Fejezetek az abszolút geometriából

6. Merőleges és párhuzamos egyenesek

Ebben a fejezetben megadottnak feltételezzük az abszolút tér egy síkját és tételeink mindig ebben a síkban értendők.
T1 (merőleges egyértelmű létezése): Ha megadunk egy pontot és egy egyenest, akkor egyértelműen létezik olyan egyenes, amely illeszkedik az adott pontra és merőleges az adott egyenesre.
Adott a egyenes és rá nem illeszkedő P pont esetén az a egyenesen létező azon T pontot, amelyre $\overleftrightarrow{PT} \perp a$ teljesül, a P pont a egyenesre vonatkozó merőleges vetületének, vagy a P pontból az a egyenesre bocsátott merőleges talppontjának nevezzük.
Egy háromszög valamely csúcsára illeszkedő és a csúccsal szemközti oldalra merőleges egyenest a háromszög ezen csúcsához (vagy oldalához) tartozó magasságvonalának nevezzük. A magasságvonalból a csúcs és a szemközti oldal egyenese közötti szakaszt magasságnak nevezzük.
T2 (két egyenes párhuzamosságának egy elegendő feltétele): Ha két egysíkú egyenes egyidejűleg merőleges a síkjukban lévő valamely egyenesre, akkor a két egyenes párhuzamos egymással.
A szükségesség független az abszolút tér axiómarendszerétől.
T3 (párhuzamos egyenesek létezése): Ha az abszolút térben adott egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont, akkor ezen pont és egyenes síkjában létezik olyan egyenes, amely illeszkedik az adott pontra és párhuzamos az adott egyenessel.
Az egyértelműség független az abszolút tér axiómarendszerétől.
Ha $A \in a$ és $B \in b$ esetén $A \neq B$, akkor a $t = \overleftrightarrow{AB}$ egyenest (az $\overline{AB}$ szakaszt) az a és b egyenesek egyik transzverzális egyenesének (szakaszának) nevezzük. Ha a és b egysíkúak, akkor az I5 szerint t is illeszkedik erre a síkra.
Ha az a és b különböző és egysíkú egyeneseknek t egy transzverzálisa úgy, hogy $a \cap t = \{A\}$ és $b \cap t = \{B\}$, továbbá $C, D \in a$ és $C - A - D$ valamint $E, F \in b$ és $E - B - F$ esetén C és E a t azonos oldalán vannak, akkor

- az $ABE\angle$, $ABF\angle$, $BAC\angle$ és $BAD\angle$ szögeket belső szögeknek
- az $ABE\angle$ és $BAD\angle$ valamint $ABF\angle$ és $BAC\angle$ szögeket belső váltószögeknek
- a belső váltószögek egyikét és a másik csúcsszögét megfelelő szögeknek

nevezzük.
T4 (két egyenes párhuzamosságának elegendő feltételei): Az abszolút tér két különböző és egysíkú egyenesének párhuzamosságához elegendő, hogy a két egyenest egy közös transzverzálissal elmetszve az alábbi feltételek valamelyike teljesüljön:

1. keletkezzenek egybevágó belső váltószögek,
2. keletkezzenek egybevágó megfelelő szögek,
3. a transzverzális azonos oldalán lévő belső szögek kiegészítő szögek legyenek.

A szükségesség független az abszolút tér axiómarendszerétől.
Egy szakasz felezőmerőlegesének az olyan egyenest nevezzük, amely illeszkedik a szakasz felezőpontjára és merőleges a szakaszra.
T5: Egy szakasznak (a szakaszt tartalmazó bármely síkban) egyértelműen létezik felezőmerőlegese.
T6: Egy szakasz felezőmerőlegese (a szakaszt tartalmazó bármely síkban) a szakasz két végpontjától egyenlő távolságra lévő pontok halmaza.

T7: Adott a egyeneshez és rá nem illeszkedő P ponthoz (a és P síkjában) egyértelműen létezik Q pont úgy, hogy az a egyenes a $\overline{PQ}$ szakasz felezőmerőlegese.

7. Sík és egyenes merőlegessége

Ha egy síkot metsző egyenes e síknak a döféspontra illeszkedő minden egyenesére merőleges, akkor azt mondjuk, hogy az egyenes és a sík merőleges egymásra.
Jelölése: $\alpha \in \boldsymbol{P}$ és $a \in \boldsymbol{L}$ esetén $a \perp \alpha$ vagy $\alpha \perp a$.
Ilyenkor az egyenest a sík normálisának nevezzük, a síkot pedig az egyenes normálsíkjának.
Sík és egyenes merőlegessége szimmetrikus reláció.
Egy szakaszt vagy félegyenest akkor nevezünk merőlegesnek egy síkra, ha a szakaszt vagy a félegyenest tartalmazó egyenes merőleges a síkra.
T1 (a síkra merőleges egyenes tétele). Egy síkot metsző egyenes akkor és csak akkor merőleges a síkra, ha merőleges a síknak két olyan egyenesére, amelyek a döféspontra illeszkednek.
T2: Egy egyenesre egy adott pontjában állított merőleges egyenesek egy síkban vannak: ez az egyetlen olyan sík, amely az egyenest az adott pontban merőlegesen metszi.
T3: Egy adott pontra egy és csakis egy olyan sík illeszkedik, amely egy adott egyenesre merőleges.
Egy szakasz felezőmerőleges síkjának a szakasz felezőpontjára illeszkedő és a szakaszra merőleges síkot nevezzük.
Minden szakasznak egyértelműenlétezik felezőmerőleges síkja.
T4: A tér azon pontjainak halmaza, amelyek egy adott szakasz két végpontjától egyenlő távolságra vannak, a szakasz felezőmerőleges síkja.
T5: Ugyanazon síkra merőleges egyenesek párhuzamosak egymással: tehát két egyenes párhuzamosságának elegendő feltétele aközös normálsík létezése.
T6: Egy adott pontra egy és csakis egy olyan egyenes illeszkedik, amely egy adott síkra merőleges.
Ha egy adott α síknak és valamely P pontra illeszkedő és α-ra merőleges egyenesnek a metszéspontját P' jelöli, akkor az $f\colon \boldsymbol{E} \to \alpha$, P P' leképezést az α síkra történő merőleges vetítésnek nevezzük, amelynek α a képsíkja.
A síkra történő merőleges vetítés nem kölcsönösen egyértelmű leképezés.
A képsík pontonként fix és további fixpontja a merőleges vetítésnek nincs.

8. Egyenlőtlenségek

Két nem egyenlő szakasz közül aza nagyobb (kisebb), amelynek a hossza nagyobb (kisebb).
T1: Ha egy háromszög két oldala nem egyenlő, akkor a nagyobb oldallal szemközti szög nagyobb mint a kisebb oldallal szemközti szög.
T2: Ha egy háromszög két szöge nem egyenlő, akkor a nagyobb szöggel szemközti oldal nagyobb mint a kisebb szöggel szemközti oldal.

Derékszögű háromszögben azátfogó nagyobb mint bármelyik befogó.
T3 (a klasszikus háromszög-egyenlőtlenség): Egy háromszög bármely két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál.
T4 (a háromszög-egyenlőtlenség): Ha $A, B, C \in \boldsymbol{E}$ nem feltétlenül különböző pontok, akkor $AB + BC \geq AC$.
Az előbbi tétel alapján $(\boldsymbol{E}, d)$ metrikus tér.
T5 (töröttvonal egyenlőtlenség): Ha $P_1, P_2, ..., P_n \in \boldsymbol{E}$ különböző pontok, akkor $P_1P_2 + \ldots + P_{n-1}P_n \geq P_1P_2$ (vagyis egy töröttvonal hossza nem kisebb a kezdő és végpont távolságánál).
Ha A, B és C három nem kollineáris pont, akkor az $ABC\Delta$ belsejét az $\overleftrightarrow{AB}$ határegyenesű C pontot tartalmazó, a $\overleftrightarrow{BC}$ határegyenesű A pontot tartalmazó és az $\overleftrightarrow{AC}$ határegyenesű B pontot tartalmazó nyílt félsíkok metszeteként értelmezzük.
Jelölése: $intABC\Delta$.
T6: Ha $P \in intABC\Delta$, akkor $AB + AC > PB + PC$ és $BAC\angle < BPC\angle$.
T7: Ha P az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre nem illeszkedő valamely pont és Q az $\overline{AB}$ szakasz tetszőleges belső pontja, akkor $PQ < max\{PA, PB\}$.
T8 (háromszögek egybevágósági esete): Ha az $ABC\Delta$ és $DEF\Delta$ háromszögekre $AB < BC$ és $DE < EF$ esetén $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ és $A\angle \cong D\angle$ teljesül, akkor $ABC\Delta \cong DEF\Delta$.
(Két háromszög egybevágó, ha két nem egyenlő oldal páronként egybevágó és a nagyobbikkal szemközti szög egybevágó.)
Két háromszög egybevágósága nem következik, ha két nem egyenlő oldal páronkénti egybevágósága esetén a kisebbik oldallal szemközti megfelelő szögek egybevágók.
T9: Egy valódi szögtartomány szögfelezője a szöget tartalmazó sík azon pontjainak halmaza, amelyek mindkét szögszártól egyenlő távolságra vannak.
T10: Ha két háromszögben két-két oldal egyenlő és az általuk közrefogott szögek nem egyenlők, akkor a harmadik oldal a nagyobb közrefogott szöget tartalmazó háromszögben a nagyobb.
Jelölésekkel: Ha az $ABC\Delta$ és $DEF\Delta$ háromszögekben $AB = DE, AC = DF$ és $A\angle > D\angle$, akkor $BC > EF$.
T11 (a T10 megfprdítása): Ha az $ABC\Delta$ és $DEF\Delta$ háromszögekben $AB = DE$, $AC = DF$ és $BC > EF$, akkor $A\angle > D\angle$.
Az $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{E}$ nem üres ponthalmazok távolságának a $d(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = inf\{d(P,Q) \mid P \in \boldsymbol{A}, Q \in \boldsymbol{B}\}$ valós számot nevezzük.
Ilyen valós szám létezik, mivel értelmezés szerint két pont távolsága nem negatív valós szám és a nem negatív valós számok egy halmazának bármely negatív szám alsó korlátja: egy alulról korlátos számhalmaznak viszont létezik infinuma.
Két ponthalmaz távolsága nem értelmezhető a pontjaikat összekötő szakaszok közül a legrövidebbnek a hosszaként, mivel ez általában nem létezik. (Példa: egy nyílt körlemez és egy egyenes, amely a körön kívül halad.)
T12: Egy pont és rá nem illeszkedő egyenes távolsága a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza.
T13 (Legendre 1. szögtétele): Az abszolút tér tetszőleges háromszögére a belső szögek mértékeinek összege nemnagyobb π-nél.
T14 (Legendre 2. szögtétele): Abszolút térben a belső szögek összege vagy minden háromszögre π-vel egyenlő, vagy minden háromszögre π-nél kisebb.
Az $ABC\Delta$ defektusán a $\pi - [m(A\angle) + m(B\angle) + m(C\angle)]$ számot értjük.
Ezen értelmezés alapján a Legendre szögtételek átfogalmazhatók:

1. szögtétel: Minden háromszög defektusa nem negatív.
2. szögtétel: Vagy minden háromszög defektusa nulla, vagy minden háromszög defektusa pozitív.

T15 (az abszolút külsőszög tétel): Abszolút térben egy háromszög bármelyik külső szögének mértéke nagyobb vagy egyenlő a két nem mellette fekvő belső szögek mértékeinek az összegénél.

9. Izometriák I

Legyen $\boldsymbol{H}$ az $\boldsymbol{E}$ valamely nem üres részhalmaza és $\sigma\colon \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ egy leképezés, amely során egy P pont képét $\sigma(P) = P'$ jelöli.
Ha a $\sigma\colon \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ leképezésnél van olyan $P \in \boldsymbol{H}$ pont, amelyre $\sigma(P) = P$, akkor ezt a P pontot a σ leképezés fixpontjának nevezzük.
Az $\boldsymbol{F} \subseteq \boldsymbol{H}$ nem üres ponthalmazt a σ leképezés invariáns vagy fix alakzatának nevezzük, ha bármely $P \in \boldsymbol{F}$ esetén $\sigma(P) \in \boldsymbol{F}$. Ha speciálisan az $\boldsymbol{F}$ invariáns alakzatra $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{P}$ vagy $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{L}$ teljesül, akkor $\boldsymbol{F}$ a σ-nak egy invariáns síkja illetve egyenese.
T1: Ha $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}$ vagy $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{P}$ esetén a $\sigma\colon \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ leképezésnek léteznek metsző invariáns egyenesei, akkor a metszéspont fixpont.
Az $\boldsymbol{F} \subseteq \boldsymbol{H}$ nem üres ponthalmazt a σ leképezés pontonként fix alakzatának nevezzük, ha bármely $P \in \boldsymbol{F}$ esetén $\sigma(P) = P$.
A $\sigma\colon \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ leképezés identitás, ha bármely $P \in \boldsymbol{H}$ pont fix. Jelölése: $\sigma = id_{\boldsymbol{H}}$ (vagy csak id, ha az identitásról általánosan beszélünk és ez nem okoz félreértést).
A σ leképezés involutorikus, ha $\sigma \neq id$, de $\sigma^2 = id$.
Ha a $\sigma\colon \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ leképezés bijektív, akkor σ-nak létezik inverze, amit σ^{-1}–gyel jelölünk, és amelyre bármely $P \in \boldsymbol{H}$ esetén $\sigma^{-1}[\sigma(P)] = P = \sigma[\sigma^{-1}(P)]$ teljesül.
Ha egy bijektív leképezés involutorikus, akkor az megegyezik az inverzével.
Ha $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}$ vagy $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{P}$ esetén a $\sigma\colon \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ bijekció során minden egyenes képe egyenes, akkor σ-t egyenestartó vagy affin leképezésnek nevezzük.
T2: Ha egy affin leképezésnek léteznek metsző invariáns síkjai, akkor a metszésvonal invariáns egyenes.
Ha a $\sigma\colon \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ bijekció olyan, hogy bármely $P, Q \in \boldsymbol{H}$ esetén $P'Q' = PQ$ teljesül, akkor σ-t távolságtartónak nevezzük.
A távolságtartó bijekciót egybevágósági transzformációnak vagy egybevágóságnak (izometriának) nevezzük.
A $\sigma\colon \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ izometria $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}$ esetén térizometria, $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{P}$ esetén pedig síkizometria.
T3: Ha σ sík- vagy térizometria, akkor teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

1) $A' - B' - C' \Leftrightarrow A - B - C$ (rendezéstartás)
2) $\{A', B', C'\}$ három nem kollineáris pont $\Leftrightarrow$ $\{A, B, C\}$ három nem kollineáris pont.
3) $A'B'C'\angle \cong ABC\angle$ (szögtartás).

T4: Minden izometria affin leképezés.
T5: A tér (vagy egy adott sík) összes izometriái a szorzásra nézve csoportot alkotnak.
T6: Bármely térizomatria síktartó: minden sík képe sík.
Adott α sík és rá illeszkedő a rögzített egyenes esetén a $\rho_a : \alpha \to \alpha$ leképezést az a egyenesre vonatkozó (vagy tengelyes) tükrözésnek nevezzük, ha bármely $P \in a$ esetén $\rho_a(P) = P$ (azaz P fix), továbbá bármely $P \in \alpha \setminus a$ esetén az a egyenes a $\overline{P\,\rho_a(P)}$ szakasz felezőmerőlegese.

$P \in a$ esetén a P' képpont nyilvánvalóan egyértelmű, továbbá $P \in \alpha \setminus a$ esetén a P' képpont létezése a 6/T7 tétel miatt egyértelmű: tehát minden tengelyes tükrözés bijektív.
A tengelyes tükrözés értelmezéséből az is adódik, hogy a tengelyes tükrözés egyrészt a tengely két oldalát felcseréli, másrészt nem identitás, de a négyzete identitás: azaz involutorikus leképezés, s így megegyezik az inverzével.
T7: A tengelyes tükrözés egyetlen pontonként fix egyenese a tengely. A tengelytől különböző valamely egyenes akkor és csak akkor invariáns, ha az merőleges a tengelyre.
T8: Egy síkban két tengelyes tükrözés akkor és csak akkor azonos, ha a tengelyeik egybeesnek.
T9: A tengelyes tükrözés síkizometria.
A T4 és T9 tételek alapján adódik, hogy minden tengelyes tükrözés egyenestartó (vagyis affin) leképezés, továbbá párhuzamos egyenesek képei is párhuzamosak egymással. Speciálisan egy tengellyel párhuzamos egyenes képe párhuzamos a tengellyel, minthogy a tengely pontonként fix egyenes és így azonos a képével.
T10 (a síkizometriák fixpont tétele):

1) Ha egy síkizometria során egy egyenes két pontja fix, akkor ez az egyenes az izometriának pontonként fix egyenese, és az izometria vagy identitás vagy erre az egyenesre vonatkozó tükrözés.
2) Ha egy síkizometriának létezik három nem kollineáris fixpontja, akkor az izometria identitás.

T11 (a síkizometriák alaptétele): Ha $ABC\Delta$ és $DEF\Delta$ az α sík két (nem feltétlenül különböző és) egymással egybevágó háromszöge, akkor egyértelműen létezik olyan $\sigma\colon \alpha \to \alpha$ izometria, amelyre $\sigma(A) = D$, $\sigma(B) = E$ és $\sigma(C) = F$. (Tehát három nem kollineáris pont és a képe egyértelműen meghatározza a síkizometriát.)
Az előbbi tétel bizonyítása alapján az is megállapítható, hogy minden síkizometria előállítható legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzataként.
Adott α sík esetén a $\rho_\alpha : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ leképezést az α síkra vonatkozó tükrözésnek nevezzük, ha bármely $P \in \alpha$ esetén $\rho_\alpha(P) = P$, továbbá bármely $P \in \boldsymbol{E} \setminus \alpha$ esetén az α sík a $\overline{P\,\rho_\alpha(P)}$ szakasz felezőmerőleges síkja.
Az előbbi értelmezésből adódik, hogy

- minden síkra vonatkozó tükrözés bijektív,
- egy síkra vonatkozó tükrözés olyan involutorikus leképezés, amely e sík két oldalát felcseréli.

T12: Bármely síkra vonatkozó tükrözés térizometria.
Minden síkra vonatkozó tükrözés egyenestartó, rendezéstartó, párhuzamosságtartó, szögtartó és síktartó leképezés.
T13 (a térizometriák fixpont tétele):

1) Ha egy térizometria során egy egyenes két pontja fix, akkor ez az egyenes az izometria pontonként fix egyenese.
2) Ha egy térizometriának létezik három nem kollineáris fixpontja, akkor a fixpontok síkja pontonként fix, és az izometria vagy identitás vagy erre a síkra vonatkozó tükrözés.
3) Ha egy térizometriának létezik négy nem komplanáris fixpontja, akkor az izometria identitás.

T14: A tér két nem feltétlenül különböző egybevágó háromszögéhez létezik olyan térizometria, amely a két háromszög egyikét a másikra képezi le.
Az előbbi tétel bizonyítása alapján az is megállapítható, hogy minden térizometria előállítható legfeljebb négy síkra vonatkozó tükrözés szorzataként.
T15: Két (nem feltétlenül különböző) szakasz, szög illetve háromszög pontosan akkor egybevágó, ha létezik olyan izometria, amely az egyiket a másikra képezi le.
Az egybevágóság általános definíciója: Két (nem feltétlenül különböző) alakzatot egybevágónak nevezünk, ha létezik olyan izometria, amely az egyiket a másikra képezi le.

10. Körök és gömbök

Elsőként a körrel és annak tulajdonságaival foglalkozunk, s ennek során mindig az abszolút tér egy rögzített síkjában dolgozunk.
Adott α sík, $O \in \alpha$ rögzített pont és r adott pozitív valós szám esetén az α sík azon pontjainak halmazát, amelyek O–tól mért távolsága r–rel egyenlő, O középpontú r sugarú körnek (körvonalnak) nevezzük.
Jelölése: $k = k(O, r) = \{P \mid P \in \alpha, OP = r\}$.
$A, B \in k(O, r)$ esetén az $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$ szakaszok sugarai, az $\overline{AB}$ szakasz egy húrja, az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes pedig egy szelője a k körnek. A szelő és a körvonal közös pontjait metszéspontoknak nevezzük. Ha $A, B \in k(O, r)$ esetén még az $A - O - B$ elrendezés is teljesül, akkor az $\overline{AB}$ szakasz a k kör egy átmérője, amelyre $AB = 2r$ teljesül.
A $k(O, r)$ kör síkjában azon P pontok halmazát, amelyre $OP < r$, a k kör belsejének vagy nyílt körlemeznek nevezzük és *int k –val* jelöljük. Ha az előbbi értelmezésben $OP \leq r$ szerepel, akkor a kapott ponthalmaz egy zárt körlemez, míg az $OP > r$ esetén adódó ponthalmaz a kör külseje.
Minden kör belseje és minden zárt körlemez a 8/T7 tétel miatt konvex halmaz.
T1 (a kör egyszerű tulajdonságai):

1) Egy körvonal három pontjára csak az adott kör illeszkedik.
2) Egy kör bármely húrjának felezőmerőlegese áthalad a kör középpontján.
3) Egy körvonalnak és egy (a kör síkjában lévő) egyenesnek legfeljebb két közös pontja lehet.
4) Két egysíkú körnek legfeljebb két közös pontja lehet.

Az előbbi tétel 1) része nem azt állítja, hogy három nem kollineáris pontra pontosan egy kör illeszkedik: ez az utóbbi állítás független az abszolút tér axiómarendszerétől.
Két egysíkú kör metszi (érinti) egymást, ha a két körvonalnak pontosan kettő (egy) közös pontja van.
T2 (a kör szimmetria tulajdonságai): Egy (a kör síkjában értelmezett) tengelyes tükrözésnek a kör akkor és csak akkor invariáns alakzata, ha a tengelyes tükrözés tengelye áthalad a kör középpontján.
A kör síkjában lévő valamely egyenes a kör érintője, ha az egyenesnek a körvonallal pontosan egy közös pontja van, amit érintési pontnak nevezünk.
T3 (az érintő tulajdonsága):

1) A kör bármely érintője merőleges az érintési pontba meghúzott sugárra.
2) Ha a kör síkjában lévő valamely egyenes merőleges egy sugárra és illeszkedik ezen sugárnak a középponttól különböző végpontjára, akkor az egyenes ebben a pontban érinti a kört.

T4: Bármely izometria során

- kör képe kör,
- a kör középpontjának képe a képkör középpontja,
- ha egy egyenes érintője egy körnek, akkor az egyenes képe is érintője a kör képének,
- egy körben két húr akkor és csak akkor egybevágó, ha a középponttól mért távolságuk egyenlő,
- két kör akkor és csak akkor egybevágó, ha egyenlő a sugaruk.

T5 (a szakasz – kör tétel): Egy kör bármely belső és külső pontját összekötő szakasz egy pontban metszi a körvonalat.

T6 (az egyenes – kör tétel): Ha egy egyenes illeszkedik egy kör valamely belső pontjára, akkor az egyenes két pontban metszi a körvonalat.
T7 (a két kör tétele) Ha a $k_1(A, a)$ és $k_2(B, b)$ körök esetén $AB = c$ és az a, b, c számok bármelyike kisebb a másik kettő összegénél, akkor a k_1 és k_2 körök metszők és az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes elválasztja a metszéspontokat.
T8 (a háromszögszerkesztés tétele): Három pozitív valós szám akkor és csak akkor lehet egy háromszög oldalainak a hossza, ha bármelyik kisebb a másik kettő összegénél.
T9 (külső pontra illeszkedő érintő tétele):

1) Egy kör bármely külső pontjára a körnek pontosan két érintője illeszkedik.
2) Egy külső pontot a rá illeszkedő két érintőn lévő érintési ponttal összekötő két szakasz egybevágó.

A továbbiakban a gömbbel kapcsolatos alapismereteket foglaljuk össze.
Egy rögzített $O \in \boldsymbol{E}$ pont és adott r pozitív valós szám esetén a tér azon pontjainak halmazát, amelyek O –tól mért távolsága r –rel egyenlő, O középpontú r sugarú gömbnek (gömbfelületnek) nevezzük.
Jelölése: $g(O, r) = \{P \in \boldsymbol{E} \mid OP = r\}$.
Azon P pontok halmazát, amelyekre $OP < r$ ($OP > r$), a $g(O, r)$ gömb belsejének (külsejének) nevezzük. A gömbtest azon pontok halmaza, amelyekre $OP \leq r$.
A gömbtest konvex alakzat.
Ha $A, B \in g(O, r)$, akkor az $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$ szakaszok a gömb sugarai, az $\overline{AB}$ szakasz a gömb húrja, amely az $A - O - B$ elrendezés esetén a gömb átmérője és ekkor $AB = 2r$.
Egy egyenes (sík) érinti a gömböt, ha az egyenesnek (a síknak) a gömbbel pontosan egy közös pontja van, amit érintési pontnak nevezünk.
A gömb középpontjára illeszkedő bármely sík a gömbfelületből egy körvonalat metsz ki, amit főkörnek nevezünk.
T10: Egy gömbnek és egy egyenesnek legfeljebb két közös pontja lehet.
Egy egyenes akkor és csak akkor érintője egy gömbnek, ha az egyenes és a gömb középpontjának távolsága egyenlő a gömb sugarával.
Ha egy egyenes érintője egy gömbnek, akkor az egyenes merőleges az érintési pontba meghúzott sugárra. Ha egy egyenes merőleges a gömb egy sugarára és illeszkedik ezen sugárnak a középponttól különböző végpontjára, akkor az egyenes ebben a pontban érinti a gömböt. Az ilyen érintők egy olyan síkban vannak, amely a gömböt ebben a pontban érinti.
T11: Egy sík akkor és csak akkor érintősíkja egy gömbnek, ha a sík és a gömbközéppont távolsága egyenlő a gömb sugarával. Ha egy sík és a gömb középpontjának távolsága kisebb a gömb sugaránál, akkor a gömb és a sík közös pontjainak halmaza egy körvonal.
T12: Egy gömb bármely külső pontjára végtelen sok érintő egyenes (sík) illeszkedik. A külső pontot az érintési pontokkal összekötő szakaszok egybevágók. Az érintési pontok egy körre illeszkednek.

11. Párhuzamossági axiómák

Egy abszolút teret euklideszi térnek nevezünk, ha abban érvényes az alábbi <u>euklideszi párhuzamossági axióma:</u>
Adott egyenes és rá nem illeszkedő pont síkjában **legfeljebb egy** olyan egyenes van, amely tartalmazza a pontot és párhuzamos az adott egyenessel.
Egy abszolút teret hiperbolikus térnek nevezünk, ha abban érvényes az alábbi <u>hiperbolikus</u> (vagy Bolyai – Lobacsevszkij féle) <u>párhuzamossági axióma</u>:
Adott egyenes és rá nem illeszkedő pont síkjában **legalább két** olyan egyenes van, amelyek tartalmazzák a pontot és párhuzamosak az adott egyenessel.

Megmutatható, hogy a hiperbolikus tér egy síkjában adott egyenes és rá nem illeszkedő pont esetén az adott pontot tartalmazó és az adott egyenessel párhuzamos egyenesek száma végtelen.

T1: Abszolút térben a következő állítások ekvivalensek:

1) Euklidesz 5. posztulátuma (lásd a 0. fejezetben!)
2) Euklidesz I.29. tétele: Két párhuzamos egyenes bármely transzverzálisának ugyanazon oldalán keletkező belső szögek összege π -vel egyenlő.
3) Euklidesz I. 30. tétele: Egy adott síkban az ugyanazzal az egyenessel párhuzamos egyenesek egymással is párhuzamosak (vagyis: az egyenesek párhuzamossága tranzitív reláció).
4) Euklidesz I. 30. tételének kontrapozíciója: Ha két párhuzamos egyenes síkjának valamely egyenese metszi a két párhuzamos egyikét, akkor metszi a másikat is.
5) Az euklideszi párhuzamossági axióma (lásd fentebb!).
6) Ha két párhuzamos egyenes síkjának valamely egyenese merőlegesen metszi a két párhuzamos egyikét, akkor merőlegesen metszi a másikat is.
7) Ha két párhuzamos egyenes síkjában lévő két egyenes egyike merőleges az egyik párhuzamosra, továbbá a másik egyenes merőleges a másik párhuzamosra, akkor ez a két egyenes párhuzamos egymással.
8) Bármely háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást.
9) Bolyai Farkas tétele: Bármely három nem kollineáris pontra egyértelműen illeszkedik kör.
10) Minden háromszögben a belső szögek mértékeinek összege π -vel egyenlő.
11) Euklidesz I. 32. tétele: Minden háromszögben bármelyik külső szög mértéke egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög mértékeinek összegével.

Az euklideszi párhuzamossági axiómával ekvivalens további állítások felsorolásától most eltekintünk, de megadunk még néhány olyan tételt, amelyek mindegyike következik az euklideszi párhuzamossági axiómából.

T2 (következmények):

1) Thalész – tétel: Ha P az $\overline{AB}$ átmérőjű körvonal A –tól és B –től különböző bármely pontja, akkor az $APB\angle$ derékszög.
2) Thalész – tétel megfordítása: Ha az $APB\angle$ derékszög, akkor P az $\overline{AB}$ átmérőjű körvonal A –tól és B –től különböző valamely pontja.
3) Létezik két olyan háromszög, melyek szögei páronként egybevágók, de a két háromszög nem egybevágó.

E fejezet T1 és T2 állításai tehát az euklideszi geometriában érvényes tételek, melyek tagadásával a hiperbolikus geometriában érvényes tételekhez jutunk. Erre adunk két példát az alábbi tételben.

T3 (hiperbolikus geometriai tételek):

1) Minden háromszögben a belső szögek mértékeinek összege π -nél kisebb.
2) Ha két háromszög között van olyan megfeleltetés, amelynél a megfelelő szögek egybevágók, akkor a két háromszög egybevágó ennél a megfeleltetésnél.

Befejezésül megmutatjuk, hogy a hiperbolikus sík axiómarendszere ellentmondásmentes: teljesülnek az illeszkedési axiómák és érvényes a hiperbolikus párhuzamossági axióma. Ehhez egy modellt adunk, amely révén interpretáljuk az axiómarendszer alapfogalmait, s ekkor már az axiómák a vizsgált rendszer tételei. Több ilyen modell ismeretes: Cayley–Klein féle körmodell, Poincaré féle körmodell és félsíkmodell. Mindegyik modellben kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés hozható létre az euklideszi és a hiperbolikus síkgeometria között. Ebből következik, hogy a hiperbolikus síkgeometria ellentmondásmentes, ha az euklideszi síkgeometria az. A három modell közül itt csak a Cayley–Klein féle körmodellt mutatjuk be, ugyanis a másik kettő megértéséhez olyan ismeretek szükségesek, amelyek a Geometria II tárgy keretében lesznek elsajátíthatók.

A Cayley–Klein féle körmodell:

A hiperbolikus sík pontjainak feleljenek meg az euklideszi sík egységsugarú körének belső pontjai, a hiperbolikus sík egyeneseinek feleljenek meg ezen nyílt körlemeznek a húrjai. Pont és egyenes illeszkedésének értelmezésére megtartjuk az euklideszi síkon adott értelmezést.
Ekkor megmutatható, hogy ebben a modellben teljesülnek az I1, I2 és I3* illeszkedési axiómák továbbá érvényes a hiperbolikus párhuzamossági axióma.
Megmutatható még a vonalzó axióma, a szögmérő axióma és az egybevágósági axióma érvényessége is, de ehhez ismét további ismeretek szükségesek, s ezért ettől most eltekintünk.