3. KÖRGEOMETRIA

Hajós György: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Budapest, 89–109. és 121. oldal.
Pelle Béla: Geometria, Tankönyvkiadó, Budapest, 86–97. és 117–121. oldal.
Kovács Zoltán: Geometria, Kossuth Egyetemi Kiadó, 49–54. oldal.

3.1. Körrel kapcsolatos alapismeretek

Definíció: A sík azon pontjainak halmazát, amelyek egy adott ponttól megadott (nem nulla) távolságra vannak körnek (körvonalnak) nevezzük.
Jelölése: $k(O,r) = \{P \mid P \in \boldsymbol{S},\ OP = r\}$, ahol $\boldsymbol{S}$ az adott sík, O a középpont és $r \in \boldsymbol{R}^+$ a sugár.
Nyílt körlemez (kör belseje): $int\ k = \{P \mid P \in \boldsymbol{S},\ OP < r\}$.
Zárt körlemez: $\{P \mid P \in \boldsymbol{S},\ OP \le r\}$.
Külső pontok halmaza: $\{P \mid P \in \boldsymbol{S},\ OP > r\}$.
$A, B \in k(O,r)$ esetén az $\overline{AB}$ szakaszt húrnak nevezzük.
$A, B \in k(O,r) \wedge O \in \mathrm{int}\,\overline{AB}$ esetén az $\overline{AB}$ szakaszt átmérőnek nevezzük.
A kört meghatározza

- középpontja és sugara: $k(O,r)$,
- középpontja és a körvonal egy pontja: $k(O,P)$,
- egy átmérője: $k(\overline{AB})$,
- a körvonal három pontja: $k(ABC)$.

Tétel: Körnek és egyenesnek 0, 1, 2 közös pontja lehet, aszerint hogy a középpont és az egyenes távolsága nagyobb, egyenlő, vagy kisebb mint a sugár.
Definíció: Az olyan egyenest, amelynek a körrel egy közös pontja van érintőnek, a közös pontot pedig érintési pontnak nevezzük.
Az érintőnek az érintési ponttól különböző bármely pontja az adott körnek külső pontja.
Definíció: Az olyan egyenest, amelynek a körrel kettő közös pontja van szelőnek, a közös pontokat pedig metszéspontoknak nevezzük.
A szelő és a körlemez metszete a kör húrja.
Egy kör a középpontján áthaladó bármely egyenesre nézve tengelyesen szimmetrikus.
Tétel (az érintő tulajdonsága): Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra.
Megfordítás: Ha a kör síkjának egy egyenese merőleges a kör valamely sugarára és áthalad ezen sugárnak a középponttól különböző végpontján, akkor ez az egyenes ebben a pontban érinti a kört.
Tétel: Egy kör bármely húrjának felező merőlegese áthalad a kör középpontján.
Megfordítás: Ha egy kör síkjának valamely egyenese áthalad a kör középpontján és a kör egy húrjának a felező pontján, akkor ez az egyenes merőleges erre a húrra.
Tétel: Külső és belső pontot összekötő szakasznak egy közös pontja van a körvonallal.
Tétel: Külső pontból a körhöz két érintő húzható. A külső pontot a két érintési ponttal összekötő két szakasz egyenlő hosszú.
Feladat: Külső pontból körhöz húzott érintők megszerkesztése (Hajós: Bevezetés a geometriába 96. oldal 72. ábra, 161. oldal 155. ábra, Faragó – Forgó: Geometriai szerkesztések 17. oldal 6. és 7. ábra)
Definíció: Két kör koncentrikus, ha a középpontjuk azonos.
Két koncentrikus kör a közös középpontra illeszkedő bármely egyenesre, míg két nem koncentrikus kör a középpontjaikat összekötő egyenesre vonatkozóan tengelyesen szimmetrikus.
Tétel: Két körnek legfeljebb kettő közös pontja lehet.
Legyen $k_1(O_1, r_1)$ és $k_2(O_2, r_2)$ a két adott kör, továbbá $c = O_1O_2$ a középpontokat összekötő (centrális) szakasz hossza. Ekkor az előbbi tétel az alábbi esetekre bontható:

- nincs közös pont, ha $0 \leq c < |r_1 - r_2|$, vagy $c > r_1 + r_2$,
- egy közös pont van, ha $c = |r_1 - r_2|$, vagy $c = r_1 + r_2$,
- kettő közös pont van , ha $|r_1 - r_2| < c < r_1 + r_2$.

Tétel: Egy kört három pontja egyértelműen meghatározza.
Definíció: Kör és azt metsző egyenes szögén a metszéspontban meghúzott érintőnek az egyenessel bezárt szögét értjük.
Ez az értelmezés független a metszéspont kiválasztásától, minthogy a középpontból a szelőre állított merőleges egyenesre vonatkozóan a kapott alakzat tengelyesen szimmetrikus: a két metszéspontban lévő szög egymás tükörképe.
Ha a kör és azt metsző egyenes szöge 90^o, akkor az egyenes merőleges (ortogonális) a körre. Ez pontosan akkor áll fenn, ha a metsző egyenes áthalad a kör középpontján.
Definíció: Két metsző kör szögén a metszéspontban meghúzott körérintők szögét értjük.
Ez az értelmezés független a metszéspont kiválasztásától, minthogy a két középpont összekötő egyenesére vonatkozóan a kapott alakzat tengelyesen szimmetrikus: a két metszéspontban lévő szög egymás tükörképe.
Ha két metsző kör szöge 90^o, akkor a két kör merőleges (ortogonális) egymásra.
Két metsző kör akkor és csak akkor ortogonális, ha

- a metszéspontból a középpontok összekötő szakasza derékszög alatt látszik,
- a metszéspontban az egyik körhöz húzott érintő áthalad a másik kör középpontján.

Egymást ortogonálisan metsző két kör bármelyikének középpontja kívül van a másik körön.
Definíció: Két kör közös érintője olyan egyenes, melynek mindkét körrel egy közös pontja van.
Minthogy a közös érintőnek az érintési pontoktól különböző bármely pontja mindkét körnek külső pontja, ezért két körnek nincs közös érintője, ha az egyik kör a másik belsejében van.
Tétel: Két kör közös érintőinek száma 0, 1, 2, 3 , 4.
Definíció: Ha két körnek van közös érintője és mindkét kör annak ugyanazon (ellentétes) oldalán van, akkor azt a két kör külső (belső) érintőjének nevezzük.
Az előző tétel a következő esetekre bontható:

- nincs közös érintő, $c < |r_1 - r_2|$,
- egy külső érintő van, ha $c = |r_1 - r_2|$,
- kettő külső érintő van, ha $|r_1 - r_2| < c < r_1 + r_2$,
- egy belső és kettő külső érintő van, ha $c = r_1 + r_2$,
- kettő belső és kettő külső érintő van, ha $c > r_1 + r_2$.

Két koncentrikus körnek nincs közös érintője. Ha két körnek egy külső (belső) érintője van, akkor az merőleges a középpontok összekötő egyenesére. Két egybevágó körnek mindig van két külső érintője, amelyek párhuzamosak egymással. Ha két nem egybevágó körnek van két külső érintője, továbbá ha két körnek van két belső érintője, akkor azok a középpontok összekötő egyenesén metszik egymást.
Feladat: Két kör közös érintőinek megszerkesztése (Középiskolai geometriai feladatok gyűjteménye I, 633/a,b feladat).

3.2. Körök hasonlósága

Hajós: 121. oldal.
Pelle: 117–121. oldal.

Bármely hasonlóság során kör képe olyan kör, melynek középpontja az eredeti kör középpontjának a képe, és sugaraik aránya a hasonlóság arányával egyenlő.
Bármely két kör hasonló, mert az olyan hasonlóság, amely során az egyik kör középpontjának képe a másik kör középpontja, és amelynek aránya a körök sugarainak hányadosa, az egyik kört a másikra képezi le.

Két koncentrikus kör centrális nyújtással, két egybevágó kör eltolással, tengelyes és középpontos tükrözéssel is átvihető egymásba.
Két nem koncentrikus kör középpontjai, valamint két párhuzamos sugárnak a körökre illeszkedő végpontjai e köröket egymásba átvivő alkalmas hasonlóság során megfelelő pontpárokat alkotnak. Ha ezen megfelelő pontpárok összekötő egyenesei metszik egymást, akkor ez a metszéspont a két kört egymásra leképező középpontos hasonlóságnak a centruma, amit a két kör külső vagy belső hasonlósági centrumának nevezünk aszerint, hogy a megfelelő sugarak irányítása azonos vagy ellentétes.
Két egybevágó körnek csak belső hasonlósági centruma van. Ha két nem egybevágó körnek van külső érintője, akkor az illeszkedik a külső hasonlósági centrumra. Ugyanígy: ha két körnek van belső érintője, akkor az illeszkedik a belső hasonlósági centrumra.
Ha az egy síkban lévő $k_1(O_1, r_1)$ és $k_2(O_2, r_2)$ körökre $O_1 \neq O_2$ és $r_1 < r_2$ esetén e körök belső és külső hasonlósági centrumát B illetve K jelöli, akkor irányított szakaszok előjeles hosszaival számolva $O_1B : BO_2 = r_1 : r_2$ és $O_1K : KO_2 = -(r_1 : r_2)$ teljesül. Ekkor a B belső és K külső hasonlósági centrumok bármelyike egy olyan középpontos hasonlóság centruma, amely a k_1 és k_2 köröket egymásra képezi le.
Feladat: Két nem koncentrikus kör külső és belső hasonlósági centrumának szerkesztése.
Feladat: Két kör közös érintőinak szerkesztése a hasonlósági centrum segítségével (Középiskolai geometriai feladatok gyűjteménye I, 1410/b és 1411/b feladatok).

3.3. Érintő- és húrnégyszög

Hajós: 108–109. oldal
Pelle: 101–102. oldal.

Definíció: Érintőnégyszögnek nevezzük az olyan négyszöget, amelynek oldalai ugyanazon körnek az érintői.
Tétel: Ha egy négyszög érintőnégyszög, akkor a szemközti oldalainak összege egyenlő.
Megfordítás: Ha egy konvex négyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, akkor az a négyszög egy érintőnégyszög. (Konkáv deltoid esete!)
Definíció: Húrnégyszögnek nevezzük az olyan négyszöget, amelynek oldalai ugyanazon körnek a húrjai.
Tétel: Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor szemközti szögeinek összege egyenlő (vagy: szemközti szögei kiegészítő szögek).
Megfordítás: Ha egy négyszög szemközti szögei kiegészítő szögek, akkor az a négyszög egy húrnégyszög.

3.4. Látószög és látókörív

Hajós: 106–108. oldal
Pelle: 100. oldal.

Definíció: Legyen A és B két adott pont, továbbá legyen P egy az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre nem illeszkedő pont. Ekkor a konvex $APB\angle$ szöget az $\overline{AB}$ szakasz P pontbeli látószögének nevezzük.
Tétel: A sík azon pontjainak halmaza, ahonnan egy adott szakasz 0° és 180° közötti szögben látszik, a szakasz végpontjait összekötő és a szakasz egyenesére szimmetrikus két körív belseje.
Definíció: A tételben értelmezett két körívet az adott szakasz adott szöghöz tartozó látókörívének nevezzük.
Feladat: Adott szakasz látókörívének megszerkesztése, ha a látószög adott hegyes-, derék-, vagy tompaszög.

3.5. Pont körre vonatkozó hatványa

Hajós: 125–126. oldal
Kovács: 105–106. oldal

Legyen adott egy $\boldsymbol{S}$ euklideszi sík és abban egy $k(O,r)$ kör.
Definíció: A $k(O,r)$ kör síkjának bármely P pontjához hozzárendelhető az $OP^2 - r^2$ valós szám, amit a P pont k körre vonatkozó hatványának nevezünk.
Jelölése: $h_k(P) = OP^2 - r^2 \in \boldsymbol{R}$.
Tulajdonságok:

1) $h_k(P) \geq -r^2$ (egyenlőség , ha $P \equiv O$)
2) $h_k(P) \begin{cases} > 0 \Leftrightarrow OP > r \\ = 0 \Leftrightarrow OP = r \\ < 0 \Leftrightarrow OP < r \end{cases}$
3) Külső pont körre vonatkozó hatványa egyenlő a pontból a körhöz húzott érintőszakasz hosszának négyzetével.
4) Azon pontok halmaza, amelyeknek egy adott körre vonatkozó hatványa ugyanazon (nullától különböző) érték, az adott körrel koncentrikus körvonal.

Tétel: Ha a $k(O,r)$ kör síkjának valamely P pontján áthaladó g szelőre $g \cap k = \{A, B\}$, akkor $h_k(P) = PA \cdot PB$, ahol PA és PB előjeles hosszakat jelölnek.
Megjegyzés: $A \equiv B$ esetén a g szelőből érintő lesz ($\rightarrow$ 3. tulajdonság).
Euler-tétel: Ha a háromszög körülírt körének sugara R, beírt körének sugara r, továbbá a körülírt és beírt körök középpontjainak távolsága d, akkor $d^2 = R^2 - 2Rr$..
(Coxeter – Greitzer: Az újra felfedezett geometria, 54–55. oldal)
Következmény: $R \geq 2r$ (egyenlőség, ha a háromszög szabályos).

3.6. Hatványvonal és hatványpont

Hajós: 362–365. oldal
Kovács: 106–107. oldal

Legyen adott két kör: $k_1(O_1,r_1)$ és $k_2(O_2,r_2)$.
Definíció: Azon pontok halmazát egy síkban, amelyeknek a síkban lévő két körre vonatkozó hatványa egyenlő, a két kör hatványvonalának nevezzük.
Jelölése: $h_{12} = \{P \mid h_1(P) = h_2(P)\}$.
Tétel: Két koncentrikus kör hatványvonala üres halmaz.
Tétel: Két nem koncentrikus kör hatványvonala olyan egyenes, amely merőleges a középpontok összekötő egyenesére.
Következmények:

1) Ha két kör metszi egymást, akkor hatványvonaluk a metszéspontok összekötő egyenese.
2) Ha két kör érinti egymást, akkor hatványvonaluk az érintési pontban meghúzott közös érintő.
3) Két egybevágó kör hatványvonala a középpontok összekötő szakaszának felező merőlegese.

4) A hatványvonalnak a két körön kívüli bármely pontjából mindkét körhöz egyenlő hosszú érintőszakaszok húzhatók: vagyis ez a pont egy olyan körnek a középpontja, amely mindkét adott kört merőlegesen metszi.

Tétel: Ha három (páronként nem koncentrikus) kör középpontjai egy egyenesen vannak, akkor hatványvonalaik párhuzamosak.

Tétel: Ha három kör középpontjai nem egy egyenesen vannak, akkor hatványvonalaik egy pontra illeszkednek.

Definíció: Ha három kör középpontjai nem egy egyenesen vannak, akkor hatványvonalaik metszéspontját a három kör hatványpontjának nevezzük.

Három adott kör hatványpontja vagy mindhárom körön kívül van, vagy mindhárom körön belül van, vagy pedig rajta van mindhárom körön.

Ha a hatványpont mindhárom körön kívül van, akkor abból mindhárom körhöz egyenlő hosszú érintőszakaszok húzhatók, vagyis a hatványpont ekkor egy olyan kör középpontja, amely mindhárom kört merőlegesen metszi.

Feladat: A hatványpont segítségével megszerkesztendő két olyan adott kör hatványvonala, amelyek nem koncentrikusak, nem egybevágók és nincs közös pontjuk.