148 feladat
a Kalmár László Matematikaversenyről

1. $(\frac{1}{19}+\frac{2}{19}+\cdots+\frac{18}{19})+(\frac{1}{20}+\frac{2}{20}+\cdots+\frac{19}{20})+(\frac{1}{21}+\frac{2}{21}+\cdots+\frac{20}{21})+(\frac{1}{22}+\frac{2}{22}+\cdots+\frac{21}{22})=?$

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1985., 7. osztályosok versenye

2. Bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+\cdots+\frac{1}{200}>\frac{1}{2}$.

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1991., 6. osztályosok versenye

3. Igazold, hogy az $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{1022}+\frac{1}{1023}$ összeg nagyobb 5-nél, de kisebb 10-nél!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1997., 7. osztályosok versenye

4. Igazoljuk, hogy a 2 felírható 1998 darab különböző pozitív egész szám reciprokának összegeként!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1998., 8. osztályosok versenye

5. Igazoljuk minél rövidebben, hogy a következő egyenlőség helyes:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots+\frac{1}{100}.$$

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1994., 8. osztályosok versenye

6. $(1-\frac{1}{2^2})\cdot(1-\frac{1}{3^2})\cdot(1-\frac{1}{4^2})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{99^2})\cdot(1-\frac{1}{100^2})=?$

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló 1981., 8. osztályosok versenye

7. A következő szorzásban a $\star$-ok helyén álló számjegyek elmosódtak: $\star 2\star\cdot 13=2\star\star 1$. Határozd meg a hiányzó számjegyeket!

Kalmár László Matematikaverseny, 1987., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

8. A következő osztásban a $\star$-ok helyén álló számjegyek elmosódtak: $20\star\star:13=\star\star 7$. Határozd meg a hiányzó számjegyeket!

Kalmár László Matematikaverseny, 1998., 5. osztályosok versenye, országos döntő

9. Milyen számjegyeket kell írni a, b és c helyére, hogy a (tízes számrendszerben felírt) $\overline{2abc6}$ alakú szám maradék nélkül osztható legyen 1986-tal?

Kalmár László Matematikaverseny, 1986., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

10. Egy háromjegyű szám számjegyeit összeszorozzuk, majd a kapott szám számjegyeit szorozzuk össze. A kiinduló számot és a két szorzatot a következő módon ábrázolhatjuk: (azonos alakú jelek azonos számjegyeket jelölnek). △ ◯ ◯; △□; □

Mi volt a kiinduló szám? Indokold meg válaszodat!

Kalmár László Matematikaverseny, 1980., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

11. A következő szorzásban azonos betűk azonos számjegyeket, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek:

$$\overline{BIT}\cdot\overline{BIT}=\overline{SOKBIT}.$$

Mi lehet a szorzat értéke?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1996., 8. osztályosok versenye

12. Hány olyan n természetes szám van, amelyre igaz, hogy

$$\frac{1}{4}<\frac{n}{n+12}<\frac{1}{3}$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Zrínyi Ilona Matematikaverseny, országos döntő, 1992., 7. osztályosok versenye
Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1983., 8. osztályosok versenye

13. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$ egyenletet!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 2001., 8. osztályosok versenye

14. Melyik nagyobb:

$$\frac{3}{4} \quad \text{vagy} \quad \frac{3000001}{4000001}?$$

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1983., 5. osztályosok versenye

15. Melyik szám a nagyobb és miért:

$$\frac{222\,221}{222\,223} \quad \text{vagy} \quad \frac{333\,331}{333\,334}?$$

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1986., 7. osztályosok versenye

16. A 2, 3, 6 számok érdekes tulajdonsága, hogy összegük 11 és reciprokaik összege: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$. Állítsuk elő a 24-et és a 31-et is olyan pozitív egészek összegeként, amelyeknek reciprokait összeadva 1-et kapunk!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1995., 6. osztályosok versenye

17. Az országos döntő második fordulójába kilenc ötödikes került be, lányok és fiúk vegyesen. Itt a lányok hat tized része legalább két feladatot oldott meg hibátlanul. Hány ötödikes fiú és hány ötödikes lány került az országos döntő második fordulójába?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1987., 5. osztályosok versenye

18. Hogyan lehet 7 egyforma kenyeret igazságosan elosztani 12 éhes vándor között úgy, hogy egyik kenyeret se kelljen 12 részre vágni? Próbáld meg minél kevesebb vágással megoldani!

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1985., 5. osztályosok versenye

19. Bence összeadta 1-től 20-ig a pozitív egész számok reciprokát. A kapott törtet egyszerűsítette, és azt állítja, hogy az egyszerűsítés után kapott tört számlálója osztható 5-tel. Igaza van-e?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1999., 5. osztályosok versenye

20. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben van ismétlődő számjegy (pl. 2213, 4142, 1100)?

Kalmár László Matematikaverseny 7. osztályosok versenye, 1996, megyei forduló

21. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben csak két különböző számjegy fordul elő?

Kalmár László Matematikaverseny 6. osztályosok versenye, 1998, országos döntő

22. A háromjegyű számok között melyikből van több, amelyiknek minden számjegye páros, vagy amelyiknek minden számjegye páratlan? Miért?

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1996, 5. osztályosok versenye

23. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben a páratlan számjegyek száma páratlan? Állításodat indokold!

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1993, 5. osztályosok versenye

24. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyet ha „hátulról" előre olvasunk, ugyanazt a számot kapjuk (például ilyen szám: 12321)?

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1994, 5. osztályosok versenye
Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1999, 5. osztályosok versenye

25. Hányféleképpen választhatunk ki 1 és 20 között 2 egész számot úgy, hogy összegük páros legyen?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntő, 1994, 6. osztályosok versenye

26. Hányféleképpen választhatunk ki három különböző, 30-nál nem nagyobb pozitív egész számot úgy, hogy összegük páros legyen?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntő, 1994, 8. osztályosok versenye
Kalmár László Matematikaverseny országos döntő, 1998, 6. osztályosok versenye

27. Adott a síkon két párhuzamos egyenes, az egyiken 10, a másikon 20 pont. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntő, 1995, 7. osztályosok versenye

28. Egy négyzet mindegyik oldalát 7 egyenlő részre osztottuk. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai a négyzet oldalain megjelölt (csúcsoktól különböző) osztópontokból kerülnek ki?

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1995, 8. osztályosok versenye

29. Mennyi azoknak a csupa különböző számjegyekből álló 4-jegyű számoknak az összege, amelyeknek számjegyei közt csak az 1, 2, 3, 4 szerepelnek?

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1995, 7. osztályosok versenye

30. Képzeletben írjuk fel az összes olyan négyjegyű számot, amelynek jegyei csak az 1, 2, 3, 4 számok közül kerülhetnek ki (egy jegy többször is előfordulhat egy ilyen négyjegyű számban). Számítsd ki az ilyen négyjegyű számok összegét!

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1987, 8. osztályosok versenye

31. Egy körmérkőzéses versenyen (mindenki mindenkivel játszik) eddig 65 mérkőzést játszottak le és még mindenkinek 2 mérkőzése van hátra. Hányan indultak a versenyen?

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1992, 7. osztályosok versenye

32. Van-e olyan egész szám, amelynek négyzete így írható: $1999^{2000} + 1$?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 2000. 7. osztályosok versenye

33. Lehet-e egy pozitív egész szám négyzete a következő szám: $1998^{15} + 2$? Állításodat indokold!

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1998. 7. osztályosok versenye

34. Lehet-e $172^{1996} + 7$ egy egész szám négyzete?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1996. 7. osztályosok versenye

35. Valaki azt állította, hogy egy pozitív egész szám négyzetének a számjegyeit összeadta és 1995-öt kapott. Igaza van-e?

Zrínyi Ilona Matematikaverseny 1995. 7. osztályosok versenye, országos döntő

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1996. 8. osztályosok versenye

36. Van-e olyan pozitív egész szám, amelyet négyzetre emelve és a kapott szám számjegyeit összeadva
a) 2001-et kapunk?
b) 2002-t kapunk?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 2000. 8. osztályosok versenye

37. Az A pozitív egész szám tízes számrendszerbeli alakja 1999 darab 2-es és néhány 0 számjegyet tartalmaz. Lehet-e ez a szám négyzetszám?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1999. 7. osztályosok versenye

38. Összeadtuk az egész számokat 1-től 1999-ig. A kapott szám egész szám négyzete-e vagy nem?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1999. 6. osztályosok versenye

39. Leírtuk sorban egymás mellé a pozitív egész számokat 1-től 1999-ig. Az így kapott tízes számrendszerbeli szám négyzetszám, vagy nem?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1999. 8. osztályosok versenye

40. Vannak-e négyzetszámok a következő sorozatban: 11, 111, 1111, 11 111, … ?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1997. 7. osztályosok versenye,
1998. 6. osztályosok versenye

41. Adjuk meg az összes olyan kétjegyű számot, amelyeknek a négyzete három azonos, 0-tól különböző számjegyre végződik!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1999. 7. osztályosok versenye

42. Bizonyítsd be, hogy négy egymást követő pozitív egész szám összege nem lehet négyzetszám!

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1992. 8. osztályosok versenye

43. Lehet-e két páratlan szám négyzetének összege is egy egész szám négyzete?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1994. 5. osztályosok versenye

44. Igazoljuk, hogy öt egymást követő pozitív egész szám négyzetének összege nem lehet egy egész szám négyzete!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1995. 8. osztályosok versenye
Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 2001. 7. osztályosok versenye

45. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek fele egy egész szám négyzete, ötöde pedig egy egész szám köbe (harmadik hatványa)?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1998. 6. osztályosok versenye

46. Keress olyan pozitív egész számot, amelyet 2-vel szorozva négyzetszámot, 3-mal szorozva köbszámot, 5-tel szorozva teljes ötödik hatványt kapunk!

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1989. 8. osztályosok versenye

47. Döntsd el, hogy a következő 13-jegyű szám négyzetszám vagy sem: 1020304030201.

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1993. 8. osztályosok versenye

48. Igaz-e, hogy a következő alakú, tízes számrendszerben felírt számok mind négyzetszámok: 49, 4489, 444889, 44448889, ...

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1993. 7. osztályosok versenye

49. Négyzetszám-e a következő kivonás eredményeként kapott szám: $11111112222222 - 3333333$?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 2000. 8. osztályosok versenye

50. Van-e olyan négyzetszám, amely 1988-cal kezdődik? Ha találtál ilyet, írd le azt is, milyen módszert használtál, hogyan gondolkodtál!

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1988. 8. osztályosok versenye

51. Melyik az a négyjegyű szám, mely egy egész szám négyzete és az első két jegye is egyenlő, meg az utolsó két jegye is egyenlő?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1992. 6. osztályosok versenye

52. Melyik az a négyjegyű szám, amely teljes négyzet és a szám első két jegyéből meg az utolsó két jegyéből álló szám is teljes négyzet?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1991. 8. osztályosok versenye

53. Legyen a és b olyan pozitív egész, amelyre $b^2 = a - b$. Bizonyítsd be, hogy $a + b + 1$ négyzetszám.

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1995. 8. osztályosok versenye

54. Az n pozitív egész szám mely értékeire igaz, hogy az $n^2 + 4n - 5$ egy egész szám négyzete?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 2000. 8. osztályosok versenye

55. Számold össze, hány pozitív osztója van 16 200-nak!

Kalmár László Matematikaverseny 1991., 5. osztályosok versenye, országos döntő

56. Hány különböző alakú téglalapot lehet összeállítani 72 darab egyforma (egybevágó) négyzetlapból, ha egy-egy téglalaphoz mindegyik négyzetlapot fel kell használni?

Kalmár László Matematikaverseny, 2001., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

57. Melyek azok a páros számok, amelyek előállíthatók két négyzetszám különbségeként?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1988. 7. osztályosok versenye

58. Megoldható-e az egész számok körében az $x^2 + y^2 = 2001$ egyenlet?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 2001. 7. osztályosok versenye

59. Egy nagy családban a gyerekek átlagos életkora 11 év. A legidősebb gyerek 17 éves, a többiek átlagos életkora 10 év. Hány gyerek van a családban? (A gyerekek életkorát egész évnek vesszük.)

Kalmár László Matematikaverseny 1983., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

60. Ha négyszer annyi pénzem lenne, mint amennyi van, akkor vagyonom annyival lenne több ezer forintnál, mint amennyi most hiányzik belőle. Hány forintom van?

Kalmár László Matematikaverseny 1992., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

61. Andris azt mondta Bélának: az én pénzem 3/5-éhez még 70 forintot kell adni, és akkor annyi forintot kapunk, mint ahány van neked. Béla így válaszolt: neked csak 30 forinttal van több pénzed, mint nekem. Mennyi pénzük van külön-külön?

Kalmár László Matematikaverseny országos dönő, 1994., 5. osztályosok versenye

62. Egy apa most hétszer annyi idős, mint a fia. Tíz év múlva az apa háromszor olyan idős lesz, mint a fia. Hány éves most az apa és a fia?

Kalmár László Matematikaverseny országos dönő, 1997., 5. osztályosok versenye

63. Bontsd fel a 60-at két szám összegére úgy, hogy az egyik szám hetede egyenlő legyen a másik szám nyolcadával!

Kalmár László Matematikaverseny országos dönő, 1991., 5. osztályosok versenye

64. 18 pénzdarab van a zsebemben, csupa 2 és 5 forintos. Ha annyi ötösöm lenne, mint ahány kettesem van, és annyi kettesem, mint ahány ötösöm, akkor kétszer annyi pénzem lenne, mint amennyi van.

Mennyi pénzem van?

Kalmár László Matematikaverseny 1985., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

65. Osszuk fel a 45-öt 4 részre úgy, hogy ha az első részhez 2-t adunk, a másodikat 2-vel csökkentjük, a harmadikat 2-vel szorozzuk, a negyediket 2-vel osztjuk, akkor egyenlő számokat kapunk!

Kalmár László Matematikaverseny országos dönő, 1995., 5. osztályosok versenye

66. Egy klub tagjai összejövetelükre egy termet bérelnek. Összesen tízen vettek részt az ülésen. A bérleti díjat a résztvevők fizetik ki, mindenki ugyanannyit. Ha 5-tel többen lettek volna, akkor fejenként 1000 Ft-tal kevesebbet kellett volna fizetni a teremért. Mennyi terembért fizettek összesen?

Kalmár László Matematikaverseny 1997., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

67. Melyik az a négy pozitív egész szám, amelyeket páronként összeadva a következő számokat kapjuk: 4, 5, 7, 8, 10, 11?

Kalmár László Matematikaverseny 1992., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

68. Fél öt és öt óra között Jancsi megnézi a karóráját, a mutatók éppen egy egyenesbe esnek. Hány perc múlva lesznek legközelebb merőlegesek egymásra a mutatók?

Kalmár László Matematikaverseny 1982., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

69. Az óra kis- és nagymutatója pontosan 12 órakor egybeesik. Legközelebb mikor esnek újra egy egyenesbe?

Kalmár László Matematikaverseny 1990., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

70. Az óra és a percmutató déli 12 órakor fedik egymást. Legközelebb hány órakor fogják ismét fedni egymást?

Kalmár László Matematikaverseny országos dönő, 1994., 5. osztályosok versenye

71. A két unoka életkora a nagymama életkorának két számjegyével egyenlő. Hármuk életkorának összege 72 év. Hány évesek külön-külön?

Kalmár László Matematikaverseny 2000., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

72. Melyek azok a tízes számrendszerben felírt háromjegyű számok, amelyekre igaz, hogy egyenlők számjegyeik összegének 12-szeresével?

Kalmár László Matematikaverseny 1998., 6. osztályosok versenye, országos döntő, ill. 1987., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

73. Egy háromjegyű tízes számrendszerbeli szám egyenlő a számjegyei összegének 15-szörösével. Melyik lehet ez a szám?

Kalmár László Matematikaverseny 2000., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

74. Keresd meg mindazokat a tízes számrendszerben felírt számokat, amelyek számjegyeik összegének 13-szorosai!

Kalmár László Matematikaverseny 1985., 8. osztályosok versenye, megyei forduló

75. Egy tízes számrendszerben felírt szám egyenlő számjegyei összegének 17-szeresével. Melyik lehet ez a szám?

Kalmár László Matematikaverseny 1995., 7. osztályosok versenye, országos döntő

76. Melyek azok a tízes számrendszerbeli háromjegyű számok, amelyek egyenlőek számjegyeik összegének 19-szeresével?

Kalmár László Matematikaverseny 1992., 7. osztályosok versenye, országos döntő

77. Melyek azok a háromjegyű tízes számrendszerbeli számok, amelyek egyenlők számjegyeik összegének 34-szeresével?

Kalmár László Matematikaverseny 2001., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

78. Van 48 darab egyforma (egybevágó) kockánk. Hányféle különböző alakú téglatestet lehet ezekből összerakni, ha egy-egy téglatestnél mindet fel kell használni?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója 1997., 5. osztályosok versenye

79. Egy kocka 6 lapja közül 2-t pirosra, 2-t kékre, 2-t sárgára akarunk festeni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha az elmozgatással fedésbe vihető kockákat azonosnak tekintjük?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője 1998., 5. osztályosok versenye

80. Egy kocka minden lapját pirosra vagy kékre festhetjük. Hány különböző kockát tudunk így készíteni, ha csak azokat a kockákat tekintjük különbözőnek, amelyeket elmozgatással nem lehet fedésbe hozni?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója 1999., 5. osztályosok versenye

81. Andi és Bea a következő játékot játsszák. Nyolc színes gyurmagolyót, amelyek közül 2 piros, 2 kék, 2 zöld és 2 sárga, felváltva egy kocka csúcsaiba nyomnak. Andi kezd, bármelyik golyót bármelyik csúcsba teheti. Ezután Bea következik, a megmaradt golyókból bármelyiket egy még szabad kockacsúcsba teheti. Ezután újra Andi jön, majd Bea mindaddig, amíg van golyó (és így szabad kockacsúcs is). Andi nyer, ha a végén van olyan éle a kockának, amelynek két végén azonos színű golyó van, ellenkező esetben Bea nyer. Ki tud győzni ebben a játékban?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője 1999., 5. osztályosok versenye

82. Hány egybevágó kockát ragasszunk össze oszloppá, ha az eredeti kocka felszínénél háromszor nagyobb felszínű testet szeretnénk kapni?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója 1985., 6. osztályosok versenye

83. Egy kockát két szemközti lapjával párhuzamos síkokkal úgy „szeletelünk fel”, hogy a keletkezett testek felszínének összege háromszorosa legyen a kocka felszínének. Hány síkkal szeleteltük fel a kockát?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója 1993., 6. osztályosok versenye

84. Egy adott kockát mindegyik lapjára tükrözünk. Az így kapott test (az eredeti kockával együtt) térfogata hányszorosa a kocka térfogatának? És a felszíne hányszorosa a kocka felszínének?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője 1992., 5. osztályosok versenye

85. Egy kockát tetraéderekre darabolunk. Legalább hány tetraédert kapunk?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője 1995., 8. osztályosok versenye

86. Egy kocka minden lapjára egy síkot fektetünk rá. Hány részre osztják ezek a síkok a teret? Állításodat indokold!

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója 1991., 5. osztályosok versenye
Kalmár László Matematikaverseny országos döntője 1993., 5. osztályosok versenye

87. Mekkora szöget zár be a kocka egyik csúcsából kiinduló két lapátlója?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője 1997., 5. osztályosok versenye

88. Egy sorozatot a következő módon képezünk. A sorozat első tagja 1997. Minden következő tagot úgy kapunk, hogy az előző tagból kivonjuk a számjegyeinek összegét (pl. 1997, $1997 - 26 = 1971$, ...) Mi lesz a sorozat első olyan tagja, amelyik egyjegyű szám?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1997., 7. osztályosok versenye
Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1993., 7. osztályosok versenye

89. Pisti azt tapasztalta, hogy ha egy négyjegyű számhoz hozzáadja a fordítottját (azt a számot, amelyet az eredeti szám jegyeinek fordított sorrendbe írásával kaptunk), akkor az összeg mindig osztható 11-gyel. A két szám különbségéről azt találta, hogy mindig osztható 9-cel. Igaza van-e? Magyarázd meg a tapasztalatot! Mit tapasztalsz, ha ötjegyű számokkal is próbálkozol?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1980., 8. osztályosok versenye

90. Kiválasztunk egy tetszőleges háromjegyű számot és négyzetreemeljük. Ezután a kiválasztott szám számjegyeit fordított sorrendben leírjuk, és a kapott számot emeljük négyzetre. A két négyzet közül a nagyobbikból kivonjuk a kisebbiket. Igaz-e, hogy az eredmény mindig osztható 99-cel?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1993., 8. osztályosok versenye

91. Írj fel egy tetszőleges háromjegyű számot (például: 235), majd készítsd el azt a 6-jegyű számot, ami ennek a számnak a kétszeri egymás után írásával keletkezik (235 235). A kapott szám mindig osztható 13-mal! Magyarázd meg, miért igaz ez mindig!

Kalmár László Matematikaverseny megyei döntője, 1993., 6. osztályosok versenye

92. Bizonyítsd be, hogy ha egy tetszőleges kétjegyű számot háromszor egymás után írsz, az így kapott hatjegyű szám osztható lesz 13-mal!

Kalmár László Matematikaverseny megyei döntője, 1982., 8. osztályosok versenye

93. Egy tetszőleges kétjegyű szám után írjunk egy nullát, majd újra a kétjegyű számot. Mutasd meg, hogy az így kapott ötjegyű szám mindig osztható 11-gyel és 13-mal is!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1991., 6. osztályosok versenye

94. Béla azt állítja, hogy a hatjegyű számokra ismer egy 37-tel való oszthatósági szabályt. Például: 413364 osztható 37-tel, mert $413 + 364 = 777$ osztható 37-tel. Ugyanakkor 113231 nem osztható 37-tel, mert $113 + 231 = 344$ nem osztható 37-tel.

Fogalmazd meg a szabályt és bizonyítsd be, hogy a szabály helyes!

Kalmár László Matematikaverseny megyei döntője, 1994., 6. osztályosok versenye, 1995., 7. osztályosok versenye

95. Igazoljuk, hogy ha az $\overline{abcabc}$ hatjegyű szám osztható 37-tel, akkor a $\overline{bcabca}$ hatjegyű szám is osztható 37-tel!

Kalmár László Matematikaverseny megyei döntője, 1996., 8. osztályosok versenye

96. Tudjuk, hogy p és q olyan pozitív egész számok, amelyekre $3p + 4q$ osztható 11-gyel. Igaz-e, hogy ekkor $p + 5q$ is osztható 11-gyel?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1991., 7. osztályosok versenye

97. Határozzuk meg az összes olyan n egész számot, amelyre az $\frac{n^2+2}{n+1}$ tört értéke egész szám!

Kalmár László Matematikaverseny megyei döntője, 1991., 8. osztályosok versenye

98. Előállítható-e 2^{20} néhány (legalább kettő) egymást követő pozitív egész szám összegeként?

Kalmár László Matematikaverseny megyei döntője, 1990., 7. osztályosok versenye

99. Állítsd elő 1996-ot egynél több, egymást követő pozitív egész szám összegeként!

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1996., 8. osztályosok versenye

100. Hányféleképpen lehet 1989-et előállítani egymást követő pozitív egészek összegeként?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1989., 8. osztályosok versenye

101. Melyek azok a p és q prímszámok, amelyekre $p + q$ is és $p - q$ is prímszám?

Kalmár László Matematikaverseny országos dönő, 1997., 6. osztályosok versenye

102. Van-e 7, 13, 19, 25, ... sorozat (minden tag 6-tal nagyobb, mint az előző) tagjai között olyan szám, amely előállítható két prímszám különbségeként?

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1994., 7. osztályosok versenye

103. Van-e olyan pozitív egész k szám, amelyre igaz, hogy $k+5$, $k+7$ és $k+15$ egyszerre prímszámok?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntő, 1993., 6. osztályosok versenye

104. Milyen p prímszámra lesz $2p + 1$, $3p + 2$, $4p + 3$ és $6p + 1$ mindegyike prím?

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1992., 7. osztályosok versenye

105. Oldjuk meg a prímszámok körében a következő egyenletet: $x^2 - 1 = 2y^2$.

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1999., 8. osztályosok versenye

106. Egy háromjegyű páratlan számról meg kell állapítani, hogy prímszám-e vagy összetett. Okos Berci 3-tól 31-ig nem talált osztót. Ezek után azt mondta, hogy a szám biztosan prímszám. Igaza volt? Miért?

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1985., 7. osztályosok versenye

107. Adott egy 3-nál nagyobb p prímszám és tudjuk, hogy p-nek egy hatványa 20 jegyű szám. Igazoljuk, hogy a 20 számjegy között van legalább 3 azonos!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntő, 1996., 7. osztályosok versenye

108. Az $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 98\cdot 99\cdot 100}{2^{100}}$ törtet egyszerűsítjük, amíg lehet. Mi lesz a végeredményként kapott tört nevezője? (2^{100} azt a 100 tényezős szorzatot rövidíti, amelynek minden tényezője 2; a számláló is 100 tényezős szorzat.)

Kalmár László Matematikaverseny 1987., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

109. Mi lesz az $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 98\cdot 99\cdot 100}{2^{50}\cdot 3^{50}}$ tört nevezője, ha az összes lehetséges egyszerűsítéseket elvégezzük?

Kalmár László Matematikaverseny 1993., 7. osztályosok versenye, országos döntő

110. Összeszoroztuk az első száz pozitív egész számot. Mi lesz a szorzat tízes számrendszerben felírt alakjában a jobbról számított 24. számjegy?

Kalmár László Matematikaverseny 1986., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

111. A következő szorzat eredményét prímszámok hatványának szorzata alakjában írjuk fel. Mennyi lesz ebben a 2 kitevője?

$$31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot \ldots \cdot 59 \cdot 60$$

Kalmár László Matematikaverseny 1995., 6. osztályosok versenye, országos döntő

112. Bizonyítsd be, hogy 20 egész szám közül mindig kiválasztható kettő, melyek különbsége osztható 19-cel!

Kalmár László Matematikaverseny 8. osztályosok versenye, 1991., országos döntő

113. A $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots$ sorozatban található-e két olyan különböző szám, amelyek különbsége osztható 100-zal?

Kalmár László Matematikaverseny 8. osztályosok versenye, 1995., megyei forduló

114. Igaz-e, hogy bármely öt egész szám között van három olyan szám, amelyek összege osztható 3-mal?

Kalmár László Matematikaverseny 5. osztályosok versenye, 1992., országos döntő

115. Az $1, 2, 3, \ldots, 20$ számok közül kiválasztottunk 11-et. Mutasd meg, hogy a kiválasztott számok között mindig van kettő olyan, amely közül egyik osztója a másiknak!

Kalmár László Matematikaverseny 8. osztályosok versenye, 1990., megyei forduló

116. Tetszőlegesen megadunk 10 darab pozitív egész számot, amelyek közül egyik sem osztható 10-zel. Igaz-e, hogy ekkor van köztük néhány olyan (esetleg az összes), amelyeknek összege osztható 10-zel?

Kalmár László Matematikaverseny 7. osztályosok versenye, 1994., országos döntő

117. Egy 3×3-as négyzet alakú táblázat minden mezőjébe beírjuk az 1 és -1 számok valamelyikét. Ezután összeadjuk a sorokba írt számokat, majd az egyes oszlopokba írt számokat is. Igazoljuk, hogy az így kapott 6 szám között mindig van legalább kettő egyenlő!

Kalmár László Matematikaverseny 5. osztályosok versenye, 1996., országos döntő

118. A kilenctagú (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) számsorozatot állítsuk elő minél kevesebb olyan 9 tagú számsorozat „összegeként”, amelyek mindegyikében csak kétféle szám szerepel [például: (0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 0, 0) egy ilyen sorozat]. A 9 tagú sorozatok „összegét” úgy értelmezzük, hogy az azonos helyen álló számokat adjuk össze [például: $(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) + (0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 0, 0) = (1, 3, 2, 0, 1, 2, 2, 0, 1)$].

Kalmár László Matematikaverseny 8. osztályosok versenye, 1994., megyei forduló

119. Egy téglalap oldalai 5 és 9 egység. A téglalapot felbontottuk 10 darab egész oldalhosszúságú téglalapra. Igazoljuk, hogy ezek között van két egyenlő területű téglalap!

Kalmár László Matematikaverseny 8. osztályosok versenye, 1994., országos döntő

120. Adott egy 3-nál nagyobb p prímszám és tudjuk, hogy p-nek egy hatványa 20 jegyű szám. Igazoljuk, hogy a 20 számjegy között van legalább 3 azonos!

Kalmár László Matematikaverseny 7. osztályosok versenye, 1996., országos döntő

121. Egy teremben 30 ember gyűlt össze. Vannak közöttük olyanok, akik ismerik egymást, és olyanok is, akik nem (az ismeretség kölcsönös). Mutassuk meg, hogy a 30 ember között van 2 olyan, akiknek a teremben azonos számú ismerőse van!

Kalmár László Matematikaverseny 5. osztályosok versenye, 1998., országos döntő

122. Milyen számjegyeket kell írni a $\star$-ok helyére, hogy a tízes számrendszerben felírt $32\star35717\star$ szám osztható legyen 72-vel?

Kalmár László Matematikaverseny, 2000., 6. osztályosok versenye, országos döntő

123. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely 3-mal osztva 1-et, 4-gyel osztva 2-t, 5-tel osztva 3-at és 6-tal osztva 4-et ad maradékul?

Kalmár László Matematikaverseny, 1995., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

124. Melyik az a legkisebb, 1-nél nagyobb egész szám, amely 2-vel, 3-mal, 5-tel, 7-tel és 11-gyel osztva is 1 maradékot ad?

Kalmár László Matematikaverseny, 2001., 5. osztályosok versenye, országos döntő

125. Egy A pozitív egész szám 3-mal osztva 1 maradékot, 37-tel osztva 33 maradékot ad. Mennyi maradékot ad A, ha 111-gyel osztjuk?

Kalmár László Matematikaverseny, 1993., 7. osztályosok versenye, országos döntő

126. Van-e olyan egész szám, amely 16-tal osztva 4-et, 20-szal osztva 5-öt ad maradékul?

Kalmár László Matematikaverseny, 1997., 7. osztályosok versenye, országos döntő

127. Melyik lehet az a két pozitív egész szám, amelyek összege 168 és legnagyobb közös osztója 24?

Kalmár László Matematikaverseny 1997., 6. osztályosok versenye, országos döntő

128. Két páratlan szám, a és b különbsége 64. Mennyi lehet legfeljebb a és b legnagyobb közös osztója?

Kalmár László Matematikaverseny 1994., 8. osztályosok versenye, megyei forduló

129. Igazoljuk, hogy bármely $n \geq 1$ egész számra $21n + 4$ és $14n + 3$ legnagyobb közös osztója 1.

Kalmár László Matematikaverseny 1992., 8. osztályosok versenye, országos döntő

130. Az a_1, a_2, a_3, ... , a_{49} pozitív egész számok összege 999. Legfeljebb mennyi lehet ennek a 49 számnak a legnagyobb közös osztója?

Kalmár László Matematikaverseny 2001., 8. osztályosok versenye, országos döntő

131. Milyen számjegyre végződik 2^{1986}? Állításodat indokold meg!

Kalmár László Matematikaverseny 1986., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

132. Milyen számjegyre végződik 1992^{1991}?

Kalmár László Matematikaverseny 1991., 5. osztályosok versenye, országos döntő

133. Milyen számjegyre végződik a következő szorzat: $246^{16} \cdot 315^{18} \cdot 417^{20}$?

Kalmár László Matematikaverseny 1997., 6. osztályosok versenye, országos döntő

134. Lehet-e $172^{1996} + 7$ egy egész szám négyzete?

Kalmár László Matematikaverseny 1996., 7. osztályosok versenye, országos döntő

135. Felbontható-e két egymást követő pozitív egész szám szorzatára $3^{11} + 1$?

Kalmár László Matematikaverseny 1997., 6. osztályosok versenye, országos döntő

136. Igazoljuk, hogy három egymást követő egész szorzata, ha a középső négyzetszám, mindig osztható 10-zel!

Kalmár László Matematikaverseny 1988., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

137. Osztható-e 10-zel a $73^{73} + 37^{37}$ szám?

Kalmár László Matematikaverseny 1981., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

138. Bizonyítsd be, hogy a $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \cdots + 7^{18} + 7^{19} + 7^{20}$ összeg osztható 100-zal!

Kalmár László Matematikaverseny 1985., 8. osztályosok versenye, megyei forduló

139. Legfeljebb hány nullára végződik egy $9^n + 1$ alakú szám, ahol n pozitív egész?

Kalmár László Matematikaverseny 1992., 7. osztályosok versenye, országos döntő

140. Két egész számot nevezzünk egymás tükörképének, ha ugyanazokból a számjegyekből áll, csak fordított sorrendben (például 246 és 642 egymás tükörképei). Két tükörkép szám szorzata 92 565. Melyik ez a két szám?

Kalmár László Matematikaverseny, 1988., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

142. Három egymást követő páratlan számot összeszoroztunk, majd a kapott eredményt megszoroztuk 5-tel. Így egy következő alakú hatjegyű számot kaptunk: $\overline{ABABAB}$, ahol A és B számjegyek. Mi volt az eredeti három páratlan szám?

Kalmár László Matematikaverseny, 1993., 6. osztályosok versenye, országos döntő
Varga Tamás Matematikaverseny, 1996., 8. osztályosok versenye, országos döntő

141. Az a, b, c számjegyekre igaz, hogy a következő tízes számrendszerben felírt számok mind négyzetszámok: a, $\overline{ab}$, $\overline{cb}$, $\overline{cacb}$. Melyek ezek a számjegyek?

Kalmár László Matematikaverseny, 1985., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

143. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek utolsó számjegye 6, és ha az utolsó helyről a 6-os számjegyet az első helyre tesszük (a többi számjegy változatlan marad), akkor a négyszeresét kapjuk?

Kalmár László Matematikaverseny, 1991., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

144. Melyik az a tízes számrendszerben felírt legkisebb pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy 2-esre végződik, és ha ezt a 2-est a szám végéről áthelyezzük a szám elejére, akkor éppen a szám kétszeresét kapjuk?

Kalmár László Matematikaverseny, 1993., 5. osztályosok versenye, országos döntő

145. Egy ötjegyű szám elejére 1-est írunk. A kapott hatjegyű számot 3-mal megszorozva azt a hatjegyű számot kapjuk, amely az előbbi ötjegyű számból úgy is előállítható, hogy az 1-est a végére írjuk. Melyik ez az ötjegyű szám?

Kalmár László Matematikaverseny, 1992., 6. osztályosok versenye, megyei forduló
Kalmár László Matematikaverseny, 1995., 7. osztályosok versenye, országos döntő

146. Van-e olyan háromjegyű pozitív egész szám, amelynek minden pozitív egész kitevőjű hatványa ugyanarra a három számjegyre végződik?

Kalmár László Matematikaverseny 1993., 8. osztályosok versenye, országos döntő

147. Előállítható-e 2001 két egész szám négyzetének összegeként?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 2001., 7. osztály

148. Két padon 6-6 gyerek ült. Valamennyien különböző életkorúak (az életkorok egész számok), és az egyik padon ülő gyerekek életkorának összege és szorzata is megegyezik a másik padon ülők életkorának összegével és szorzatával. A legidősebb gyerek 16 éves. Hány évesek azok a gyerekek, akik vele egy padon ülnek?

Kalmár László Matematikaverseny, 1993., 6. osztályosok versenye, országos döntő

MEGOLDÁSOK

1. $(\frac{1}{19}+\frac{2}{19}+\dots+\frac{18}{19})+(\frac{1}{20}+\frac{2}{20}+\dots+\frac{19}{20})+(\frac{1}{21}+\frac{2}{21}+\dots+\frac{20}{21})+(\frac{1}{22}+\frac{2}{22}+\dots+\frac{21}{22})=?$

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1985., 7. osztályosok versenye

Megoldás. Az első zárójelben levő 18 számot párba állítjuk, mindegyik párban 1 a két tört értéke: $\frac{1}{19}+\frac{18}{19}=1$, $\frac{2}{19}+\frac{17}{19}=1$ stb. Így 9 számpárt képeztünk, az összeg 9.

A második zárójelben levő 19 számot itt is párba állítjuk: 9 számpárban 1 az összeg, és a $\frac{10}{20}$-nak nincs párja. A 19 szám összege 9,5.

A harmadik zárójelben 10, a negyedikben 10,5 a számok összege.

Az összeg értéke: $9+9,5+10+10,5=39$.

2. Bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+\dots+\frac{1}{200}>\frac{1}{2}$.

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1991., 6. osztályosok versenye

Megoldás. $\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+\dots+\frac{1}{200}>\frac{1}{200}+\frac{1}{200}+\frac{1}{200}+\dots+\frac{1}{200}=100\cdot\frac{1}{200}=\frac{1}{2}$.

3. Igazold, hogy az $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{1022}+\frac{1}{1023}$ összeg nagyobb 5-nél, de kisebb 10-nél!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1997., 7. osztályosok versenye

Megoldás. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{1022}+\frac{1}{1023}=$

$=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16})+(\frac{1}{17}+\dots+\frac{1}{32})+(\frac{1}{33}+\dots+\frac{1}{64})+(\frac{1}{65}+\dots+\frac{1}{128})+(\frac{1}{129}+\dots+\frac{1}{256})+$

$+(\frac{1}{257}+\dots+\frac{1}{512})+(\frac{1}{513}+\dots+\frac{1}{1023})>1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+16\cdot\frac{1}{32}+32\cdot\frac{1}{64}+64\cdot\frac{1}{128}+128\cdot\frac{1}{256}+$

$+256\cdot\frac{1}{512}+512\cdot\frac{1}{1024}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+10\cdot\frac{1}{2}=1+5=6>5$.

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{1022}+\frac{1}{1023}=1+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{7})+(\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{15})+(\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{31})+$

$+(\frac{1}{32}+\dots+\frac{1}{63})+(\frac{1}{64}+\dots+\frac{1}{127})+(\frac{1}{128}+\dots+\frac{1}{255})+(\frac{1}{256}+\dots+\frac{1}{511})+(\frac{1}{512}+\dots+\frac{1}{1023})<$

$<1+2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{8}+16\cdot\frac{1}{16}+32\cdot\frac{1}{32}+64\cdot\frac{1}{64}+128\cdot\frac{1}{128}+256\cdot\frac{1}{256}+512\cdot\frac{1}{512}=10$.

4. Igazoljuk, hogy a 2 felírható 1998 darab különböző pozitív egész szám reciprokának összegeként!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1998., 8. osztályosok versenye

Megoldás. $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}\cdot(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{72}+\frac{1}{108}+\frac{1}{216}$.

Másképp: $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\cdot(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}$.

Újabb megoldás: $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\dots+\frac{1}{1996\cdot1997}=1-\frac{1}{1997}$

$\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\dots+\frac{1}{1996\cdot1997}+\frac{1}{1997}=2$ Az 1998-tagú összeg tagjai mind különbözőek.

Lássunk egy negyedik megoldást!

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots+\frac{1}{2^{1995}}=1-\frac{1}{2^{1995}}$.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots+\frac{1}{2^{1995}}+\frac{1}{2^{1995}}=1$.

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots+\frac{1}{2^{1995}}+\frac{1}{2^{1995}}=2$.

Az összegben 1997 szám reciprokának összege 2, ám az összeg utolsó két tagja egyenlő. Ezen változtatunk.

Az $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ egyenlőséget megszorozzuk $\frac{1}{2^{1994}}$-nel: $\frac{1}{2^{1995}}=\frac{1}{3\cdot2^{1994}}+\frac{1}{6\cdot2^{1994}}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots+\frac{1}{2^{1995}}+\frac{1}{3\cdot2^{1994}}+\frac{1}{6\cdot2^{1994}}=2$.

Felírtuk a 2-t 1998 darab különböző pozitív egész szám reciprokának összegeként.

5. Igazoljuk minél rövidebben, hogy a következő egyenlőség helyes:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots+\frac{1}{100}.$$

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1994., 8. osztályosok versenye

Megoldás. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}$,
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{50}=2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{6}+\cdots+2\cdot\frac{1}{100}$.
A két egyenlőség különbsége adja a kívánt összefüggést:
$\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots+\frac{1}{100}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$.

6. $(1-\frac{1}{2^2})\cdot(1-\frac{1}{3^2})\cdot(1-\frac{1}{4^2})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{99^2})\cdot(1-\frac{1}{100^2})=?$

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló 1981., 8. osztályosok versenye

Megoldás. $(1-\frac{1}{2^2})\cdot(1-\frac{1}{3^2})\cdot(1-\frac{1}{4^2})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{99^2})\cdot(1-\frac{1}{100^2})=$
$=[(1-\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{2})]\cdot[(1-\frac{1}{3})\cdot(1+\frac{1}{3})]\cdot\ldots\cdot[(1-\frac{1}{100})\cdot(1+\frac{1}{100})]=$
$=[(\frac{1}{2})\cdot(\frac{3}{2})]\cdot[(\frac{2}{3})\cdot(\frac{4}{3})]\cdot[(\frac{3}{4})\cdot(\frac{5}{4})]\cdot[(\frac{4}{5})\cdot(\frac{6}{5})]\cdot\ldots\cdot[(\frac{99}{100})\cdot(\frac{101}{100})]=$
$=\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3})\cdot(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4})\cdot(\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5})\cdot(\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6})\cdot\ldots\cdot(\frac{100}{99}\cdot\frac{99}{100})\cdot\frac{101}{100}=$
$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot\frac{101}{100}=\frac{101}{200}$.

7. A következő szorzásban a $\star$-ok helyén álló számjegyek elmosódtak: $\star 2\star\cdot 13=2\star\star 1$. Határozd meg a hiányzó számjegyeket!

Kalmár László Matematikaverseny, 1987., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. A szorzandó utolsó számjegye 7-es, csak így végződhet a szorzat 1-re: $\star 27\cdot 13=2\star\star 1$. $127\cdot 13=1651$ (ez még kevés), $227\cdot 13=2951$, $327\cdot 13=4251$ (ez már sok). Az egyetlen megoldás: $227\cdot 13=2951$.

8. A következő osztásban a $\star$-ok helyén álló számjegyek elmosódtak: $20\star\star:13=\star\star 7$. Határozd meg a hiányzó számjegyeket!

Kalmár László Matematikaverseny, 1998., 5. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. $2000:13=153$ és van maradék. $2100:13=161$ és van maradék. A hányados 7-re végződik és nagyobb 153-nál, kisebb 161-nél, emiatt csak 157 lehet. $2041:13=157$.

9. Milyen számjegyeket kell írni a, b és c helyére, hogy a (tízes számrendszerben felírt) $\overline{2abc6}$ alakú szám maradék nélkül osztható legyen 1986-tal?

Kalmár László Matematikaverseny, 1986., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. $10\cdot 1986=19860<\overline{2abc6}<20\cdot 1986=39720$. Tehát a $\overline{2abc6}$ szám az 1986-nak a 11-szerese, 12-szerese, …, 19-szerese lehet. Ezekből kell kiválasztani a helyes választ.
1986 olyan többszörösét keressük, amely 6-ra végződik. Ezért a szorzó 11 vagy 16 lehet.
$11\cdot 1986=21846$, tehát $a=1$, $b=8$, $c=4$ egy megoldás.
$16\cdot 1986=31776>\overline{2abc6}$, emiatt itt nem találunk megoldást.

10. Egy háromjegyű szám számjegyeit összeszorozzuk, majd a kapott szám számjegyeit szorozzuk össze. A kiinduló számot és a két szorzatot a következő módon ábrázolhatjuk: (azonos alakú jelek azonos számjegyeket jelölnek).
$\triangle\bigcirc\bigcirc$; $\triangle\square$; $\square$
Mi volt a kiinduló szám? Indokold meg válaszodat!

Kalmár László Matematikaverseny, 1980., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. Mivel $\triangle\cdot\square=\square$, ezért $\triangle=1$. Ezért a háromjegyű szám jegyeinek szorzata $1\cdot\bigcirc\cdot\bigcirc$ négyzetszám, amely 10 és 20 közé esik.
$\triangle\square=16$, $\bigcirc=4$. A kiinduló szám: 144.

11. A következő szorzásban azonos betűk azonos számjegyeket, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek:

$$\overline{BIT} \cdot \overline{BIT} = \overline{SOKBIT}.$$

Mi lehet a szorzat értéke?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1996., 8. osztályosok versenye

Megoldás. $a = \overline{BIT}$. a^2 utolsó három jegyéből álló szám megegyezik a-val. Ez azt jelenti, hogy $1000 \mid a^2 - a$, tehát $8 \cdot 125 \mid a(a-1)$. a és $a-1$ relatív prímek, így az oszthatóság akkor teljesül, ha $8 \mid a$ és $125 \mid a-1$, vagy $125 \mid a$ és $8 \mid a-1$.

Vizsgáljuk a $125 \mid a-1$, ill. a $125 \mid a$ oszthatóságokat.

Első esetben a értéke 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876 lehet, közülük csak 376 esetén teljesül a $8 \mid a$ oszthatóság.

Második esetben a értéke 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875 lehet, itt csak 625 esetén teljesül a $8 \mid a-1$ oszthatóság.

Két megfelelő szám van: 376 és 625.

$376^2 = 141\,376$, ez nem megoldása a feladatnak, hiszen a $\overline{SOKBIT}$ szám első három számjegye különböző. $625^2 = 390\,625$.

A keresett szorzat: $390\,625$.

12. Hány olyan n természetes szám van, amelyre igaz, hogy

$$\tfrac{1}{4} < \tfrac{n}{n+12} < \tfrac{1}{3}$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Zrínyi Ilona Matematikaverseny, országos döntő, 1992., 7. osztályosok versenye
Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1983., 8. osztályosok versenye

Megoldás. (B) 1.

Ha $\frac{1}{4} < \frac{n}{n+12}$, akkor $n + 12 < 4n$, $12 < 3n$, $4 < n$.

Ha $\frac{n}{n+12} < \frac{1}{3}$, akkor $3n < n + 12$, $2n < 12$, $n < 6$.

Mivel $4 < n < 6$, ezért $n = 5$.

13. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$ egyenletet!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 2001., 8. osztályosok versenye

Megoldás. Ha $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$, akkor x is, y is nagyobb 1-nél. Feltehetjük, hogy $x \le y$ (azaz $\frac{1}{x} \ge \frac{1}{y}$).

Ha $x = 2$, akkor az $\frac{1}{2} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$ egyenlőségből $\frac{1}{y} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$, tehát $y = 6$.

Ha $x = 3$, akkor az $\frac{1}{3} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$ egyenlőségből $\frac{1}{y} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, tehát $y = 3$.

Ha $x = 4$, akkor $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} < \frac{2}{3}$. Tehát $x = 4, 5, \ldots$ esetén (mivel $x \le y$) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{2}{3}$, azaz itt már nem találunk megoldást.

Az egyenletnek két megoldása van: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ és $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

14. Melyik nagyobb:

$$\frac{3}{4} \quad \text{vagy} \quad \frac{3000001}{4000001}?$$

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1983., 5. osztályosok versenye

Megoldás. Ha a, b, c, d pozitív számok, akkor $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ pontosan akkor, ha $a \cdot d < b \cdot c$.

Ez alapján $\frac{3000001}{4000001} > \frac{3}{4}$, mert $3000001 \cdot 4 = 12000004 > 12000003 = 4000001 \cdot 3$.

Más indoklás: $\frac{3000001}{4000001} = 1 - \frac{1000000}{4000001} > 1 - \frac{1000000}{4000000} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

15. Melyik szám a nagyobb és miért:

$$\frac{222\,221}{222\,223} \quad \text{vagy} \quad \frac{333\,331}{333\,334}?$$

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1986., 7. osztályosok versenye

Megoldás. $\frac{222\,221}{333\,332} = \frac{444\,442}{666\,664} = 1 - \frac{222\,222}{666\,664} < 1 - \frac{222\,222}{666\,665} = \frac{444\,443}{666\,665}$.

16. A 2, 3, 6 számok érdekes tulajdonsága, hogy összegük 11 és reciprokaik összege: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$. Állítsuk elő a 24-et és a 31-et is olyan pozitív egészek összegeként, amelyeknek reciprokait összeadva 1-et kapunk!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1995., 6. osztályosok versenye

Megoldás. Tudjuk, hogy $2+3+6=11$ és $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$. Szorozzuk meg 2-vel az első egyenlőséget: $4+6+12=22$. Ekkor tudhatjuk, hogy $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$, innen $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$, és $2+4+6+12=24$.

Ezzel előállítottuk a 24-et olyan pozitív egészek összegeként, amelyeknek reciprokait összeadva 1-et kapunk.

Most induljunk az előbbi $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$ egyenlőségből, és használjuk fel, hogy $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$.

Ezekből $(\frac{1}{3}+\frac{1}{6})+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$. Itt $3+6+4+6+12=31$.

Ezzel előállítottuk a 31-et olyan pozitív egészek összegeként, amelyeknek reciprokait összeadva 1-et kapunk.

17. Az országos döntő második fordulójába kilenc ötödikes került be, lányok és fiúk vegyesen. Itt a lányok hat tized része legalább két feladatot oldott meg hibátlanul. Hány ötödikes fiú és hány ötödikes lány került az országos döntő második fordulójába?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1987., 5. osztályosok versenye

Megoldás. Ha a lányok hat tized része legalább két feladatot oldott meg hibátlanul, akkor a lányok száma 5, 10, 15, ... lehet (hiszen ekkor lesz a hat tized rész egész szám).

Ekkor a 9 ötödikes között 5 lány és 4 fiú van.

18. Hogyan lehet 7 egyforma kenyeret igazságosan elosztani 12 éhes vándor között úgy, hogy egyik kenyeret se kelljen 12 részre vágni? Próbáld meg minél kevesebb vágással megoldani!

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1985., 5. osztályosok versenye

Megoldás. 4 kenyér mindegyikét osszuk 3–3 egyenlő részre, a többi 3 kenyér mindegyikét pedig vágjuk szét 4–4 egyenlő részre. Így kapunk 12 db $\frac{1}{3}$, és 12 db $\frac{1}{4}$ kenyeret, ezekből adunk mindegyik vándornak egy negyed és egy harmad darab kenyeret.

19. Bence összeadta 1-től 20-ig a pozitív egész számok reciprokát. A kapott törtet egyszerűsítette, és azt állítja, hogy az egyszerűsítés után kapott tört számlálója osztható 5-tel. Igaza van-e?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1999., 5. osztályosok versenye

Megoldás. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}=$

$$=(1+\tfrac{1}{19})+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{18})+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{17})+(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16})+(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{14})+(\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{13})+$$
$$+(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{12})+(\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{20})=$$

$$=\tfrac{19+1}{1\cdot 19}+\tfrac{18+2}{2\cdot 18}+\tfrac{17+3}{3\cdot 17}+\tfrac{16+4}{4\cdot 16}+\tfrac{14+6}{6\cdot 14}+\tfrac{13+7}{7\cdot 13}+\tfrac{12+8}{8\cdot 12}+\tfrac{11+9}{9\cdot 11}+$$
$$+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{20})=$$

$$=\tfrac{20}{1\cdot 19}+\tfrac{20}{2\cdot 18}+\tfrac{20}{3\cdot 17}+\tfrac{20}{4\cdot 16}+\tfrac{20}{6\cdot 14}+\tfrac{20}{7\cdot 13}+\tfrac{20}{8\cdot 12}+\tfrac{20}{9\cdot 11}+\tfrac{5}{12}.$$

Ha képzeletben ezt az utóbbi összeget közös nevezőre hozzuk, a számlálók összege többszöröse 5-nek, a nevező pedig nem osztható 5-tel. Ha a kapott végeredményben a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezzük, a számláló továbbra is 5-tel osztható marad.

20. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben van ismétlődő számjegy (pl. 2213, 4142, 1100)?

Kalmár László Matematikaverseny 7. osztályosok versenye, 1996, megyei forduló

Megoldás. *Dobjuk ki a feleslegest!* A négyjegyű számok száma 9000. Azoknak a négyjegyű számoknak a száma, melyekben nincs két egyforma számjegy $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7=4536$. Emiatt az olyan négyjegyű számok száma, amelyben van ismétlődő számjegy $9000-4536=4464$.

21. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben csak két különböző számjegy fordul elő?

Kalmár László Matematikaverseny 6. osztályosok versenye, 1998, országos döntő

Megoldás. Számoljuk előbb azokat a számokat, amelyben nincs 0 számjegy.

Két számjegyet az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 jegyek közül $\frac{9\cdot 8}{2} = 36$-féleképp választhatunk. (Az első számjegyet 9-féleképp, hozzá a másodikat 8-féleképp, ez $9 \cdot 8$ lehetőség. Azonban minden esetet kétszer számoltunk: az (a, b) és a (b, a) párt is számoltuk, de a sorrend itt nem számít, tehát el kell feleznünk a kapott eredményt.)

Ha van két (nem 0) számjegyünk, azokból $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ különböző négyjegyű szám képezhető. Hiszen az első helyre is, a második, a harmadik, a negyedik helyre is a kétféle jegyet írhatunk. A 16 szám között van kettő, amely csak egyféle számjegyből áll ($\overline{aaaa}$, $\overline{bbbb}$). Ezért $16 - 2 = 14$ négyjegyű szám képezhető két (nem 0) számjegyből úgy, hogy mindkét számjegy szerepeljen a számban.

Összegezve: két nem nulla számjegyet 36-féleképp választhatunk, két ilyen számjegyből 14 négyjegyű szám képezhető úgy, hogy mindkét számjegy szerepeljen a számban. Ez összesen $36 \cdot 14 = 504$ szám.

Még megszámoljuk azokat a számokat, melyekben szerepel a 0 számjegy. Legyen például a másik számjegy a 3. Az első számjegy csak a 3 lehet, a második, harmadik, negyedik helyekre kétféle jegyet írhatunk (0 vagy 3). Ezek száma: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Azonban a 8 eset egyike a 3333 szám, ebben nincs kétféle számjegy, tehát valójában csak 7-féle eset van. A 0 mellé a másik számjegyet 9-féleképp választhatjuk, minden ilyen kiválasztásból 7-féle négyjegyű szám származik. Összesen $9 \cdot 7 = 63$ számot találtunk.

Mindent összevetve: azon négyjegyű számok száma, amelyben csak két különböző számjegy fordul elő $504 + 63 = 567$.

22. A háromjegyű számok között melyikből van több, amelyiknek minden számjegye páros, vagy amelyiknek minden számjegye páratlan? Miért?

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1996, 5. osztályosok versenye

Megoldás. Azoknak a háromjegyű számoknak a száma, amelyeknek minden jegye páros: $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$, mert az első számjegy 0 nem lehet.

Azoknak a háromjegyű számoknak a száma, amelyeknek minden jegye páratlan: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Tehát ezekből van több.

23. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben a páratlan számjegyek száma páratlan? Állításodat indokold!

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1993, 5. osztályosok versenye

Megoldás. A keresett számokat leszámolhatjuk aszerint, hogy hány olyan szám van, amelyben 1 páratlan számjegy van, illetve 3 páratlan számjegy van.

Ha 1 páratlan számjegyet tartalmaz a háromjegyű szám, az a számjegy állhat az első, a második vagy a harmadik helyen.

Ha az első számjegy páratlan és a másik kettő páros, akkor az első helyre 5-féle jegyet írhatunk (1, 3, 5, 7 vagy 9), a második helyre is 5-féle jegyet írhatunk (0, 2, 4, 6 vagy 8) és a harmadik helyre is 5-féle jegyet írhatunk (0, 2, 4, 6 vagy 8). Ez összesen $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$-féleképpen lehetséges.

Ha a második számjegy páratlan és a másik két számjegy páros, akkor az első helyre 4-féle jegyet írhatunk (2, 4, 6 vagy 8 lehet, de a 0 nem), a második helyre 5-féle jegy kerülhet (1, 3, 5, 7 vagy 9) és a harmadik helyre is 5-féle jegyet írhatunk (0, 2, 4, 6 vagy 8). Ez összesen $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$-féleképpen lehetséges.

Ha a harmadik számjegy páratlan és az első két számjegy páros, akkor az első helyre 4-féle jegyet írhatunk (2, 4, 6 vagy 8 lehet, de a 0 nem), a második helyre 5-féle jegy kerülhet (0, 2, 4, 6 vagy 8) és a harmadik helyre is 5-féle jegyet írhatunk (1, 3, 5, 7 vagy 9). Ez összesen $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$-féleképpen lehetséges.

Még vizsgálnunk kell azt a lehetőséget, ha 3 páratlan számjegyből áll a szám. Itt az első, a második és a harmadik számjegy is 5-féle lehet (1, 3, 5, 7 vagy 9). Ez összesen $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$-féle számot jelent.

Összesen $125 + 100 + 100 + 125 = 450$ számot számláltunk meg.

Második megoldás. Egyszerűbb eljárás, ha azt nézzük, hogy egy-egy tízes intervallumban a tíz szám fele olyan, hogy abban a páratlan számjegyek száma páratlan, ugyanis az egymást követő számokban váltakozva páros ill. páratlan a páratlan számjegyek száma. Ez azért van így, mert ebben a tíz számban az utolsó jegyek 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, és ezek váltakozva párosak, páratlanok, emiatt mindig 1-gyel változik a következő számban a páratlan számjegyek száma.

24. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyet ha „hátulról” előre olvasunk, ugyanazt a számot kapjuk (például ilyen szám: 12321)?

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1994, 5. osztályosok versenye
Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1999, 5. osztályosok versenye

Megoldás. A keresett ötjegyű számok száma pontosan annyi, ahány háromjegyű szám van, hiszen pl. a 230 és a 23032 számok kölcsönösen meghatározzák egymást. Így a vizsgált ötjegyű számok száma: 900.

25. Hányféleképpen választhatunk ki 1 és 20 között 2 egész számot úgy, hogy összegük páros legyen?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntő, 1994, 6. osztályosok versenye

Megoldás. A két szám mindegyike lehet páros, vagy lehet mindkettő páratlan.

Tíz páros számból kettőt $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$-féleképpen választhatunk. Tíz páratlan számból kettőt $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$-féleképpen választhatunk.

Ez összesen $45 + 45 = 90$ lehetőség.

26. Hányféleképpen választhatunk ki három különböző, 30-nál nem nagyobb pozitív egész számot úgy, hogy összegük páros legyen?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntő, 1994, 8. osztályosok versenye
Kalmár László Matematikaverseny országos döntő, 1998, 6. osztályosok versenye

Megoldás. Három egész szám összege akkor páros, ha mindhárom páros, vagy kettő páratlan és egy páros.

A 15 páros számból három számot kell kiválasztanunk. Az első számot 15-féleképpen, a másodikat 14-féleképpen, a harmadikat 13-féleképpen választhatjuk. Ez $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$ lehetőség. De ekkor minden kiválasztott számhármast 6-szor számoltunk, hiszen pl. az a, b és c számok kiválasztását megszámoltuk az abc, acb, bac, bca, cab és cba húzási sorrendekben. Tehát 15 számból hármat $\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{6} = 455$-féleképp választhatunk.

Még megszámoljuk, hogy két páratlan és egy páros számot hányféleképpen választhatunk. A 15 páratlan számból két páratlant $\frac{15\cdot 14}{2} = 105$-féleképpen választhatunk, és hozzá egy páros számot 15-féleképp. $15 \cdot 105 = 1575$ módon tudjuk ebben az esetben a számhármasokat kiválasztani.

Az 1 és 30 közötti számokból $455 + 1575 = 2030$-féleképp választhatunk ki három számot úgy, hogy azok összege páros legyen.

27. Adott a síkon két párhuzamos egyenes, az egyiken 10, a másikon 20 pont. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntő, 1995, 7. osztályosok versenye

Megoldás. A megadott módon háromszöget úgy tudunk kijelölni, hogy a 10 pontból kettőt és a 20 pontból egyet, vagy a 20 pontból egyet és a 10 pontból kettőt választunk a háromszög csúcsaiként.

10 pontból kettőt és 20 pontból egyet $\frac{10\cdot 9}{2} \cdot 20 = 900$-féleképpen, 10 pontból egyet és 20 pontból kettőt $10 \cdot \frac{20\cdot 19}{2} = 1900$-féleképpen választhatunk. Ezt összesen $900 + 1900 = 2800$-féleképpen tehetjük meg.

28. Egy négyzet mindegyik oldalát 7 egyenlő részre osztottuk. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai a négyzet oldalain megjelölt (csúcsoktól különböző) osztópontokból kerülnek ki?

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1995, 8. osztályosok versenye

Megoldás. Ha egy négyzet egy oldalát 7 egyenlő részre osztjuk, akkor azt az oldalt 6 ponttal osztottuk részekre.

Háromszöget úgy tudunk kijelölni az osztópontokból, hogy vagy a négyzet három oldaláról veszünk egy-egy pontot, vagy valamelyik oldalról két pontot választunk, és egy másik oldalról választunk harmadik pontot.

A négyzet három oldaláról egy-egy pontot $4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 864$-féleképpen választhatunk. Kiválasztjuk, hogy a 4 oldal melyikéről nem veszünk pontot, ez 4-féle lehetőség, majd a többi három oldal mindegyikéről egy-egy pontot veszünk. Egy-egy oldalon 6-6 pont közül tudunk választani.

Valamelyik oldalról két pontot választunk, és egy másik oldalról választunk harmadik pontot – ezt 1080-féleképpen tehetjük. Kiválasztjuk, hogy a 4 oldal melyikéről veszünk két pontot, ez $4 \cdot \frac{6\cdot 5}{2} = 60$-féle lehetőség. Majd ehhez a két ponthoz választunk egyet a maradék $3 \cdot 6 = 18$ pontból. Ami összesen $60 \cdot 18 = 1080$ lehetőséget biztosít.

Összesen $864 + 1080 = 1944$ háromszög jelölhető ki a megadott pontokból.

29. Mennyi azoknak a csupa különböző számjegyekből álló 4-jegyű számoknak az összege, amelyeknek számjegyei közt csak az 1, 2, 3, 4 szerepelnek?

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1995, 7. osztályosok versenye

Megoldás. A négyjegyű szám négy helyiértékére sorra 4, 3, 2 és végül 1 számjegy kerülhet, tehát összesen $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ilyen szám van.

Minden helyiértéken minden számjegy 6-szor fordul elő, így az egyes helyiértékeken a számjegyek összege: $6(1+2+3+4) = 60$, tehát a 24 szám összege: $60 + 600 + 6000 + 60000 = 66660$.

30. Képzeletben írjuk fel az összes olyan négyjegyű számot, amelynek jegyei csak az 1, 2, 3, 4 számok közül kerülhetnek ki (egy jegy többször is előfordulhat egy ilyen négyjegyű számban). Számítsd ki az ilyen négyjegyű számok összegét!

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1987, 8. osztályosok versenye

Megoldás. A négyjegyű szám négy helyiértékére sorra 4, 4, 4 és végül 4 számjegy kerülhet (hiszen egy számjegy egy számban többször is szerepelhet), tehát összesen $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ ilyen szám van.

Minden helyiértéken minden számjegy 64-szer fordul elő, így az egyes helyiértékeken a számjegyek összege: $64(1+2+3+4) = 640$, tehát a 256 szám összege: $640 + 6400 + 64000 + 640000 = 711\,040$.

31. Egy körmérkőzéses versenyen (mindenki mindenkivel játszik) eddig 65 mérkőzést játszottak le és még mindenkinek 2 mérkőzése van hátra. Hányan indultak a versenyen?

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1992, 7. osztályosok versenye

Megoldás. Ha a versenyzők száma n, akkor mindenki $n-1$ mérkőzést fog játszani. Mivel még mindenkinek 2 mérkőzése van hátra, ezért eddig mindnyájan $(n-1)-2 = n-3$ mérkőzést játszottak. Az eddig lejátszott mérkőzések száma: $\frac{n(n-3)}{2}$.

$$\frac{n(n-3)}{2} = 65,$$
$$n(n-3) = 130.$$

$n = 13$ megoldás. Ha $n > 13$, akkor $n(n-3) > 130$, ha $0 < n < 13$, akkor $n(n-3) < 130$. Tehát más megoldás nincs a pozitív egészek körében.

A versenyen 13 induló volt.

32. Van-e olyan egész szám, amelynek négyzete így írható: $1999^{2000} + 1$?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 2000. 7. osztályosok versenye

Megoldás. Az 1999^{2000} szám utolsó számjegye megegyezik 9^{2000} utolsó számjegyével. Vizsgáljuk 9 hatványait!

$9^1 = 9$, $9^2 = 81$, $9^3 = 729$, $9^4 = 6561$, ... A hatványok utolsó számjegye váltakozva 9 és 1. A 9^{2000} szám utolsó számjegye 1, így 1999^{2000} utolsó jegye is 1. Ezért $1999^{2000} + 1$ utolsó számjegye 2, emiatt ez a szám nem lehet négyzetszám.

33. Lehet-e egy pozitív egész szám négyzete a következő szám: $1998^{15} + 2$? Állításodat indokold!

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1998. 7. osztályosok versenye

Megoldás. $1998^{15} + 2$ osztható 2-vel, de nem osztható 4-gyel (vagyis: 4-gyel osztva 2 maradékot ad), emiatt nem lehet négyzetszám.

34. Lehet-e $172^{1996} + 7$ egy egész szám négyzete?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1996. 7. osztályosok versenye

Megoldás. 172^{1996} osztható 4-gyel, ezért a $172^{1996} + 7$ számot 4-gyel osztva 3-at kapunk maradékul, így ez a szám nem lehet négyzetszám.

Második megoldás. 172^{1996} szám utolsó számjegye ugyanaz, mint a 2^{1996} szám utolsó jegye. Vizsgáljuk 2 hatványait!

2	32	512	8192
4	64	1024	... 4
8	128	2048	... 8
16	256	4096	... 6

Azaz a 2-hatványok utolsó jegye: 2, 4, 8, 6 – és ez újra ismétlődik. 2^{1996} szám utolsó jegye 6, ezért 172^{1996} utolsó jegye is 6, emiatt a $172^{1996} + 7$ szám 3-ra végződik, így nem lehet négyzetszám.

Harmadik megoldás. $(172^{998})^2 < 172^{1996} + 7 < (172^{998} + 1)^2$. Tehát $172^{1996} + 7$ két szomszédos négyzetszám között van, így nem lehet négyzetszám.

35. Valaki azt állította, hogy egy pozitív egész szám négyzetének a számjegyeit összeadta és 1995-öt kapott. Igaza van-e?

Zrínyi Ilona Matematikaverseny 1995. 7. osztályosok versenye, országos döntő

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1996. 8. osztályosok versenye

Megoldás. Ha egy szám számjegyeinek összege 1995, akkor az a szám osztható 3-mal (hiszen 1995 osztható 3-mal), de nem osztható 9-cel (mivel 1995 nem osztható 9-cel), ezért ez a szám nem lehet négyzetszám.

36. Van-e olyan pozitív egész szám, amelyet négyzetre emelve és a kapott szám számjegyeit összeadva
a) 2001-et kapunk?
b) 2002-t kapunk?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 2000. 8. osztályosok versenye

Megoldás. *a*) Ha egy szám számjegyeinek összege 2001, akkor az a szám osztható 3-mal (hiszen 2001 osztható 3-mal), de nem osztható 9-cel (mivel 2001 nem osztható 9-cel), ezért ez a szám nem lehet négyzetszám.

b) Vannak olyan négyzetszámok, amelyekben a számjegyek összege 2002. Ilyet találunk a 2.4. c) példában levő számok között:
111 ... 122 ... 225 (665 db 1-es, 666 db 2-es).

Egy másik számot a $7^2 = 49$, $97^2 = 9409$, $997^2 = 994\,009$, $9997^2 = 99940009$, ... sorozatban találunk. $999\dots997^2$ (221 db 9-es) szám jegyeinek összege 2002.

37. Az A pozitív egész szám tízes számrendszerbeli alakja 1999 darab 2-es és néhány 0 számjegyet tartalmaz. Lehet-e ez a szám négyzetszám?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1999. 7. osztályosok versenye

Megoldás. Az A szám számjegyeinek összege $2 \cdot 1999 = 3998$. Emiatt az A szám 3-mal osztva 2-t ad maradékul, ezért A nem lehet négyzetszám.

38. Összeadtuk az egész számokat 1-től 1999-ig. A kapott szám egész szám négyzete-e vagy nem?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1999. 6. osztályosok versenye

Megoldás. $1+2+3+\dots+1997+1998+1999 = \frac{1999 \cdot 2000}{2} = 1999000$. Az $1\,999\,000$ szám prímtényezős alakjában a 2 kitevője 3 (azaz nem páros szám), ezért ez a szám nem lehet négyzetszám.

39. Leírtuk sorban egymás mellé a pozitív egész számokat 1-től 1999-ig. Az így kapott tízes számrendszerbeli szám négyzetszám, vagy nem?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1999. 8. osztályosok versenye

Megoldás. Az $123456789101112\dots19981999$ szám 4-gyel osztva 3-at ad maradékul, ezért ez a szám nem lehet négyzetszám.

40. Vannak-e négyzetszámok a következő sorozatban: 11, 111, 1111, 11 111, ... ?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1997. 7. osztályosok versenye,
1998. 6. osztályosok versenye

Megoldás. A $111\dots1111 = 111\dots1108 + 3$ szám 4-gyel osztva 3-at ad maradékul, ezért nem lehet négyzetszám. Tehát a 11, 111, 1111, 11 111, ... számok között nincs négyzetszám.

41. Adjuk meg az összes olyan kétjegyű számot, amelyeknek a négyzete három azonos, 0-tól különböző számjegyre végződik!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1999. 7. osztályosok versenye

Megoldás. Egy négyzetszám utolsó számjegye 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9 lehet. Ezért ha van olyan négyzetszám, mely 3 egyforma számjegyre végződik, akkor ez a számjegy ezek közül való.

Négyzetszám 111, 555, 666, 999 jegyekre nem végződhet, mert az ilyen számok 4-gyel osztva 3, 3, 2, 3 maradékot adnak, s négyzetszám 4-gyel osztva ilyen maradékokat nem adhat.

Az n^2 szám csak 444 jegyekre végződhet. Tehát a keresett kétjegyű szám négyzete lehet 1444, 2444, 3444, 4444, 5444, 6444, 7444, 8444, 9444. Ezek között csak $1444 = 38^2$ négyzetszám.

42. Bizonyítsd be, hogy négy egymást követő pozitív egész szám összege nem lehet négyzetszám!

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1992. 8. osztályosok versenye

Megoldás. $(a-1)+a+(a+1)+(a+2)=4a+2$. Ez a szám 4-gyel osztva 2 maradékot ad, ezért nem lehet négyzetszám.

43. Lehet-e két páratlan szám négyzetének összege is egy egész szám négyzete?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1994. 5. osztályosok versenye

Megoldás. Két páratlan négyzetszám összege 4-gyel osztva $1+1=2$-t ad maradékul, ám egy négyzetszám 4-gyel osztva 2-t nem adhat maradékul, ezért az összeg nem lehet négyzetszám.

44. Igazoljuk, hogy öt egymást követő pozitív egész szám négyzetének összege nem lehet egy egész szám négyzete!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1995. 8. osztályosok versenye
Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 2001. 7. osztályosok versenye

Megoldás. Az egymást követő négyzetszámok 4-gyel osztva váltakozva 0 és 1 maradékot adnak. Ezért öt egymást követő pozitív egész szám négyzetének összege 4-gyel osztva 2 vagy 3 maradékot ad, emiatt nem lehet egy egész szám négyzete.

Másképp. $(a-2)^2+(a-1)^2+a^2+(a+1)^2+(a+2)^2=5(a^2+2)$, ha ez az 5-tel osztható szám négyzetszám, akkor osztható 25-tel is. Ezért a^2+2 osztható kell legyen 5-tel, ami csak akkor teljesülhet, ha a^2 utolsó jegye 3 vagy 8. Négyzetszám így nem végződhet, ezért $5(a^2+2)$ nem lehet négyzetszám.

45. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek fele egy egész szám négyzete, ötöde pedig egy egész szám köbe (harmadik hatványa)?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1998. 6. osztályosok versenye

Megoldás. Legyen a keresett szám x, mivel ennek a fele négyzetszám, ezért x osztható 2-vel. Továbbá x ötöde is egész szám, x osztható 5-tel is.

Keressük x-et $x=2^\alpha\cdot 5^\beta$ alakban. Más prímosztója nincs x-nek, hiszen akkor nem lenne a legkisebb.

$\frac{x}{2}=a^2$, azaz $\frac{x}{2}=2^{\alpha-1}\cdot 5^\beta=a^2$, ezért 2 és 5 kitevője páros szám: $2\mid\alpha-1$ és $2\mid\beta$.

$\frac{x}{5}=b^3$, azaz $\frac{x}{5}=2^\alpha\cdot 5^{\beta-1}=b^3$, ezért 2 és 5 kitevője 3-mal osztható szám: $3\mid\alpha$ és $3\mid\beta-1$.

Tehát $2\mid\alpha-1$ és $3\mid\alpha$. A legkisebb pozitív egész α, amire ez teljesül $\alpha=3$.

$2\mid\beta$ és $3\mid\beta-1$. A legkisebb pozitív egész β, amire ez teljesül $\beta=4$.

A megoldás: $x=2^3\cdot 5^4=5000$.

46. Keress olyan pozitív egész számot, amelyet 2-vel szorozva négyzetszámot, 3-mal szorozva köbszámot, 5-tel szorozva teljes ötödik hatványt kapunk!

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1989. 8. osztályosok versenye

Megoldás. Legyen a keresett szám x.

$2x=a^2$, a^2 osztható 2-vel, akkor osztható 4-gyel is. Ez csak úgy lehet, ha $2\mid x$.

$3x=b^3$, b^3 osztható 3-mal, akkor osztható $3^3=27$-tel is. Ez csak úgy lehet, ha $3\mid x$.

$5x=c^5$, c^5 osztható 5-tel, akkor osztható 5^5-nel is. Ez csak úgy lehet, ha $5\mid x$.

Ezért keressük x-et $x=2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma$ alakban. Más prímosztója nincs x-nek, hiszen akkor nem lenne a legkisebb.

$2x=a^2$, azaz $2x=2^{\alpha+1}\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma=a^2$, ezért 2, 3 és 5 kitevője páros szám: $2\mid\alpha+1$, $2\mid\beta$ és $2\mid\gamma$.

$3x=b^3$, azaz $3x=2^\alpha\cdot 3^{\beta+1}\cdot 5^\gamma=b^3$, ezért 2, 3 és 5 kitevője 3-mal osztható szám: $3\mid\alpha$, $3\mid\beta+1$ és $3\mid\gamma$.

$5x=c^5$, azaz $5x=2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5^{\gamma+1}=c^5$, ezért 2, 3 és 5 kitevője 5-tel osztható szám: $5\mid\alpha$, $5\mid\beta$ és $5\mid\gamma+1$.

Tehát $2\mid\alpha+1$, $3\mid\alpha$ és $5\mid\alpha$. A legkisebb pozitív egész α, amire ez teljesül $\alpha=15$.

$2\mid\beta$, $3\mid\beta+1$ és $5\mid\beta$. A legkisebb pozitív egész β, amire ez teljesül $\beta=20$.

$2\mid\gamma$, $3\mid\gamma$ és $5\mid\gamma+1$. A legkisebb pozitív egész γ, amire ez teljesül $\gamma=24$.

A megoldás: $x=2^{15}\cdot 3^{20}\cdot 5^{24}$.

47. Döntsd el, hogy a következő 13-jegyű szám négyzetszám vagy sem: 1020304030201.

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1993. 8. osztályosok versenye

Megoldás. Vizsgáljunk egyszerűbb eseteket! $10201 = 101^2$, s valóban:

$$\begin{array}{l}
\underline{101}\cdot 101\\
101\\
\underline{101}\\
10201
\end{array}$$

$102030201 = 10101^2$, hiszen:

$$\begin{array}{l}
\underline{10101}\cdot 10101\\
10101\\
10101\\
\underline{10101}\\
102030201
\end{array}$$

Várható, látható a válasz a feladat kérdésére:
$1020304030201 = 1010101^2$, ugyanis

$$\begin{array}{l}
\underline{1010101}\cdot 1010101\\
1010101\\
1010101\\
1010101\\
\underline{1010101}\\
1020304030201
\end{array}$$

48. Igaz-e, hogy a következő alakú, tízes számrendszerben felírt számok mind négyzetszámok: 49, 4489, 444889, 44448889, ...

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1993. 7. osztályosok versenye

Megoldás. $49 = 7^2$, $4489 = 67^2$, $444889 = 667^2$, ... alapján kialakul a sejtésünk, hogy ezen a számok mindegyike egy $666\ldots667$ alakú szám négyzete.

Emeljünk négyzetre egy ilyen számot!

$$\begin{array}{l}
\underline{6666667}\cdot 6666667\\
40000002\\
40000002\\
40000002\\
40000002\\
40000002\\
40000002\\
\underline{46666669}\\
44444448888889
\end{array}$$

Ez a példa meggyőzően mutatja, hogy a szorzás (négyzetreemelés) eredménye többjegyű számok esetén is ilyen alakú.

Más megoldás. Legyen a vizsgált szám: 444 444 888 889. A megoldásból következik az állítás az általános esetre is.

$444\,444 = 4\cdot 111\,111 = 4\cdot\frac{1}{9}\cdot 999\,999 = \frac{4}{9}\cdot(10^6-1)$, továbbá

$88888 = 8\cdot 11111 = 8\cdot\frac{1}{9}\cdot 99999 = \frac{8}{9}\cdot(10^5-1)$. Ezek alapján

$444\,444\,888\,889 = 444\,444\,000\,000 + 888\,880 + 9 =$

$= \frac{4}{9}\cdot(10^6-1)\cdot 10^6 + \frac{8}{9}\cdot(10^5-1)\cdot 10 + 9 = \frac{4\cdot 10^{12}+4\cdot 10^6+1}{9} = \left(\frac{2\cdot 10^6+1}{3}\right)^2.$

A $\frac{2\cdot 10^6+1}{3} = \frac{2000001}{3}$ tört értéke egész szám: 66667.

49. Négyzetszám-e a következő kivonás eredményeként kapott szám: $11111112222222 - 3333333$?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 2000. 8. osztályosok versenye

Megoldás. Vizsgáljunk egyszerűbb eseteket!

$12 - 3 = 9 = 3^2$,

$1122 - 33 = 1089 = 33^2$,

$111222 - 333 = 110889 = 333^2$.

Ezek alapján azt várjuk, hogy

$11111112222222 - 3333333 = 3333333^2$.

Rendezzük át az egyenlőséget!

$11111112222222 = 3333333^2 + 3333333 = 3333333 \cdot (3333333 + 1) = 3333333 \cdot 3333334$.

Végezzük el a szorzást!

$$\begin{array}{l}
\underline{3333334} \cdot 3333333 \\
10000002 \\
10000002 \\
10000002 \\
10000002 \\
10000002 \\
10000002 \\
\underline{10000002} \\
11111112222222
\end{array}$$

Számolásaink azt mutatják, hogy $11111112222222 - 3333333$ értéke valóban négyzetszám $= 3333333^2$.

Másképp. $1\,111\,111 = \frac{1}{9} \cdot 9\,999\,999 = \frac{1}{9} \cdot (10^7 - 1)$,

$11111112222222 - 3333333 = 11111110000000 + 2222222 - 3333333 =$

$= 11111110000000 - 1111111 = \frac{1}{9} \cdot (10^7 - 1) \cdot 10^7 - \frac{1}{9} \cdot (10^7 - 1) =$

$= \frac{1}{9} \cdot (10^{14} - 10^7 - 10^7 + 1) = \frac{1}{9} \cdot (10^{14} - 2 \cdot 10^7 + 1) = \left(\frac{10^7-1}{3}\right)^2$

A $\frac{10^7-1}{3} = \frac{9999999}{3}$ tört értéke egész szám: 3333333.

50. Van-e olyan négyzetszám, amely 1988-cal kezdődik? Ha találtál ilyet, írd le azt is, milyen módszert használtál, hogyan gondolkodtál!

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1988. 8. osztályosok versenye

Megoldás. $\sqrt{1988} = 44,5869\ldots$, $445^2 = 198\,025$, $446^2 = 198\,916$; $4459^2 = 19\,882\,681$.
$\sqrt{19880} = 140,9964\ldots$, $140^2 = 19\,600$, $141^2 = 19\,881$.

51. Melyik az a négyjegyű szám, mely egy egész szám négyzete és az első két jegye is egyenlő, meg az utolsó két jegye is egyenlő?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1992. 6. osztályosok versenye

Megoldás. Az $\overline{aabb} = 11 \cdot (100a + b)$ szám osztható 11-gyel, így ha négyzetszám, akkor az 11 többszörösének négyzete.

A négyzetszám utolsó két számjegye lehetne: 11, 44, 55, 66, 99, azonban az ilyen számok 4-gyel osztva 2 vagy 3 maradékot adnak (ezért nem lehetnek négyzetszám utolsó számjegyei), kivéve a 44 végződésű számokat.

11 többszörösei, melyeknek négyzete négyjegyű: 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Ezek közül csak 88 négyzete végződik 4-re. $88^2 = 7744$, s ez a keresett szám.

Áttekintve a lehetőségeket, megtaláljuk a megoldást: $88^2 = 7744$.

52. Melyik az a négyjegyű szám, amely teljes négyzet és a szám első két jegyéből meg az utolsó két jegyéből álló szám is teljes négyzet?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1991. 8. osztályosok versenye

Megoldás. A kétjegyű négyzetszámok 16, 25, 36, 49, 64, 81. Ezért a keresett négyjegyű négyzetszám lehet 1600 és 1699 között, 2500 és 2599 között, 3600 és 3699 között, ... , 8100 és 8199 között.

$1600 = 40^2$, $41^2 = (40+1)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 + 1 = 1681$. A $81 = 9^2$ négyzetszám, ezért $41^2 = 1681$ megoldása a feladatnak.

Meg kell még vizsgálni a többi lehetőséget is.

$2500 = 50^2$, $51^2 = (50+1)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 + 1 > 2600$.

$3600 = 60^2$, $61^2 = (60+1)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 + 1 > 3700$.

...

$8100 = 90^2$, $91^2 = (90+1)^2 = 90^2 + 2 \cdot 90 + 1 > 8100$.

Tehát a többi intervallumban nincs négyzetszám, ezért ott megoldás sem lehet.

[A megoldás során az $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ azonosságot többször is alkalmaztuk.]

53. Legyen a és b olyan pozitív egész, amelyre $b^2 = a - b$. Bizonyítsd be, hogy $a + b + 1$ négyzetszám.

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1995. 8. osztályosok versenye

Megoldás. $b^2 = a - b$ miatt $b^2 + b = a$.

Ezért $a + b + 1 = (b^2 + b) + b + 1 = b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2$.

54. Az n pozitív egész szám mely értékeire igaz, hogy az $n^2 + 4n - 5$ egy egész szám négyzete?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 2000. 8. osztályosok versenye

Megoldás. Ha $n = 1$, akkor $n^2 + 4n - 5 = 0 = 0^2$, ezért $n = 1$ megoldás.

Ha $n > 1$, akkor $n^2+4n-5 > n^2$, és $(n+2)^2 = n^2+4n+4 > n^2+4n-5$, tehát $(n+2)^2 > n^2+4n-5 > n^2$, azaz ha $n^2 + 4n - 5$ értéke négyzetszám, akkor $n^2 + 4n - 5 = (n+1)^2$.

$n^2 + 4n - 5 = (n+1)^2$, vagyis $n^2 + 4n - 5 = n^2 + 2n + 1$, $4n - 5 = 2n + 1$, $2n = 6$, $n = 3$.

Ha $n = 3$, akkor $n^2 + 4n - 5$ értéke 16.

Összegezve $n = 1$ és $n = 3$ esetén lesz $n^2 + 4n - 5$ értéke egy egész szám négyzete.

55. Számold össze, hány pozitív osztója van 16 200-nak!

Kalmár László Matematikaverseny 1991., 5. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. A $16\,200 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ szám osztóinak száma (az ismert számolási eljárás szerint):

$$(3+1) \cdot (4+1) \cdot (2+1) = 60.$$

56. Hány különböző alakú téglalapot lehet összeállítani 72 darab egyforma (egybevágó) négyzetlapból, ha egy-egy téglalaphoz mindegyik négyzetlapot fel kell használni?

Kalmár László Matematikaverseny, 2001., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. Az elkészíthető téglalapok: 1×72, 2×36, 3×24, 4×18, 6×12, 8×9. Összesen 6 téglalap.

Másképp megoldva. $72 = a \times b$, az a szám osztója 72-nek, b az a szám társosztója. $72 = 2^3 \cdot 3^2$, a 72-nek $4 \cdot 3 = 12$ osztója van, tehát 12-féle $a \times b$ felbontás létezik. Mivel a 6×12-es téglalap ugyanaz, mint a 12×6-os téglalap. Tehát $12/2 = 6$-féle téglalap készíthető.

57. Melyek azok a páros számok, amelyek előállíthatók két négyzetszám különbségeként?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1988. 7. osztályosok versenye

Megoldás. Az 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ... sorozatban fellépő különbségeket figyeljük:

$2 = \ldots (?)$
$4 = 4 - 0 = 2^2 - 0^2 (= 4 \cdot 1)$
$6 = \ldots (?)$
$8 = 9 - 1 = 3^2 - 1^2 (= 4 \cdot 2)$
$10 = \ldots (?)$
$12 = 16 - 4 = 4^2 - 2^2 (= 4 \cdot 3)$
$14 = \ldots (?)$
$16 = 25 - 9 = 5^2 - 3^2 (= 4 \cdot 4)$
$18 = \ldots (?)$
$20 = 36 - 16 = 6^2 - 4^2 (= 4 \cdot 5)$
$22 = \ldots (?)$
$24 = 49 - 25 = 7^2 - 5^2 (= 4 \cdot 6)$
$26 = \ldots (?)$

Azt figyelhetjük meg, hogy a 4-gyel osztható számokat fel tudjuk írni két négyzetszám különbségeként. Sőt jobban megfigyelve azt látjuk, hogy $4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$. S valóban, ha elvégezzük a négyzetre emeléseket látjuk, hogy helyes a felírt összefüggés:

$$(n+1)^2 - (n-1)^2 = (n^2 + 2n + 1) - (n^2 - 2n + 1) = 4n.$$

A feladat kérdésére a választ részben megtaláltuk: a 4-gyel osztható számok előállnak két négyzetszám különbségeként.

Lássuk be, hogy a 4-gyel nem osztható páros számok (ezek 4-gyel osztva 2 maradékot adnak) nem állnak elő két négyzetszám különbségeként.

Egy négyzetszám 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot ad, ezért két négyzetszám különbsége 4-gyel osztva adhat $1 - 1 = 0$, $1 - 0 = 1$, $0 - 1 = 3$, $0 - 0 = 0$ maradékot. Azaz két négyzetszám különbsége 4-gyel osztva 2 maradékot nem ad, két négyzetszám különbsége nem lehet olyan páros szám, amely 4-gyel nem osztható.

58. Megoldható-e az egész számok körében az $x^2 + y^2 = 2001$ egyenlet?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 2001. 7. osztályosok versenye

Megoldás. Tegyük fel, hogy az egyenlet megoldható, és egy megoldása $x = a$ és $y = b$. Mivel 2001 osztható 3-mal, így $a^2 + b^2$ is. Tekintettel arra, hogy egy 3-mal nem osztható négyzetszám 3-mal osztva mindig 1 maradékot ad, ez csak úgy lehet, ha a és b is osztható 3-mal. Ekkor $9 \mid a^2 + b^2$, de 9 nem osztója 2001-nek, ezzel ellentmondásra jutottunk. Tehát az egyenlet nem oldható meg.

59. Egy nagy családban a gyerekek átlagos életkora 11 év. A legidősebb gyerek 17 éves, a többiek átlagos életkora 10 év. Hány gyerek van a családban? (A gyerekek életkorát egész évnek vesszük.)

Kalmár László Matematikaverseny 1983., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. Ha a családban levő gyerekek száma x, akkor a gyerekek életkorának összege $11x$. $11x = 17 + 10(x - 1)$.

$11x = 17 + 10x - 10,$
$11x = 7 + 10x,$
$x = 7.$

A családban 7 gyerek van.

60. Ha négyszer annyi pénzem lenne, mint amennyi van, akkor vagyonom annyival lenne több ezer forintnál, mint amennyi most hiányzik belőle. Hány forintom van?

Kalmár László Matematikaverseny 1992., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. Ha most x Ft-om van, akkor $4x - 1000 = 1000 - x$. Innen $5x = 2000$, $x = 400$.
400 forintom van.

61. Andris azt mondta Bélának: az én pénzem 3/5-éhez még 70 forintot kell adni, és akkor annyi forintot kapunk, mint ahány van neked. Béla így válaszolt: neked csak 30 forinttal van több pénzed, mint nekem. Mennyi pénzük van külön-külön?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntő, 1994., 5. osztályosok versenye

Megoldás. $\frac{3}{5}x + 70 = y$, $y = x - 30$, azaz $\frac{3}{5}x + 70 = x - 30$.

$100 = \frac{2}{5}x$,

$x = 250$.

Andrisnak 250 Ft-ja, Bélának 220 Ft-ja van.

62. Egy apa most hétszer annyi idős, mint a fia. Tíz év múlva az apa háromszor olyan idős lesz, mint a fia. Hány éves most az apa és a fia?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntő, 1997., 5. osztályosok versenye

Megoldás. Az fiú életkora most x év, az apáé pedig $7x$.

Tíz év múlva az apa $7x + 10$, a fia $x + 10$ éves, és ekkor az apa háromszor olyan idős, mint a fia: $7x + 10 = 3(x + 10)$.

$7x + 10 = 3x + 30$,

$7x = 3x + 20$,

$4x = 20$,

$x = 5$.

Az apa most 35 éves, a fia pedig 5 éves.

63. Bontsd fel a 60-at két szám összegére úgy, hogy az egyik szám hetede egyenlő legyen a másik szám nyolcadával!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntő, 1991., 5. osztályosok versenye

Megoldás. Ha az egyik szám hetede x, akkor ez a szám $7x$, a másik szám pedig $8x$. A két szám összege 60: $7x + 8x = 60$, $15x = 60$, $x = 4$.

A keresett két szám: $7x = 28$ és $8x = 32$.

64. 18 pénzdarab van a zsebemben, csupa 2 és 5 forintos. Ha annyi ötösöm lenne, mint ahány kettesem van, és annyi kettesem, mint ahány ötösöm, akkor kétszer annyi pénzem lenne, mint amennyi van.

Mennyi pénzem van?

Kalmár László Matematikaverseny 1985., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. A 2 Ft-osok száma legyen x, ekkor az 5 Ft-osok száma $18 - x$. A zsebemben levő összeg $2x + 5(18 - x) = 2x + 90 - 5x = 90 - 3x$.

Ha annyi ötösöm lenne, mint ahány kettesem van, és annyi kettesem, mint ahány ötösöm, azaz $5x + 2(18 - x) = 5x + 36 - 2x = 3x + 36$ forintom lenne, akkor kétszer annyi pénzem volna, mint amennyi van.

Tehát $3x + 36 = 2(90 - 3x)$. Azaz $3x + 36 = 180 - 6x$, $9x + 36 = 180$, $9x = 144$, $x = 16$.

A zsebemben 16 db 2 Ft-os és 2 db 5 Ft-os van, így 42 Ft-om van.

65. Osszuk fel a 45-öt 4 részre úgy, hogy ha az első részhez 2-t adunk, a másodikat 2-vel csökkentjük, a harmadikat 2-vel szorozzuk, a negyediket 2-vel osztjuk, akkor egyenlő számokat kapunk!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntő, 1995., 5. osztályosok versenye

Megoldás. Legyen a négy szám a, b, c és d.
Tudjuk, hogy $a + 2 = b - 2 = 2c = \frac{d}{2}$. Legyen ez az érték x.
Ekkor $a = x - 2$, $b = x + 2$, $c = \frac{x}{2}$, $d = 2x$.
A négy szám összege 45, $(x - 2) + (x + 2) + \frac{x}{2} + 2x = 45$.
Odjuk meg ezt az egyenletet!
$(x - 2) + (x + 2) + \frac{x}{2} + 2x = 45$,
$4x + \frac{x}{2} = 45$,
$8x + x = 90$,
$9x = 90$,
$x = 10$.
Ekkor $a = 10 - 2 = 8$, $b = 10 + 2 = 12$, $c = \frac{10}{2} = 5$, $d = 2 \cdot 10 = 20$, azaz a négy szám 8, 12, 5, 20.

66. Egy klub tagjai összejövetelükre egy termet bérelnek. Összesen tízen vettek részt az ülésen. A bérleti díjat a résztvevők fizetik ki, mindenki ugyanannyit. Ha 5-tel többen lettek volna, akkor fejenként 1000 Ft-tal kevesebbet kellett volna fizetni a teremért. Mennyi terembért fizettek összesen?

Kalmár László Matematikaverseny 1997., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. Ha eredetileg személyenként x Ft bérleti díjat fizettek, akkor a terem bérleti díja $10x$ Ft.
Ha 5-tel többen lettek volna, akkor fejenként 1000 Ft-tal kevesebbet kellett volna fizetni. Ekkor $15(x - 1000)$ Ft-ot fizetnének.
$10x = 15(x - 1000)$, azaz $10x = 15x - 15\,000$, $15\,000 = 5x$, így $x = 3000$.
A terembér $10x = 10 \cdot 3000 = 30\,000$ Ft.

67. Melyik az a négy pozitív egész szám, amelyeket páronként összeadva a következő számokat kapjuk: 4, 5, 7, 8, 10, 11?

Kalmár László Matematikaverseny 1992., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. A két legkisebb szám 1, 3; vagy 2, 2 (mivel összegük 4). Utóbbi nem lehet, mert akkor a páronkénti összegek között lennének egyenlők. Emiatt a további két szám 4 ($1+4=5$) és 7 ($4+7=11$). Az 1, 3, 4, 7 számokra teljesülnek a feltételek.

68. Fél öt és öt óra között Jancsi megnézi a karóráját, a mutatók éppen egy egyenesbe esnek. Hány perc múlva lesznek legközelebb merőlegesek egymásra a mutatók?

Kalmár László Matematikaverseny 1982., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. 60 perc alatt a nagymutató 360°-os szöget tesz meg, x perc alatt $x \cdot 6°$-ot. Az óramutató 60 perc alatt 30°-ot tesz meg, x perc alatt $x \cdot 0,5°$-ot. Ha a mutatók legközelebb x perc múlva lesznek merőlegesek, akkor a mutatók által megtett utak (szögek) különbsége 90°, azaz $x \cdot 6° - x \cdot 0,5° = 90°$. Ebből $x = 16\frac{4}{11}$ perc.

69. Az óra kis- és nagymutatója pontosan 12 órakor egybeesik. Legközelebb mikor esnek újra egy egyenesbe?

Kalmár László Matematikaverseny 1990., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. 60 perc alatt a nagymutató 360°-os szöget tesz meg, x perc alatt $x \cdot 6°$-ot. Az óramutató 60 perc alatt 30°-ot tesz meg, x perc alatt $x \cdot 0,5°$-ot.
Legközelebb akkor esnek egy egyenesbe, amikor a két mutató 180°-os szöget zár be. Ha közben x perc telik el, akkor a mutatók által megtett utak (szögek) különbsége 180°, azaz $x \cdot 6° - x \cdot 0,5° = 180°$. Ebből $x = 32\frac{8}{11}$ perc.
Legközelebb 12 óra $32\frac{8}{11}$ perckor esnek egy egyenesbe a mutatók.

70. Az óra és a percmutató déli 12 órakor fedik egymást. Legközelebb hány órakor fogják ismét fedni egymást?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntő, 1994., 5. osztályosok versenye

Megoldás. 60 perc alatt a nagymutató 360°-os szöget tesz meg, x perc alatt $x \cdot 6°$-ot. Az óramutató 60 perc alatt 30°-ot tesz meg, x perc alatt $x \cdot 0,5°$-ot.
Legközelebb akkor fedik egymást, amikor a nagymutató egy körrel megelőzi kismutatót, azaz 360°-kal többet tesz meg. Ha közben x perc telik el, akkor a mutatók által megtett utak (szögek) különbsége 360°, azaz $x \cdot 6° - x \cdot 0,5° = 360°$. Ebből $x = 65\frac{5}{11}$ perc.
Legközelebb 13 óra $5\frac{5}{11}$ perckor fedik egymást a mutatók.

71. A két unoka életkora a nagymama életkorának két számjegyével egyenlő. Hármuk életkorának összege 72 év. Hány évesek külön-külön?

Kalmár László Matematikaverseny 2000., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. A nagymama életkora egy kétjegyű szám: $\overline{xy}$. Az unokák életkora x és y. Az életkorok összege 72 év.

$\overline{xy} + x + y = 72$,

$(10x + y) + x + y = 72$,

$11x + 2y = 72$.

Mivel $0 \le y \le 9$, ezért $0 \le 2y \le 18$ és $54 \le 11x \le 72$. Tehát $11x = 55$ vagy $11x = 66$, $x = 5$ vagy $x = 6$.

Ha $x = 5$, akkor $2y = 17$, y értéke nem egész szám, nincs megoldás.

Ha $x = 6$, akkor $y = 3$. Ekkor a nagymama 63 éves, az unokák pedig 6 és 3 évesek.

72. Melyek azok a tízes számrendszerben felírt háromjegyű számok, amelyekre igaz, hogy egyenlők számjegyeik összegének 12-szeresével?

Kalmár László Matematikaverseny 1998., 6. osztályosok versenye, országos döntő, ill. 1987., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. Legyen a háromjegyű szám: $\overline{xyz}$. A feladat szerint $\overline{xyz} = 12(x + y + z)$, $100x + 10y + z = 12(x + y + z)$.

$100x + 10y + z = 12(x + y + z)$,

$100x + 10y + z = 12x + 12y + 12z$,

$88x = 2y + 11z$.

$88x = 2y + 11z$, azaz $2y = 88x - 11z$. A jobb oldal osztható 11-gyel, ezért a bal oldal is. Az $y = 0$, 1, 2, … , 9 értékek közül csak $y = 0$ esetén teljesül ez az oszthatóság.

Ha $y = 0$, akkor $88x = 11z$, $8x = z$.

$8x$ értéke csak $x = 0$ és $x = 1$ esetén egyjegyű. Ha $x = 0$, akkor a keresett szám nem lesz háromjegyű, tehát $x = 1$, $z = 8$.

A keresett szám: 108.

73. Egy háromjegyű tízes számrendszerbeli szám egyenlő a számjegyei összegének 15-szörösével. Melyik lehet ez a szám?

Kalmár László Matematikaverseny 2000., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. Legyen a háromjegyű szám: $\overline{xyz}$. A feladat szerint $\overline{xyz} = 15(x + y + z)$, $100x + 10y + z = 15(x + y + z)$.

$100x + 10y + z = 15(x + y + z)$,

$100x + 10y + z = 15x + 15y + 15z$,

$85x = 5y + 14z$.

$85x = 5y + 14z$, $14z = 85x - 5y$. A jobb oldal osztható 5-tel, ezért a bal oldal is. Emiatt $z = 0$ vagy $z = 5$.

Ha $z = 0$, akkor $85x = 5y$, $17x = y$. Mivel x és y számjegyek, így $17x = y$ csak úgy teljesül, ha $x = y = 0$. Ez nem jelent megoldást.

Ha $z = 5$, akkor $70 = 85x - 5y$, $14 = 17x - y$, $17x = 14 + y$. Mivel $14 + y \le 14 + 9 = 23$, így x értéke csak 1 lehet, ekkor $y = 3$.

A keresett szám: 135.

74. Keresd meg mindazokat a tízes számrendszerben felírt számokat, amelyek számjegyeik összegének 13-szorosai!

Kalmár László Matematikaverseny 1985., 8. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. Előbb állapítsuk meg, hogy hány jegyű lehet a keresett szám.

Egy négyjegyű szám számjegyei összegének 13-szorosa legfeljebb $(9 + 9 + 9 + 9) \cdot 13 = 468$, s ez kisebb az adott négyjegyű számnál. Ötjegyű, ill. ennél több jegyű számoknál sem éri el a számjegyek összegének 13-szorosa az adott szám nagyságrendjét.

A keresett szám tehát legfeljebb háromjegyű szám, legyen ez a szám: $\overline{xyz}$ (x értéke lehet 0 is). A feladat szerint $\overline{xyz} = 13(x + y + z)$, $100x + 10y + z = 13(x + y + z)$.

$100x + 10y + z = 13(x + y + z)$, $100x + 10y + z = 13x + 13y + 13z$, $87x = 3y + 12z$, $29x = y + 4z$.

$y + 4z \le 9 + 36 = 45$, tehát $29x \le 45$, $x = 1$ vagy $x = 0$. Ha $x = 0$, akkor $y = 0$ és $z = 0$. Ez nem jelent megoldást.

Ha $x = 1$, akkor $y + 4z = 29$, $4z = 29 - y$, azaz $29 - y$ osztható 4-gyel. Emiatt y értéke 1, 5 és 9 lehet. Az ehhez tartozó z értékek 7, 6 és 5.

Tehát a megoldások:

$x = 1$, $y = 1$, $z = 7$, ez a háromjegyű szám: 117;

$x = 1$, $y = 5$, $z = 6$, ez a háromjegyű szám: 156;

$x = 1$, $y = 9$, $z = 5$, ez a háromjegyű szám: 195.

A keresett számok: 117, 156 és 195.

75. Egy tízes számrendszerben felírt szám egyenlő számjegyei összegének 17-szeresével. Melyik lehet ez a szám?

Kalmár László Matematikaverseny 1995., 7. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. Előbb állapítsuk meg, hogy hány jegyű lehet a keresett szám.

Egy négyjegyű szám számjegyei összegének 17-szerese legfeljebb $(9 + 9 + 9 + 9) \cdot 17 = 612$, s ez kisebb az adott négyjegyű számnál. Ötjegyű, ill. ennél több jegyű számoknál sem éri el a számjegyek összegének 17-szerese az adott szám nagyságrendjét.

A keresett szám tehát legfeljebb háromjegyű szám, legyen ez a szám: $\overline{xyz}$ (x értéke lehet 0 is). A feladat szerint $\overline{xyz} = 17(x + y + z)$, $100x + 10y + z = 17(x + y + z)$.

$100x + 10y + z = 17(x + y + z)$,

$100x + 10y + z = 17x + 17y + 17z$,

$83x = 7y + 16z$.

$7y + 16z \le 7 \cdot 9 + 16 \cdot 9 = 207$, tehát $83x \le 207$, $x = 2$, $x = 1$ vagy $x = 0$. Ha $x = 0$, akkor $y = 0$ és $z = 0$. Ez nem jelent megoldást.

Ha $x = 1$, akkor $7y + 16z = 83$. A $z = 0$, 1, 2, 3, 4, 5 értékeket végigpróbálva egy megoldást találunk: $y = 5$, $z = 3$. A háromjegyű szám: 153.

Ha $x = 2$, akkor $7y + 16z = 166$. Itt végigpróbálva pl. az $y = 0$, 1, 2, ..., 9 értékeket, nem találunk megoldást.

Egyetlen megoldás van, a 153.

76. Melyek azok a tízes számrendszerbeli háromjegyű számok, amelyek egyenlőek számjegyeik összegének 19-szeresével?

Kalmár László Matematikaverseny 1992., 7. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. Legyen a háromjegyű szám: $\overline{xyz}$. A feladat szerint $\overline{xyz} = 19(x + y + z)$, $100x + 10y + z = 19(x + y + z)$.

$100x + 10y + z = 19(x + y + z)$,

$100x + 10y + z = 19x + 19y + 19z$,

$81x = 9y + 18z$,

$9x = y + 2z$.

$y + 2z \le 9 + 2 \cdot 9 = 27$, tehát $9x \le 27$, azaz $x = 3$, $x = 2$ vagy $x = 1$.

Ha $x = 3$, akkor $27 = y + 2z$. Ennek az egyenletnek egy megoldása van: $y = z = 9$. A háromjegyű szám: 399.

Ha $x = 2$, akkor $18 = y + 2z$, $y = 18 - 2z$. Innen látjuk, hogy y értéke páros szám. Az $y = 0$, 2, 4, 6, 8 számokhoz tartozó z értékek rendre: 9, 8, 7, 6, 5. A megfelelő háromjegyű számok: 209, 228, 247, 266, 285.

Ha $x = 1$, akkor $9 = y + 2z$. Az egyenlet megoldásai: $y = 1$ és $z = 4$, $y = 3$ és $z = 3$, $y = 5$ és $z = 2$, $y = 7$ és $z = 1$, $y = 9$ és $z = 0$. A megfelelő háromjegyű számok: 114, 133, 152, 171, 190.

A keresett számok: 114, 133, 152, 171, 190, 209, 228, 247, 266, 285, 399. Összesen 11 szám.

77. Melyek azok a háromjegyű tízes számrendszerbeli számok, amelyek egyenlők számjegyeik összegének 34-szeresével?

Kalmár László Matematikaverseny 2001., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. Legyen a háromjegyű szám: $\overline{xyz}$. A feladat szerint $\overline{xyz} = 34(x + y + z)$, $100x + 10y + z = 34(x + y + z)$.

$100x + 10y + z = 34(x + y + z)$,

$100x + 10y + z = 34x + 34y + 34z$,

$66x = 24y + 33z$.

$66x = 24y + 33z$, $24y = 66x - 33z$. A jobb oldal osztható 33-mal, ezért a bal oldal is. Emiatt $y = 0$.

Ha $y = 0$, akkor $66x = 33z$, $2x = z$.

A keresett számok: 102, 204, 306, 408.

78. Van 48 darab egyforma (egybevágó) kockánk. Hányféle különböző alakú téglatestet lehet ezekből összerakni, ha egy-egy téglatestnél mindet fel kell használni?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója 1997., 5. osztályosok versenye

Megoldás. A lehetséges téglatestek méretei:

$1 \times 1 \times 48$,

$1 \times 2 \times 24$,

$1 \times 3 \times 16$,

$1 \times 4 \times 12$,

$1 \times 6 \times 8$,

$2 \times 2 \times 12$,

$2 \times 3 \times 8$,

$2 \times 4 \times 6$,

$3 \times 4 \times 4$.

Összesen 9-féle téglatest készíthető.

79. Egy kocka 6 lapja közül 2-t pirosra, 2-t kékre, 2-t sárgára akarunk festeni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha az elmozgatással fedésbe vihető kockákat azonosnak tekintjük?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője 1998., 5. osztályosok versenye

Megoldás. Vizsgáljuk az eseteket aszerint, hogy a két piros lap hogyan helyezkedik el.

Ha a két piros lap szemközti, akkor a két kék (és ekkor a két sárga is) vagy két szemközti lap, vagy két szomszédos. Ekkor 2-féle színezés van.

Ha a két piros lap szomszédos, akkor a két kék lap lehet szomszédos, és a két sárga lap vagy szemközti, vagy szomszédos. Ez 2-féle színezést jelent.

Ha a két piros lap szomszédos, akkor a két kék lap lehet szemközti is, és a két sárga szomszédos. Ez egy újabb lehetőség.

Összesen 5-féleképp lehet a kockát az elvárások szerint kiszínezni.

80. Egy kocka minden lapját pirosra vagy kékre festhetjük. Hány különböző kockát tudunk így készíteni, ha csak azokat a kockákat tekintjük különbözőnek, amelyeket elmozgatással nem lehet fedésbe hozni?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója 1999., 5. osztályosok versenye

Megoldás. Számoljuk meg a különböző színezéseket aszerint, hogy hány lap piros.

Amikor a piros lapok száma 0, 1, 5 vagy 6, akkor egy-egy színezés lehetséges (összesen 4 lehetőség).

Ugyanannyi módon lehet színezni 2 lapot pirosra és 4-et kékre, mint 2 lapot kékre és 4-et pirosra. A 2 piros lap vagy élben lesz szomszédos, vagy pedig két szemközti lap.

Tehát, amikor a piros lapok száma 2 vagy 4, akkor 2-2 színezés lehetséges.

Három lapot 2-féle módon festhetünk pirosra: két szemközti lap és valamelyik oldalsó lap piros, vagy három olyan lap, melyeknek van egy közös csúcsa.

Összegezve: 10 különböző módon lehet a kocka lapjait két színnel színezni.

81. Andi és Bea a következő játékot játsszák. Nyolc színes gyurmagolyót, amelyek közül 2 piros, 2 kék, 2 zöld és 2 sárga, felváltva egy kocka csúcsaiba nyomnak. Andi kezd, bármelyik golyót bármelyik csúcsba teheti. Ezután Bea következik, a megmaradt golyókból bármelyiket egy még szabad kockacsúcsba teheti. Ezután újra Andi jön, majd Bea mindaddig, amíg van golyó (és így szabad kockacsúcs is). Andi nyer, ha a végén van olyan éle a kockának, amelynek két végén azonos színű golyó van, ellenkező esetben Bea nyer. Ki tud győzni ebben a játékban?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője 1999., 5. osztályosok versenye

Megoldás. Ha Bea ügyesen játszik, akkor nyer. Bea nyerő stratégiája a következő: mindig Andi lépésének a kocka középpontjára tükrözésével kapott csúcsba helyezi az ugyanolyan színű golyót. Ily módon a kockának nem lesz olyan éle, amelynek két végén azonos színű golyó van.

82. Hány egybevágó kockát ragasszunk össze oszloppá, ha az eredeti kocka felszínénél háromszor nagyobb felszínű testet szeretnénk kapni?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója 1985., 6. osztályosok versenye

Megoldás. Egy kockának 6 lapja van, így a keresett test felszínén 18 oldallapja lesz a kockáknak. Az oszlop alap- és fedőlapján kívül 16 lap lesz az oldalakon. Egy kocka 4 oldallapot ad az oszlopnak, ezért 4 kockára van szükség.

83. Egy kockát két szemközti lapjával párhuzamos síkokkal úgy „szeletelünk fel", hogy a keletkezett testek felszínének összege háromszorosa legyen a kocka felszínének. Hány síkkal szeleteltük fel a kockát?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója 1993., 6. osztályosok versenye

Megoldás. A kocka felszíne 6 lapból áll. A vágások megőrzik a kocka felszínét és minden vágás két új lapot eredményez. 6 vágással a felszín háromszorosra nő, mert a 6 vágással 12 új lapot nyerünk, melyek az eredeti 6 lap felszínével együtt kiadják a szükséges 18 lapnyi felszínt.

84. Egy adott kockát mindegyik lapjára tükrözünk. Az így kapott test (az eredeti kockával együtt) térfogata hányszorosa a kocka térfogatának? És a felszíne hányszorosa a kocka felszínének?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője 1992., 5. osztályosok versenye

Megoldás. A kapott test (térbeli kereszt) 7 egybevágó kockából áll, középen van egy kocka, s annak mindegyik lapjához csatlakozik egy kocka. A test térfogata hétszerese a kocka térfogatának. A középső kockához illeszkedő kockák mindegyikének 5 lapja van a test felszínén, összesen $6 \cdot 5 = 30$ lap, ami egy kocka felszínének ötszöröse.

85. Egy kockát tetraéderekre darabolunk. Legalább hány tetraédert kapunk?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője 1995., 8. osztályosok versenye

Megoldás. Válasszuk ki a kocka két szemközti oldallapját! Egy-egy ilyen lapon legalább két tetraéder oldallapja nyugszik. Ez már legalább négy tetraéder, s ezekből egyiket sem számoltuk kétszer. A négy tetraéder térfogatának összege legfeljebb $\frac{2}{3}$-a a kocka térfogatának. (Miért? Igazoljuk!) Tehát a feldarabolásnál legalább öt tetraéder keletkezik.

Öt tetraéderre fel lehet darabolni a kockát. Válasszuk ki a kocka 4 olyan csúcsát, amelyek között nincs kettő, melyeket él kötne össze. Ez a négy csúcs egy szabályos tetraéder négy csúcsa. Ennek a tetraédernek minden lapjára illeszkedik még egy tetraéder, s ez az 5 tetraéder együtt kiadja a kockát.

86. Egy kocka minden lapjára egy síkot fektetünk rá. Hány részre osztják ezek a síkok a teret? Állításodat indokold!

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója 1991., 5. osztályosok versenye
Kalmár László Matematikaverseny országos döntője 1993., 5. osztályosok versenye

Megoldás. Tekintsük a kocka alap- és fedőlapját. Ezek síkja a teret három részre osztja. Mindegyik részben 9 térrész keletkezik, a síkok összesen $3 \times 9 = 27$ részre osztják a teret.

Más megoldás. A keletkező térrészeket megszámolhatjuk úgy is, hogy azok a kocka mely részéhez illeszkednek. Minden laphoz tartozik egy „kéményszerű" térrész, ezek száma 6; minden csúcshoz illeszkedik egy „sarokszöglet", ezekből 8 van; minden élhez egy „hajlat" simul, számuk 12; továbbá a kocka belseje. Minden térrészt megszámoltunk, mindegyiket egyszer számoltuk. A részek száma: $6 + 8 + 12 + 1 = 27$.

87. Mekkora szöget zár be a kocka egyik csúcsából kiinduló két lapátlója?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője 1997., 5. osztályosok versenye

Megoldás. A kocka valamelyik csúcsából induló két lapátlójának végpontjait kössük össze. Így egy egyenlő oldalú háromszöget kapunk, hiszen a háromszög mindegyik oldala egy-egy lapátló. A kérdezett szög: $60°$.

88. Egy sorozatot a következő módon képezünk. A sorozat első tagja 1997. Minden következő tagot úgy kapunk, hogy az előző tagból kivonjuk a számjegyeinek összegét (pl. 1997, $1997 - 26 = 1971$, ...) Mi lesz a sorozat első olyan tagja, amelyik egyjegyű szám?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1997., 7. osztályosok versenye
Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1993., 7. osztályosok versenye

Megoldás. Egy szám és a szám számjegyeinek összege azonos maradékot adnak, tehát a különbségük osztható 9-cel. Emiatt a sorozat tagjai, a másodikkal kezdődően oszthatók 9-cel. Így a sorozat első egyjegyű tagja csak a 9 lehet.

89. Pisti azt tapasztalta, hogy ha egy négyjegyű számhoz hozzáadja a fordítottját (azt a számot, amelyet az eredeti szám jegyeinek fordított sorrendbe írásával kaptunk), akkor az összeg mindig osztható 11-gyel. A két szám különbségéről azt találta, hogy mindig osztható 9-cel. Igaza van-e? Magyarázd meg a tapasztalatot! Mit tapasztalsz, ha ötjegyű számokkal is próbálkozol?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1980., 8. osztályosok versenye

Megoldás. Legyen a négyjegyű szám: $\overline{abcd}$.

$\overline{abcd}+\overline{dcba}=(1000a+100b+10c+d)+(1000d+100c+10b+a)=1001a+110b+110c+1001d=1001(a+d)+110(b+c)$.

Mivel 1001 is, 110 is osztható 11-gyel, ezért $1001(a+d)+110(b+c)$, és emiatt az $\overline{abcd}+\overline{dcba}$ összeg is osztható 11-gyel.

$\overline{abcd}-\overline{dcba}=(1000a+100b+10c+d)-(1000d+100c+10b+a)=999a+90b-90c-999d=999(a-d)+90(b-c)$. Mivel 999 is, 90 is osztható 9-cel, ezért $999(a-d)+90(b-c)$, és emiatt az $\overline{abcd}-\overline{dcba}$ különbség is osztható 9-cel.

Tehát amit Pisti tapasztalt négyjegyű számok esetén, az minden négyjegyű számra igaz. Vizsgáljuk meg ötjegyű számok esetén az állításokat.

Legyen az ötjegyű szám: $\overline{abcde}$.

A szám és fordítottjának különbsége osztható 9-cel, ugyanis:

$\overline{abcde}-\overline{edcba}=$

$=(10000a+1000b+100c+10d+e)-(10000e+1000d+100c+10b+a)=$

$=9999a+990b-990d-9999e=9999(a-e)+990(b-d)$.

Mivel 9999 is, 990 is osztható 9-cel, ezért $9999(a-e)+990(b-d)$, és emiatt az $\overline{abcde}-\overline{edcba}$ különbség is osztható 9-cel.

A szám és fordítottjának összege nem osztható mindig 11-gyel, például a következő esetben sem: $12\,345+54\,321=66\,666$.

90. Kiválasztunk egy tetszőleges háromjegyű számot és négyzetreemeljük. Ezután a kiválasztott szám számjegyeit fordított sorrendben leírjuk, és a kapott számot emeljük négyzetre. A két négyzet közül a nagyobbikból kivonjuk a kisebbiket. Igaz-e, hogy az eredmény mindig osztható 99-cel?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1993., 8. osztályosok versenye

Megoldás. Legyen a háromjegyű szám: $\overline{abc}$.

$(\overline{abc})^2-(\overline{cba})^2=(100a+10b+c)^2-(100c+10b+a)^2=$

$=[(100a+10b+c)-(100c+10b+a)]\cdot[100a+10b+c+100c+10b+a]=[99a-99c]\cdot[101a+20b+101c]=99[a-c]\cdot[101a+20b+101c]$, s erről a kifejezésről látható, hogy osztható 99-cel.

(Az átalakítás során felhasználtuk az $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ azonosságot. Enélkül is boldogultunk volna, de így hamarabb célhoz jutottunk.)

91. Írj fel egy tetszőleges háromjegyű számot (például: 235), majd készítsd el azt a 6-jegyű számot, ami ennek a számnak a kétszeri egymás után írásával keletkezik (235 235). A kapott szám mindig osztható 13-mal! Magyarázd meg, miért igaz ez mindig!

Kalmár László Matematikaverseny megyei döntője, 1993., 6. osztályosok versenye

Megoldás. Előbb a példán mutatjuk meg az oszthatóságot: $235\,235=235\,000+235=235\cdot1000+235=235\cdot1001=235\cdot7\cdot11\cdot13$.

Az általános eset hasonlóan igazolható: $\overline{abc\,abc}=\overline{abc\,000}+\overline{abc}=\overline{abc}\cdot1000+\overline{abc}=\overline{abc}\cdot1001=\overline{abc}\cdot7\cdot11\cdot13$.

92. Bizonyítsd be, hogy ha egy tetszőleges kétjegyű számot háromszor egymás után írsz, az így kapott hatjegyű szám osztható lesz 13-mal!

Kalmár László Matematikaverseny megyei döntője, 1982., 8. osztályosok versenye

Megoldás. $\overline{ababab}=\overline{ab0000}+\overline{ab00}+\overline{ab}=\overline{ab}\cdot10000+\overline{ab}\cdot100+\overline{ab}=\overline{ab}\cdot10101=\overline{ab}\cdot3\cdot7\cdot13\cdot37$.

93. Egy tetszőleges kétjegyű szám után írjunk egy nullát, majd újra a kétjegyű számot. Mutasd meg, hogy az így kapott ötjegyű szám mindig osztható 11-gyel és 13-mal is!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1991., 6. osztályosok versenye

Megoldás. $\overline{ab0ab}=\overline{ab000}+\overline{ab}=\overline{ab}\cdot1000+\overline{ab}=\overline{ab}\cdot1001=\overline{ab}\cdot7\cdot11\cdot13$.

94. Béla azt állítja, hogy a hatjegyű számokra ismer egy 37-tel való oszthatósági szabályt. Például: 413364 osztható 37-tel, mert $413 + 364 = 777$ osztható 37-tel. Ugyanakkor 113231 nem osztható 37-tel, mert $113 + 231 = 344$ nem osztható 37-tel.

Fogalmazd meg a szabályt és bizonyítsd be, hogy a szabály helyes!

Kalmár László Matematikaverseny megyei döntője, 1994., 6. osztályosok versenye, 1995., 7. osztályosok versenye

Megoldás. Legyen a két háromjegyű szám A és B. A két szám egymás után írásával kapott hatjegyű szám $1000A + B$.

$1000A + B = 999A + (A + B)$. Mivel 999 osztható 37-tel, így $(A + B)$ pontosan akkor osztható 37-tel, ha $1000A + B$ osztható 37-tel.

Megfogalmazhatjuk a szabályt: *Egy hatjegyű szám akkor és csak akkor osztható 37-tel, ha annak a két háromjegyű számnak az összege is osztható 37-tel, amely két szám egymás mellé írásával kaptuk a hatjegyű számot.*

95. Igazoljuk, hogy ha az $\overline{abcabc}$ hatjegyű szám osztható 37-tel, akkor a $\overline{bcabca}$ hatjegyű szám is osztható 37-tel!

Kalmár László Matematikaverseny megyei döntője, 1996., 8. osztályosok versenye

Megoldás. Tudjuk, hogy $37 \mid \overline{abcabc}$. Lássuk be, hogy $37 \mid \overline{bcabca}$.

$\overline{bcabca} = \overline{a000000} + \overline{bcabca} - \overline{a000000} = \overline{abcabc0} + a - \overline{a000000} =$
$= 10 \cdot \overline{abcabc} + a - 1\,000\,000 \cdot a = 10 \cdot \overline{abcabc} - 999\,999 \cdot a =$
$= 10 \cdot \overline{abcabc} - 999 \cdot 1001 \cdot a = 10 \cdot \overline{abcabc} - 999 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot a.$

Tehát $\overline{bcabca} = 10 \cdot \overline{abcabc} - 999 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot a$. Innen már leolvasható az oszthatóság.

96. Tudjuk, hogy p és q olyan pozitív egész számok, amelyekre $3p + 4q$ osztható 11-gyel. Igaz-e, hogy ekkor $p + 5q$ is osztható 11-gyel?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1991., 7. osztályosok versenye

Megoldás. Az állítás igaz, mivel $4(3p+4q) = 11(p+q)+(p+5q)$, azaz $4(3p+4q) - 11(p+q) = p+5q$. Az egyenlőség bal oldalán álló kifejezés többszöröse 11-nek, így a jobb oldalon álló $(p + 5q)$ kifejezés is osztható 11-gyel.

97. Határozzuk meg az összes olyan n egész számot, amelyre az $\frac{n^2+2}{n+1}$ tört értéke egész szám!

Kalmár László Matematikaverseny megyei döntője, 1991., 8. osztályosok versenye

Megoldás. $\frac{n^2+2}{n+1} = \frac{(n^2-1)+3}{n+1} = \frac{n^2-1}{n+1} + \frac{3}{n+1} = n - 1 + \frac{3}{n+1}$. A tört értéke akkor lesz egész, ha a $\frac{3}{n+1}$ tört értéke egész szám, azaz ha $n + 1$ osztója 3-nak.

A keresett n értékek: -4, -2, 0, 2.

98. Előállítható-e 2^{20} néhány (legalább kettő) egymást követő pozitív egész szám összegeként?

Kalmár László Matematikaverseny megyei döntője, 1990., 7. osztályosok versenye

Megoldás. Legyen n db egymást követő pozitív egész szám: $a + 1$, $a + 2$, ... , $a + n - 1$, $a + n$. Írjuk fel a keresett összeget kétféle módon, majd adjuk össze az első két sort (ahogyan a kis *Gauss* csinálta):

$$\begin{aligned}(a+1) + (a+2) + \cdots + (a+n-1) + (a+n) &= 2^{20}\\ (a+n) + (a+n-1) + \cdots + (a+2) + (a+1) &= 2^{20}\\ n(2a+n+1) &= 2^{21}\end{aligned}$$

Mivel n 1-nél nagyobb és $n(2a+n+1) = 2^{21}$, ezért n páros szám (hiszen 2^{21}-nek nincs 1-nél nagyobb páratlan osztója).

Ha n páros, akkor $(2a + n + 1)$ 1-nél nagyobb páratlan szám lesz, tehát az $n(2a + n + 1)$ szorzat nem lehet 2^{21}, azaz a kívánt előállítás nem lehetséges.

99. Állítsd elő 1996-ot egynél több, egymást követő pozitív egész szám összegeként!

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1996., 8. osztályosok versenye

Megoldás. Legyen n db egymást követő pozitív egész szám: $a + 1$, $a + 2$, ... , $a + n - 1$, $a + n$. Írjuk fel a keresett összeget kétféle módon, majd adjuk össze az első két sort (ahogyan az előző feladatban):

$$n(2a + n + 1) = 2 \cdot 1996$$

$2 \cdot 1996 = 2^2 \cdot 499$, mivel $a + 1 > 0$, így $2a + n + 1 > n$. Ha n páros, akkor $(2a + n + 1)$ páratlan, s ha n páratlan, akkor $(2a+n+1)$ páros. Csak egy, a feltételeket kielégítő megoldás van: $n = 8$, $2a+n+1 = 499$, azaz $a = 245$.

$246 + 247 + 248 + 249 + 250 + 251 + 252 + 253 = 1996.$

100. Hányféleképpen lehet 1989-et előállítani egymást követő pozitív egészek összegeként?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1989., 8. osztályosok versenye

Megoldás. Legyen n db egymást követő pozitív egész szám: $a+1$, $a+2$, ... , $a+n-1$, $a+n$. Írjuk fel a keresett összeget kétféle módon, majd adjuk össze az első két sort:

$$\begin{aligned}(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+n-1)+(a+n) &= 1989,\\ (a+n)+(a+n-1)+\cdots+(a+2)+(a+1) &= 1989,\\ n(2a+n+1) &= 2\cdot 1989.\end{aligned}$$

$2\cdot 1989 = 2\cdot 3^2\cdot 13\cdot 17$, mivel $a+1>0$, így $2a+n+1>n$.

$2\cdot 1989$ két pozitív egész szám szorzataként annyi módon állítható elő, ahány osztója van a $2\cdot 1989 = 2\cdot 3^2\cdot 13\cdot 17$ számnak, azaz $2\cdot 3\cdot 2\cdot 2 = 24$.

A 24 előállításból csak azok felelnek meg, melyekben az első tényező kisebb a másodiknál, ez fele a 24 lehetőségnek.

A kívánt módon 12-féleképpen lehet előállítani az 1989-et. Az előállításokat felsoroljuk, megadva az egymást követő számok számát (n) és ezen számok közül az elsőt ($a+1$): 1 és 1989 (ha összegként 1-tagú összeget is elfogadunk); 2 és 993; 3 és 661; 6 és 328; 9 és 216; 13 és 146; 17 és 108; 18 és 101; 26 és 63; 34 és 41; 39 és 31; 51 és 13.

101. Melyek azok a p és q prímszámok, amelyekre $p+q$ is és $p-q$ is prímszám?

Kalmár László Matematikaverseny országos dönő, 1997., 6. osztályosok versenye

Megoldás. p és q mindegyike nem lehet páratlan, $q=2$. $p-2$, p, $p+2$ számok közül valamelyik mindig osztható 3-mal, ám mind a három szám prím, tehát az egyikük 3. Ez csak úgy lehet, ha ez a három szám a 3, 5, 7. $p=5$.

102. Van-e 7, 13, 19, 25, ... sorozat (minden tag 6-tal nagyobb, mint az előző) tagjai között olyan szám, amely előállítható két prímszám különbségeként?

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1994., 7. osztályosok versenye

Megoldás. Két páratlan prím különbsége páros, tehát így nem lehet megkapni a feladatban felsorolt számokat. Emiatt az egyik prím páros szám, azaz 2. A megadott sorozatban levő számokat növeljük 2-vel, hogy megkapjuk a kisebbítendőt: 9, 15, 21, 27, ... (a számok 6-osával nőnek) Ezek a számok 3-mal osztható összetett számok.

Tehát a megadott sorozatnak nincs olyan tagja, amely előállna két prím különbségeként.

103. Van-e olyan pozitív egész k szám, amelyre igaz, hogy $k+5$, $k+7$ és $k+15$ egyszerre prímszámok?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntő, 1993., 6. osztályosok versenye

Megoldás. Ha $k=3m$, akkor $k+15$, ha $k=3m+1$, akkor $k+5$, ha $k=3m+2$, akkor $k+7$ osztható 3-mal, s ezek 3-nál nagyobbak, ezért a kifejezések értéke nem lehet prímszám.

104. Milyen p prímszámra lesz $2p+1$, $3p+2$, $4p+3$ és $6p+1$ mindegyike prím?

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1992., 7. osztályosok versenye

Megoldás. Megfigyelhetjük, hogy tetszőleges p egészre a p, $2p+1$, $3p+2$, $4p+3$, $6p+1$ számok egyike osztható 5-tel. (Ha p 5-tel osztva 0, 1, 2, 3, ill. 4 maradékot ad, akkor rendre 5-tel osztható: p, $3p+2$, $2p+1$, $4p+3$, ill. $6p+1$.)

Tehát, ha mindegyik prím, akkor az 5-tel osztható kifejezés értéke egyenlő 5-tel.

Ha $p=5$, akkor a többi kifejezés értéke 11, 17, 23, 31, ezek mindegyike prím.

Ha $2p+1=5$, akkor $p=2$, és ekkor $3p+2=8$, mely összetett szám.

Ha $3p+2=5$, akkor p nem egész szám, s nem is prím. Ugyanez a helyzet akkor is, ha $4p+3=5$, ill. ha $6p+1=5$.

Tehát csak $p=5$ esetén lesz a többi kifejezés mindegyike is prím.

105. Oldjuk meg a prímszámok körében a következő egyenletet: $x^2-1=2y^2$.

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1999., 8. osztályosok versenye

Megoldás. $2y^2 = x^2-1 = (x-1)(x+1)$. $x=2$ nem megoldás; ha x páratlan, akkor $(x-1)(x+1)$ osztható 4-gyel is, tehát $y=2$. Ezért $x=3$.

106. Egy háromjegyű páratlan számról meg kell állapítani, hogy prímszám-e vagy összetett. Okos Berci 3-tól 31-ig nem talált osztót. Ezek után azt mondta, hogy a szám biztosan prímszám. Igaza volt? Miért?

Kalmár László Matematikaverseny megyei forduló, 1985., 7. osztályosok versenye

Megoldás. Ha az n szám összetett, akkor van olyan osztója, mely $\sqrt{n}$-nél nem nagyobb. Hiszen, ha $n = a \cdot b$, s a is, b is nagyobb lenne $\sqrt{n}$-nél, akkor $n = a \cdot b > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$, ellentmondásra jutunk, ennek oka a hibás feltevés, tehát igaz az állítás.

Így igaza volt Okos Bercinek. (Ha a háromjegyű számnak lenne valódi osztója, az csak 31-nél nagyobb lehet, ám az osztó társosztója is nagyobb lesz 31-nél. $32 \cdot 32 = 1024 > 1000$, emiatt az adott számnak nem lehet 31-nél nagyobb osztója, ez a szám prímszám.)

107. Adott egy 3-nál nagyobb p prímszám és tudjuk, hogy p-nek egy hatványa 20 jegyű szám. Igazoljuk, hogy a 20 számjegy között van legalább 3 azonos!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntő, 1996., 7. osztályosok versenye

Megoldás. Tegyük fel, hogy nincs három egyforma számjegy a 20-jegyű számban. Ekkor a számban mind a 10 számjegy pontosan kétszer szerepel.

Ebben a számban a számjegyek összege: $2(0+1+\dots+9) = 90$. A szám osztható 3-mal, ami ellentmond annak, hogy a szám egy 3-tól különböző prímszámnak a hatványa.

108. Az $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot98\cdot99\cdot100}{2^{100}}$ törtet egyszerűsítjük, amíg lehet. Mi lesz a végeredményként kapott tört nevezője? (2^{100} azt a 100 tényezős szorzatot rövidíti, amelynek minden tényezője 2; a számláló is 100 tényezős szorzat.)

Kalmár László Matematikaverseny 1987., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$. Azt kell megállapítanunk, hogy 100!-ban hányszor szerepel a 2 tényezőként.

Az 1, 2, 3, ... , 100 számok közül minden második páros, ez 50 db 2-es tényezőt jelent.

A 4-gyel osztható számokban van még egy 2-es, melyet eddig nem számoltunk, ez 25 db további 2-es tényező.

A 8-cal osztható számok három 2-es tényezőt tartalmaznak, ez újabb 12 db 2-es tényező.

Hasonlóan a 16-tal, 32-vel, ill. 64-gyel osztható számok további 2-eseket tartalmaznak, ezek száma rendre 6, 3, ill. 1.

Az 1, 2, 3, ... , 100 számok összesen $50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$ db 2-es tényezőt tartalmaznak, a nevezőben 100 db 2-es tényező van. Egyszerűsítés után a nevezőben 3 db 2-es tényező marad, tehát a nevező $2^3 = 8$ lesz.

Ahogyan számoltuk 100! prímtényezős alakjában a 2 kitevőjét, azt az eljárást *Legendre tételének* nevezik. A tétel szerint $n!$ prímtényezős alakjában a p prím kitevője: $[\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + [\frac{n}{p^3}] + \ldots$, ahol [x] a legnagyobb x-nél nem nagyobb egész számot jelenti; x egészrészének nevezik.

Feladatunkra alkalmazva ezt a tételt megkapjuk 2 kitevőjét a 100! szám prímtényezős alakjában:
$[\frac{100}{2}] + [\frac{100}{2^2}] + [\frac{100}{2^3}] + [\frac{100}{2^4}] + [\frac{100}{2^5}] + [\frac{100}{2^6}] = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97.$

109. Mi lesz az $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot98\cdot99\cdot100}{2^{50}\cdot3^{50}}$ tört nevezője, ha az összes lehetséges egyszerűsítéseket elvégezzük?

Kalmár László Matematikaverseny 1993., 7. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$.

100! prímtényezős alakjában a 3 kitevője $[\frac{100}{3}] + [\frac{100}{3^2}] + [\frac{100}{3^3}] + [\frac{100}{3^4}] = 33 + 11 + 3 + 1 = 48$.

100! prímtényezős alakjában már kiszámoltuk 2 kitevőjét: 97. Tehát a számlálóban $2^{97} \cdot 3^{48} \cdot A$ áll, ahol A nem osztható 2-vel sem, 3-mal sem. A nevező: $2^{50} \cdot 3^{50}$.

A tört nevezője az egyszerűsítések után $3^2 = 9$.

110. Összeszoroztuk az első száz pozitív egész számot. Mi lesz a szorzat tízes számrendszerben felírt alakjában a jobbról számított 24. számjegy?

Kalmár László Matematikaverseny 1986., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. Számoljuk ki, hogy hány nullára végződik a 100! szám! Ehhez szükség lesz a 100! prímtényezős alakjában a 2 és az 5 kitevőjére. $100! = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot A = 10^{\beta} \cdot B$. Nyilván $\alpha > \beta$, tehát β határozza meg a 10 kitevőjét, s a nullák száma a 100! szám végén β.

$\beta = [\frac{100}{5}] + [\frac{100}{5^2}] = 20 + 4 = 24$.

A 100! szám 24 nullára végződik, így a kérdezett számjegy a 0.

111. A következő szorzat eredményét prímszámok hatványának szorzata alakjában írjuk fel. Mennyi lesz ebben a 2 kitevője?

$$31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot \ldots \cdot 59 \cdot 60$$

Kalmár László Matematikaverseny 1995., 6. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. $31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot \ldots \cdot 59 \cdot 60 = \frac{60!}{30!}$.

60! prímtényezős alakjában a 2 kitevője: $[\frac{60}{2}] + [\frac{60}{2^2}] + [\frac{60}{2^3}] + [\frac{60}{2^4}] + [\frac{60}{2^5}] = 30 + 15 + 7 + 3 + 1 = 56$;

30! prímtényezős alakjában a 2 kitevője: $[\frac{30}{2}] + [\frac{30}{2^2}] + [\frac{30}{2^3}] + [\frac{30}{2^4}] = 15 + 7 + 3 + 1 = 26$.

A kérdezett szorzatban a 2 kitevője: $56 - 26 = 30$.

112. Bizonyítsd be, hogy 20 egész szám közül mindig kiválasztható kettő, melyek különbsége osztható 19-cel!

Kalmár László Matematikaverseny 8. osztályosok versenye, 1991., országos döntő

Megoldás. Az a megfigyelés, hogy *„két szám különbsége akkor osztható 10-zel, ha ugyanarra a számjegyre végződnek”* másképp is fogalmazható. Ha két szám ugyanarra a számjegyre végződik, az azt jelenti, hogy a két szám ugyanazt a maradékot adja 10-zel osztva. Ez a megközelítés használható mostani példánk megoldásában.

Két szám különbsége akkor osztható 19-cel, ha ezek a számok ugyanazt a maradékot adják 19-cel osztva.

Egy egész számot 19-cel osztva maradékul a 0, 1, 2, ..., 18 számok valamelyikét kaphatjuk. Ez 19 különböző lehetőség.

Emiatt 20 egész szám között biztosan van kettő, melyek 19-cel osztva ugyanazt a maradékot adja, és így különbségük osztható 19-zel.

113. A 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, ... sorozatban található-e két olyan különböző szám, amelyek különbsége osztható 100-zal?

Kalmár László Matematikaverseny 8. osztályosok versenye, 1995., megyei forduló

Megoldás. Egy szám utolsó számjegye 100-féle lehet (00, 01, 02, ... 99). Így ha tetszőlegesen veszünk 101 db egész számot, lesz köztük kettő, amelyek megegyeznek utolsó két számjegyükben. Két ilyen szám különbsége osztható 100-zal.

114. Igaz-e, hogy bármely öt egész szám között van három olyan szám, amelyek összege osztható 3-mal?

Kalmár László Matematikaverseny 5. osztályosok versenye, 1992., országos döntő

Megoldás. Egy szám 3-mal osztva 0, 1 vagy 2 maradékot adhat. Ha az öt szám között van három, melyek ugyanazt a maradékot adják, akkor ezek összege osztható 3-mal.

Ellenkező esetben az öt szám között mindhárom osztási maradék előfordul. Hiszen a 0, 1 és 2 osztási maradékok skatulyáiba legfeljebb 2-2 szám kerülhet. Ezért ha az öt számot elhelyezzük ezekbe a skatulyákba, mindegyikbe kerül szám. Válasszunk ki három számot, melyek rendre 0, 1 és 2 maradékot adnak 3-mal osztva. Ezek összege osztható 3-mal.

115. Az 1, 2, 3, ..., 20 számok közül kiválasztottunk 11-et. Mutasd meg, hogy a kiválasztott számok között mindig van kettő olyan, amely közül egyik osztója a másiknak!

Kalmár László Matematikaverseny 8. osztályosok versenye, 1990., megyei forduló

Megoldás. Az 1, 2, 3, ..., 20 számokat beosztjuk 10 olyan csoportba, melyekre igaz az, hogy ha valamelyik csoportból két számot veszünk, akkor közülük az egyik osztója a másiknak. Mivel 10 csoportot képezünk, s 11 számot választunk, valamelyik csoportból két számot kell vennünk.

A 10 csoport: $\{1,2,4,8,16\}$, $\{3,6,12\}$, $\{5,10,20\}$, $\{7,14\}$, $\{9,18\}$, $\{11\}$, $\{13\}$, $\{15\}$, $\{17\}$, $\{19\}$.

Másképp. A 11 szám legyen a_1, a_2, a_3, ..., a_{11}. Mindegyik szám felírható $a_i = 2^{\alpha_i} \cdot b_i$ alakban, ahol b_i páratlan szám ($1 \leq b_i < 20$). Ez a páratlan szám 10-féle lehet, ezért a 11 db a_i között van kettő, melyekhez ugyanaz a páratlan b szám tartozik. Ezen két szám közül egyik osztója a másiknak.

116. Tetszőlegesen megadunk 10 darab pozitív egész számot, amelyek közül egyik sem osztható 10-zel. Igaz-e, hogy ekkor van köztük néhány olyan (esetleg az összes), amelyeknek összege osztható 10-zel?

Kalmár László Matematikaverseny 7. osztályosok versenye, 1994., országos döntő

Megoldás. Megmutatjuk, hogy n egész szám között mindig van néhány szám, melyek összege osztható n-nel.

Készítsük el a következő számokat: a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, ... , $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$. Ha e között az n db szám között nincs n-nel osztható, akkor van kettő, melyek n-nel osztva ugyanazt a maradékot adják. Ezek különbsége: $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m$ osztható n-nel.

117. Egy 3×3-as négyzet alakú táblázat minden mezőjébe beírjuk az 1 és -1 számok valamelyikét. Ezután összeadjuk a sorokba írt számokat, majd az egyes oszlopokba írt számokat is. Igazoljuk, hogy az így kapott 6 szám között mindig van legalább kettő egyenlő!

Kalmár László Matematikaverseny 5. osztályosok versenye, 1996., országos döntő

Megoldás. Az összegek lehetséges értékei: 3, 1, -1, -3. Azaz 4-féle összeg lehetséges.

A három sorban és a három oszlopban 6 összeget számolunk, ezek nem lehetnek mind különböző értékek, hiszen csak 4-féle eredményt kaphatunk.

118. A kilenctagú (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) számsorozatot állítsuk elő minél kevesebb olyan 9 tagú számsorozat „összegeként”, amelyek mindegyikében csak kétféle szám szerepel [például: (0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 0, 0) egy ilyen sorozat]. A 9 tagú sorozatok „összegét” úgy értelmezzük, hogy az azonos helyen álló számokat adjuk össze [például: $(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) + (0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 0, 0) = (1, 3, 2, 0, 1, 2, 2, 0, 1)$].

Kalmár László Matematikaverseny 8. osztályosok versenye, 1994., megyei forduló

Megoldás. $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1) + (0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 0, 0) + (0, 0, 0, 4, 4, 4, 4, 0, 0) + (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 8, 8) =$ $= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$. Tehát 4 sorozattal elvégezhető a kívánt előállítás.

Megmutatjuk, hogy 3 sorozattal nem oldható meg a feladat. Ebben az esetben az „összeg” elemei csak 8-félék lehetnek, míg a megadott sorozatnak 9 különböző eleme van: 1, 2, ... , 9.

Azért csak 8-féle, mert egy-egy elemet úgy kapunk az összegben, hogy az első sorozat egyik vagy másik elemét vesszük, ehhez hozzáadjuk a második sorozat egyik vagy másik elemét, majd ehhez adjuk a harmadik sorozat egyik vagy másik elemét: ez összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$-féle lehetőség.

119. Egy téglalap oldalai 5 és 9 egység. A téglalapot felbontottuk 10 darab egész oldalhosszúságú téglalapra. Igazoljuk, hogy ezek között van két egyenlő területű téglalap!

Kalmár László Matematikaverseny 8. osztályosok versenye, 1994., országos döntő

Megoldás. A téglalap területe $5 \cdot 9 = 45$ területegység. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 > 45$, ezért a téglalapot nem lehet felbontani 10 darab egész oldalhosszúságú téglalapra úgy, hogy azok területe páronként különbözzön, hiszen ekkor területük összege legalább 55 lenne.

120. Adott egy 3-nál nagyobb p prímszám és tudjuk, hogy p-nek egy hatványa 20 jegyű szám. Igazoljuk, hogy a 20 számjegy között van legalább 3 azonos!

Kalmár László Matematikaverseny 7. osztályosok versenye, 1996., országos döntő

Megoldás. Tegyük fel, hogy nincs három egyforma számjegy a 20-jegyű számban. Ekkor a számban mind a 10 számjegy pontosan kétszer szerepel. Ebben a számban a számjegyek összege: $2(0+1+\cdots+9) = 90$. A szám osztható 3-mal, ami ellentmond annak, hogy a szám egy 3-tól különböző prímszámnak a hatványa.

121. Egy teremben 30 ember gyűlt össze. Vannak közöttük olyanok, akik ismerik egymást, és olyanok is, akik nem (az ismeretség kölcsönös). Mutassuk meg, hogy a 30 ember között van 2 olyan, akiknek a teremben azonos számú ismerőse van!

Kalmár László Matematikaverseny 5. osztályosok versenye, 1998., országos döntő

Megoldás. A 30 ember közül bármelyiknek a teremben levők között 0, 1, 2, 3, ... , 29 ismerőse lehet. Így elképzelhető, hogy mindenkinek más-más számú ismerőse legyen, hiszen 30-an vannak, és az ismerősök száma is 30-féle lehet.

Azonban ha valakinek 29 ismerőse van a teremben, azaz mindenkit ismer, akkor nincs olyan, akinek 0 számú ismerőse lenne, vagyis senkit sem ismerne.

Tehát az ismerősök száma csak 29-féle lehet (mert a 0 és a 30 ismerős közül egy időben csak az egyik valósulhat meg), ezért a 30 ember között van 2 olyan, akiknek a teremben azonos számú ismerőse van.

122. Milyen számjegyeket kell írni a $\star$-ok helyére, hogy a tízes számrendszerben felírt $32\star35717\star$ szám osztható legyen 72-vel?

Kalmár László Matematikaverseny, 2000., 6. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. Egy szám akkor osztható 72-vel, ha osztható 8-cal és 9-cel.

Egy szám akkor osztható 8-cal, ha a szám utolsó három számjegyéből álló szám $17\star$ osztható 8-cal. Emiatt az utolsó számjegy a 2, mert 172 osztható 8-cal.

Egy szám akkor osztható 9-cel, ha a szám számjegyeinek összege osztható 9-cel. A $32\star357172$ szám hiányzó számjegye a 6.

A hiányzó számjegyek a 6 és a 2, a keresett szám 326 357 172.

123. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely 3-mal osztva 1-et, 4-gyel osztva 2-t, 5-tel osztva 3-at és 6-tal osztva 4-et ad maradékul?

Kalmár László Matematikaverseny, 1995., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. Ha a keresett számhoz 2-t adunk, az osztható lesz 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal. A legkisebb ilyen szám: $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Ebből vegyünk el 2-t, s megkapjuk a keresett számot. $60 - 2 = 58$ az a szám, amely 3-mal osztva 1-et, 4-gyel osztva 2-t, 5-tel osztva 3-at és 6-tal osztva 4-et ad maradékul.

124. Melyik az a legkisebb, 1-nél nagyobb egész szám, amely 2-vel, 3-mal, 5-tel, 7-tel és 11-gyel osztva is 1 maradékot ad?

Kalmár László Matematikaverseny, 2001., 5. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. Ha a keresett számból elveszünk 1-et, az osztható lesz 2-vel, 3-mal, 5-tel, 7-tel és 11-gyel, azaz $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$-zel.

Tehát a keresett szám: $2310 + 1 = 2311$.

125. Egy A pozitív egész szám 3-mal osztva 1 maradékot, 37-tel osztva 33 maradékot ad. Mennyi maradékot ad A, ha 111-gyel osztjuk?

Kalmár László Matematikaverseny, 1993., 7. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. Azok a számok, amelyek 37-tel osztva 33 maradékot adnak, a következők: 33, 70, 107, 144, 181, 218, 255, 292, 329, ...

Ezek közül kell kiválogatni azokat, amelyek 3-mal osztva 1 maradékot adnak: 70, 181, 292, ...

Tehát a vizsgált A számok a 70, 181, 292, ... sorozat tagjai. Ezek a számok 111-gyel osztva 70 maradékot adnak.

126. Van-e olyan egész szám, amely 16-tal osztva 4-et, 20-szal osztva 5-öt ad maradékul?

Kalmár László Matematikaverseny, 1997., 7. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. Ha egy szám 16-tal osztva 4 maradékot ad, akkor az a szám páros.

Ha egy szám 20-szal osztva 5-öt ad maradékul, akkor az a szám páratlan.

Ugyanaz a szám nem lehet páros is, páratlan is. Tehát nincs olyan szám, amely 16-tal osztva 4-et, 20-szal osztva 5-öt ad maradékul.

127. Melyik lehet az a két pozitív egész szám, amelyek összege 168 és legnagyobb közös osztója 24?

Kalmár László Matematikaverseny 1997., 6. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. Legyen a keresett két szám a és b. $a = 24k$, $b = 24n$ és $24k + 24n = 168$, $k + n = 7$.

Innen láthatók a lehetséges számpárok: 24 és 144, 48 és 120, 72 és 96. Mindhárom számpár megoldást jelent.

128. Két páratlan szám, a és b különbsége 64. Mennyi lehet legfeljebb a és b legnagyobb közös osztója?

Kalmár László Matematikaverseny 1994., 8. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. Ha egy szám osztója a-nak, osztója b-nek, akkor osztója $a - b = 64$-nek is. A keresett legnagyobb közös osztó a 64 osztói közül kerül ki, tehát értéke 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 lehet. Mivel a is, b is páratlan, ezek nem oszthatók a 2, 4, ... , 64 számokkal. Az a és b legnagyobb közös osztója az 1.

129. Igazoljuk, hogy bármely $n \geq 1$ egész számra $21n + 4$ és $14n + 3$ legnagyobb közös osztója 1.

Kalmár László Matematikaverseny 1992., 8. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. Ha $(21n+4)$-nek és $(14n+3)$-nak van közös osztója, akkor az osztója $3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$-nek is.

130. Az a_1, a_2, a_3, ... , a_{49} pozitív egész számok összege 999. Legfeljebb mennyi lehet ennek a 49 számnak a legnagyobb közös osztója?

Kalmár László Matematikaverseny 2001., 8. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. Legyen a keresett közös osztó d. Ez a szám mind a 49 számnak osztója, így osztója összegüknek $999 = 3^3 \cdot 37 = 27 \cdot 37$-nek. A számok mindegyike $\geq d$, így $49d \leq 999$, azaz $d \leq \frac{999}{49} < 21$. A 999 legnagyobb osztója, mely kisebb 21-nél: 9, azaz a közös osztó legfeljebb 9 lehet. Van olyan eset, amikor 9 a legnagyobb közös osztó, ha a 49 szám közül 48 szám mindegyike 9 és a 49. szám az 567.

A számok közös osztójának lehetséges legnagyobb értéke: 9.

131. Milyen számjegyre végződik 2^{1986}? Állításodat indokold meg!

Kalmár László Matematikaverseny 1986., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. 2 hatványainak (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...) utolsó számjegye 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ... , azaz a négy számjegy periodikusan ismétlődik. (Miért ismétlődik periodikusan az utolsó számjegy?) 1984 osztható 4-gyel, tehát 2^{1984} 6-ra végződik, 2^{1985} 2-re, s 2^{1986} 4-re fog végződni.

132. Milyen számjegyre végződik 1992^{1991}?

Kalmár László Matematikaverseny 1991., 5. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. 1992 hatványai ugyanúgy végződnek, mint a 2 hatványai (azaz pl. 1992^{1991} ugyanúgy végződik, mint 2^{1991}). A 2-hatványok utolsó számjegye periodikusan ismétlődik: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ...

Ezt felhasználva könnyen számolható 1992^{1991} utolsó számjegye, amely 8.

133. Milyen számjegyre végződik a következő szorzat: $246^{16} \cdot 315^{18} \cdot 417^{20}$?

Kalmár László Matematikaverseny 1997., 6. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. Ez a szám páros és 5-tel osztható, ezért 0-ra végződik.

134. Lehet-e $172^{1996} + 7$ egy egész szám négyzete?

Kalmár László Matematikaverseny 1996., 7. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. Vizsgáljuk a szám utolsó számjegyét!

Milyen számjegyekre végződhetnek a négyzetszámok?

Nyilván a $43^2 = 43 \cdot 43$ szám ugyanarra a számjegyre végződik, mint pl. a $33^2 = 33 \cdot 33$ szorzat, vagy a $3^2 = 3 \cdot 3$ szám. Ezért a négyzetszámok lehetséges végződése leolvasható az első tíz négyzetszámról.

A négyzetszámok utolsó számjegye csak 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9 lehet.

172 hatványai ugyanúgy végződnek, mint a 2 hatványai (ezért a 172^{1996} szám ugyanúgy végződik, mint 2^{1996}). A 2-hatványok utolsó számjegye periodikusan ismétlődik: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ... Ezt felhasználva látható, hogy 172^{1996} utolsó számjegye 6.

Ezért a $172^{1996}+7$ szám $6+7 = .3$-ra végződik, emiatt nem lehet négyzetszám, hiszen a négyzetszámok utolsó számjegye 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9.

135. Felbontható-e két egymást követő pozitív egész szám szorzatára $3^{11} + 1$?

Kalmár László Matematikaverseny 1997., 6. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. Vizsgáljuk a szám utolsó számjegyét!

Milyen számjegyekre végződhet két egymást követő pozitív egész szám szorzata?

Mivel a $143 \cdot 144$ utolsó számjegye ugyanaz, mint a $3 \cdot 4$ szorzat utolsó számjegye, ezért elegendő megvizsgálni az $1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, $4 \cdot 5$, $5 \cdot 6$, $6 \cdot 7$, $7 \cdot 8$, $8 \cdot 9$, $9 \cdot 10$ és $10 \cdot 11$ szorzatok utolsó számjegyét.

Két egymást követő egész szám szorzatának utolsó számjegye csak 0, 2 vagy 6 lehet.

A 3-hatványok utolsó számjegye periodikusan ismétlődik: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ... A 3^{11} hatvány utolsó számjegye 7.

Ezért a $3^{11} + 1$ szám $7 + 1 = 8$-ra végződik, emiatt ez a szám nem lehet két egymást követő pozitív egész szám szorzata, hiszen az ilyen szorzatok utolsó számjegye 0, 2 vagy 6.

136. Igazoljuk, hogy három egymást követő egész szorzata, ha a középső négyzetszám, mindig osztható 10-zel!

Kalmár László Matematikaverseny 1988., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. A szorzat páros, hiszen két egymást követő egész közül az egyik páros szám, a szorzatnak van páros tényezője.

A négyzetszámok utolsó számjegye csak 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9 lehet. Ezért vagy a négyzetszám, vagy az annál 1-gyel nagyobb, vagy az annál 1-gyel kisebb szám 5-tel osztható.

Tehát a három szám szorzata osztható 2-vel és 5-tel, ezért 10-zel is.

137. Osztható-e 10-zel a $73^{73} + 37^{37}$ szám?

Kalmár László Matematikaverseny 1981., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. Az előző feladatok megoldásához hasonlóan kapjuk, hogy 73^{73} 3-ra végződik, 37^{37} 7-re végződik, összegük 0-ra végződik, tehát osztható 10-zel.

138. Bizonyítsd be, hogy a $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \cdots + 7^{18} + 7^{19} + 7^{20}$ összeg osztható 100-zal!

Kalmár László Matematikaverseny 1985., 8. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. Vizsgáljuk a 7 hatványainak utolsó két számjegyét! $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = .43$, $7^4 = ..01$, $7^5 = ...07$, ... A hatványok utolsó két jegye periodikusan ismétlődik: **07, 49, 43, 01,** 07, 49, ... A 20-tagú összegben az utolsó két helyiértéken elvégezve az összeadást:
$5 \cdot (07 + 49 + 43 + 01) = 500$, így az összeg utolsó két számjegye: 00.

139. Legfeljebb hány nullára végződik egy $9^n + 1$ alakú szám, ahol n pozitív egész?

Kalmár László Matematikaverseny 1992., 7. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. $9 + 1 = 10$, $9^3 + 1 = 730$ számok nullára végződnek. Belátjuk, hogy egy $9^n + 1$ alakú szám, ahol n pozitív egész két 0-ra nem végződhet. $9^n + 1$ két 0-ra úgy végződhetne, ha 9^n 99-re végződne. Azonban 9 hatványainak utolsó előtti számjegye mindig páros.

Ez adódik a szorzás algoritmusából. 9, 9^2, 9^3 számban a tízesek helyén páros számjegy áll, és ebből következik, hogy a 9^4 számban is páros jegy áll a tízesek helyén, amely a $9^4 = 9^3 \cdot 9$ szorzásból következik. Ugyanígy öröklődik ez a további hatványokra is.

140. Két egész számot nevezzünk egymás tükörképének, ha ugyanazokból a számjegyekből áll, csak fordított sorrendben (például 246 és 642 egymás tükörképei). Két tükörkép szám szorzata 92 565. Melyik ez a két szám?

Kalmár László Matematikaverseny, 1988., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. A szorzat 5-re végződik, osztható 5-tel, ám 2-vel nem. Tehát az egyik tényező 5-re végződik, a másik pedig páratlan számjegyre.

A szorzat nem osztható 25-tel, ezért mindkét tényező nem lehet 5-tel osztható.

A szorzatban a számjegyek összege 27, a szorzat osztható 3-mal. Emiatt legalább az egyik tényezője osztható 3-mal. Abban a tényezőben a számjegyek összege osztható 3-mal, persze ekkor a tükörkép számban is ugyanez teljesül.

$100 \cdot 100 = 10\,000 < 92\,565 < 1000 \cdot 1000 = 1\,000\,000$, tehát a szorzat két háromjegyű szám szorzata.

Az eddigiek alapján olyan háromjegyű számot keresünk, amely 5-re végződik, első számjegye páratlan és 5-től különböző számjegy, a számjegyek összege osztható 3-mal.

A vizsgálandó számok: 105, 135, 165, 195, 315, 345, 375 (ill. ezek tükörképei).

$105 \cdot 501 = 52\,605$,
$135 \cdot 531 = 71\,685$,
$165 \cdot 561 = 92\,565$,
$195 \cdot 591 = 115\,245$,
$315 \cdot 513 = 161\,595$,
$345 \cdot 543 = 214\,875$.
Innen kiválasztható a megoldás: 165.

142. Három egymást követő páratlan számot összeszoroztunk, majd a kapott eredményt megszoroztuk 5-tel. Így egy következő alakú hatjegyű számot kaptunk: $\overline{ABABAB}$, ahol A és B számjegyek. Mi volt az eredeti három páratlan szám?

Kalmár László Matematikaverseny, 1993., 6. osztályosok versenye, országos döntő
Varga Tamás Matematikaverseny, 1996., 8. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. Mivel $\overline{ABABAB}$ 5-tel osztható és páratlan, ezért $B = 5$.
$\overline{ABABAB} = \overline{AB} \cdot 10101 = \overline{AB} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$. Ez a szorzat három egymás utáni páratlan szám szorzatának 5-szöröse.

A három szám egyike a 37, vagy ennek alkalmas többszöröse. Ez a többszörös csak páratlan lehet. $3 \cdot 37 = 111$, ám három 100-nál nagyobb szám szorzata nagyobb 1 000 000-nál, 7-jegyű szám, amelynek 5-szöröse nagyobb az $\overline{ABABAB}$ számnál.

A keresett három szám egyike a 37. Az $\overline{AB} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$ szorzat vagy $5 \cdot 33 \cdot 35$, vagy $5 \cdot 35 \cdot 39$, vagy $5 \cdot 39 \cdot 41$. A szorzat osztható 13-mal, ezért a három lehetőségből az első kiesik.

Ha $5 \cdot 39 \cdot 41 = \overline{AB} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$, akkor $5 \cdot 41 = \overline{AB} \cdot 7$, ám a jobb oldal osztható 7-tel, a bal oldal pedig nem, ezért itt nincs megoldás.

Ha $5 \cdot 35 \cdot 39 = \overline{AB} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$, akkor $5 \cdot 35 = \overline{AB} \cdot 7$, $5 \cdot 5 = \overline{AB}$, $\overline{AB} = 25$.

A három egymást követő páratlan szám: 35, 37, 39, mely számok szorzata $50505 = 5 \cdot 10101$.

141. Az a, b, c számjegyekre igaz, hogy a következő tízes számrendszerben felírt számok mind négyzetszámok: a, $\overline{ab}$, $\overline{cb}$, $\overline{cacb}$. Melyek ezek a számjegyek?

Kalmár László Matematikaverseny, 1985., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. Mivel $\overline{ab}$ és $\overline{cb}$ négyzetszámok, nézzük meg a kétjegyű négyzetszámokat: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Ezek között csak a 16 és a 36 végződik ugyanarra a számjegyre. Tehát $b = 6$.

a értéke 1 vagy 3, de csak az 1 lesz négyzetszám. $a = 1$. Ekkor $c = 3$.

$\overline{cacb} = 3136 = 56^2$.

143. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek utolsó számjegye 6, és ha az utolsó helyről a 6-os számjegyet az első helyre tesszük (a többi számjegy változatlan marad), akkor a négyszeresét kapjuk?

Kalmár László Matematikaverseny, 1991., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

Megoldás. $4 \cdot \overline{ab\dots pqr6} = \overline{6ab\dots pqr}$ szorzásból a számjegyek sorra megfejthetők: $r = 4$, azaz $4 \cdot \overline{ab\dots pq46} = \overline{6ab\dots pq4}$; majd $q = 8$, $4 \cdot \overline{ab\dots p846} = \overline{6ab\dots p84}$, $\dots$, $4 \cdot 153846 = 615384$.

144. Melyik az a tízes számrendszerben felírt legkisebb pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy 2-esre végződik, és ha ezt a 2-est a szám végéről áthelyezzük a szám elejére, akkor éppen a szám kétszeresét kapjuk?

Kalmár László Matematikaverseny, 1993., 5. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. A keresett szám számjegyeit a szám végéről indulva sorra meghatározzuk.

$2 \cdot \overline{ab\dots pqr2} = \overline{2ab\dots pqr}$ miatt $r = 4$.

A következő számjegy a $2 \cdot \overline{ab\dots pq42} = \overline{2ab\dots pq4}$ szorzásból: $q = 8$, $2 \cdot \overline{ab\dots p842} = \overline{6ab\dots p84}$, $\dots$

A keresett szám: 105 263 157 894 736 842.

(Ez a legkisebb ilyen szám, ha ezeket a számjegyeket még egyszer – vagy többször – megismételve a szám után írjuk, az így kapott 105 263 157 894 736 842 105 263 157 894 736 842 számra is teljesül, hogy 2-esre végződik, és ha ezt a 2-est a szám végéről áthelyezzük a szám elejére, akkor éppen a szám kétszeresét kapjuk.)

145. Egy ötjegyű szám elejére 1-est írunk. A kapott hatjegyű számot 3-mal megszorozva azt a hatjegyű számot kapjuk, amely az előbbi ötjegyű számból úgy is előállítható, hogy az 1-est a végére írjuk. Melyik ez az ötjegyű szám?

Kalmár László Matematikaverseny, 1992., 6. osztályosok versenye, megyei forduló
Kalmár László Matematikaverseny, 1995., 7. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. $\overline{abcde1} = 3 \cdot \overline{1abcde}$ szorzásból a számjegyek sorra megfejthetők: $e = 7$, azaz $\overline{abcd71} = 3 \cdot \overline{1abcd7}$, majd $d = 5$, $\overline{abc571} = 3 \cdot \overline{1abc57}$, $c = 8$, $\overline{ab8571} = 3 \cdot \overline{1ab857}$, $b = 2$, $\overline{a28571} = 3 \cdot \overline{1a2857}$, $a = 4$, azaz $428571 = 3 \cdot 142857$. A keresett szám: 42 857.

146. Van-e olyan háromjegyű pozitív egész szám, amelynek minden pozitív egész kitevőjű hatványa ugyanarra a három számjegyre végződik?

Kalmár László Matematikaverseny 1993., 8. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. A keresett szám legyen a. Ha a^2 utolsó három jegyéből álló szám a kívánt módon végződik, akkor ez a többi hatványra is teljesül. (Gondoljunk a szorzás algoritmusára, s vegyük figyelembe, hogy pl. $a^3 = a^2 \cdot a$, $a^4 = a^3 \cdot a$, $\dots$)

Elegendő tehát, hogy a^2 utolsó három jegyéből álló szám megegyezzen a-val. Ez azt jelenti, hogy $1000 \mid a^2 - a$, tehát $8 \cdot 125 \mid a(a-1)$. a és $a-1$ relatív prímek, így az oszthatóság akkor teljesül, ha $8 \mid a$ és $125 \mid a-1$, vagy $125 \mid a$ és $8 \mid a-1$.

Vizsgáljuk a $125 \mid a-1$, ill. a $125 \mid a$ oszthatóságokat. Első esetben a értéke 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876 lehet, közülük csak 376 esetén teljesül a $8 \mid a$ oszthatóság.

Második esetben a értéke 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875 lehet, közülük csak 625 esetén teljesül a $8 \mid a-1$ oszthatóság.

Két megfelelő szám van: 376 és 625.

147. Előállítható-e 2001 két egész szám négyzetének összegeként?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 2001., 7. osztály

Megoldás. Tegyük fel, hogy az $x^2 + y^2 = 2001$ egyenlet megoldható, és egy megoldása $x = a$ és $y = b$. Mivel 2001 osztható 3-mal, így $a^2 + b^2$ is. Tekintettel arra, hogy egy 3-mal nem osztható négyzetszám 3-mal osztva mindig 1 maradékot ad, ez csak úgy lehet, ha a és b is osztható 3-mal. Ekkor $9 \mid a^2 + b^2$, de 9 nem osztója 2001-nek, ezzel ellentmondásra jutottunk. Tehát az egyenlet nem oldható meg.

148. Két padon 6-6 gyerek ült. Valamennyien különböző életkorúak (az életkorok egész számok), és az egyik padon ülő gyerekek életkorának összege és szorzata is megegyezik a másik padon ülők életkorának összegével és szorzatával. A legidősebb gyerek 16 éves. Hány évesek azok a gyerekek, akik vele egy padon ülnek?

Kalmár László Matematikaverseny, 1993., 6. osztályosok versenye, országos döntő

Megoldás. Észrevehető, hogy a gyerekek között nem lehet 13 éves, hiszen akkor az egyik padon az életkorok szorzata 13-mal osztható, ám a másik padon számolt szorzat nem lesz osztható 13-mal, ezért a két szorzat nem lehet egyenlő. Ugyanezért 11 éves gyerek sem lehet közöttük.

Jó volna megtalálni a másik két kimaradó életkort, s akkor tudhatnánk mind a tizenkét gyerek életkorát.

Vizsgáljuk meg a többi prímszámot! Lehet-e 7 éves közöttük? Lehet. Az egyik padra 7, a másikra 14 éves gyerek ül, és ekkor mindegyik szorzat osztható lesz 7-tel.

Lehet-e 5 éves közöttük? Itt már felmerülnek problémák. Az 5, 10 és 15 számokat nem lehet a két csoportba megfelelően szétosztani, ugyanis az egyik szorzatban két 5-ös tényező lesz, a másikban csak egy. Tehát az egyik szorzat osztható lenne 25-tel, míg a másik nem, az csak 5-tel osztható. Hiányozni fog az életkorok közül az 5, 10, 15 számok egyike.

Számoljuk meg a 3-as tényezők számát! A 3, 6, 9, 12, 15 számokban 1, 1, 2, 1, 1 db 3-as szorzó van, összesen hat, ezeket szét lehet osztani egyenlően.

Számoljuk meg a 2-es tényezők számát! A 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 számokban levő 2-es tényezők száma rendre: 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4. Összesen 15 db 2-es. Ezért az életkorok közül hiányozni fog páros szám is.

Meg tudjuk-e mondani, melyik a hiányzó négy életkor? Az eddig megállapított feltételeket – a megmaradó 12 számban páros legyen a 2-es, 3-as, 5-ös, 7-es prímtényezők száma – több lehetőség is kielégíti: (1, 10, 11, 13), (4, 10, 11, 13), (9, 10, 11, 13), (2, 5, 11, 13), (8, 5, 11, 13), (6, 11, 13, 15).

Fárasztó lenne ezen lehetőségek mindegyikét megvizsgálni, hogy a megmaradó 12 szám szétosztható-e a kívánt módon. Mit tehetünk? Még nem vettük figyelembe az összegek egyenlőségét. Ez azt jelenti, hogy a 12 szám összege páros. Szerencsénk van: a felsorolt lehetőségekből csak egy teljesíti ezt. A megoldás egy fontos állomásához értünk, tudjuk melyik a négy hiányzó életkor: 4, 10, 11 és 13.

Az 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 16 számokat kell a kívánt módon két csoportba osztani. Ezen számok összege 98, tehát egy-egy padon a hat életkor összege 49. Ezen számokban a 2-es tényezők száma 12, ezért a 16 mellé úgy kell számokat választani, hogy azokban 2 db 2-es tényező legyen, hiszen a 16-ban 4 db 2-es tényező van. Ha figyelembe vesszük azt is, hogy a hat szám összege páratlan, akkor a 16 mellé két páros számot kell választanunk, és ez a két szám csak a 2, 6, 14 számok közül kerülhet ki. Ez a választás 3-féle módon tehető meg. Vegyük sorra a lehetőségeket!

Egy csoportba került a 16, 14, 6. A hat szám összege 49, ezért a hiányzó három páratlan szám összege 13. Lesz a csoportban 5-tel osztható szám is, a 15 nem lehet, mert nagyobb 13-nál, tehát az 5-öt választjuk. Már csak a 3-as tényezők számát kell kiegészíteni 3-ra, 2 db 3-as tényező hiányzik. Ez megtehető az 1 és a 9 választásával, de ezek összege 10, noha most az összeg hiányzó része 8. A vizsgált lehetőség nem ad megoldást.

Legyen egy csoportban a 16, 14, 2. A hiányzó számok összege 17 lesz. A 15-öt nagysága miatt nem választjuk, tehát a csoport 5-tel osztható száma az 5 lesz. 3-mal osztható szám még nincs a kiválasztottak között, a hiányzó két számnak 3 db 3-as tényezőt kell „behozni”. Ez egyféleképpen megtehető, a 3 és a 9 választásával. Találtunk egy megoldást: **egy padon ülnek a 2, 3, 5, 9, 14 és 16 éves gyerekek.**

Még egy lehetőséget meg kell vizsgálnunk, amikor egy csoportban van a 16, 6, 2. A hiányzó számok összege 25. 7-tel osztható páratlan számot választani kell, tehát a 7-et választjuk. Szükség van 1 db 5-ös és 2 db 3-as tényezőre. Ez a 15 és a 3 választásával megoldódik. Találtunk egy másik megoldást: **egy padon ülhetnek a 2, 3, 6, 7, 15, 16 éves gyerekek.**