ANALÍZIS II.

Előadást követő vázlatok

Differenciálszámítás
A derivált (differenciálhányados)

Definíció:

$f:\langle a,b\rangle \to \Re$ és $x_0 \in \langle a,b\rangle$. Az *f* függvény deriválható (differenciálható) az x_0 pontban, ha létezik a

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$-lal jelölt véges határérték.

Ezt az $f'(x_0)$-al jelölt határétéket az *f* x_0 pontbeli deriváltjának (differenciálhányadosának) nevezzük.

Használatosak még az

$f(x_0)$; $\dfrac{df}{dx} / x = x_0$; $\dfrac{df(x)}{dx} / x = x_0$; $y'(x_0)$; $\dfrac{dy}{dx} / x = x_0$ jelölések.

Ha (1)-ben féloldali határértéket tekintünk, akkor a féloldali derivált fogalmához jutunk.

Jelölése $f'_-(x_0)$, ill. $f'_+(x_0)$ (baloldali, ill. jobboldali derivált)

T: $f \Leftrightarrow$ deriválható x_0-ban ha ott létezik mindkétoldali féloldali derivált és ezek megegyeznek.

Definíció:

Ha $f:\langle a,b\rangle \to \Re$ függvény az $\langle a,b\rangle$ minden pontjában deriválható, akkor azt mondjuk, hogy *f* deriválható $\langle a,b\rangle$-n.

Ekkor (1) szerint adott

$f':\langle a,b\rangle \to \Re$ függvény, melyet *f* derivált függvényének nevezzük.

Geometriai jelentés (ábrát lásd az előadáson)

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ differenciahányados

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \operatorname{tg}\alpha$ differenciálhányados

Más jelölés:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

A differenciahányadosra gyakran $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, ill. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ jelölést is használjuk.

A deriválhatóság és folytonosság kapcsolata

T: Ha az $f:\langle a,b\rangle \to \Re$ függvény deriválható az $x_0 \in \langle a,b\rangle$ pontban, akkor *f* folytonos x_0-ban.

Bizonyítandó: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ az $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=$$

$$=f'(x_0)\cdot 0=0$$

A tétel megfordítása nem igaz.

Pl.: $f(x)=|x|$ folytonos az $x_0=0$ helyen, de nem deriválható a $x_0=0$ helyen.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

A deriválhatóság és a műveletek

T: Ha $f,g:\langle a,b\rangle \to \Re$ függvények deriválhatóak az $x_0 \in \langle a,b\rangle$ pontban, akkor az

a) $F=f\pm g$

b) $F=c\cdot f \quad (c\in\Re)$

c) $F=f\cdot g$

és

d) $g(x_0)\neq 0$ esetén $F=\dfrac{f}{g}$ is deriválható x_0-ban és

a) $F'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$

b) $F'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$

c) $F'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)$

d) $F'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Bizonyítás:

a) házi feladat

b) házi feladat

c)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Ugyanis $x\to x_0$ esetén $g(x)\to g(x_0)$ a g folytonossága miatt.

d)
$$\lim_{x\to x_o}\frac{F(x)-F(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_o)}{g(x_o)}}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{1}{\mathrm{g(x)\cdot g(x_o)}}\;\frac{f(x)g(x_o)-f(x_o)\cdot g(x)+f(x_o)g(x_o)-f(x_o)g(x_o)}{}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{1}{g(x)g(x_o)}\left[\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\;g(x_o)-f(x_o)\;\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}\right]=$$

$$=\frac{f'(x_o)g(x_o)-f(x_o)g'(x_o)}{g^2(x_o)}$$

ugyanis g folytonossága miatt $x\to x_o$ esetén $g(x)\to g(x_o)$.

Az összetett függvény deriváltja

T: ! $g:<a,b>\to<c,d>$ és $f:<c,d>\to\mathbb{R}$ (Lánc-szabály) Ha a g függvény deriválható $x_o\in<a,b>$ -ban és a f függvény deriválható $g(x_o)\in<c,d>$-ban, akkor a $F=f\,o\,g$ is deriválható x_o-ban és

$$F'(x_o)=f'(g(x_o))\cdot g'(x_o)$$

Biz: $$\lim_{x\to x_o}\frac{F(x)-F(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{f(g(x))-f(g(x_o))}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{f(g(x))-f(g(x_o))}{g(x)-g(x_o)}\,\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{g(x)\to g(x_o)}\frac{f(g(x))-f(g(x_o))}{g(x)-g(x_o)}\cdot\lim_{x\to x_o}\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}=f'(g(x_o))\cdot g'(x_o)$$

ugyanis $x\to x_o$ esetén g folytonossága miatt $g(x)\to g(x_o)$.

Az inverz függvény deriváltja

T: Ha $f :< a,b > \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton folytonos függvény $< a,b >$-n és $x_o \in < a,b >$-ben $f'(x_o) \neq 0,$ akkor f^{-1} is deriválható $f(x_o)$-ban és

$$f^{-1'}(f(x_o)) = \frac{1}{f'(x_o)}$$

* Ha az x_o pontban $f'(x_o) = 0,$ akkor f^{-1} nem deriválató az $f(x_o)$-ban.

B: Mivel f szigorúan monoton és folytonos ezért f^{-1} is szigorúan monoton és folytonos.

$$\lim_{f(x)\to f(x_o)} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_o))}{f(x) - f(x_o)} = \lim_{y\to x_o} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}} = \frac{1}{f'(x_o)}$$

Ugyanis $f(x) \to f(x_o)$ akkor $x = f^{-1}(f(x)) \to f^{-1}(f(x_o)) = x_o$

* Bizonyítás: Indirekt: Tegyük fel, hogy f^{-1} $f(x_o)$-ban deriválható, akkor

$f^{-1}(f(x)) = x$ deriváltja az x_o helyen az összetett függvény deriváltja szerint.

$f^{-1}(f(x_o)) \cdot f'(x_o) = 1,$ ami ellentmond $f'(x_o) = 0$ -nak.

Megjegyzés: 1) a, kiterjeszthető tetszőleges n tagot tartalmazó összegre.

2) c, n tényezős szorzat esetén

$$(f_1 \cdot f_2 \ldots \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \ldots f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \ldots \quad f_n + \ldots \quad + f_1 \cdot f_2 \ldots \cdot f_n'$$

Az elemi függvények deriváltjai

	f az x pontban	*f' az x pontban*
1.	$c(c \in \Re)$	*0*
2.	x	1
3.	$x^n \left(n \in \aleph\right)$	nx^{n-1}
4.	$x^\alpha \left(\alpha \in \Re\right)$	$\alpha x^{\alpha-1}$
5.	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
6.	$\sin x$	$\cos x$
7.	$\cos x$	$-\sin x$
8.	$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
9.	$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
10.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11.	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
12.	$arc\ \mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
13.	$arc\ \mathrm{ctg}\, x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
14.	e^x	e^x
15.	$a^x \left(a \in \Re^+, a \neq 1\right)$	$a^x \cdot \ln a$
16.	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
17.	$\log_a x\left(a \in \Re^+, a \neq 1\right)$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
18.	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$

Bizonyítás:

1) triviális

2) $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{x - x_o}{x - x_o} = 1.$

3) a, $n = 1$-re igaz

b, Tételezzük fel, hogy $x^n = n \cdot x^{n-1}$

c, $\left(x^{n+1}\right) = \left(x \cdot x^n\right) = x^n + x \cdot nx^{n-1} = x^n(n+1)$

6, $$\lim_{x \to x_o} \frac{\sin x - \sin x_o}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{2\sin\frac{x - x_o}{2} \cdot \cos\frac{x + x_o}{2}}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{\sin\frac{x - x_o}{2}}{\frac{x - x_o}{2}} \cdot \cos\frac{x + x_o}{2} = \cos x_o$$

7, $$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

8, $$(\mathrm{tg}\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x \cdot + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

9, $$(\mathrm{ctg}\, x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin}\right) = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

10, $!\, y = \arcsin x$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

11, $$(\arccos x)' = \frac{1}{\sin y} = \frac{-1}{\sin ar \cos x} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

12, $$(ar\, \mathrm{ctg}\, x)' = \frac{1}{(\mathrm{tg}\, y)} = \cos^2 y = \cos^2 arc\; \mathrm{tg}\, x = \frac{1}{1 + x^2}$$

13, $$(ar\, \mathrm{ctg}\, x)' = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y(-\sin^2 arc\; \mathrm{tg}\, x = \frac{-1}{1 + x^2}$$

16, $$\lim_{x \to x_o} \frac{\ln x - \ln x_o}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{\ln\frac{x}{x_o}}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \ln\left(\frac{x}{x_o}\right)^{\frac{1}{x - x_o}} =$$

$$= \lim_{x \to x_o} \ln\left(\frac{x_o + x - x_o}{x_o}\right)^{\frac{1}{x-x_o}} = \lim_{x \to x_o} \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{x_o}{x - x_o}}\right)^{\frac{x_o}{x-x_o}\cdot\frac{1}{x_o}} =$$

$$= \frac{1}{x_o} \ln \lim_{x \to x_o}\left(1 + \frac{1}{\frac{x_o}{x - x_o}}\right)^{\frac{x_o}{x-x_o}} = \frac{1}{x_o}\ln e = \frac{1}{x_o}$$

17, $(\log_a x)' = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

15, $y = a^x \qquad x = \log_a y$

$$y' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a$$

14, $(e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x$

4, $x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$

$$(x^\alpha)' = e^{\alpha \cdot \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha - 1}$$

5, $!\alpha = \frac{1}{2}$

18. $!x > 0 \qquad \ln|x| = \ln x$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$!x < 0 \qquad \ln|x| = \ln(-x)$

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

19. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

20. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

21. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

22. $(\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Logaritmikus deriválás

$! y = f(x)^{g(x)}$
$\ln y = g(x) \ln f(x)$
$y = e^{g(x)\ln f(x)}$
$y' = e^{g(x)\ln f(x)}\left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)\right]$

Magasabbrendü deriváltak

D: $! f :< a,b > \to \mathbb{R}$ és $x_o \in < a,b >$, és tekintsük az f függvény f' deriváltfüggényét. Ha f' deriválható x_o-ban azaz létezik a

$\lim\limits_{x \to x_o} \frac{f'(x) - f'(x_o)}{x - x_o} = f''(x_o)$ véges határérték akkor ezt az f x_o-beli második deriváltjának nevezzük.

Jelölje: $f(x_o)$, $\frac{d^2 f(x_o)}{dx^2}$, $\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x = x_o}$, $y''(x_o)$

Hasonlóan lehet definiálni a k-adik deriváltat is

$$\lim_{x \to x_{oo}} \frac{\overset{(k-1)}{f}(x) - \overset{(k-1)}{f}(x_o)}{x - x} = \overset{(k)}{f}(x_o)$$

Deriválható függvények tulajdonságai

A szélsőértékszámítás alaptétele

T(Fermat): $! f :< a,b > \to \mathbb{R}$ és $x_o \in (a,b)$. Ha f deriválható x_o-ban és x_o az f lokális szélsőértékhelye, akkor $f'(x_o) = 0$.

B: $! x_o$ lokális max. hely, azaz $\exists V(x_o)$ úgy, hogy $\forall x \in \exists V(x_o)$ esetén $f(x_o) \geq f(x)$

$\lim\limits_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'_+(x_o)$ Mivel $\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \leq 0$ ezért $f'_+(x_o) \leq 0$

$\lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'_-(x_o)$ $\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geq 0$ ezért $f'_-(x_o) \geq 0$

Mivel f deriválható x_o-ban ezért a $f'_+(x_o) = f'_+(x_o) = f'(x_o)$

$f'(x_o) = 0.$

Megjegyzés: 1) Geometriailag azt jelenti, hogy a szélsőérték helyen a függvény görbéhez húzható érintő párhuzamos az x tengellyel.

2) Ha x_o az intervallum végpontja, akkor ott is lehet szélsőérték ha a derivált $\neq 0$.

A tétel megfordítása nem igaz.

Pl: $f(x) = x^3$ deriváltja $x_o = 0$ helyen 0, de $f -$nek $\nexists$ szélsőértéke $x_o = 0 -$ban.

Intervallumon monoton függvény

T: $!f :< a,b > \to \mathbb{R}$ és f deriválható $< a,b > -n$. Ha f monoton növekvő (csökkenő) $< a,b >$, akkor $f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0) < a,b > -n$.

Bizonyítás: $!f$ monoton növekvő és $x_o \in < a,b >$ tetszőleges.

a) ha $x < x_o \Rightarrow f(x) < f(x_o)$

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geq 0 \text{ és így}$$

$$f'_{-}(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geq 0$$

b) ha $x_o < x \Rightarrow f(x_o) < f(x)$

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geq 0, \text{ és így}$$

$$f'_{+}(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geq 0$$

c) a deriválhatósága miatt

$$0 \leq f'_{-}(x_o) = f'_{+}(x_o) = f'(x_o)$$

A differenciálszámítás középértéktételei

T: (Rolle-tétel) $!f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ha

1) f folytonos $[a,b] - n$
2) f deriválható (a,b)-n és
3) $f(a) = f(b)$, akkor $\exists \xi \leftarrow (a,b)$, hogy $f'(\xi) = 0$.

B: f folytonos $[a,b]$-n $\Rightarrow$ felveszi maximumát, minimumát $[a,b]$-ben. Ha

a) a maximumát vagy a minimumát az intervallum egy belső pontjában ξ veszi fel, $\Rightarrow f'(\xi) = 0$.
b) a maximumot és minimumot a végpontokban veszi fel akkor $f(a) = f(b)$ miatt f konstans $[a,b]$-n. Konstans függvény deriváltja pedig bármely pontban 0.

Geometriai jelentése: Van legalább egy olyan hely az (a,b)-ben ahol a függvényhez húzható érintő párhuzamos az x tengellyel. (A tétel legalább egy ilyen ζ hely létezését mondja ki, de lehet végtelen sok is.)

T: (Lagrange-tétel) ! $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ha

1) f folytonos $[a,b]$-n
2) f deriválható (a,b)-n akkor $\exists \xi \in (a,b)$, hogy

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bizonyítás:

$$!F(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right]$$

F teljesíti a Rolle-tétel feltételeit 1, 2, triviális $F(a) = F(b) = 0$,

ezért $\exists \quad \xi \in (a,b), \quad F(\xi) = 0$.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

Geometriai jelentés: $\exists$ legalább egy olyan ξ hely, ahol a függvény görbéhez mutató érintő párhuzamos a húrral.

Cauchy-tétel: Ha az $[a,b]$-n értelmezett *f* és *g* függvények teljesítik a Lagrauge-tétel feltételeit és $g(b) \neq g(a)$ és $\forall x \in (a,b)$-re $g(x) \neq 0$, akkor $\exists \xi \in (a,b)$, amelyre

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Bizonyítás: $!F(x) = f(x) - \left[\frac{g(x)-g(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (f(b)-f(a)) + f(a)\right].$

Megismételhető a Lagrauge tételnél mondottak.

Megjegyzés: látható, hogy $g(x) = x$ esetén a Lagrauge-tételt kapjuk.

Darboux-tétel: Ha az $f : [a,b] \to \Re$ függvény deriválható $[a,b]$-n és $f'(a) \neq f'(b)$ továbbá $c \in \Re$ olyan, hogy $f'(a) \lessgtr c \lessgtr f'(b)$, ekkor $\exists \xi \in (a,b), \ f'(\xi) = c$.

Bizonyítás: $!\operatorname{sgn} f'(a) \neq \operatorname{sgn} f'(b)$ pl. $f'(a) > 0$ és $f'(b) < 0$. Megmutatjuk, hogy $\exists \xi \in (a,b)$, hogy $f'(\xi) = 0$.

Az *f* folytonos $[a,b]$-n $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$ ahol *f* felveszi a maximumát (ill. minimumát).

Mivel $f'(a) > 0$ ezért $f'(a) > 0$, azaz ha $x > a \Rightarrow f(x) > f(a)$ hasonlóan $f'(b) < 0 \Rightarrow f'(a) < 0$ azaz ha $x < b \Rightarrow f(x) > f(b)$.

Tehát *f* a maximumát nem *a*-ban, ill. *b*-ben veszi fel, hanem az $[a,b]$ egy belső ξ pontjában. Ekkor $f'(\xi) = 0$ (Fermat-tétel).

$!c \in \Re \ f'(a) \lessgtr c \lessgtr f'(b)$ és tek $F(x) = f(x) - cx$ függvényt.

$F'(a) \cdot F'(b) < 0 \Rightarrow \exists \xi \in (a,b) \ F'(\xi) = f'(\xi) - c = 0$.

A derivált függvény szakadási helyei

Tétel: Ha az f függvénynek az x_0 jobboldali környezetében ($x \rangle x_0$) $\exists$ a deriváltja és $\exists$ a $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = a_j \Rightarrow$ az x_0 helyen $\exists$ $f_j'(x_0)$ és $a_j = \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$.

Bizonyítás: a Largenge-tétel értelmében

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) \text{ ahol } \xi \in (x_0, x)$$

Mivel $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = a_j$ határérték $\exists$, ezért

$$a_j = \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(\xi) = f_j'(x_0) \qquad \text{ui } x \to x_0^{+} \Rightarrow \xi \to x_0^{+}$$

Megjegyzés: hasonlóan lehet igazolni a baloldali határérték és derivált esetén is.

Köv.: Ha az f függvénynek az (a,b) $\forall$ helyén létezik a deriváltja $\Rightarrow$ a derivált függvénynek nem lehetnek elsőfajú szakadási végei.

Bizonyítás: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$ azt jelenti, hogy $f'(x_0) \nexists$.

A differenciálszámítás középértéktételeinek néhány következménye

Rolle-tételéből: $f(a)=f(b)=0$ feltétellel, azt kapjuk, hogy a deriválható f függvény két zérushelye között van az f'-nek zérushelye.

Ebből következik, hogy az f' két egymást követő zérushelye között f-nek legfeljebb egy zérushelye van. (Ha ugyanis kettő lenne, akkor az előbbiek szerint f'-nek ezek között lenne zérushelye azaz a két zérushely nem egymást követő.)

(Ez fontos szerepet játszik az algebrai egyenletek elméletében. Valós gyökök szétválasztása.)

Lagrange-tételéből

1. T: Ha f folytonos $[a,b]$ és f deriváló (a,b), továbbá $f'(x)=0\ \forall x\in(a,b)$-re $\Rightarrow f(x)\equiv c$.

Bizonyítás: ! $x_1 \langle x_2 \in (a,b)$ akkor $\exists\ \xi\in(x_1,x_2)$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi)=0 \text{ azaz } f(x_1)=f(x_2)$$

2. T: Ha $f,g:[a,b]\to\Re$ folytonosak $[a,b]$-n és deriválhatók (a,b), továbbá $f'(x)=g'(x)\ \forall x\in(a,b)$-re, akkor $f(x)=g(x)+c$.

Bizonyítás: !. $h=f-g \qquad h'(x)=f'(x)-g'(x)=0\Rightarrow h(x)=C$

3. T: ! $f:[a,b]\to\Re$ f folytonos $[a,b]$-n és f deriválható (a,b)-n, $f \Leftrightarrow$ monoton növekvő (csökkenő) $[a,b]$-n, ha $f'(x)\geq 0$ $f'(x)\leq 0$ $x\in(a,b)$.

Szükségesség.

Bizonyítás: Ha f monoton növekvő

$$!x\langle x_0 \Rightarrow f(x)\langle f(x_0) \qquad \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \qquad \text{azaz } f'(x_0)\geq 0$$

$$!x_0 x \Rightarrow f(x_0)\langle f(x) \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \qquad \text{azaz } f'_+(x_0)\geq 0$$

A deriválhatóság miatt $0\leq f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)$.

$\Leftarrow$ ha $f'(x)\geq 0$.

$$!\ x_1\langle x_2 \qquad \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi)\geq 0 \quad\Rightarrow\quad f(x_1)\leq f(x_2)$$

T: L' Hospital szabály: ! $f, g : [a,b] \to \Re$ és $x_0 \in (a,b)$, $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Ha $\exists V(x_{0,}\delta)$ úgyhogy *f* és *g* deriválható $V(x_0,\delta)$-ban és $g'(x) \neq 0$ $(x \in V(x_0,\delta) \setminus \{x_0\})$, akkor amennyiben $\frac{f'}{g'}$-nek $\exists$ határérték x_0 ban, akkor $\frac{f}{g}$ is $\exists$ határérték x_0-ban és

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a tétel feltételei az x_0 valamely baloldali $(x_0 - \delta; x_0]$ környezetében teljesülnek.

Mivel $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$-ra, $\exists x \in (x_0 - \delta; x_0)$, hogy az *f* és *g* függvényekre az $[x, x_0]$-on teljesülnek a Cauchy-féle középérték tétel feltételei, így $\exists \xi \in (x, x_0)$ amelyre

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x_0) - f(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{0 - f(x)}{0 - g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

akkor ha $x \to x_0 \Rightarrow \xi \to x_0^-$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{\xi \to x_0^-} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Jobb oldali környezetre hasonlóan lehet igazolni.

Megjegyzés:

1. Féloldali határérték esetén x_0 féloldali környezetében kell teljesülni a feltételeknek.
2. L' Hospital szabályt többször egymásután lehet alkalmazni.
3. A tétel állítása akkor is igaz marad, ha $f(x_0) = g(x_0) = 0$ helyett.

   $\lim_{x \to \infty} |f(x)| = \infty$ ill. $\lim_{x \to \infty} |g(x)| = \infty$ ill. $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$ $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$

   teljesül.

Megjegyzés:

1. Ha $\frac{f'}{g'}$-nek $\nexists$ határérték $\not\Rightarrow \frac{f}{g}$-nek sincs.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2}}{\cos x} \to 0 - \nexists, \text{ helyesen } \lim_{x \to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = 0$$

2. A L'Hospitál-szabály $0 \pm \infty,\ \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ alakú határérték esetén is alkalmazható

például $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\sin x} \quad f(x) = x^{\sin x} \qquad \ln f(x) = \sin x \ln x$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-1 \sin^{-2} x \cdot \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = e^{0} = 1$$

Definíció: Az *f* függvény az x_0 pontban növekvően halad át (növekvő) ha $\exists \vee (x_0)$ úgy, hogy $x \in \vee(x_0)$ *és* $\forall\ \vee \langle x_0$ esetén $f(x) \langle f(x_0)$ és $\forall x \rangle x_0$ esetén $f(x) > f(x_0)$. Hasonlóan lehet definiálni csökkenőre.

T: Ha $f(x)$ x_0-ban deriválható és $f'(x_0) \rangle 0$ akkor f x_0-ban növekvő.

Bizonyítás: Mivel *f* deriválható x_0-ban és $f'(x_0) \rangle 0$, ezért $\exists \vee (x_{0,} \delta)$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rangle 0$$

ha $\quad x \rangle x_0 \Rightarrow f(x) \rangle f(x_0)$

$\quad\quad x \langle x_0 \Rightarrow f(x) \langle f(x_0)$

T: Ha *f* x_0-ban deriválható és növekvően halad át, akkor $f'(x_0) \rangle 0$.

Bizonyítás: Indirekt $f'(x_0) \langle 0 \Rightarrow f$ csökkenően halad át.

A szélsőérték létezésének elégséges feltétele

T: ! $f : V(x_0, \delta) \to \Re$ legalább n-szer deriválható függvény.

Ha $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f_{(x_0)}^{(n-1)} = 0$, de $f_{(x_0)}^{(n)} \neq 0$. Ekkor ha *n* páros *f*-nek x_0-ban $\exists$ szélsőértéke, mégpedig, ha $f_{(x_0)}^{(n)} \langle 0 \Rightarrow \max$, ha $f_{(x_0)}^{(n)} \rangle 0 \Rightarrow \min$. Ha pedig *n* páratlan, akkor $\nexists$ szélsőérték.

Bizonyítás: ! $x \in \vee(x_0, \delta)$ az *f* és $g(x) = (x - x_0)^n$ teljesíti a Cauchy-tétel feltételeit az $[x, x_0]$ -ban. $x \in \vee(x_0, \delta)$ az $f'(x)$ és $g'(x) = n(x - x_0)^{n-1}$ teljesítik a Cauchy-tétel feltételeit, a

$[\xi_1, x_0]$-ban, az $f''(x)$ és $g(x)=n(n-1)(x-x_0)^{n-2}$ tétel a Cauchy-tételt feltételeit a $[\xi_1, x_0]$-ban

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n-(x_0-x_0)^n}=\frac{f'(\xi_1)}{n(\xi_1-x_0)^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(x_0)}{n(\xi_1-x_0)^{n-1}-n(x_0-x_0)^{n-1}}=\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2-x_0)^{n-2}}=$$

$$\frac{f^{(n-1)}_{(\xi_{n-1})}}{n!(\xi_{n-1}-x_0)}$$

$\operatorname{sgn}\dfrac{f^{(n-1)}_{(\xi_{n-1})}}{n!(\xi_{n-1}-x_0)}=?$ Mivel $f^{n}_{(x_0)}\neq 0$, legyen $f^{n}_{(x_0)}\rangle 0 \Rightarrow f^{(n-1)}_{(x)}$ x_0-ban szigorúan monoton növekvően x_0-ban. Az $f^{(n-1)}_{(x_0)}=0$ miatt

$$\left.\begin{array}{l}1.\,ha\ x\langle\xi_{n-1}\langle x_0 \Rightarrow f^{(n-1)}_{(\xi_{n-1})}\langle f^{(n-1)}_{(x_0)}=0\\ 2.\,ha\ x\rangle\xi_{n-1}\rangle x_0 \Rightarrow f^{(n-1)}_{(\xi_{n-1})}\rangle f^{(n-1)}_{(x_0)}=0\end{array}\right\} \qquad \frac{f^{(n-1)}_{(\xi_{n-1})}}{n!(\xi_{n_1}-x_0)}\rangle 0$$

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}\rangle 0$ ha n páros $f(x)-f(x_0)\rangle 0 \Rightarrow f(x)\rangle f(x_0)$

A függvénynek minimuma van.

Ha n páratalan $\begin{array}{l}f(x)-f(x_0)\rangle 0\ \ ha\ x\rangle x_0\\ f(x)-f(x_0)\langle 0\ \ ha\ x\langle x_0\end{array}$ azaz $\nexists$ szélsőérték.

Hasonlóan lehet igazolni $f^{(n)}_{(x_0)}\langle 0$-ra is.

Konvexitás

Definíció: ! $f:[a,b]\to\Re$ és *f* deriválható $\langle a,b\rangle$-n. Az *f* függvény görbéjének az íve $[a,b]$-on alulról konvex (konkáv), ha ez az ív bármely pontjában húzott érintője fölött (alatt) helyezkedik el.

$$f(x)\geq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\quad (f(x)\leq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0))\quad \forall x\neq x_0, x, x_0\in[a,b]$$

esetén.

Az $[a,b]$ helyett lehet $\langle a,b\rangle$.

T: Ha az $f:\langle a,b\rangle\to\Re$ függvény legalább kétszer deriválható $\langle a,b\rangle$-n, akkor *f* $\langle a,b\rangle$-hez tartozó íve alulról konvex (domború), ha $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in\langle a,b\rangle$ és az egyenlőség egyetlen részintervallumon sem áll fenn.

(Hasonlóan lehet a tételt megfogalmazni konkáv (homorú) esetre $f''(x) \le 0$ esetén.)

Bizonyítás: ha $f''(x) \ge 0 \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$-re $\Rightarrow f$ konvex.

Ha $f''(x) \ge 0 \Rightarrow f'(x)$ szigorúan monoton növekvő. $\Rightarrow f(x)$ konvex.

Ui.: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) < f'(x_0)$ ha $\xi < x_0 \qquad \xi \in (x, x_0)$

$f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) > f'(x_0)$ ha $\xi > x_0 \qquad \xi \in (x_0, x)$

$f(x) \ge f'(x_0)\ (x - x_0) + f(x_0)$
ha f konvex (domború) $\Rightarrow f''(x) \ge 0$.

Ha f konvex $\Rightarrow f'$ monoton növekvő.

Ui: ! $x_0 < x_1$

$f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ és
$f(x_1) > f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$.

$f(x) > f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$
$f(x_0) > f'(x_1)(x_0 - x_1) + f(x_1)$

$f'(x_0) < \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < f'(x_1)$ azaz $f'(x)$ monoton növekvő $\Rightarrow f''(x) \ge 0$

Megjegyzés: A tételt úgy is megfogalmazhattuk volna, hogy $f \Leftrightarrow$ konvex (konkáv) $\langle a, b \rangle$-n f' monoton növekvő (csökkenő).

Inflexiós pont

Definíció: Az ! $f : D \to \Re \quad (D \subset \Re\ \textit{és}\ \langle a, b \rangle \subset D)$ az $x_0 \in \langle a, b \rangle$-t az f függvény inflexiós helyének nevezzük, ha $\exists V(x_0)$, hogy $x < x_0$ esetén $f(x)$ alulról konvex (konkáv) és $x > x_0$ esetén $f(x)$ alulról konkáv (konvex).
Az $(x_0; f(x_0))$ pontot inflexiós pontnak nevezzük.
T.: Ha x_0 az f függvény inflexiós helye és f' folytonos x_0 egy $V(x_0)$ környezetében, akkor x_0 az f' helyi szélsőérték helye, azaz $f''(x_0) = 0$.
Biz.: ! x_0, f olyan inflexiós helye, ahol f konvexből konkávba megy át.
Ha $x < x_0 \qquad f''(x) \ge 0 \Rightarrow f'(x)$ mon. növekvő
Ha $x_0 < x \qquad f''(x) \le 0 \Rightarrow f'(x)$ mon. csökkenő

Tehát $f'(x_0)=0$ hisz f' folytonos $V(x_0)$-ban.

Megjegyzés: A tétel megfordítása nem igaz. Pl. $f(x)=x^4$
Tehát $f''(x_0)=0$ csak szükséges feltétel.
Az elégséges, hogy $f'''(x_0)\neq 0$ (általában az első el nem tűnő derivált rendje páratlan legyen.)

T: $f:\langle a,b\rangle\to\Re,\ x_0\in\langle a,b\rangle$ és *f* az x_0-ban legalább háromszor deriválható. Annak, hogy x_0-ban *f*-nek inflexiós helye legyen

a) szükséges feltétele, hogy $f''(x_0)=0$
b) elégséges feltétele, ha $f'''(x_0)\neq 0$.

Asszimptóták

1.) Függőleges
Definíció: Az $x=x_0$ egyenes az f függvény grafikonjának függőleges asszimptótája, ha az *f* függvénynek az x_0 helyen legalább az egyik féloldali határértéke végtelen.
$\lim\limits_{x\to x_0\pm} f(x)=\pm\infty$ (± vagylagos)

Megjegyzés:
x_0 a D_f-nek torlódási pontja.
x_0 az *f*-nek másodfajú szakadási helye.

2.) Vízszintes
Definíció: Az $y=y_0$ egyenes az *f* függvény grafikonjának vízszintes asszimptótája, ha
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=y_0$ (± vagylagos)

Ha f-nek van vízszintes asszimptatója, akkor az értelmezési tartomány alulról vagy felülről nem korlátos.

3.) Ferde
Definíció: Az $y=mx+b$ egyenes az *f* függvény grafikonjának ferde asszimptótája, ha
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx-b\right]=0$ (± vagylagos)

Ha $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx-b\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=b$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(\frac{f(x)}{x}-m\right)\right]=b$, ahonnan $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m$.

Függvény vizsgálat:

1. Értelmezési tartomány
2. Parítás
3. Periódicitás
4. Tengelymetszetek
5. Pozitivitási intervallumok
6. Asszimptóták
7. Növekedési viszonyok
8. Staciomárius helyek
9. Szélsőérték helyek
10. Szélsőértékek
11. Inflexiós pont
12. Görbületi viszonyok
13. Ábrázolás
14. Értékkészlet

Taylor-formula

! $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ezt a polinomot akarjuk $(x-x_0)$ polinomjaként előállítani. Tételezzük fel, hogy $P(x)$ átrendezhető $P(x)=\sum_{k=0}^{n} C_k (x-x_0)^k$ alakba

$$P(x)=C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+...+C_n(x-x_0)^n$$
$$P'(x)=C_1+2C_2(x-x_0)+...+C_n\cdot n(x-x_0)^{n-1}$$
$$P''(x)=2C_2+3\cdot 2(x-x_0)+...+C_n\cdot n(n-1)(x-x_0)^{n-2}$$

$$P^{(n)}(x)=n!\,C_n$$
$$!\,x=x_0 \Rightarrow P(x_0)=C_0,\ P'(x_0)=C_1,\ P''(x_0)=2\cdot C_2,\ P'''(x_0)=3!\,C_3$$
$$P^{(n)}(x_0)=n!\,C_n$$

Tehát $P(x)=\frac{P(x_0)}{0!}+\frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

Más függvényeknél az ilyen átrendezésnek nincs értelme, de ha *f* legalább *n*-szer deriválható x_0-ban akkor képezhető a $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Definíció: $!: D\to\Re\,(D\subset\Re \text{ és } x_0\in D)$ és *f* legalább *n*-szer deriválható x_0-ban.

Az f függvény x_0 ponthoz tartozó *n*-ed fokú Taylor polinomjának a $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ polinomot nevezzük.

Az egyenlőség általában nem áll fenn az $f(x)$ és a $T_n(x)$ között egy x_0-tól különböző pontban, de elképzelhető, hogy minél nagyobb *n*-értéke, annál kisebb az eltérés.

Jelöljük $R_n(x)$-el az $f(x)$ és a $T_n(x)$ eltérését.

$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ azaz
$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$.
Ezt a formulát nevezzük Taylor-formulának.

T: Ha az f függvény az x_0 pont egy $V(x_0)$-ban legalább $(n+1)$-szer deriválható, akkor $\forall x e V(x_0)$-hoz $\exists \xi \left(x \lessgtr \xi \lessgtr x_0 \right)$, amelyre fennáll az

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Mivel $R_n(x)$ az $f(x)$ és a $T_n(x)$ eltérését méri, ezért keressük $R_n(x)$-et valamilyen becslésre alkalmas alakban.

$!R_n(x) = \frac{A_n}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ A_n-et akarjuk alkalmasan megváltoztatni.

$$!F(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n + \frac{A_n}{(n+1)!}(x - t)^{n+1} \right]$$

A $F(x) = 0$ és $F(x_0) = 0$. Így Rolle-tétel értelmében $\exists \xi \in (x, x_0)$, hogy $F'(\xi) = 0$.

$$F'(t) = -\left[f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x - t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2 - \frac{2f''(t)}{2!}(x - t) + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - \right.$$

$$\left. - \frac{nf^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^{n-1} - \frac{(n+1)A_n}{(n+1)!}(x - t)^n \right] = \frac{A_n}{n!}(x - t)^n - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n$$

$$F'(\xi) = \frac{(x - \xi)^n}{n!}\left(A_n - f^{(n+1)}(\xi)\right) = 0$$

$$A_n = f^{(n+1)}(\xi)$$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ A maradék tag Lagnauge-féle alakja.

Megjegyzés:
1. Ha $x_0 = 0$ akkor Mac-Laurin formulát kapjuk.
2. Ha $n = 0$ akkor a Taylor-formula a Lagrange-tételbe megy át.

A függvény közelítése Taylor polinomjával

Szükségünk van az $f(x) = e^x$ függvény $[0,1]$ közé eső értékeire. Hanyadfokú Taylor-polinomjával közelítsük, hogy a hiba kisebb legyen 10^{-3}?

$f(x) = e^x \qquad x_0 = 0$

$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(x_0) = 1 \qquad n=1,2,3\ldots$

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

$\left| e^x - T_n(x) \right| \langle 10^{-3}$ azaz $\left| R_n(x) \right| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \langle 10^{-3}$

az $[0,1]$-on $\left|e^{\xi}\right| \langle e^{x} \leq e \langle 3$

$\left|\dfrac{3x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \dfrac{3}{(n+1)!} \langle 10^{-3}$ $\qquad 3000 \langle (n+1)! = 7!$ $\qquad$ tehát $n=6$

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=2\frac{517}{720}=2{,}718$$

Görbék paraméteres egyenlete

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \alpha \leq t \leq \beta$$

Ha x-nek $\exists$ az x^{-1} inverze $t = x^{-1}(x)$, akkor egy $y = y\left(x^{-1}(x)\right) = f(x)$ függvényhez jutunk, amelynek értelmezési tartománya az x értékkészlete. (Paraméter kiküszöbölése)

Bármely függvény előállítható paraméteresen (sőt végtelen sokféle módon).

Ui: $\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= f(t) \end{aligned}\right\}$

Paraméteresen adott függvények deriválása

Tegyük az $y = f(x)$ függvényt, amely az $[a,b]$-on paraméteres alakban van adva, a megfelelő $[\alpha,\beta]$-n ért $x = x(t)$ és $y = y(t)$ folytonos függvények által.

T.: Ha az $x(t)$ és $y(t)$ függvények deriválhatók a $t_0 \in [\alpha,\beta]$ helyen és $x^{0}(t_0) \neq 0$, akkor az f függvény is deriválható az $x_0 = x(t_0)$ helyen és $f'(x_0) = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$

Bizonyítás:

$$\left.\begin{aligned} !x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \qquad t = x^{-1}(x) \qquad f(x) = y\left(x^{-1}(x)\right)$$

$$f'(x) = \dot{y}\left(x^{-1}(x)\right) \cdot \frac{1}{\dot{x}\left(x^{-1}(x)\right)} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

Pl.: $\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}$ $\qquad t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ $\qquad t_0 = \dfrac{\pi}{4}$

Integrálszámítás

Határozatlan integrál

Primitív függvény (kezdeti jelentésű).

Definíció: $!f:\langle a,b\rangle \to \Re$. A $F:\langle a,b\rangle \to \Re$ függvényt, amelynek deriváltja $\langle a,b\rangle$-n mindenütt egyenlő $f(x)$-el, az $f\langle a,b\rangle$ feletti primitív függvényének nevezzük.
($F'(x)=f(x)$ $\quad\quad \forall x \in \langle a,b\rangle$-re)

Pl.: $f(x)=\sin x \Rightarrow F(x)=-\cos x$

T: $!f,F:\langle a,b\rangle \to \Re$, ha $F'=f$ úgy $G:\langle a,b\rangle \to \Re \Leftrightarrow$ primitív függvénye *f*-nek, ha $\exists c \in \Re, G=F+c$.

Bizonyítás: Nyilvánvaló ha *F* primitív függvénye *f*-nek, akkor $G=F+c$ is az.
Ha $G'=f=F' \Rightarrow$

$0=G'-F'=(G-F')' \Rightarrow G-F=c.$

$G(x)=F(x)+c$

Definíció: Egy f függvény $\langle a,b\rangle$-hoz tartozó primitív függvényeinek a halmazát az f határozatban integráljának nevezzük és

$\int f(x)dx$ $\quad$ v $\quad$ $\int f=F$-fel jelöljük.

$f(x)$ az integrandus, $\int ... dx$ az integrál jele.

Megjegyzés: Nem minden függvénynek van primitív függvénye.

Például: $\quad \operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & ha\ x\rangle 0\\ 0 & ha\ x=0\\ -1 & ha\ x\langle 0\end{cases}$

sgnx-nek $\nexists$ promitív függvénye. Nincs olyan $F(x)$, hogy $F'(x)=f(x)$, mert minden derivált függvény Darbaux tulajdonságú. (A derivált függvénynek nem lehet elsődleges szakadási helye.)

T: Minden folytonos függvénynek van primitív függvénye.
B: később

T: A határozatlan integrál deriválható és deriváltja az integrendus.

$\left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$

Alapintegrálok

1. $\int 0\,dx = c$ mert $c' = 0$

2. $\int dx = x$ mert $x' = 1$

3. $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ $(\alpha \in \Re \setminus \{-1\})$

4. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln x + c$

5. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

6. $\int e^x\,dx = e^x + c$

7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

8. $\int \cos x\,dc = \sin x + c$

9. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$

10. $\int \dfrac{-1}{\sin^2 x}\,dx = \operatorname{ctg} x + c$

11. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$

12. $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$

A határozatlan integrál és a műveletek, egyszerű integrálási szabályok

1. $\int c \cdot f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$ $c \neq 0$

2. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

3. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

4. $\int f'(x) \cdot f^{\alpha}(x) = \dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$ $(\alpha \in \Re\ \ \alpha \neq -1)$

5. Ha $F' = f$, akkor $\int f(ax+b)\,dx = \dfrac{F(ax+b)}{a} + c$

Parciális integrálás

T: $!f,g:\langle a,b\rangle\to\Re$, ha f és g deriválhatók $\langle a,b\rangle$-n és $f\cdot g'$-nek $\exists$ primitív függvénye, akkor a $f'\cdot g$-nek is $\exists$ és

$$\int f'(x)g(x)\,dx=f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)\,dx \qquad x\in\langle a,b\rangle$$

B: $\left(f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)\,dx\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)-f(x)\cdot g'(x)=f'(x)\cdot g(x)$

Helyettesítéses integrál

T: $!f:\langle a,b\rangle\to\Re,\ g:\langle c,d\rangle\to\langle a,b\rangle$. Ha g deriválható $\langle c,d\rangle$-n és f-nek $\exists$ a F primitív függvénye, akkor $\exists$ az $(fog)\cdot g'$-nek is és

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=F(g(x))+C \qquad x\in\langle c,d\rangle$$

B: F és g deriválhatósága miatt Fog deriválható és

$$(F(g(x))+C)'=F'(g(x))\cdot g'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$$

Riemann-integrál

Határozott integrál

A Riemann integrál fogalma

1. ***Definíció***: $![a,b]\subset\Re$. A $B=\{x_i \mid a=x_0\langle x_1\langle\ldots\langle x_n=b\}$ halmazt az $[a,b]$ egy beosztásának (felosztásának) nevezzük.

Az x_i számok a beosztás osztópontjai az $[x_{i-1}-,x_i]$ $(i=1,2,\ldots n)$ a beosztás részintervallumai.

Ha B egy beosztás, akkor a $\|B\|=\sup\{|x_i-x_{i-1}|\,|\,i=1,2,\ldots n\}$ számot a beosztás finomságának nevezzük.

A B beosztás δ beosztás $(\delta\rangle 0)\in\Re)$ ha $\|B\|\langle\delta$

2. ***Definíció***: ! $B_1,\ B_2$ két beosztása $[a,b]$-nek.

A B_2 beosztás finomítása a B_1 beosztásnak, ha $B_1\subset B_2$

A B_1 és B_2 egyesítésén a $B_1\cup B_2$ halmazt értjük.

3. ***Definíció***: Az $[a,b]$ egy $\langle B_k\rangle$ beosztássorozatát minden határon túl finomodónak (normális beosztássorozatnak) nevezzük, ha $\lim\limits_{k\to\infty}\|B_k\|=0$

4. ***Definíció***: $!f:[a,b]\to\Re$ korlátos és B egy beosztása $[a,b]$-nek és jelölje

$$\begin{matrix} M_i=\sup f(x) \\ m_i=\inf f(x)\end{matrix} \qquad x\in[x_{i-1},x_i] \quad \text{továbbá } \xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\ldots n)$$

Az $s(f,B)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), S(f,B)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$

$\omega(f,B)=\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$ számokat az *f* függvénynek az $[a,b]$ B beosztáshoz tartozó alsó (Darboux) felső (Darbaux) ill. osszcillációs összegének, míg a

$\sigma(f,B)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ számot az f függvénynek az $[a,b]$ B beosztásához és a $\xi_i(1,2,...n)$-hez pontokhoz tartozó integrálközelitő vagy Riemann összegének nevezzük.

Geometriai jelentés: lásd előadáson.

Tétel: $!f:[a,b]\to\Re$ korlátos függvény és B, B_1, B_2 beosztása $[a,b]$-nek, ekkor

1. $\forall I(f,B)$-re $s(f,B)\le I(f,B)\le S(f,B)$
2. Ha $B_1 \subset B_2$, ekkor $s(f,B_1)\le s(f,B_2)$ és $S(f,B_2)\le S(f,B_1)$
3. $s(f,B_1)\le S(f,B_2)$

Bizonyítás:

1. Tek. az $[x_{i-1},x_i]$-t. $m_i \le f(\xi_i)\le M_i$

$$m(x_i - x_1)\le f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\le M_i(x_i - x_{i-1}) \qquad \forall i=1,2..n\text{-re}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})\le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\le\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

2. $!B_1 \subset B_2$ $\qquad B_1 = \{x_i | a = x_0 \langle x_1 \langle ... \langle x_{i-1} \langle x_i \langle ... \langle x_n = b\}$

$$B_2 = \{x_i | a = x_0 \langle x_1 \langle ... \langle x_{i-1} \langle x_i' \langle x_i \langle ... \langle x_n = b\}$$

$m_i = \inf f(x) \qquad x\in[x_{i-1},x_i]$

$m_i' = \inf f(x) \qquad x\in[x_{i-1},x_i'] \qquad m_i'' = \inf f(x)\ x\in[x_i', x_i]$

$m_i \le m_i'$ és $m_i \le m_i''$

$$m_i(x_i - x_{i-1}) = m_i(x_i - x_i') + m_i(x_i' - x_{i-1})\le m_i'(x_i - x_i') + m_i''(x_i' - x_{i-1})$$

Hasonlóan lehet felső összegekre is igazolni.

3. $!B_1$ és B_2 két tetszőleges beosztása $[a,b]$-nek. Ekkor $B_1 \cup B_2$ finomítása B_1-nek és B_2-nek is.

$$s(f,B_1)\le s(f,B_1 \cup B_2)\le S(f,B_1 \cup B_2)\le S(f,B_2)$$

Definíció:

$!f:[a,b]\to\Re$ korlátos függvény. Az

$$\underline{I}=\int_a^b f=\sup_B\{s(f,B)\}$$

$\overline{I}=\int_a^b f=\inf_B\{S(f,B)\}$ számokat (ahol az infimumot és suprémumot az összes lehetséges beosztásra nézzük). Az f függvény $[a,b]$ feletti alsó, ill. felső Darboux-integráljának nevezzük.

$$\underline{I}=\underline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int}\ f \qquad\qquad \overline{I}=\overline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int}\ f$$

T: Ha $f:[a,b]\to\Re$ korlátos, akkor $\underline{I}\le\overline{I}$.

Biz.: $\forall B$ és B_1 beosztásra

$$s(f,B_1)\le S(f,B) \qquad \Rightarrow \exists\overline{I} \text{ és}$$

$$s(f,B_1)\le\overline{I}\Rightarrow\exists\,\underline{I} \qquad \text{és} \qquad \underline{I}\le\overline{I}$$

Következmény:

$\forall B$ beosztásra

$$s(f,B)\le\underline{I}\le\overline{I}\le S(f,B)\Rightarrow 0\le\overline{I}-\underline{I}\le\omega(f,B)$$

Definíció: az $f:[a,b]\to\Re$ korlátos függvény Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha $\underline{I}=\overline{I}$. Ezt a közös értéket az $f[a,b]$ feletti Riemann-integrálnak nevezzük és $I,\int_a^b f$ vagy $\int_a^b f(x)\,dx$-el jelöljük.

T: Az $[a,b]$ intervallumon $f\Leftrightarrow$ Riemann integrálható, ha $\forall\varepsilon\rangle 0-hoz\ \exists\delta\rangle 0$ és B beosztás $\|B\|\langle\delta$, akkor $\omega(f,B)\langle\varepsilon$.

Bizonyítás: $\Rightarrow s(f,B)\le\underline{I}\le\overline{I}\le S(f,B)$ $\quad\forall B$ beosztásra $\underline{I}-\overline{I}\le S(f,B)-s(f,B)\langle\varepsilon$ azaz $\underline{I}=\overline{I}$.

$\Leftarrow !f\in\Re$ és $\varepsilon\rangle 0$ tetszőleges, akkor $\exists\,B_1$ és B_2, amelyre $S(f,B_1)-I\langle\frac{\varepsilon}{2}$ és $I-s(f,B_2)\langle\frac{\varepsilon}{2}$.

$! B = B_1 \cup B_2$

$S(B_1, f) \leq S(B_1, f) \langle I + \frac{\varepsilon}{2} \langle s(f, B_2) + \varepsilon \leq s(f, B) + \varepsilon$

A következőkben egy elméletileg igen fontos és szép állítást igazolunk, amely azt mondja ki, hogy ha *f* korlátos, akkor $\exists$ a felső Darboux összegek határérétke és ez $\overline{I}$.

Tétel: (Darboux): $! f : [a,b] \rightarrow \Re$ korlátos. Ekkor $\forall \varepsilon \rangle 0$-hoz $\exists \delta \rangle 0$, hogy $\forall$ olyan *B* beosztásra, amelyre $\|B\| \langle \delta$.

$S(f, B) - \overline{I} \langle \varepsilon$ és $\underline{I} - s(f, B) \langle \varepsilon$

Biz.: (felső összegre) $! f$ korlátos $\Rightarrow \exists K \rangle 0$ $|f(x)| \leq K$. $\forall x \in [a,b]$-re.

Jelölje $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$! \varepsilon \rangle 0$ Mivel $\overline{I} = \inf \{S(f, B)\}$ ezért $\exists$ $B_0 = \{x_i | i = 0,1,2...r+1\}$ beosztása $[a,b]$-nek, hogy (*B* belső osztópontjainak száma *r*) $S(f, B_0) \langle \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2}$

$S(f, B_0) - \overline{I} \langle \frac{\varepsilon}{2}$.

$! B = \{y_j | j = 0,1 \ldots n\}$ olyan beosztása $[a,b]$-nek. $\|B\| \langle \delta = \inf \left\{ \frac{\varepsilon}{4Kr}, \Delta x_i | i = 1,2 \ldots r+1 \right\}$.

Megmutatjuk, hogy erre a beosztásra igaz a tétel állítása.

Ha $B_1 = B_0 \cup B = \{z_k | k = 0,1 \ldots m\} \Rightarrow B_0, B \subset B_1$

$S(f, B) - \overline{I} = S(f, B) - S(f, B_1) + S(f, B_1) - \overline{I} \leq S(f, B) - S(f, B_1) + S(f, B_0) - \overline{I} \langle S(f, B) -$
$- S(f, B_1) + \frac{\varepsilon}{2}$

Elegendő tehát (*) $S(f, B) - S(f, B_1) \langle \frac{\varepsilon}{2}$ belátni ha $\|B\| \langle \delta$.

Jelölje M_i^0, M_i, M_i^1 az *f* suprémumát a B_0, B, B_1 *i*-edik részintervallumán. Ekkor (*) a következő alakban írható (*') $\sum_{j=1}^{n} M_j \Delta y_j - \sum_{k=1}^{m} M_k^1 \Delta z_k \langle \frac{\varepsilon}{2}$.

$B_1 = B_0 \cup B$ miatt *B* egy $[y_{j-1}, y_j]$ intervallumára.

vagy $\alpha)$ $\exists k, [y_{j-1}, y_j] = [z_{k-1}, z_k]$ intervallum B_1-ben

vagy $\beta)$ $\exists x_i^0, [y_{j-1}, y_j] = [y_{j-1}, x_i^0] \cup [x_i^0, y_j] = [z_{k_1-1}, z_{k_1}] \cup [z_{k_1}, z_{k_1+1}]$

két B_1-beli intervallumra bomlik $x_i^0, x_{i+1} \notin [y_{j-1}, y_j]$ mert $\Delta y_j \leq \Delta x_i$)

Így $\alpha)$ esetben (*')-ben $M_j \Delta y_j - M_k^1 \Delta z_k = 0$

$\beta)$ esetben $M_j \Delta y_j - M_{k_1}^1 \Delta z_{k_1} - M_{k_1+1}^1 \Delta z_{k_1+1}$

$\Delta y_j = \Delta z_{k_1} + \Delta z_{k_1+1}$ miatt (*) a következő alakú

(*'') $\sum\left[\left(M_j + M_{k_1}^1\right)\Delta z_{k_1} + \left(M_j - M_{k_1+1}^1\right)\Delta z_{k_1+1}\right]\langle \frac{\varepsilon}{2}$

(A $\sum$ legfeljebb r tagot tartalmaz!)

$$\sum\left[\left(M_j - M_{k_1}^1\right)\Delta z_{k_1} + \left(M_j - M_{k_1+1}^1\right)\Delta z_{k_1+1}\right] \le \sum 2K\left(\Delta z_{k_1} + \Delta z_{k_1+1}\right) =$$

$$= 2K\sum \Delta y_j \langle 2K \cdot r \cdot \delta \le 2Kr \cdot \frac{\varepsilon}{4Kr} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

A Darboux-tétel következményei

Tétel: ! $f:[a,b] \to \Re$ korlátos $[a,b]$-n, ekkor $\forall\langle B_k\rangle$ normális beosztássorozatra létezik a

$\lim\limits_{k\to\infty} S(f, B_k)$, $\lim\limits_{k\to\infty} s(f, B_k)$ és

$\lim\limits_{k\to\infty} S(f, B_k) = \overline{I}$ $\quad\lim\limits_{k\to\infty} s(f, B_k) = \underline{I}$

Bizonyítás: (felső összegre) $!\varepsilon\rangle 0$ tetszőleges a Darboux-tétel szerint $\varepsilon\rangle 0$-hez. $\exists\delta\rangle 0$, $\forall\|B\|\langle\delta$.

$\left|S(f,B) - \overline{I}\right|\langle\varepsilon$.

$!\langle B_k\rangle$ egy normális beosztássorozat, azaz $\lim\limits_{k\to\infty}\|B_k\| = 0$ ekkor $\delta\rangle 0$-hoz $\exists k_0 \in \aleph$, hogy $\forall k\rangle k_0$

$\|B_k\|\langle\delta$

Tehát az adott $\varepsilon\rangle 0$-hoz $\exists k_0 \in \aleph$, hogy $\forall k\rangle k_0$ akkor $\|B_k\|\langle\delta \Rightarrow \left|S(f,B_k) - \overline{I}\langle\varepsilon\right|$.

Köv.: $\langle\omega(f,B_k)\rangle \to \overline{I} - \underline{I}$

Tétel: $!f:[a,b] \to \Re$ korlátos $[a,b]$-n, ekkor $\forall\langle B_k\rangle$ normális beosztássorozathoz létezik $\left\langle\hat{I}(f,B_k)\right\rangle$ és $\left\langle\hat{\hat{I}}(f,B_k)\right\rangle$ integrálközelítő összeg-sorozat, hogy

$\lim\limits_{k\to\infty}\hat{I}(f,B_k) = \underline{I}$ $\quad\lim\limits_{k\to\infty}\hat{\hat{I}}(f,B_k) = \overline{I}$

Bizonyítás: (csak alsó összegre!) $!\langle B_k\rangle = \left\langle\left\{x_i^k \middle| i = 0,1 \ldots n_k\right\}\right\rangle$ normális felosztássorozat

$m_i^k = \inf f(x) \quad x \in \left[x_{i-1}^k, x_i^k\right] \quad (i = 0,1,2, \dots n_k)$

Ekkor az inf. definíciója miatt $\exists \xi_i^k \quad (k \in \aleph)$

$\xi_i^k \in \left[x_{i-1}^k, x_1^k\right]$

$$m_i^k \leq f\left(\xi_i^k\right) \langle m_i^k + \frac{1}{k}$$

$$\sum_{i=1}^{n_k} m_i^k \Delta x_i^k \leq \sum_{i=1}^{n_k} f\left(\xi_i^k\right) \Delta x_i^k \langle \sum_{i=1}^{n_k} \left(m_i^k + \frac{1}{k}\right) \Delta x_i^k$$

$$s(f, B_k) \leq \hat{I}(f, B_k) \langle s(f, B_k) + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n_k} \Delta x_i^k = s(f, B_k) + \frac{b-a}{k}$$

Ahonnan a rendőr-tétel alapján következik a tétel állítása.

A Riemann-integrálhatóság kritériumai

Tétel: Az $f : [a,b] \to \Re$ korlátos függvény $\Leftrightarrow$ Riemann integrálhatlható, ha $\exists\, I \in \Re$, hogy $\forall \varepsilon \rangle 0$-hoz $\exists \delta \rangle 0, \forall B$ beosztására $[a,b]$-nek melyre $\|B\| \langle \delta \quad |I(f,B) - I| \langle \varepsilon$ teljesül.

$\forall I(f,B)$-re. (Ekkor $I = \int_a^b f$)

Bizonyítás: $\Rightarrow !\, f$ integrálható azaz $\overline{I} = \underline{I} = I = \int_a^b f$. Ekkor a Darboux-t miatt $\forall \varepsilon \rangle 0$-hoz $\exists \delta \rangle 0$ hogy, $\forall B$-ra, amelyre $\|B\| \langle \delta$ fenn áll $\left.\begin{matrix} S(f,B) - \overline{I} \langle \varepsilon \\ \underline{I} - s(f,B) \langle \varepsilon \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{I} = \underline{I} = I$ és $s(f,B) \leq I(f,B) \leq S(f,B)$ miatt $|I(f,B) - I| \langle \varepsilon$.

$\Leftarrow \exists I \in \Re \;\; \forall \varepsilon \rangle 0 \;\; \exists \delta \rangle 0 \;\; \forall B$-re, amelyre $\|B\| \langle \delta \quad |I(f,B) - I| \langle \varepsilon \;\; \forall I(f,B)$-re $\Rightarrow f$ integrálható.

A Dorboux-tétel miatt $\forall \varepsilon_1 \rangle 0$-hoz $\exists \delta_1 \rangle 0$, $\|B\| \langle \delta_1 \Rightarrow S(f,B) - \overline{I} \langle \varepsilon_1$ és $\underline{I} - s(f,B) \langle \varepsilon_1$.

A feltétel miatt $\forall \varepsilon_2 \rangle 0 \;\; \exists \delta_2 \rangle 0, \|B\| \langle \delta_2 \Rightarrow |I(f,B) - I| \langle \varepsilon_2$.

Az $m_i \; M_i$ definíciója miatt $\forall \varepsilon_3 \rangle 0 \;\; \exists \;\; \xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$f(\xi_i) - m_i \langle \varepsilon_3$ (Δx_i és $\sum$ -uk)

$M_i - f(\eta_i) \langle \varepsilon_3$

$I(f,B) - s(f,B) \langle \varepsilon_3 (b-a) \qquad S(f,B) - I(f,B) \langle \varepsilon_3 (b-a)$

$!\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$

$$|I - \underline{I}| \le |s(f,B) - \underline{I}| + |I - I(f(B)| + |I(f,B) - s(f,B)| \langle \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3(b-a) = \varepsilon$$

$$|I - \underline{I}| \le |S(f,B) - \overline{I}| + |I - I(f,B)| + |S(f,B) - I(f,B)| \langle \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3(b-a) = \varepsilon$$

ha $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{3}$ és $\varepsilon_3 = \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ $\Rightarrow$ $I = \underline{I} = \overline{I}$ azaz *f* Riemann-integrálható.

Tétel: Az $f:[a,b] \to \Re$ korlátos függvény $\Leftrightarrow$ Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha $\forall\langle B_k \rangle$ normális beosztássorozathoz tartozó $\forall\langle I(f,B_k)\rangle$ integrálközelítő-összeg-sorozat konvergens.

Bizonyítás:

$\Rightarrow ! f$ integrálható $\overline{I} = \underline{I} = I$ és $\langle B_k \rangle$ egy normális beosztássorozat, ekkor

$s(f,B_k) \le I(f,B_k) \le S(f,B_k)$ ahonnan a Darboux-tétel 2. következménye és a rendőr-tétel adja a $I(f,B_k)$ konvergenciáját *I*-hez

$\Leftarrow ! \langle B_k \rangle$ egy normális beosztássorozat és $\forall\langle I(f,B_k)\rangle$ konvergens, ekkor $\exists I \in \Re,\ I(f,B_k) \to I$.

Ekkor a Darboux-tétel 2. következménye miatt létező $\{\hat{I}(f,B_k)\}$és $\{\hat{\hat{I}}(f,B_k)\}$ sorozatok

$$I(f,B_k) = \begin{cases} \hat{I}(f,B_k) & ha\ k\ páros \\ \hat{\hat{I}}(f,B_k) & ha\ k\ páratlan \end{cases} \qquad I(f,B_k)\ \text{konv.} \Rightarrow \overline{I} = \underline{I}$$

Tétel: (Riemann-kritérium): Az $f:[a,b] \to \Re$ korlátos függvény $\Leftrightarrow$ Riemann-integrálható $[a,b]$- ha $\forall \varepsilon \rangle 0$-hoz $\exists\, B$ beosztásra $[a,b]$-nek, amelyre $\omega(f,B)\langle \varepsilon$

Bizonyítás:

$\Leftarrow\ \omega(f,B)\langle \varepsilon$

$s(f,B) \le \underline{I} \le \overline{I} \le S(f,B)$ így $0 \le \overline{I} \le \underline{I} \le S(f,B) - s(f,B)\langle \varepsilon$ f integrálható

$\Rightarrow f$ integrálható $\Rightarrow$ $\omega(f,B)\langle \varepsilon$

f integrálható $\underline{I} = \overline{I} = I \Rightarrow$ Dorbaux $\forall \dfrac{\varepsilon}{2} \rangle 0$ $\exists\, \delta_1 \rangle 0$ és $\delta_2 \rangle 0$ $\|B_1\| \langle \delta_1$ $\|B_2\| \langle \delta_2$ Darbaux-tétel.

$$S(f,B_1) - I \langle \frac{\varepsilon}{2} \qquad I - s(f,B_2) \langle \frac{\varepsilon}{2}$$

$!B = B_1 \cup B_2$ ekkor $\|B\| \le \min\{\delta_1, \delta_2|$

$S(f,B) \le S(f,B_1)\langle I + \frac{\varepsilon}{2} \langle s(f,B_2) + \varepsilon \le s(f,B) + \varepsilon$

$\omega(f,B)\langle \varepsilon$

Tétel: Az $f:[a,b] \to \Re$ korlátos függvény $\Leftrightarrow$ Riemann-integrálható, ha $\forall (B_k)$ normális beosztássorozat esetén $\langle \omega(f,B_k) \rangle$ nullsorozat.

Riemann-integrálható függvényosztályok

Tétel: $f:[a,b] \to \Re$. Ha *f* folytonos $[a,b]$-n, akkor *f* Riemann-integrálható $[a,b]$-n.

Bizonyítás: Megmutatja, hogy $\forall \varepsilon \rangle 0$-hoz $\exists \delta \rangle 0, \|B\| \langle \delta$, akkor $\omega(f,B)\langle \varepsilon$. Mivel *f* folytonos $[a,b]$-n, ezért egyenletesen folytonos, azaz $\forall \varepsilon_1$-hez $\exists \delta \rangle 0, |\xi_i - \eta_i| \langle \delta \quad |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \langle \varepsilon_1$.

Legyen $\|B\| \langle \delta$, ekkor $\omega(f,B) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) - f(\eta_i))\Delta x_i \langle \varepsilon_1$

$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon_1 (b-a)$ ha $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow \omega(f,B)\langle \varepsilon$.

Megjegyzés: Az $f:[a,b] \to \Re$ véges sok pont kivételével folytonos és korlátos függvény Riemann-integrálható $[a,b]$-n.

Tétel: $f:[a,b] \to \Re$. Ha *f* monoton $[a,b]$-n, akkor *f* Riemann-integrálható $[a,b]$-n.

Bizonyítás: mon. növekvő esetben $!\varepsilon \rangle 0$ tetszőleges és $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ és B $[a,b]$-nek olyan beosztása, hogy $\|B\| \langle \delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.

$\omega(f,B) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \langle \; \delta \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \delta(f(b) - f(a))$

Mivel f m. növ. $M_i = f(x_i)$ és $m_i = f(x_{i-1})$

ha $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ akkor $\omega(f,B)\langle \varepsilon$

A Riemann-integrálhatóság és a műveletek

Tétel: Ha $f, g : [a,b] \to \Re$ Riemann-integrálhatók, $\alpha, \beta \in \Re$, ekkor az $\alpha f + \beta g$ is Riemann-integrálható és $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$.

Bizonyítás: $!\langle B_k \rangle$ tetszőleges normális beosztássorozata $[a,b]$-nek.

$\forall I(\alpha f + \beta g, B_k)$-ra $\quad I(\alpha f + \beta g, B_k) = \alpha I(f, B_k) + \beta I(g, B_k)$.

Mivel a jobboldalnak $\exists$ határértéke, ezért a baloldalnak is és ez a határérték az integrál.

Megjegyzés:

1. A tétel megfordítása nem igaz.

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & ha \;\; x \; rac. \\ 0 & ha \;\; x \; irrac. \end{cases} \qquad \chi_1(x) = \begin{cases} 0 & ha \;\; x \;\; rac. \\ 1 & ha \;\; x \;\; irrac. \end{cases}$$

2. Teljes indukcióval tetszőleges *n*-tagra kiterjeszthető.

T: Ha $f, g : [a,b] \to \Re$ Riemann-integrálható, akkor $f \cdot g$, Riemann -integrálható $[a,b]$-n és ha $\exists C \in \Re^+$ $|g(x)| \geq c \;\forall x \in [a,b]$-re, akkor $\frac{f}{g}$ is integrálható.

Biz.: $!f(x) \geq 0$ és $g(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a,b]$-re.

Jelölje $m_i \quad m_i^f \quad m_i^g$ az $f \cdot g, f, g$ függvénynek infinumát $[x_{i-1}, x_i]$

$M_i \quad M_i^f \quad M_i^g$ az $f \cdot g, f, g$ függvénynek suprémumát $[x_{i-1}, x_i]$-n.

$M \quad M^f \quad M^g$ $\;f \cdot g, f, g$ függvények suprémumát $[a,b]$-n.

Ekkor fennállnak

$$M_i \leq M_i^f M_i^g \quad m_i \geq m_i^f m_i^g .$$

$$\begin{aligned} M_i - m_i &\leq M_i^f M_i^g - m_i^f m_i^g = M_i^f M_i^g - M_i^f m_i^g - M_i^f m_i^g + M_i^f m_i^g - m_i^f m_i^g = \\ &= M_i^f \left(M_i^g - m_i^g\right) + m_i^g \left(M_i^f - m_i^f\right) \leq M^f \left(M_i^g - m_i^g\right) + M^g \left(M_i^f - m_i^f\right) \end{aligned}$$

$!\varepsilon$ tetszőleges és δ olyan, hogy $\|\beta\| \langle \delta \quad \omega(f, \beta) \langle \frac{\varepsilon}{2M^g}$ és az $(g, \beta) \langle \frac{\varepsilon}{2M^f}$

$$\omega(f \cdot g, B) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq M^f \sum_{i=1}^{n} \left(M_i^g - m_i^g\right)\Delta x_i + M^g \sum_{i=1}^{n} \left(M_i^f - m_i^f\right)\Delta x_i$$

ahonnan $\omega(f \cdot g, B) \langle \varepsilon$.

Ezek után megmutatjuk, hogy a tétel igaz két tetszőleges integrálható függvény szorzatára is.

$m^f \le f(x) \quad m^g \le g(x) \quad f(x) - m^f \ge 0$ és $g(x) - m^g \ge 0$

$F = \left(f - m^f\right)\left(g - m^g\right) = fg - m^g \cdot g - m^f \cdot g - m^g \cdot f + m^f \cdot m^g$

Megjegyzés:

1) A tétel kiterjeszthető tetszőleges n-tényezőre.
2) Nem megfordítható $f(x) = \begin{cases} x & ha \quad x \quad rac. \\ -x & ha \quad x \quad irrac. \end{cases}$

Egyenlőtlenségek, középértéktételek Riemann-integrálra

Tétel: Ha $f, g : [a,b] \to \Re$, Riemann-integrálható függvények és $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$-re, akkor $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$

Bizonyítás: $!\langle B_k \rangle$ tetszőleges normális Beosztássorozat $\langle B_k \rangle = \langle x_i^k | i = 0,1,\ldots n_k \rangle$

$\xi_i^k \in \left[x_{i=1}^k, x_i^k\right]$ tetszőleges $\Rightarrow f\left(\xi_i^k\right) \le g\left(\xi_i^k\right)$ miatt $I(f, B_k) \le I(g, B_k) \Rightarrow$ a sorozatok és egyenlőtlenségekre vonatkozó tételből jön az állítás.

Tétel: Ha $f : [a,b] \to \Re$ integrálható $[a,b]$-n akkor $|f|$ és integrálható és $\int_a^b |f| \ge \left|\int_a^b f\right|$

Bizonyítás: Az integrálhatóság

$\left(|M_i| - |m_i|\right)\Delta x_i \le |M_i - m_i|\Delta x_i \langle \varepsilon$

Az egyenlőtlenség

$-|f| \le f \le |f_b|$

$$-\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f| \qquad \Rightarrow \qquad \left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$$

Tétel: (Középérték-tétel) $!f, g : [a,b] \to \Re$ Riemann-integrálható függvények, továbbá $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [a,b]$-re és $g(x) \ge 0$ $\forall x \in [a,b]$-re, akkor $m\int_a^b g \le \int_a^b f \cdot g \le M\int_a^b g$.

Bizonyítás: $m \cdot g,\ f \cdot g,\ M \cdot g$ integrálhatók így az első tételből adódik az állítás.

Következmény:

1. $!f:[a,b]\to\Re$ Riemann-integrálható és $m\le f(x)\le M \quad \forall x\in[a,b]$-n ekkor

   B: a fenti tételből $g(x)=1$ választással. $m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a)$

2. $!f:[a,b]\to\Re$ folytonos, akkor $\exists\ \xi\in[a,b],\ f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

   B: Az 1. következményben $m=\inf\ f(x)\ \ M=\sup\ f(x)\ \ x\in[a,b]$ és

   $\frac{1}{b-a}\int_a^b f\in[m,M]\Rightarrow$ a Bolzano-tétel miatt $\exists\,\xi\in[a,b],\ f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

Az integrál mint additív intervallum-függvény

Tétel: Ha $f:[a,b]\to\Re$ R-integrálható $[a,b]$-n és $c\in(a,b)$, akkor *f* ***R***-integrálható $[a,c]$-n és $[c,b]$-n és $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy f ***R***-integrálható $[a,c]$-n $([c,b]-n)$.! $\langle B_k\rangle$ olyan normális beosztássorozata $[a,b]$-nek, ahol *c* osztópont marad. Ekkor

$0\le\omega(f,B_k)^{[a,c]}\le\omega(f,B_k)^{[a,b]}\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\omega\left(f,B_k{}^{[a,c]}\right)=0$.

Ezután igazoljuk, hogy fennáll az egyenlőség.

$!\langle B_k^{[a,c]}\rangle$ és $\langle B_k^{[c,b]}\rangle$ az $[a,c]$ és $[b,c]$ egy-egy normális beosztássorozata $I\left(f,B_k^{[a,c]}\right)I\left(f,B_k^{[c,b]}\right)$ a hozzájuk tartozó integrálközelítő összeg $!B_k^{[a,b]}=B_k^{[a,c]}\cup B_k^{[c,b]}$ ekkor

$$I\left(f,B_k^{[a,b]}\right)=I\left(f,B_k^{[a,c]}\right)+I\left(f,B_k^{[c,b]}\right)\qquad\to\qquad\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

Tétel: $!f:[a,b]\to\Re$ és $c\in(a,b)$. Ha *f* ***R***-integrálható $[a,c]$-n és $[c,b]$-n $\Rightarrow$ *f* ***R***-integrálható $[a,b]$-n és $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.

Bizonyítás: Az, hogy az egyenlőség igaz az következik az előző tételből. $\forall\varepsilon\rangle 0$-hoz $\exists B_1$, ill. B_2 olyan beosztása $[a,c]$-nek, ill. $[c,b]$-nek, hogy $\omega(f,B_1)\langle\frac{\varepsilon}{2}$ és $\omega(f,B_2)\langle\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow B=B_1\cup B_2$

$\omega(f,B)=\omega(f,B_1)+\omega(f,B_2)\langle\varepsilon$.

Newton-Leibniz formula

Tétel: $!f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ha f R-integrálható $[a,b]$-n. F folytonos $[a,b]$-n és differenciálható (a,b)-n, úgy $F'(x) = f(x)(\forall x \in (a,b) - re)$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Bizonyítás: $!(B_k) = \{x_i^k | i = 0,1,...n_k\}$ egy normális beosztássorozat.

F teljesíti a Lagrange-tétel feltételeit az $[x_{i-1}^k, x_i^k]$-on azaz $\exists \quad \zeta_i^k \in (x_{i-1}^k, x_i^k)$, hogy

$$F(x_i^k) - F(x_{i-1}^k) = F'(\xi_i^k)(x_i^k - x_{i-1}^k) = f(\xi_i^k)(x_i^k - x_{i-1}^k)$$

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n_k} \left(F(x_i^k - Fx_{i=1}^k)\right) = \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i^k)(x_i^k - x_{i-1}^k) = I(f, B_k)$$

ahonnan $\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = [f(x)]_a^b$

A N-L szabály jelentősége igen nagy, mert a deriválás és integrálás kapcsolatát mutatja meg. Sok esetben igen egyszerű lehetőséget ad az integrál kiszámítására.

Az integrál mint a felső határ függvénye

Definíció: $!f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény R- integrálható $[a,b]$-n, ekkor az $F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

függvényt az f integrálfüggvényének nevezzük.

Tétel: $\quad !f : [a,b] \to \mathbb{R} \quad R$ - integrálható $[a,b] - on$, akkor f integrál függvénye folytonos $[a,b]$-on.

Bizonyítás: Ha f integrálható $\Rightarrow$ korlátos azaz $\exists K > 0 \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in [a,b] -$ re $\quad |f(x)| \le K$

$!x, x_o \in [a,b]$ tetszőleges, akkor $\forall \varepsilon \rangle 0$ - hoz $\exists \delta_1 > 0, \quad |x - x_o| < \delta_1$ akkor

$$F(x) - F(x_o) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_o} f(x)dx = \int_{x_o}^x f(t)dt \le K|x - x_o| < K\delta_1$$

Ha $\delta_1 = \dfrac{\varepsilon}{K}$ akkor $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon.$

Tétel: Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}\, R$ - integrálható $[a,b]$ és folytonos $x_0 \in [a,b]$-ben, akkor $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ deriválható x_o-ban és

$$F'(x_o) = f(x_o)$$

Bizonyítás:

$$\frac{F(x) - F(x_o)}{x - x_o} = \frac{\int_{x_o}^x f(t)dt}{x - x_o} = \frac{1}{x - x_o}\int_{x_o}^x f(t)dt = f(\xi) \quad x \le \xi \le x_0$$

$$\lim_{x \to x_o} \frac{F(x) - F(x_o)}{x - x_o} = \lim_{\xi \to x_o} f(\xi) = f(x_o)$$

Megjegyzés: $!f:[a,b]\to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n, ekkor $\exists$ primitiv függvénye és az $F:[a,b]\to \mathbb{R}$

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \,.$$

Megjegyzés: f folytonossága nem szükséges feltétele annak, hogy integrálfüggvénye deriválható legyen.

Pl: $$f:[0,1]=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & \text{ha } x\neq 0 \\ 0 & \text{ha } x=0 \end{cases}$$

akkor integrálfüggvénye

$$F:[0,1]=\begin{cases} x^2\cdot\sin\frac{1}{x} & \text{ha } x\neq 0 \\ 0 & \text{ha } x=0 \end{cases}$$

mindenütt deriválható.

Parciális és helyettesítéses R-integrál

Tétel: Ha $f,g:[a,b]\to \mathbb{R}$ folytonosan deriválhatók akkor

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f'(x)g(x)dx \,.$$

Bizonyítás: $!F:[a,b]\to \mathbb{R}$

$$F(x)=\int_a^x f(t)g'(t)dt+\int_a^x f'(t)g(t)dt+f(a)g(a)-f(x)g(x)$$

F deriválható és $F'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad F(x)=c \quad F(a)=0\Rightarrow c=0\Rightarrow F(b)=0$

$$0=F(b)=\int_a^b f(x)g'(x)dx+\int_a^b f'(x)g(x)dx-f(a)g(a)-f(b)g(b)$$

Tétel: $!g:[a,b]\to[c,d]$ folytonosan deriválható függvény

$f:[c,d]\to \mathbb{R}$ folytonos, akkor

$$\int_a^b f(g(t))\cdot g'(t)dt=\int_{g(a)=c}^{g(b)=d} f(x)dx$$

Bizonyítás: B.sz.

Tétel: $(C-B-S)$ Ha $f,g:[a,b]\to \Re$ R-integrálható függvények

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right|\leq\sqrt{\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)}$$

Az integrálszámítás néhány alkalmazása

Területszámítás

Tétel: $!f,g:[a,b]\to R$ folytonosak $[a,b]-n$ és $f(x)\ge g(x)\ x\in[a,b]$.

Ekkor a két függvény az $x=a,\ x=b$ görbéje által határolt síkidom területe

$$T=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

Bizonyítás: A tétel nyilvánvaló a határozott integrál geometriai jelentése alapján.

Pl: Az ellipszis területe: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$$T=4\int_o^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=4b\int_o^a\sqrt{1-\frac{x}{a}}dx=4ab\int_o^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=$$

$$\frac{x}{a}=\sin t\quad dx=a\cos t\ dt$$

$$=\frac{4ab}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_o^{\frac{\pi}{2}}=2ab\ \left(\frac{\pi}{2}+0-(0+0)\right)=ab\pi$$

Paraméteresen adott görbe esetén

$$\left.\begin{aligned}x&=x(t)\\ y&=y(t)\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&\alpha\le t\le\beta\\ &t=x^{-1}(x)\end{aligned}\qquad T=\int_\alpha^\beta y(t)\dot{x}(t)dt.$$

$$T=\int_a^b y(x)dx=\int_\alpha^\beta y(x(x^{-1}(t)))\quad \dot{x}(t)dt=\int_\alpha^\beta y(t)\,\dot{x}(t)\,dt$$

A görbe ívhosszának kiszámítása

$!f:[a,b]\to R$ folytonos $[a,b]$-n. Tekintsük az $[a,b]$ egy normális

$B_k=\{x_k^i \mid a=x_o^k<x^k,<...<x_{n_k}^k=b\}$ beosztás sorozatát!

$!P_i^k(x_i^k,f(x_i^k))\quad (i=0,1,....,n_k)$

A $P_0^kP_1^kP_2^k...P_n^k$ töröttvonalat a görbe beirt poligonjának nevezzük.

A $\sum_{i=1}^{n_k}\overline{P_{i-1}^kP_i^k}$ a beirt poligon hossza.

Definíció: A görbét rektifikálhatónak nevezzük, ha a beírható poligonok hosszának a halmaza korlátos.

Definíció: A beirt poligonok hossza halmazának felső határát a görbe ívhosszának nevezzük. (Azt a határértéket, amelyhez a görbére írt poligonok hosszának sorozata tart $\forall$ normális $\{B_n\}$ esetén.)

Tétel: $!f[a,b]\to R$ folytonosan deriválható $[a,b]-$n, ekkor $f[a,b]$-hez tartozó grafikonjának íve

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'(x^2)}dx.$$

Bizonyítás:

k rögzített

$!B_k = \{x_i^k | a = x_o^k < x^k, < \ldots < x_{n_k}^k = b\}$ egy beosztása

$$L_{n_k} = \sum_{i=1}^{n_k} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n_k} \sqrt{\left(x_i^k - x_{i-1}^k\right)^2 + \left(f\left(x_k^i\right) - f\left(x_{i-1}^k\right)\right)^2}$$

Az f függvény az $\left[x_{i-1}^k, x_i^k\right]$ – n teljesíti a Lagrange-tétel feltételeit ezért

$\exists \xi_i^k \in \left(x_{i-1}^k, x_i^k\right)$, hogy

$$f'\left(\xi_i^k\right)\left(x_i^k - x_{i-1}^k\right) = f\left(x_i^k\right) - f\left(x_{i-1}^k\right)$$

$L_{n_k} = \sum_{i=1}^{n_k} \sqrt{1 + f'^2\left(\xi_i^k\right)} \; \left(x_i^k - x_{i-1}^k\right)$ és ez a $\sqrt{1 + f'^2}$ Riemann-összege és mivel ez folytonos ezért integrálható.

$$L_n \to \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

Paraméteresen $\qquad L = \int_a^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt$

Forgástest térfogata

Tétel: $!f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n, $f(x) \geq 0 \forall x \in [a,b]$-re ekkor f $[a,b]$-hez tartozó ívének megforgatásával létrejött forgástest térfogata.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Bizonyítás: $!B_k = \{x_i^k | a = x_o^k < x_1^k < x_2^k \ldots < x_{n_k}^k = b\}$ $(i = 1,2,\ldots n_k)$ egy beosztássorozat $[a,b]$-nek.

$m_i^k = \inf f(x)$

$x \in \left[x_{i-1}^k, x_i^k\right] \quad \xi_i \in \left[x_{i-1}^k, x_i^k\right]$

$M_i^k = \sup f(x)$

$$V_a = \sum_{i=1}^{n_k} \pi m_i^{k^2} \Delta x_i^k \qquad V_f == \sum_{i=1}^{n_k} \pi M_i^{k^2} \Delta x_i^k \qquad V = \sum_{i=1}^{n_k} \pi\, f^2\left(\xi_i^k\right) \Delta x_i^k$$

$$V_a \leq \underset{\downarrow}{V} \leq V_f$$

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Általánosan: Ha $T(x)$ jelöli egy test x tengelyre merőleges síkmetszetének a területét $a \leq x \leq b$, ekkor

$$V = \int_a^b T(x) dx.$$

Paraméteresen:

$$V=\int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)\dot{x}(t)dt$$

Pl: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

$$V=\pi\int_{a}^{a}\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2 dx=b^2\pi\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx \quad =\frac{4}{3}\pi ab^2$$

Forgástest palástjának felszíne

Ha az $f:[a,b]\to R$ folytonos függvény $[a,b]$-hez tartozó ívét az x tengely körül megforgatjuk akkor az ív egy forgástest palástját írja le.
Ha a görbébe egy töröttvonalat is írunk és azt is vele forgatjuk, akkor a töröttvonal egy csonkakúppalástokból összetett felületet fog leírni.

Definíció: A forgástest palástjának a felszínén azt a határértéket értjük, amelyhez a görbébe írt töröttvonal forgatásának előálló forgásfelület tart, ha a görbébe írt töröttvonal egy olyan töröttvonal sorozatot fut be, amelynél a leghosszabb oldal hossza is a 0-hoz tart.

Tétel: $!f,g\to R$ és B_k egy normális beosztássorozata $[a,b]$-nek

$\xi_i^k,\eta_i^k,\in\left[x_{i-1}^k,x_i^k\right]$

$$\hat{I}(f\cdot g,B_k)=\sum_{i=1}^{n_k} f\left(\xi_i^k\right)\cdot g\left(\eta_i^k\right)\Delta x_i^k.$$

Ha f és g folytonosak, akkor $\hat{I}(f\cdot g,B_k)\to\int_a^b f\cdot g.$

Bizonyítás: B.sz.
Tétel: Ha $f:[a,b]\to R$ folytonosan deriválható $[a,b]$-n, akkor $f[a,b]$-hez tartozó ívének forgatásával előálló forgástest felszíne

$$F=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

Bizonyítás: $!B$ egy beosztása $[a,b]$-nek. $P_i(x_i,f(x_i))$

A $\overline{P_{i-1},P_i}$ egy csonkakúpfelületet ír le

$$T_i=2\pi\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}h_i$$

Mivel f folytonos ezért $\exists\xi\in(x_{i-1},x_i)f(\xi_i)=\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$

$$T_i=2\pi f(\xi_i)\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}=2\pi f(x_i)\quad\sqrt{1+f1^2(\eta_i)}\,\Delta x_i$$

($\eta_i\in(x_i,x_{i-1})$ Lagrange-tétel.)

$$F_n=\sum_{i=1}^{n}T_i\to 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

Paraméteresen $F = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt$

Numerikus integrálok

Téglányformula

$!f:[a,b]\to \mathbb{R}$ folytonos függvény

Def. szerint $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ (*)

Közelítőleg úgy tekinthetjük, hogy

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \qquad \text{speciálisan } \int_a^b f(x)dx \approx \begin{cases}\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i\\ \sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i\end{cases}$$

! $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ és ξ_i gyanánt az $[x_{i-1},x_i]$ kezdő vagy végpontját választjuk, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[f(a)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})]$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(b)].$$

Az integrálnak-e képlet szerint való kiszámításánál elkövetett hiba nem nagyobb mint $\sum(M_i-m_i)\Delta x_i$.

Ha $f'(x)$ korlátos akkor $\exists \quad K\in\mathbb{R}^+ \qquad f'(x)\le K.$

Ekkor Lagrange tétel szerint

$$M_i - m_i = f(\xi_i)-f(\eta_i) = f'(\gamma_i)|\xi_i-\eta_i| \le K\ \Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^n (M_i-m_i)\Delta x_i \le K\varepsilon\Delta x_i$$

Ha $[a,b]$-t n egyenlő részre osztjuk $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| < K^n\,\frac{(b-a)^2}{n^2} = \frac{K(b-a)^2}{n} < \varepsilon$$

Trapéz formula: a (*) spec. esete

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\Delta x_i$$

Ui Bolzano-tétel szerint $\exists \xi_i \in (x_{i-1},x_i) \quad f(\xi_i) = \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$

$\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}\Delta x_i$ trapéz területe

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(x)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\ldots+\frac{f(x_{n-1})+f(b)}{2}\right]$$

a hiba: $$= \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{1-1})\right]$$

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot K < \varepsilon. \qquad n > \sqrt{\frac{(b-a)^3 K}{12\varepsilon}} \qquad |f''(x) \le K|$$

Simpson módszer:
A trapéz-szabályhoz hasonlóan egyszerű, de pontosabb lényege, hogy a görbét nem húrral hanem parabola ívvel helyettesítjük. Osszuk az $[a,b]$-ot $2n$ egyenlő részre. $!h = \frac{b-a}{2n}$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2})\right)$$

a hiba $\frac{(b-a)^5}{2880n^4}\cdot K\langle\varepsilon \qquad |f(x)| \le K$

Függvénysorok

Definíció: Legyenek $f_1, f_2, ..., f_n, ... : D \to \mathbb{R}$ függvények. A

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sort függvénysornak nevezük.

Definíció: A $\sum f_n(x)$ függvénysor konvergens az $x_o \in D$ pontban, ha a

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_o)$ numerikus sor konvergens.

Az x_o pontot a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor konvergenciapontjának nevezzük. A konvergenciapontok összességét a $\sum f_n(x)$ konvergenciatartományának nevezzük.

Definíció: $!D$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor konvergencia tartománya, akkor az $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$-el értelmezett $(n = 1,2,...)$ $\langle s_n(x)\rangle$ sorozatot a függvénysor részletösszeg sorozatának nevezzük.

Definíció: A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor összegfüggvényén a

$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) \qquad (x \in D)$ függvényt értjük.

Pl: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad s_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ (ez konvergens $|x| < 1$)

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{1}{1-x} = s(x).$$

Megjegyzés: A numerikus sorokkal kapcsolatban megvizsgáltuk, hogy érvényben maradnak-e a véges összegekre megismert általános szabályok. Láttuk, hogy nem, s alkottunk egy speciális konvergenciafogalmat. Ugyanúgy merül fel a kérdés a függvénysorokkal kapcsolatban is: a) A folytonos függvényekből alkotott függvények összegfüggvénye folytonos-e? b) Az integrálható függvényekből alkotott függvények végtelen sorának tagonkénti integrálása ugyanazt adja-e mint az összegfüggvény integrálja? c) Érvényes-e a tagonkénti deriválás szabálya. A válasz általában nem.

Pl: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n - x^{n-1}\right) = (x-1)+\left(x^2-x\right)+\left(x^3-x^2\right)+\ldots+$ függvénysor tagjai a $(0;1]$-en folytonosak. Összegfüggvénye $s(x)=\lim_{m\to\infty} s_n(x)=\lim_{n\to\infty}(x-1)\frac{x^n-1}{x-1}=\begin{cases}-1 \text{ ha } x\in(0,1)\\ 1 \text{ ha } x=1.\end{cases}$

nem folytonos a $(0,1]$-on.

A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor konvergenciájának vizsgálatánál ugyanahhoz az $\varepsilon>0$-hoz más n_o tartozik, ha x_0 más. Ha $\exists n_0$ amely csak ε-tól függ, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen konvergens.

Definíció: Az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor egyenletesen konvergál a D halmazon az $s(x)$ függvényhez, ha $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists n_o\in\mathbb{N}$, hogy ha $n>n_o$, akkor $|s_n(x)-s(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in D$ esetén.
Az összegfüggvény nélkül is meg lehet fogalmaznia az egyenletes konvergenciát a Cauchy féle konvergencia kritérium alapján.

Tétel: (Cauchy-féle konvergencia kritérium) A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor $\Leftrightarrow$ egyenletesen konvergens D-n, ha $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists\, n_o\in\mathbb{N}$, ha $\forall n,m>n_o$ és $x\in D$ esetén $|s_n(x)-s_m(x)|<\varepsilon.$

Bizonyítás: A Cauchy féle konvergencia kritériumból jön.

Tétel: (Egyenletes konvergencia és folytonosság)

Ha az $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots.$ függvények folytonosak x_o-ban ($x_o\in D$ és $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen kovergál $D-$n $s(x)$-hez, akkor $s(x)$ folytonos x_o-ban.

Bizonyítás: ! $x_o\in D$ és $\varepsilon_1>o$ tetszőleges.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ egyenletes konvergenciája miatt $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{3}$-hez $\exists\, n_o\in\mathbb{N}$, hogy ha $n>n_o$ és $\forall x\in D-$re $|s_n(x)-s(x)|<\varepsilon_1$,

$s_n(x)$ folytonos x_o ban, így $\varepsilon_1>o \quad \exists \quad \delta_1>o, \qquad |x-x_o|<\delta_1 \Rightarrow |s_n(x)-s_n(x_o)|\varepsilon_1$

$|s(x)-s(x_o)|\le|s(x)-s_n(x)|+|s_n(x)-s_n(x_o)|+|s_n(x_o)-s(x_o)|<\varepsilon_1+\varepsilon_1+\varepsilon_1=\varepsilon$

Tehát ha $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{3}$ és $\delta=\delta_1$ akkor $|x-x_o|<\delta$ esetén

$|s(x)-s(x_o)|<\varepsilon,$ azaz s folytonos x_o-ban.

Tétel: (Weierstrass) Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ függvénysorhoz $\exists\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens numerikus sor, hogy $|f_n(x)|\le a_n \qquad \forall x\in D$ - re és $(n\in\mathbb{N})$-re ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen konvergens D-n.

Bizonyítás: Sorokra vonatkozó majoráns kritérium és a Cuchy féle konvergencia kritériumból következik.

$\sum a_n$ konvergens $\Rightarrow \forall \varepsilon \rangle 0\ \exists n_o \in \mathbb{N},\ ha\ \ n,m > n_o$ akkor $\sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon$, ekkor $\forall x \in D$-re.

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \le \sum a_k < \varepsilon$$

Definíció: A $\sum f_n(x)$ függvénysor abszolút konvergens D-n, ha $\forall x \in D$-re $\sum |f_n(x)|$ konvergens.

Hatványsorok

Definíció: A $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_o)^n$ $(C_n, x, x_o \in \mathbb{R})$ függvénysort x_o körüli hatványsornak nevezzük.

Mivel az x_o körüli hatványsor, az $x - x_o = z$ eltolással origó körüli hatványsorba megy át, ezért a továbbiakban csak a

$$\sum_{n=o}^{\infty} C_n x^n \text{ hatványsort vizsgáljuk.}$$

Tétel: (Ábel): Ha a $\sum C_n x^n$ hatványsor konvergens egy $x_o \ne o$ pontban , akkor abszolút konvergens a $(-|x_o|, |x_o|)$-ban.

Bizonyítás: Mivel a $\sum c_n {x_o}^n$ konvergens, ezért általános tagja tart a 0-hoz, azaz

$$C_n {x_o}^n \to 0 \Rightarrow \exists\, K > 0 \qquad \left| C_n {x_o}^n \right| \le K.$$

$$\sum C_n x^n = \sum C_n {x_o}^n \left(\frac{x}{x_o} \right)^n \text{ és tekintsük a}$$

$$\sum \left| C_n \cdot x^n \right| = \sum \left| C_n {x_o}^n \left(\frac{x}{x_o} \right)^n \right| \le \sum K \left| \frac{x}{x_o} \right|^n \text{ ez utóbbi egy konvergens geometriai sor}$$

$|x| < |x_o|$ esetén.

Tehát a $\sum C_n x^n$ sor abszolút konvergens $|x| < |x_o|$ esetén.

A hatványsor a $(-|x_o|, |x_o|)$ minden $[a,b]$ intervallumában egyenletesen konvergens.

Következtetés: Ha a $\sum C_n x^m$ hatványsor divergens az x_o pontban, akkor divergens minden x pontban amelyre $|x| \ge |x_o|$.

Ha ugyanis a hatványsor konvergens lenne egyetlen olyan x_1 pontban amelyre $|x_1| > |x_o| \Rightarrow$ Ábel tétele értelmében x_o-ban is konvergensnek kellene lenni.

2, Egy $\sum_{n=o}^{\infty} C_n x^n$ hatványsor konvergenciatartománya csak a 0 pontból vagy a számegyenes minden pontjából, vagy egy az origóra szimmetrikus $(-R, R)$ intervallumból áll.

Ez utóbbi esetben a hatványsor az intervallum végpontjaiban különbözőképpen viselkedhet. Lehet mindkét végpontban konvergens és divergens illetve egyikben konvergens a másikban divergens.

Tétel: (Cauchy-Hadamard)

Legyen adott $\sum_{n=c}^{\infty} C_n x^n$ htványsor és

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{|C_n|}} = l \qquad \left(R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|} = l \right)$$

1, ha $l = o$ akkor $\forall x \in \mathbb{R}$ pontban abszolút konvergens $R = \infty$.
2, ha $l = \infty$ akkor csak az $x = o$ -ban $R = o$
3, ha $o < l < \infty$ akkor $(-R, R)$-ben abszolút konvergens $|x| \rangle R$ esetén divergens, a hatványsor $x = o$ -ban abszolútkonvergens.

Bizonyítás: B.sz.

Definíció: Az R számot a hatványsor konvergenciasugarának nevezzük.
A $(-R, R)$-ot a hatványsor konvergencia intervallumának nevezzük.

Pl: a) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ...$

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1.$$

az $x = -1$ helyen konvergens
az $x = 1$ helyen divergens

b) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} = 1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + ...$

$$R = \frac{1}{\lim_{n=1}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}} = \infty$$

c) $\sum_{n=o}^{\infty} n!x^n = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + ...$

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}} = 0.$$

Tétel: (Hatványsorok tagonkénti deriválása)

Ha a (1) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ hatványsor konvergencia-sugara $R \neq 0$, akkor a hatványsor $f(x)$ összegfüggvénye minden olyan x pontban deriválható, amelyre $-R < x < R$ és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}. \qquad (*)$$

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy a (*) sor is konvergens.

! $x \in (-R, R)$ és $r > o$ olyan $|x| < r < R$. Az (1) sor $x = r$ esetén konvergens ezért $C_n r^n \to 0$ azaz $|C_n r^n| \leq K(K > o)$.

Vizsgáljuk (*) általános tagját $\left|nC_n x^{n-1}\right| = n\frac{C_n r^n}{r}\left(\frac{x}{r}\right)^{n-1} \le n\frac{K}{r}\left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}$ (**)ez utóbbi konvergens, ugyanis D'Alembert-féle kritériumot alkalmazva.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\frac{K}{r}\left|\frac{x}{r}\right|^n}{n\frac{K}{r}\left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\left|\frac{x}{r}\right| \to \left|\frac{x}{r}\right| < 1 .$$

Tehát (**) sor majorálja (*) és ezért (*) sor abszolút és egyenletesen konvergens (-R,R)-ben.
Megmutatja, hogy (1)-nek és (*)-nek ugyanaz a konvergense.

$$R^* = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|c_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}} = R .$$

Tétel: Ha a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ hatványsor konvergencia sugara $R \neq 0$ és $f(x)$ az összegfüggvénye, akkor minden olyan $[a,b] \subset (-R,R)$ fennáll

$$\int_a^h f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b c_n x^n \; dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_a^b$$

Bizonyítás: B.sz.

A Taylor-sor

! $f : D \to R x_0 \in D$ és *f* az x_0 pontban akárhányszor deriválható.

Definíció: Az *f* függvény x_0 ponthoz tartozó Taylor-során az $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f_{(x_0)}^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n$ hatványsort értjük.

Tétel: Az *f* függvénynek az x_0 ponthoz tartozó Taylor-sora $\Leftrightarrow$ konvergál az *f*-hez valamely intervallumon, ha a Taylor-formula maradéktagjainak sorozata nullához konvergál ugyanezen az intervallumon.

Megjegyzés: $x_0 = 0$, akkor a Taylor-sort Mac Laurin sornak nevezzük.
! $f : D \to \Re$ és $x_0 \in D$

Definíció: Az *f* függvény analitikus az x_0 pontban, ha $\exists \;\; \delta > 0 (\delta \in \Re)$, hogy *f* x_0-hoz tartozó Taylor-sora konvergens a $V(x_0,\delta) \cap D$ halmazon és

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_{(x_0)}^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n \qquad \forall x \in V(x_0,\delta) \cap D .$$

Impróprius integrál

1. Nem korlátos függvény impróprius integrál integrálja

$D :! (a,b] \to \Re$ az $(a,b]$ minden pontjában értelmezve, de az a pont környezetében nem korlátos.

Ha az $f(x)$ bármely $[a+\varepsilon,b]$ intervallumon Riemann-integrálható és a $(0\langle\varepsilon\langle b-a)$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ határérték $\exists$ akkor az *f* függvény az $[a,b]$-on imprópriusan integrálhatónak nevezzük és az *f* integrálján a határértéket értjük.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

Ha az $[a,b]$-ban véges sok olyan pont van, amelyek környezetében a függvény nem korlátos, akkor ezen pontok segítségével feldaraboljuk az intervallumot részintervallumnak és ezeken a részintervallumokon külön-külön megnézzük, hogy léteznek-e a imprópius integrálok, ha igen, akkor ezek összegeként definiáluk az $[a,b]$-n az imprópius integrált.
Ha pl. az $a=c_0\langle c_1\langle c...\langle c_n=b$ azok a pontok, ahol a *f* nem körlátos akkor ha $\exists$-nek a

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c_{i-1}+\varepsilon}^{c_i+\varepsilon} f(x)\,dx$, akkor

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c_{i-1}+\varepsilon}^{c_i-\varepsilon} f(x)\,dx.\ \ (0\langle 2\varepsilon\langle\min(c_i-c_{i-1}))$$

2. Végtelen intervallumon vett improprius integrálok

Definíció: ! f $\forall x\geq a$ helyen értelmezett és $\forall[a,b]$-n $(a\langle b)$ integrálható, ha $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ határérték létezik, akkor ezt a határértéket az *f* függvény (a,∞)-on vett improprius integráljának nevezzük, azaz $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx=\lim\limits_{b\to\infty} f(x)\,dx.$

Az x^{-r} improprius inegrálja $(r\rangle 0)$

$$\int\limits_0^1\frac{1}{x^r}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^r}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{x^{-r+1}}{1-r}\right]_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1^{1-r}}{1-r}-\frac{\varepsilon^{1-r}}{1-r}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-r} & ha\ \ 0\langle r\langle 1\\ \infty & ha\ \ r\rangle 1\end{cases}$$

$$\int\limits_1^\infty\frac{1}{x^r}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b\frac{1}{x^r}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-r}}{1-r}-\frac{1^{1-r}}{1-r}\right)=\begin{cases}\infty & ha\ \ 0\langle r\langle 1\\ \dfrac{1}{r-1} & ha\ \ r\rangle 1\end{cases}$$