c_n = n.$$

5.22. Legyen $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbf{R}$ egy kölcsönösen egyértelmű függvény és $\varrho(x, y) := |f(x) - f(y)|$ minden $x, y \in M$ esetén. Továbbá $\langle a_n \rangle$ egy sorozat. Bizonyítsuk be, hogy $a_n \xrightarrow{\varrho} a$ akkor és csak akkor $f(a_n) \to f(a)$. Bizonyítsuk be, hogy $\langle a_n \rangle$ Cauchy-sorozat, ha az $\langle f(a_n) \rangle$ sorozat konvergens a természetes metrika szerint.

5.23. Legyen $M \subseteq \mathbf{R}$, $f : M \to \mathbf{R}$ egy kölcsönösen egyértelmű függvény és $\varrho(x, y) := |f(x) - f(y)|$ minden $x, y \in M$ esetén. Továbbá legyen $a \in M$ a függvény egy folytonossági pontja. Bizonyítsuk be, hogy $a_n \xrightarrow{\varrho} a$ akkor és csak akkor, ha $a_n \to a$.

5.24. Legyen $M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbf{R}$ egy kölcsönösen egyértelmű függvény és $\varrho(x, y) := |f(x) - f(y)|$ minden $x, y \in M$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy (M, ϱ) akkor és csak akkor teljes metrikus tér, ha az $f(M)$ halmaz zárt a természetes metrikában.

5.25. Döntsük el, hogy a 2.1. feladatban megadott metrikák közül melyek ekvivalensek.

5.26. Bizonyítsuk be, hogy az 1.13. feladatban megadott három metrika ekvivalens.

5.27. Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér, ahol az M halmaz nem korlátos. Adjunk meg olyan metrikát M-en, amiben az M halmaz korlátos lesz.

5.28. Legyen M egy halmaz és ϱ_1, ϱ_2 két metrika M-en. Bizonyítsuk be, hogy ha léteznek olyan α és β pozitív számok, hogy

$$\alpha\varrho_1(x, y) \leq \varrho_2(x, y) \leq \beta\varrho_1(x, y) \qquad (x,\, y \in M),$$

akkor a ϱ_1 és ϱ_2 metrikák ekvivalensek. Igaz-e az állítás megfordítása? Válaszát indokolja!

5.29. Legyen M egy halmaz és ϱ_1, ϱ_2 két ekvivalens metrika M-en. Bizonyítsuk be, hogy ekkor egy adott halmaz belső-, külső-, határpontjai és torlódási pontjai egybeesnek a két (M, ϱ_1) és (M, ϱ_2) metrikus térben.

5.30. Legyen $M \subseteq \mathbf{R}$, $f : M \to \mathbf{R}$ egy kölcsönösen egyértelmű függvény és $\varrho(x, y) := |f(x) - f(y)|$ minden $x, y \in M$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény folytonos, akkor a ϱ metrika és a természet metrika ekvivalensek.