1. A csónak mozgása lassul a víz ellenállásának hatására, amely egyenesen arányos a csónak sebességével. A csónak kezdősebessége $\frac{3}{2}\frac{m}{s}$, sebessége $4s$ múlva $1\frac{m}{s}$ lesz. Mikorra csökken a sebesség $1\frac{cm}{s}$-ra? Mekkora utat tud megállásáig a csónak megtenni?

Megoldás:

A differenciálegyenlet a következő: $v'(t) = kv(t)$. Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet. Az ezzel ekvivalens integrálegyenlet az alábbi: $\int \frac{1}{v}dv = \int kdt$, ahonnan $\ln|v| = kt + c$. Innen az egyenlet megoldása $v(t) = Ce^{kt}$.

Mivel $v(0) = \frac{3}{2}$, így $C = \frac{3}{2}$, tehát $v(t) = \frac{3}{2}e^{kt}$. Másrészt $1 = v(4) = \frac{3}{2}e^{4k}$, ahonnan $e^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$, vagyis $v(t) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}-1}$. A keresett időt a $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}-1} = 0,01$ egyenletet megoldva kapjuk, ami $t = 4\left(\frac{\ln 0,01}{\ln\frac{2}{3}} + 1\right) = 49,43(s)$.

A megtett utat az alábbi (improprius) integrál szolgáltatja:

$$\int_0^\infty v(t)dt = \int_0^\infty \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}} dt = \frac{3}{2}\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}}}{\frac{1}{4}\ln\frac{2}{3}}\right]_0^\infty = -\frac{6}{\ln\frac{2}{3}} = 14,80(m)$$

2. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték problémát:

$$xy' = 3y, \quad y(1) = 2$$

Megoldás:

A változókat szétválasztva $\displaystyle\int \frac{1}{y}dy = -3\int \frac{1}{x}dx$ adódik, innen $\ln|y| = -3\ln|x| + c$, vagyis $y = \dfrac{C}{x^3}$.

A kezdetiérték probléma megoldása $2 = \dfrac{C}{1^3}$, vagyis $C = 2$ miatt $y = \dfrac{2}{x^3}$.

3. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$x^2y' + xy = -1$$

Megoldás:

Ez egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet, amit könnyen láthatunk ha átírjuk a

$$y' + \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2} = 0$$

alakba. A homogenizált változatot megoldva $Y = \dfrac{c}{x}$ adódik. Konstanst variálva $c(x) = -\ln|x|$ egyenlőségetet kapjuk, ahonnan az eredeti egyenlet megoldása $y = \dfrac{c - \ln|x|}{x}$.