LOGIKA

- hétköznapi jelentése: a rendszeresség, következetesség szinonimája
  - Ez *logikus* beszéd volt.
  - Nincs benne *logika*.
  - Más *logika* szerint gondolkodik.
- tudományszak elnevezése, melynek fő **feladata** a helyes következtetés
  - fogalmának szabatos meghatározása,
  - törvényeinek feltárása.

Következtetés

gondolati eljárás

$\boxed{\text{kiinduló információk}}$	$\Longrightarrow$	$\boxed{\text{kinyert információ}}$
$\downarrow$	nyelvi megnyilvánulás	$\downarrow$
állítások **premisszák**		állítás **konklúzió**

A logika feladata tehát a premisszák és a konklúzió közötti összefüggés tanulmányozása.

Egy kijelentő mondat **állítás**, ha egyértelmű információt hordoz és igazságértékkel bír .

Egy állítás **igaz**, ha az információtartalom a valóságnak megfelelő, egyébként **hamis**, függetlenül tudásunktól.

Arisztotelész alapelvei

- az ellentmondástalanság elve: Egyetlen állítás sem lehet igaz is és hamis is.
- a kizárt harmadik elve: Nincs olyan állítás, amely sem nem igaz, sem nem hamis.

állítás	nem állítás
Most esik az eső Budapesten.	Esik.
$5 < 3$	$x < 3$
A francia király 1788-ban Rómába látogatott.	A francia király ma Rómába látogatott.
Iskolánk igazgatója 50 éves.	Iskolánk tanára 50 éves.

Helyes a következtetés (köznapi értelemben!), ha a premisszák **igaz** volta esetén a konklúzió is **igaz**.
Köznapi értelemben vett következtetések:

(premisszák:) Erika Sándornak a felesége.
Katalin Sándornak az édesanyja.
(konklúzió:) Katalin Erikának az anyósa.

A logika nem vizsgálja a (magyar) nyelv szavainak jelentését!!

pótpremissza:
Ha x y-nak a felesége, és z y-nak az édesanyja, akkor z x-nek az anyósa.
(premissza:) A vizsgált háromszög egyik oldalhosszának négyzete egyenlő a másik két oldalhossz négyzetének összegével.
(konklúzió:) A vizsgált háromszög derékszögű.

A logika nem tartalmaz egyetlen más szaktudományt sem, így nem ismerheti ezek eredményeit!!
pótpremissza (Pitagorasz tétele):
Ha egy háromszög egyik oldalhosszának négyzete egyenlő a másik két oldalhossz négyzetének összegével, akkor a háromszög derékszögű.

Pali okoskodása:
(P1) Ha 10 másodperc alatt futom a 100 métert, akkor kiküldenek az olimpiára.
(P2) De nem futom 10 másodperc alatt a 100 métert.
(K) Tehát nem küldenek ki az olimpiára.

A KÖVETKEZTETÉS HIBÁS!!

Panni okoskodása:
(P1) Ha a benzin elfogyott, az autó megáll.
(P2) Nem fogyott el a benzin.
(K) Az autó nem áll meg.

EZ A KÖVETKEZTETÉS IS HIBÁS!!

Így következtetni, a példák alapján, nem jó. Mi volt közös az okoskodásokban?
Ha ...., akkor ______.
Nem ....
Nem ______.
Egyforma jelölés helyére ugyanaz az állítás kerül. $\rightarrow$ Használjunk, mint a matematikában, betűket!
Ha A, akkor B.
Nem A.
Nem B.

Egy következtetés logikai vizsgálata során mit használunk fel a mondatokból?

- logikai szavakat:

nem	$\neg$	negáció
és	$\wedge$	konjunkció
vagy	$\vee$	diszjunkció
ha ... akkor	$\supset$	implikáció
minden	$\forall$	univerzális kvantor
van	$\exists$	egzisztenciális kvantor

- a mondatrészek, szavak jelentése közömbös, helyettük
  - **termek**
  - **atomi formulák**

$$\Downarrow$$

LOGIKAI NYELV

Miért van szüksége a logikának saját nyelvre?

- nem tartozhat egyetlen nemzeti nyelvhez sem;
- a természetes nyelvek nyelvtani rendszerei különbözőek és bonyolultak;
- a logika saját nyelvében minden (abc, nyelvtani szabályok, kategóriák) a logika feladatának ellátását szolgálhatja.

Logikai szavak

A negáció:

Alfréd diák.
Alfréd **nem** diák.
DE:
Kékestetőn havazik.
Nem Kékestetőn havazik.
Nem igaz, hogy Kékestetőn havazik.

A konjunkció:

Amália **és** Bella kertészek.
"Lement a nap. **De** csillagok nem jöttenek." (Petőfi)
Juli **is**, Mari **is** táncol.
Kevésre vitte, **noha** becsületesen dolgozott.
DE:
Amália és Bella testvérek.

A diszjunkció:

Esik az eső, **vagy** fúj a szél.
Vagy busszal jött, **vagy** taxival.

Az implikáció:

Ha megtanulom a leckét, **akkor** ötösre felelek.
Csak akkor felelek ötösre, **ha** megtanulom a leckét.

Gyakran az egyszerű állítások **szerkezetét** is fel kell tárnunk.

Dezső **postás**.
Amália és *Bella* **testvérek**.
Az *Erzsébet híd* **összeköti** *Budát Pesttel.*

predikátum + *objektumnevek*

Az univerzális kvantor:

Amália **mindegyik** testvére lány.

Az egzisztenciális kvantor:

Amáliának **van** testvére.

Az elsőrendű logikai nyelv

Állandó szimbólumok

- logikai jelek: $\neg \ \wedge \ \vee \ \supset \ \forall \ \exists$
- elválasztó jelek: ( ) ,

Definiálandó szimbólumok (négy halmazba sorolva)

$$\Omega =< Srt, Cnst, Fn, Pr >$$

- Srt, elemei a **típus**ok. Minden $\pi \in Srt$ típushoz tartoznak **változó**k: $x_1^\pi, x_2^\pi, \ldots$
- $Cnst$ **konstans**ok halmaza. Minden $c \in Cnst$ valamely $\pi \in Srt$ típushoz tartozik.
- Fn **függvényszimbólum**ok halmaza. Minden $f \in Fn$ függvényszimbólumot a

  $$(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k \to \pi)$$

  ún. **alak**ja jellemez. ($k \geq 1$)
- $Pr \neq \emptyset$ **predikátumszimbólum**ok halmaza. Minden $P \in Pr$ predikátumszimbólumhoz egy

  $$(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$$

  alakot rendelünk. ($k \geq 0$)

Példák logikai nyelvekre

1. A Geom nyelv
   $Srt = \{pt$ (ponttípus)$, et$ (egyenestípus)$, st$ (síktípus)$\}$
   pt típusú változók: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$
   et típusú változók: $e, f, g, \ldots$
   st típusú változók: $\mathtt{a}$, $\mathtt{b}$, $\mathtt{c}$,...
   $Cnst = \emptyset$
   $Fn = \emptyset$
   $Pr = \{P^{(pt,pt)}, Q^{(pt,et)}, R^{(pt,st)}\}$
   Megjegyzés: a geometriában a P, Q, R szimbólumok helyett rendre az $=$, $\in$, $\in$ jeleket szokás inkább használni.

2. Az Ar nyelv
   $Srt = \{szt$ (számtípus)$\}$
   szt típusú változók: $x, y, z, \ldots$
   $Cnst = \{nulla\}$
   $Fn = \{f^{(szt \to szt)}, g^{(szt,szt \to szt)}, h^{(szt,szt \to szt)}\}$
   $Pr = \{P^{(szt,szt)}\}$
   Megjegyzés: az aritmetikában a g és h szimbólumok helyett a $+$ és $\cdot$ jeleket, P helyett pedig az $=$ jelet szokás használni.

3. nulladrendű nyelvek
   $\Omega =< \emptyset, \emptyset, \emptyset, Pr >$,
   ahol minden $P \in Pr$ alakja $()$,
   azaz P **propozícionális betű**.

logikai kifejezések

π típusú termek

- c, ha $c^{\pi} \in Cnst$;
- x, ha x^{π} változó;
- $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, ha $f^{(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k \to \pi)} \in Fn$ és $t_1^{\pi_1}, t_2^{\pi_2}, \ldots, t_k^{\pi_k}$ termek;
- minden term
  - vagy a nyelv konstansa, vagy változója,
  - vagy az indukciós lépés véges sokszori alkalmazásával belőlük nyerhető.

formulák

- $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ **atomi formula**, ha $P^{(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)} \in Pr$ és $t_1^{\pi_1}, t_2^{\pi_2}, \ldots, t_k^{\pi_k}$ termek;
- $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ és $\neg A$, ha A és B formulák;
- $\forall x A$ és $\exists x A$, ha A formula és x tetszőleges változó;
- minden formula
  - vagy atomi formula,
  - vagy az indukciós lépések véges sokszori alkalmazásával atomi formulákból megkapható.

Példák logikai kifejezésekre

1. A Geom nyelv kifejezései:

   - termek: $\mathcal{A}$, f, $\mathtt{b}$
   - atomi formulák:

	a geometriában szokásosan
$P(\mathcal{A},\mathcal{B})$	$(\mathcal{A}=\mathcal{B})$
$Q(\mathcal{B},e)$	$(\mathcal{B}\in e)$
$R(\mathcal{A},\mathtt{a})$	$(\mathcal{A}\in \mathtt{a})$

   - formula:

$$\exists\mathcal{A}(Q(\mathcal{A},e)\wedge Q(\mathcal{A},f)) \quad \exists\mathcal{A}((\mathcal{A}\in e)\wedge(\mathcal{A}\in f))$$

2. Az Ar nyelv kifejezései:

   - termek:

	az arimetikában szokásosan
$nulla,\ x,\ f(nulla)$	
$g(x,f(nulla))$	$(x+f(nulla))$
$h(f(f(x)),x)$	$(f(f(x))\cdot x)$

   - atomi formula:

$$P(g(x,f(nulla)),nulla) \quad ((x+f(nulla))=nulla)$$

   - formula:

$$\exists u P(g(x,u),y) \quad \exists u((x+u)=y)$$

közvetlen részterm

- változónak és konstansnak nincs közvetlen résztermje;
- az $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ term közvetlen résztermjei a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek.

Jelölés:

$\triangle$	Q
$\wedge \ \vee \ \supset$	$\forall \ \exists$

közvetlen részformula

- atomi formulának nincs közvetlen részformulája;
- a $\neg A$ közvetlen részformulája az A formula;
- az $(A \triangle B)$ formula közvetlen részformulái az A és a B formulák;
- a QxA formula közvetlen részformulája az A formula.

részkifejezés

- maga a kifejezés;
- a közvetlen részkifejezések;
- részkifejezések részkifejezései.

funkcionális összetettség (jele: $\tilde{l}(t)$)

- ha $t = c \in Cnst$, vagy $t = x$, akkor $\tilde{l}(t) \rightleftharpoons 0$;
- $\tilde{l}(f(t_1, t_2, \ldots, t_k)) \rightleftharpoons \Sigma_{i=1}^{k} \tilde{l}(t_i) + 1$.

logikai összetettség (jele: $l(A)$)

- ha A atom, $l(A) \rightleftharpoons 0$;
- $l(\neg A) \rightleftharpoons l(A) + 1$;
- $l(A \triangle B) \rightleftharpoons l(A) + l(B) + 1$;
- $l(QxA) \rightleftharpoons l(A) + 1$.

A formulák leírásakor szokásos rövidítések:

- formula-kombinációk helyett speciális jelölések;
  Példa.
  $$(A \equiv B) \rightleftharpoons ((A \supset B) \wedge (B \supset A))$$
- külső zárójelek elhagyása;
- logikai jelek prioritása csökkenő sorrendben:
  $$\begin{matrix} \forall & & \vee & \\ & \neg & & \supset \\ \exists & & \wedge & \end{matrix}$$
- azonos prioritás esetén a jobbra álló az erősebb;
- jobbról álló pont jelöli a zárójelen belüli leggyengébb logikai jelet.

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{kvantoros előtag}}}{\boxed{Qx}}\ \ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{a kvantor hatásköre}}}{\boxed{\boxed{A}}}$$

Egy változó valamely előfordulása a formulában **kötött**:

- Egy atomi formula egyetlen változója sem kötött.
- A $\neg A$-ban x egy adott előfordulása kötött, ha A-ban x-nek ez az előfordulása kötött.
- Az $A \triangle B$-ben x egy adott előfordulása kötött, ha ez az előfordulás vagy A-ban van, és ott kötött, vagy B-ben van, és ott kötött.
- A QxA-ban x minden előfordulása kötött, és az x-től különböző y egy adott előfordulása kötött, ha ez az előfordulás A-ban kötött.

Egy változó valamely előfordulása a formulában **szabad**, ha nem kötött.
Ha egy változónak egy formulában van szabad előfordulása, akkor ez a változó a formula **paramétere**.
Jelölések:
$Fv(A)$: az A formula paramétereinek a halmaza. $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: formula, melyben legfeljebb az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók lehetnek paraméterek.

A kötött változók átnevezése

A QxA-ban x-nek a Q kvantor által kötött minden előfordulását az x-szel azonos típusú y változóra cserélve kapunk egy QyA_y^x formulát.

Milyen formulát eredményez ez az átalakítás?

Az Ar nyelven a természetes számok halmazában a

$$\exists x(u + x = v), \quad \exists y(u + y = v), \quad \exists z(u + z = v)$$

formulák mindegyike a $(u \leq v)$ relációt fejezi ki.

Vigyázat!!

A

$$\exists u(u + u = v)$$

formula viszont v párosságát állítja.

A jelentésváltozás oka a **változóütközés**.
Példa:

$$\forall x(P(x, z) \supset \exists y R(x, y))$$

Az x y-ra átnevezésével a

$$\forall y(P(y, z) \supset \exists y R(y, y))$$

formulát kapjuk!!

A kötött változók szabályosan végrehajtott átnevezése

Ha a QxA formulában

- az y nem paraméter, és
- az x változó egyetlen Q által kötött előfordulása sem tartozik egyetlen y-t kötő kvantor hatáskörébe sem,

akkor a QxA-ból a QyA_y^x formulát az x kötött változó **szabályosan végrehajtott** átnevezésével kaptuk.

Az A és A' **kongruens** formulák, ha egymástól csak kötött változók szabályosan végrehajtott átnevezésében különböznek.
Jelölése: $A \approx A'$
A kongruencia egy nyelv formulái halmazában reflexív, szimmetrikus és tranzitív reláció.
Osztályozást generál: az egy kongruenciaosztályba tartozó formulák között a logikában nem teszünk különbséget.

Hogyan dönthetjük el, hogy két formula kongruens- e?

- a formula összetettsége szerinti indukcióval:
  - Egy atomi formula egyetlen más formulával sem kongruens, csak önmagával.
  - $\neg A \approx \neg A'$, ha $A \approx A'$.
  - $A \triangle B \approx A' \triangle B'$, ha $A \approx A'$ és $B \approx B'$.
  - $QxA \approx QyA'$,
    ha minden z-re, mely különbözik QxA és QyA' (kötött és szabad) változóitól, $A_z^x \approx A'^y_z$.
- a **formula vázá**val
  - rajzoljuk be a formulában a kötési viszonyokat;
  - hagyjuk el az összekötött változókat.

  Két formula pontosan akkor lesz egymással kongruens, ha megegyező a vázuk.

Egy formula **változó-tiszta**, ha benne

- a kötött változók nevei különböznek a szabad változók neveitől;
- bármely két kvantor különböző nevű változókat köt meg.

Lemma.
Legyen A egy formula és S változóknak egy véges halmaza. Ekkor konstruálható olyan változó-tiszta A' formula, hogy

- $A \approx A'$, és
- A' egyetlen kötött változójának neve sem eleme S-nek.

A szabad változók helyettesítése termekkel

Az Ar nyelvben a természetes számok halmazában szeretnénk kifejezni az $(x \leq z*z)$ relációt. Ha az $(x \leq y)$-t kifejező

$$\exists u(x + u = y)$$

formulában y helyére $z * z$-t helyettesítünk, a kívánt

$$\exists u(x + u = z * z)$$

formula megkapható.

Vigyázat!

Ha az $(x \leq z * u)$ relációt akarjuk kifejezni hasonló módon eljárva, nem a kívánt formulát, hanem az

$$\exists u(x + u = z * u)$$

kapjuk.
A probléma oka a változóütközés.
Megoldás:
Nevezzük át a kötött változót például w-re, és csak utána hajtsuk végre a termhelyettesítést:

$$\exists w(x + w = z * u)$$

A formális helyettesítés

Egy x változónak és egy vele megegyező típusú t termnek a párosát **binding**nek nevezzük.
Jelölése: x/t.
A formális helyettesítés bindingek egy

$$\Theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_k/t_k\}$$

halmaza, ahol $x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$
$(i, j = 1, 2, \ldots, k; \quad k \geq 0)$.

A helyettesítést megadhatjuk még

- táblázattal:

$$\Theta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_k \end{pmatrix},$$

- amit egy sorba is írhatunk:

$$\Theta = (x_1, x_2, \ldots, x_k || t_1, t_2, \ldots, t_k).$$

A helyettesítés

- **értelmezési tartomány**a: $dom\ \Theta = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$
- **értékkészlet**e: $rng\ \Theta = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$

Egy kifejezésbe való formális helyettesítés eredménye

Legyen K logikai kifejezés, $\Theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_k/t_k\}$ formális helyettesítés. Az x_i változók összes K-beli szabad előfordulását helyettesítsük egyidejűleg K-ban a t_i termekkel. Az így kapott kifejezés a Θ K-ba való **formális helyettesítésének eredménye**.
Jelölése:

$$K\Theta, \text{ vagy } K^{x_1,\ldots,x_k}_{t_1,\ldots,t_k}$$

Egy kifejezésbe való formális helyettesítés eredményének meghatározása:

- $x\Theta = \begin{cases} x & \text{ha } x \notin dom\ \Theta \\ \Theta(x) & \text{ha } x \in dom\ \Theta \end{cases}$
- $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)\Theta = f(t_1\Theta, t_2\Theta, \ldots, t_k\Theta)$
- $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)\Theta = P(t_1\Theta, t_2\Theta, \ldots, t_k\Theta)$
- $(\neg A)\Theta = \neg(A\Theta)$
- $(A \triangle B)\Theta = A\Theta \triangle B\Theta$
- $(QxA)\Theta = Qx(A(\Theta - x))$,
  ahol $\Theta - x$ azt a helyettesítést jelöli, melyre
  $dom\ (\Theta - x) = (dom\ \Theta) \setminus \{x\}$, és
  $(\Theta - x)(z) = \Theta(z)$ minden $z \in dom\ (\Theta - x)$-re.

Egy kifejezés számára megengedett helyettesítés

Θ **megengedett** a K kifejezés számára, ha egyetlen $x_i \in dom\ \Theta$-nak egyetlen K-beli szabad előfordulása sem esik a $\Theta(x_i)$ term valamely változója szerinti kvantor hatáskörébe.

Példa.
A $\exists u(x + u = y)$ formula számára
$\{y/z * z\}$ megengedett, de $\{y/z * u\}$ nem.

Annak meghatározása, hogy egy Θ helyettesítés megengedett-e egy kifejezés számára:

- Termek és atomi formulák számára minden Θ megengedett.
- $\neg A$ számára Θ megengedett, ha megengedett A számára.
- $A \triangle B$ számára Θ megengedett, ha megengedett mind A, mind B számára.
- QxA számára Θ megengedett, ha
  - $\Theta - x$ megengedett A számára, és
  - egyetlen $z \in Fv(QxA) \cap dom\ \Theta$ esetén sem szerepel x a $\Theta(z)$ termben.

A szabályos helyettesítés

Legyen K egy kifejezés, és Θ egy helyettesítés. Keressünk K-val kongruens olyan K' kifejezést, mely számára a Θ helyettesítés megengedett. Ekkor a $K'\Theta$ kifejezés a Θ **szabályos helyettesítésének eredménye K-ba**.
Jelölése: $[K\Theta]$.

A szabályos helyettesítés eredményének meghatározása:

- Ha K term vagy atomi formula,
  akkor $[K\Theta] = K\Theta$.
- $[(\neg A)\Theta] = \neg[A\Theta]$
- $[(A \triangle B)\Theta] = [A\Theta] \triangle [B\Theta]$
- – Ha egyetlen $z \in Fv(QxA) \cap dom\ \Theta$ esetén sem szerepel x a $\Theta(z)$ termben, akkor
    $[(QxA)\Theta] = Qx[A(\Theta - x)]$.
  – Ha van olyan $z \in Fv(QxA) \cap dom\ \Theta$, hogy x paraméter $\Theta(z)$-ben, akkor válasszunk egy új változót, például u-t, mely nem szerepel sem QxA-ban, sem Θ-ban, és
    $[(QxA)\Theta] = Qu[(A_u^x)(\Theta - x)]$.

A logikai nyelv klasszikus szemantikája

Az $\Omega =< Srt, Cnst, Fn, Pr >$ elsőrendű logikai nyelv I **interpretáció**ja (**modell**je, **algebrai struktúrá**ja) egy olyan

$$I =< \widehat{Srt}, \widehat{Cnst}, \widehat{Fn}, \widehat{Pr} >$$

függvénynégyes, melyben

- $dom\ \widehat{Srt} = Srt$, és $\widehat{Srt} : \pi \mapsto D_\pi$, ahol a D_π **objektumtartomány** a π típusú objektumok nemüres halmaza;
- $dom\ \widehat{Cnst} = Cnst$, és a $\widehat{Cnst} : c \mapsto \tilde{c}$ függvény olyan, hogy ha a c π típusú konstans, akkor $\tilde{c} \in D_\pi$;
- $dom\ \widehat{Fn} = Fn$, és az $\widehat{Fn} : f \mapsto \tilde{f}$ függvény minden $f^{(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_k\to\pi)}$ függvényszimbólumhoz olyan $\tilde{f}$ függvényt rendel, melyben
  $dom\ \tilde{f} = D_{\pi_1} \times D_{\pi_2} \times \ldots \times D_{\pi_k}$, és $rng\ \tilde{f} = D_\pi$, azaz
  $\tilde{f} : D_{\pi_1} \times D_{\pi_2} \times \ldots \times D_{\pi_k} \to D_\pi$;
- $dom\ \widehat{Pr} = Pr$, és a $\widehat{Pr} : P \mapsto \tilde{P}$ függvény olyan, hogy a $P^{(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_k)}$ $(k \geq 1)$ predikátumszimbólum esetén,
  $\tilde{P} : D_{\pi_1} \times D_{\pi_2} \times \ldots \times D_{\pi_k} \to \{0, 1\}$,
  ha pedig P propozícionális betű,
  akkor $\tilde{P}$ vagy 0, vagy 1.

Legyen az Ω nyelv I interpretációjában

$$D \rightleftharpoons \bigcup_{\pi \in Srt} D_\pi \setminus \{\tilde{c} | \widehat{Cnst}(c) = \tilde{c},\ c \in Cnst\}.$$

Bővítsük ki a nyelvet az objektumtartományok objektumait jelölő új konstansokkal:

$$\Omega(D) =< Srt, Cnst(D), Fn, Pr >,$$

ahol

$Cnst(D) \rightleftharpoons Cnst \cup \{\underline{a} | \underline{a}$ az $a \in D$-hoz rendelt új szimbólum$\}$.

Az $\Omega(D)$ nyelv zárt logika kifejezéseit Ω I-beli **értékelhető kifejezés**einek nevezzük.

Az $\Omega(D)$ nyelv Θ formális helyettesítését Ω I-beli **értékelő helyettesítés**ének nevezzük, ha
$Fv(rng\ \Theta) = \emptyset$.

Egy Θ értékelő helyettesítés minden K kifejezés számára megengedett.

Ha a Θ értékelő helyettesítés és a K kifejezés olyanok, hogy $Fv(K) \subseteq dom\ \Theta$, akkor $K\Theta$ értékelhető kifejezése Ω-nak, és Θ-át K I-beli **értékelés**ének nevezzük.

Példa.

1. Az Ar nyelv természetes interpretációja

$\widehat{Srt}(szt) = \mathcal{N}$

$\widehat{Cnst}(nulla) = 0$

$\widehat{Fn}(f) = \tilde{f}$, ahol $\tilde{f} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, és

$$\tilde{f}(n) = n + 1, \quad (\text{ ha } n \in \mathcal{N})$$

$\widehat{Fn}(g) = \tilde{g}$, ahol $\tilde{g} : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, és

$$\tilde{g}(n, m) = n + m, \quad (\text{ ha } n, m \in \mathcal{N})$$

$\widehat{Fn}(h) = \tilde{h}$, ahol $\tilde{h} : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, és

$$\tilde{h}(n, m) = n \cdot m, \quad (\text{ ha } n, m \in \mathcal{N})$$

$\widehat{Pr}(P) = \tilde{P}$, ahol $\tilde{P} : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \{0, 1\}$,
és (ha $n, m \in \mathcal{N}$),

$$\tilde{P}(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = m \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

2. A Subset nyelv

$Srt = \{rh$ (egy alaphalmaz részhalmazai) $\}$

rh típusú változók: $x, y, z \ldots$

$Cnst = \emptyset \quad Fn = \emptyset \quad Pr = \{P^{(rh,rh)}\}$

A Subset nyelv egy interpretációja

$\widehat{Srt}(rh) = \{$ a $\{$piros, kék, zöld$\}$ alaphalmaz részhalmazai $\}$

$\widehat{Pr}(P) = \tilde{P}$, ahol, ha S, Z az alaphalmaz két részhalmaza

$$\tilde{P}(S, Z) = \begin{cases} 1 & \text{ha } S \subseteq Z \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Legyen I Ω egy interpretációja.

- Az Ω π típusú, értékelhető termének **érték**e I-ben egy D_π-beli objektum. Jelölése: $|t|_I$
  - Ha $\widehat{Cnst}(c) = \tilde{c}$, akkor $|c|_I \rightleftharpoons \tilde{c}$.
  - Ha $\underline{a} \in Cnst(D)$ az $a \in D_\pi$ objektumhoz rendelt új $\underline{a}$ szimbólum, akkor $|\underline{a}|_I \rightleftharpoons a$.
  - Ha $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ értékelhető term, ahol a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek értékei I-ben rendre $|t_1|_I, |t_2|_I, \ldots, |t_k|_I$, és $\tilde{f} = \widehat{Fn}(f)$, akkor

    $$|f(t_1, t_2, \ldots, t_k)|_I \rightleftharpoons \tilde{f}(|t_1|_I, |t_2|_I, \ldots, |t_k|_I).$$

- Az Ω értékelhető formulájának **érték**e I-ben vagy 0, vagy 1. Jelölése: $||C||_I$
  - Ha $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ értékelhető atomi formula, ahol a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek értékei I-ben rendre $|t_1|_I, |t_2|_I, \ldots, |t_k|_I$, és $\tilde{P} = \widehat{Pr}(P)$, akkor

    $$||P(t_1, t_2, \ldots, t_k)||_I \rightleftharpoons \tilde{P}(|t_1|_I, |t_2|_I, \ldots, |t_k|_I).$$

– Ha $\neg A$ értékelhető formula, ahol az A formula értéke $||A||_I$, akkor

$$||\neg A||_I \rightleftharpoons 1 - ||A||_I.$$

– Ha $A \triangle B$ értékelhető formula, ahol az A és B formulák értékei rendre $||A||_I, ||B||_I$, akkor

$$\begin{aligned} ||A \wedge B||_I &\rightleftharpoons min\{||A||_I, ||B||_I\} \\ ||A \vee B||_I &\rightleftharpoons max\{||A||_I, ||B||_I\} \\ ||A \supset B||_I &\rightleftharpoons max\{1 - ||A||_I, ||B||_I\} \end{aligned}$$

– Ha $\forall x A$ értékelhető formula, ahol x π típusú változó, akkor

$$||\forall x A||_I \rightleftharpoons \begin{cases} 1, & \text{ha minden } a \in D_\pi \text{ esetén } ||A^x_{\underline{a}}||_I = 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

– Ha $\exists x A$ értékelhető formula, ahol x π típusú változó, akkor

$$||\exists x A||_I \rightleftharpoons \begin{cases} 1, & \text{ha van olyan } a \in D_\pi \text{ hogy } ||A^x_{\underline{a}}||_I = 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen I Ω egy interpretációja és A értékelhető formula.
Az A formula
igaz I-ben (jelölése: $I \models A$), amikor $||A||_I = 1$,
egyébként **hamis I-ben**.

Példa.

1. Az Ar nyelv természetes interpretációjában

$$|nulla| = 0$$

$$|f(nulla)| = \tilde{f}(|nulla|) = 1$$

$$|(f(\underline{1}) + \underline{3})| = \tilde{g}\left(|f(\underline{1})|, |\underline{3}|\right) = \tilde{g}\left(\tilde{f}(|\underline{1}|), 3\right) =$$
$$= \tilde{g}\left(\tilde{f}(1), 3\right) = \tilde{g}(2,3) = 5$$

$$||\left((f(nulla) \cdot \underline{3}) = (f\left(f(nulla)\right) + \underline{1})\right)|| =$$
$$\tilde{P}\left(|f(nulla) \cdot \underline{3}|, |f\left(f(nulla)\right) + \underline{1}|\right) =$$
$$\tilde{P}\left(\tilde{h}\left(|f(nulla)|, |\underline{3}|\right), \tilde{g}\left(|f\left(f(nulla)\right)|, |\underline{1}|\right)\right) =$$
$$\tilde{P}\left(\tilde{h}(1,3), \tilde{g}\left(\tilde{f}(|f(nulla)|), 1\right)\right) = \tilde{P}\left(3, \tilde{g}(\tilde{f}(1), 1)\right) =$$
$$\tilde{P}(3, \tilde{g}(2,1)) = \tilde{P}(3,3) = 1$$

$$||\exists u\left((\underline{3} + u) = \underline{4}\right)|| = 1,$$
mert az $1 \in \mathcal{N}$ olyan, hogy
$$||\left((\underline{3} + u) = \underline{4}\right)_{\underline{1}}^{u}|| = ||\left(\underline{3} + \underline{1} = \underline{4}\right)|| = \tilde{P}\left(|\underline{3} + \underline{1}|, |\underline{4}|\right) =$$
$$\tilde{P}\left(\tilde{g}(|\underline{3}|, |\underline{1}|), 4\right) = \tilde{P}\left(\tilde{g}(3,1), 4\right) = \tilde{P}(4,4) = 1$$

2. A Subset nyelv előbbi interpretációjában

$$||P(\underline{\{\text{piros,zöld}\}}, \underline{\{\text{piros,kék}\}})|| =$$
$$\tilde{P}(|\underline{\{\text{piros,zöld}\}}|, |\underline{\{\text{piros,kék}\}}|) =$$
$$\tilde{P}(\{\text{piros,zöld}\}, \{\text{piros,kék}\}) = 0$$

$$||\forall y P(y, \underline{\{\text{piros,kék,zöld}\}})|| = 1,$$
mert minden S részhalmazra
$$||P(\underline{S}, \underline{\{\text{piros,kék,zöld}\}})|| = \tilde{P}(|\underline{S}|, |\underline{\{\text{piros,kék,zöld}\}}|) =$$
$$\tilde{P}(S, \{\text{piros,kék,zöld}\}) = 1$$

$$||\forall y P(y, \underline{\{\text{piros,kék}\}})|| = 0,$$
mert például az $\{$zöld$\}$ részhalmazra
$$||P(\underline{\{\text{zöld}\}}, \underline{\{\text{piros,kék}\}})|| = \tilde{P}(|\underline{\{\text{zöld}\}}|, |\underline{\{\text{piros,kék}\}}|) =$$
$$\tilde{P}(\{\text{zöld}\}, \{\text{piros,kék}\}) = 0$$

3. A Subset nyelv egy olyan interpretációjában, ahol
$\widehat{Srt}(rh) = \{\{\text{piros, kék, zöld, sárga}\}\text{ részhalmazai }\}$

$$||\forall y P(y, \underline{\{\text{piros,kék,zöld}\}})|| = 0,$$
mert például a $\{$sárga$\}$ részhalmazra
$$||P(\underline{\{\text{sárga}\}}, \underline{\{\text{piros,kék,zöld}\}})|| =$$
$$\tilde{P}(|\underline{\{\text{sárga}\}}|, |\underline{\{\text{piros,kék,zöld}\}}|) =$$
$$\tilde{P}(\{\text{sárga}\}, \{\text{piros,kék,zöld}\}) = 0$$

Lemma.
Legyen I az Ω nyelv egy interpretációja és r egy olyan term, melyben legfeljebb egy paraméter, a π típusú x szerepel. Legyen a t π típusú értékelhető term értéke $|t|_I$. Ekkor

$$|r\{x/t\}|_I = |r\{x/|t|_I\}|_I,$$

azaz egy értékelhető term értéke csak résztermjei értékeitől függ.

Lemma.
Legyen I az Ω nyelv egy interpretációja és A egy olyan formula, melyben legfeljebb egy paraméter, a π típusú x szerepel. Legyen a t π típusú értékelhető term értéke $|t|_I$. Ekkor

$$I \models [A\{x/t\}] \ \text{ akkor és csak akkor, ha } \ I \models A\{x/|t|_I\}.$$

Logikai törvény, logikai ellentmondás

Az Ω nyelv egy A formulája **logikai törvény**, ha Ω bármely I interpretációjában és A bármely I-beli Θ értékelése esetén $I \models A\Theta$. Jelölése: $\models A$.

Az Ω nyelv egy A formulája **logikai ellentmondás**, ha Ω bármely I interpretációjában és A bármely I-beli Θ értékelése esetén $A\Theta$ hamis. Jelölése: $=\!\!|\ A$.

Lemma.
$=\!\!|\ A$ akkor és csak akkor, ha $\models \neg A$.

Az Ω nyelv egy A formulája **kielégíthető**, ha van Ω-nak olyan I interpretációja és Θ értékelése, amelyre $I \models A\Theta$.

Lemma.
Az A formula pontosan akkor kielégíthető, ha nem igaz, hogy $\models \neg A$.

Az A és B formulák **logikailag ekvivalens**ek, ha $\models A \equiv B$. Jelölése: $A \sim B$.

A Boole-kombináció

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n,\ \ n \geq 1$ az Ω nyelv formulái.
$A_1, A_2, \ldots, A_n$ Boole-kombinációja

- A_i bármelyik $1 \leq i \leq n$-re;
- $\neg B$, ha B $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Boole-kombinációja;
- $B \triangle C$, ha ha B és C is $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Boole-kombinációi.

Példa.

$$\forall x P(x) \vee \exists y Q(x,y)$$

a $\forall x P(x)$ és a $\exists y Q(x,y)$ Boole-kombinációja.

A Quine-táblázat

Legyen B az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Boole-kombinációja.
Készítsük el a következő, 2^n különböző sort tartalmazó táblázatot:

A_1	A_2	$\ldots\ldots$	A_{n-2}	A_{n-1}	A_n	B
0	0	$\ldots\ldots$	0	0	0	
0	0	$\ldots\ldots$	0	0	1	
0	0	$\ldots\ldots$	0	1	0	
0	0	$\ldots\ldots$	0	1	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\ldots\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
1	1	$\ldots\ldots$	1	1	1	

Megjegyzés:

- A sorok az $A_1, A_2, \dots, A_n$ formulák összes különböző lehetséges értékeit tartalmazzák, függetlenül attól, hogy van-e olyan interpretáció és közös értékelés, melyre ilyen értékek adódnának.
- Olyan interpretáció és közös értékelés viszont nincs, ahol a formulák értékei rendre ne lennének megtalálhatók valamely sorban.

Töltsük ki a B alatti **főoszlop**ot: minden sorban számoljuk ki B értékét a kombinálótényezők sorbeli értékeinek függvényében.

A Boole-kombináció **propozícionális tautológia**, ha a Quine-táblája főoszlopában csupa 1 érték van.

Lemma.
Ha egy Boole-kombináció propozícionális tautológia, akkor logikai törvény.

Lemma.
Ha a Boole-kombináló tényezők propozícionális betűk, és a Boole-kombináció logikai törvény, akkor propozícionális tautológia.

Példa.

1. Vizsgáljuk az $(A \supset B) \supset \neg(A \wedge \neg B)$ formulát, mint az A és B formulák Boole-kombinációját.

$(A$	$\supset$	$B)$	$\supset$	$\neg$	$(A$	$\wedge$	$\neg$	$B)$
0		0			0			0
0		1			0			1
1		0			1			0
1		1			1			1

$(A$	$\supset$	$B)$	$\supset$	$\neg$	$(A$	$\wedge$	$\neg$	$B)$
0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	1

A Boole-kombináció propozícionális tautológia, tehát a formula logikai törvény.

2. Döntsük el, hogy $A \wedge \neg A$ logikai ellentmondás-e?

$\neg$	$(A$	$\wedge$	$\neg$	$A)$
	0			0
	1			1

$\neg$	$(A$	$\wedge$	$\neg$	$A)$
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1

$\neg(A \wedge \neg A)$ propozícionális tautológia, azaz logikai törvény, tehát $A \wedge \neg A$ logikai ellentmondás.

3. Vizsgáljuk a $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \supset \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ formulát, mint a $\exists x(A(x) \wedge B(x)), \exists x A(x)$ és a $\exists x B(x)$ formulák Boole-kombinációját.

$\exists x(A(x) \wedge B(x))$	$\supset$	$\exists x A(x)$	$\wedge$	$\exists x B(x)$
0		0		0
0		0		1
0		1		0
0		1		1
1		0		0
1		0		1
1		1		0
1		1		1

$\exists x(A(x) \wedge B(x))$	$\supset$	$\exists x A(x)$	$\wedge$	$\exists x B(x)$
0	1	0	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

A Boole-kombináció nem propozícionális tautológia, pedig logikai törvény.

4. Lássuk be, hogy

$$\models \exists x(A(x) \wedge B(x)) \supset \exists x A(x) \wedge \exists x B(x).$$

Bizonyítás:
Tekintsünk egy tetszőleges I interpretációt és Θ értékelést.
Vizsgálnunk kell a
$||\,(\exists x(A(x) \wedge B(x)) \supset \exists x A(x) \wedge \exists x B(x))\,\Theta||_I =$
$||\,(\exists x(A(x) \wedge B(x)))\,\Theta \supset (\exists x A(x))\Theta \wedge (\exists x B(x))\Theta||_I =$
$||\,(\exists x(A(x)(\Theta - x) \wedge B(x)(\Theta - x)) \supset$
$\exists x(A(x)(\Theta - x)) \wedge \exists x(B(x)(\Theta - x))||_I =$
$||\exists x(A'(x) \wedge B'(x)) \supset \exists x A'(x) \wedge \exists x B'(x)||_I$
értéket.

- Ha $||\exists x(A'(x) \wedge B'(x))||_I = 0$,
  akkor az implikáció értéke 1;
- Ha $||\exists x(A'(x) \wedge B'(x))||_I = 1$,
  akkor van olyan $a \in D_{\pi_x}$, hogy
  $||\,(A'(x) \wedge B'(x))^x_{\underline{a}}\,||_I =$
  $||A'(x)^x_{\underline{a}} \wedge B'(x)^x_{\underline{a}}||_I = 1.$
  Ekkor viszont
  $||A'(x)^x_{\underline{a}}||_I = 1$ és $||B'(x)^x_{\underline{a}}||_I = 1$, azaz
  $||\exists x A'(x)||_I = 1$ és $||\exists x B'(x)||_I = 1$, így
  $||\exists x A'(x) \wedge \exists x B'(x)||_I = 1.$
  Mivel az implikáció utótagja 1 értékű, az
  implikáció értéke most is 1.

5. Lássuk be, hogy

$$\not\models \exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \supset \exists x(A(x) \wedge B(x)).$$

Bizonyítás:

Tekintsünk egy olyan I interpretációt, melyben
$\widehat{Srt}(\pi_x) = \{\emptyset, \{piros\}\}$
$\widehat{Pr}(P) = \tilde{P}$, ahol, ha $S, Z \in \{\emptyset, \{piros\}\}$

$$\tilde{P}(S, Z) = \begin{cases} 1 & \text{ha } S \subseteq Z \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$A(x) \rightleftharpoons \forall u P(x, u)$
$B(x) \rightleftharpoons \forall u P(u, x)$

Ebben az interpretációban
$||\exists x A(x)||_I = 1$ és $||\exists x B(x)||_I = 1$, mert például
$||A(\underline{\emptyset})||_I = 1$ és $||B(\underline{\{piros\}})||_I = 1$.
Ugyanakkor $||\exists x(A(x) \wedge B(x))||_I = 0$, mert
$||A(\underline{\emptyset}) \wedge B(\underline{\emptyset})||_I = 0$ és
$||A(\underline{\{piros\}}) \wedge B(\underline{\{piros\}})||_I = 0$.

6. A $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \supset \exists x (A(x) \wedge B(x))$ formula kielégíthető.

Bizonyítás:

Legyen most az interpretációnk az előzőhöz hasonló, csak
$A(x) \rightleftharpoons$
$\forall u \left(P(u,x) \supset (\forall z P(u,z) \vee (P(u,x) \wedge P(x,u))) \right).$
Ebben az interpretációban
$||\exists x A(x)||_I = 1$, mert $||A(\underline{\{piros\}})||_I = 1$, és $||\exists x (A(x) \wedge B(x))||_I = 1$, mert
$||A(\underline{\{piros\}}) \wedge B(\underline{\{piros\}})||_I = 1.$

Néhány fontos logikai törvény

asszociativitás

$$A \wedge (B \wedge C) \sim (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) \sim (A \vee B) \vee C$$

kommutativitás

$$A \wedge B \sim B \wedge A$$

$$A \vee B \sim B \vee A$$

disztributivitás

$$A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

idempotencia

$$A \wedge A \sim A$$

$$A \vee A \sim A$$

elimináció

$$A \wedge (B \vee A) \sim A$$

$$A \vee (B \wedge A) \sim A$$

De Morgan törvényei

$$\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$$

negáció az implikációban

$$\begin{aligned} \neg(A \supset B) &\sim A \wedge \neg B \\ A \supset \neg A &\sim \neg A \\ \neg A \supset A &\sim A \end{aligned}$$

$$\models \neg(A \equiv \neg A)$$

logikai jelek közötti összefüggések

$$\begin{aligned} A \wedge B &\sim \neg(\neg A \vee \neg B) \\ A \wedge B &\sim \neg(A \supset \neg B) \\ A \vee B &\sim \neg(\neg A \wedge \neg B) \\ A \vee B &\sim \neg A \supset B \\ A \supset B &\sim \neg(A \wedge \neg B) \\ A \supset B &\sim \neg A \vee B \end{aligned}$$

kontrapozíció

$$A \supset B \sim \neg B \supset \neg A$$

kétszeres tagadás

$$\neg\neg A \sim A$$

implikációs előtagok felcserélése

$$A \supset (B \supset C) \sim B \supset (A \supset C)$$

implikáció konjunktív előtaggal

$$A \wedge B \supset C \sim A \supset (B \supset C)$$

kiszámítási törvények ($\top \rightleftharpoons C \vee \neg C,\ \perp \rightleftharpoons C \wedge \neg C$)

$$\begin{array}{rclcrcl} A \wedge \top & \sim & A & \quad & A \wedge \perp & \sim & \perp \\ A \vee \top & \sim & \top & & A \vee \perp & \sim & A \\ A \supset \top & \sim & \top & & A \supset \perp & \sim & \neg A \\ \top \supset A & \sim & A & & \perp \supset A & \sim & \top \end{array}$$

az azonosság törvénye

$$\models\ A \supset A$$

bővítés előtaggal

$$\models\ A \supset (B \supset A)$$

az implikáció öndisztributivitása

$$A \supset (B \supset C)\ \sim\ (A \supset B) \supset (A \supset C)$$

esetelemzés

$$A \vee B \supset C\ \sim\ (A \supset C) \wedge (B \supset C)$$

tranzitivitás

$$\models\ (A \supset B) \wedge (B \supset C) \supset (A \supset C)$$

reductio ad absurdum

$$\models\ (A \supset B) \wedge (A \supset \neg B) \supset \neg A$$

az ellentmondásból bármi következik

$$\models\ A \supset (\neg A \supset B)$$

a kizárt harmadik törvénye

$$\models \; A \vee \neg A$$

az ellentmondás törvénye

$$\models \; \neg(A \wedge \neg A)$$

Pierce-törvény

$$\models \; ((A \supset B) \supset A) \supset A$$

fiktív kvantorok
Ha $x \notin Fv(A)$, akkor

$$\forall x A \;\sim\; A \qquad \exists x A \;\sim\; A$$

az egyforma kvantorok helycseréje

$$\forall x \forall y A(x,y) \;\sim\; \forall y \forall x A(x,y)$$

$$\exists x \exists y A(x,y) \;\sim\; \exists y \exists x A(x,y)$$

kvantor-csere implikációban

$$\models \; \forall x A(x) \supset \exists x A(x)$$

$$\models \; \exists y \forall x A(x,y) \supset \forall x \exists y A(x,y)$$

De Morgan kvantoros törvényei

$$\neg \exists x A(x) \;\sim\; \forall x \neg A(x)$$

$$\neg \forall x A(x) \;\sim\; \exists x \neg A(x)$$

kvantor-felcserélés

$$\exists x A(x) \sim \neg\forall x \neg A(x)$$

$$\forall x A(x) \sim \neg\exists x \neg A(x)$$

kvantorok egyoldali kiemelése
Ha $x \notin Fv(A)$, akkor

$$A \wedge \forall x B(x) \sim \forall x(A \wedge B(x))$$

$$A \wedge \exists x B(x) \sim \exists x(A \wedge B(x))$$

$$A \vee \forall x B(x) \sim \forall x(A \vee B(x))$$

$$A \vee \exists x B(x) \sim \exists x(A \vee B(x))$$

$$A \supset \forall x B(x) \sim \forall x(A \supset B(x))$$

$$A \supset \exists x B(x) \sim \exists x(A \supset B(x))$$

$$\forall x B(x) \supset A \sim \exists x(B(x) \supset A)$$

$$\exists x B(x) \supset A \sim \forall x(B(x) \supset A)$$

kvantorok kétoldali kiemelése

$$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \sim \forall x(A(x) \wedge B(x))$$

$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \sim \exists x(A(x) \vee B(x))$$

$$\models \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \supset \forall x(A(x) \vee B(x))$$

$$\models \exists x(A(x) \wedge B(x)) \supset \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

kongruens formulák ekvivalenciája

$$\text{Ha } A \approx B, \text{ akkor } A \sim B.$$

helyettesítéskor fellépő kvantorok

$$\models \ \forall x A \supset [A_t^x]$$

$$\models \ [A_t^x] \supset \exists x A$$

kvantorhatáskör-átjelölés
Ha $y \notin Fv(A)$, akkor

$$\forall x A \ \sim \ \forall y [A_y^x]$$

$$\exists x A \ \sim \ \exists y [A_y^x]$$

kvantor-redukció
Ha x és y azonos típusú változók, akkor

$$\models \ \forall x \forall y A \supset \forall x [A_x^y]$$

$$\models \ \exists x [A_x^y] \supset \exists x \exists y A$$

helyettesítés ekvivalens formulákba

$$\text{Ha } A \ \sim \ B, \text{ akkor } [A_t^x] \ \sim \ [B_t^x]$$

A logikai következmény

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 1)$ és B az Ω nyelv tetszőleges formulái.
A B formula **logikai (szemantikai) következmény**e az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formuláknak, ha Ω minden olyan I interpretációjában és az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ és B formulák tetszőleges olyan I-beli Θ értékelése esetén, amikor

$$I \models A_1\Theta, I \models A_2\Theta, \ldots, I \models A_n\Theta,$$

akkor

$$I \models B\Theta.$$

Jelölése: $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$.

Lemma.

(a) $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ akkor és csak akkor, ha $\models A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$.

(b) $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ akkor és csak akkor, ha $\Dashv A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$.

Lemma.
$A \sim B$ pontosan akkor, ha $A \models B$ és $B \models A$.

Példa.

Bizonyítsuk be, hogy helyesen következtettünk:

$$\begin{array}{ll} P_1 & \text{Néhány republikánus kedvel minden demokratát.} \\ P_2 & \text{Nincs olyan republikánus, aki szeretné a szocialistákat.} \\ \hline K & \text{Tehát egyik demokrata sem szocialista.} \end{array}$$

Készítsünk alkalmas logikai nyelvet. Legyenek
$x, y, z, \ldots$ embereket jelölő változók;
$R(x)$ jelentse, hogy x republikánus;
$D(x)$ jelentse, hogy x demokrata;
$S(x)$ jelentse, hogy x szocialista;
$K(x, y)$ jelentse, hogy x kedveli y-t.

Ezen e nyelven formalizálva az állításokat:

$$\begin{array}{ll} P_1 & \exists x(R(x) \wedge \forall y(D(y) \supset K(x, y))) \\ P_2 & \neg\exists x(R(x) \wedge \exists z(S(z) \wedge K(x, z))) \\ \hline K & \neg\exists y(D(y) \wedge S(y)) \end{array}$$

Rögzítsünk tetszőlegesen egy olyan I interpretációt, melyben $||P_1||_I = 1$ és $||P_2||_I = 1$.

Ekkor $||P_1||_I = 1$ miatt van olyan $a \in D$, hogy
$||(R(x) \wedge \forall y(D(y) \supset K(x, y)))^x_{\underline{a}}||_I = 1$, azaz
$||R(\underline{a})||_I = 1$ és minden $b \in D$-re
$||(D(y) \supset K(\underline{a}, y))^y_{\underline{b}}||_I = 1$.

$||P_2||_I = 1$ miatt viszont minden $b \in D$-re, így éppen a-ra is
$||(R(x) \wedge \exists z(S(z) \wedge K(x,z)))^x_{\underline{a}}||_I = 0$, azaz mivel $||R(\underline{a})||_I = 1$, ezért $||\exists z(S(z) \wedge K(\underline{a}, z)))||_I = 0$.
Ez azt jelenti, hogy minden $b \in D$-re
$||(S(z) \wedge K(\underline{a}, z)))^z_{\underline{b}}||_I = 0$. Ez a konjunkció

- vagy azért 0, mert b olyan, hogy $||S(\underline{b})||_I = 0$, de ekkor $||(D(y) \wedge S(y))^y_{\underline{b}}||_I = 0$,
- vagy azért, mert b olyan, hogy $||K(\underline{a}, \underline{b})||_I = 0$. Ilyen b-re viszont, mivel
  $||(D(y) \supset K(\underline{a}, y))^y_{\underline{b}}||_I = 1$,
  $||D(\underline{b})||_I = 0$, tehát ilyenkor is
  $||(D(y) \wedge S(y))^y_{\underline{b}}||_I = 0$.

Azaz minden $b \in D$-re $||(D(y) \wedge S(y))^y_{\underline{b}}||_I = 0$, tehát
$||\exists y(D(y) \wedge S(y))||_I = 0$, azaz
$||\neg\exists y(D(y) \wedge S(y))||_I = 1$.

Kvantoros formulák prenex alakja

Egy $Q_1x_1Q_2x_2 \ldots Q_nx_nA$ $(n \geq 0)$ alakú formulát, ahol a A kvantormentes formula, **prenex alakú formulá**nak nevezünk.

Lemma.
Az Ω nyelv tetszőleges formulájához konstruálható vele logikailag ekvivalens prenex alakú formula.

A konstrukció lépései:

1. változó-tiszta alakra hozzuk a formulát;
2. alkalmazzuk De Morgan kvantoros és az egyoldali kvantorkiemelésre vonatkozó logikai törvényeket.

Példa.

$$\forall x P(x) \supset \neg \exists x Q(x)$$

$$\downarrow \text{ változó-tiszta alakra hozás}$$

$$\forall x P(x) \supset \neg \exists y Q(y)$$

$$\downarrow \text{ egyoldali kvantorkiemelés}$$

$$\forall x P(x) \supset \forall y \neg Q(y)$$

$$\exists x (P(x) \supset \forall y \neg Q(y))$$

$$\exists x \forall y (P(x) \supset \neg Q(y))$$

Kvantormentes formulák normálformái

- Egy atomi formulát vagy negáltját **literál**nak fogjuk nevezni.
- Legyenek $L_1, L_2, \ldots, L_n$ $(n \geq 1)$ literálok.
  $L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n$ **elemi konjunkció**
  $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$ **elemi diszjunkció**
- Legyenek $D_1, D_2, \ldots, D_m$ elemi diszjunkciók,
  $K_1, K_2, \ldots, K_m$ elemi konjunkciók $(m \geq 1)$.
  $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_m$ **konjunktív**-,
  $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_m$ **diszjunktív normálforma**.

Lemma.
Az Ω nyelv minden kvantormentes formulájához konstruálható vele logikailag ekvivalens konjunktív és diszjunktív normálforma.
A konstrukció lépései:

1. a logikai jelek közötti összefüggések alapján az implikációkat eltávolítjuk;
2. De Morgan törvényeivel elérjük, hogy negáció csak atomokra vonatkozzon;
3. a disztributivitást felhasználva elérjük, hogy a konjunkciók és diszjunkciók megfelelő sorrendben kövessék egymást;
4. esetleg egyszerűsítünk.

Példa.

$$(A \supset B) \vee \neg(\neg B \supset A \vee \neg C)$$

$$\downarrow \text{implikáció-eltávolítás}$$

$$(\neg A \vee B) \vee (\neg B \wedge \neg(A \vee \neg C))$$

$$\downarrow \text{negáció atomokra vonatkozik}$$

$$(\neg A \vee B) \vee (\neg B \wedge \neg A \wedge C)$$

$$\downarrow \text{konjunkciók diszjunkciója}$$

$$(\neg A \vee B \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$$

$$\downarrow \text{egyszerűsítés}$$

$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$$

$$\downarrow \text{egyszerűsítés}$$

$$\neg A \vee B$$

A sequent

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_m$, $(n, m \geq 0)$
az Ω nyelv formulái. Ekkor a

$$\top \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m \vee \bot$$

formulát **sequent**nek nevezzük.
Jelölése:
$A_1, A_2, \ldots, A_n \;\rightarrow\; B_1, B_2, \ldots, B_m$, vagy rövidebben:
$\Gamma \rightarrow \Delta$, ahol $\Gamma \rightleftharpoons \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ és $\Delta \rightleftharpoons \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$.

Jelölések.
Legyenek
Γ és Δ formulák tetszőleges, esetleg üres halmazai,
A és B formulák,
x tetszőleges változó,
y egy x-szel megegyező típusú új változó,
t pedig egy x-szel megegyező típusú term.

A Gentzen-kalkulus axiómasémái

$$A\Gamma \to \Delta A$$

$$\bot\Gamma \to \Delta$$

A Gentzen-kalkulus levezetési szabályai

$(\wedge \to)$ $$\frac{AB\Gamma \to \Delta}{(A \wedge B)\Gamma \to \Delta}$$ $(\to \wedge)$ $$\frac{\Gamma \to \Delta A; \Gamma \to \Delta B}{\Gamma \to \Delta(A \wedge B)}$$

$(\vee \to)$ $$\frac{A\Gamma \to \Delta; B\Gamma \to \Delta}{(A \vee B)\Gamma \to \Delta}$$ $(\to \vee)$ $$\frac{\Gamma \to \Delta AB}{\Gamma \to \Delta(A \vee B)}$$

$(\supset\to)$ $$\frac{\Gamma \to \Delta A; B\Gamma \to \Delta}{(A \supset B)\Gamma \to \Delta}$$ $(\to\supset)$ $$\frac{A\Gamma \to \Delta B}{\Gamma \to \Delta(A \supset B)}$$

$(\neg \to)$ $$\frac{\Gamma \to \Delta A}{\neg A\Gamma \to \Delta}$$ $(\to \neg)$ $$\frac{A\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta\neg A}$$

$(\forall \to)$ $$\frac{A(x||t)\forall xA\Gamma \to \Delta}{\forall xA\Gamma \to \Delta}$$ $(\to \forall)$ $$\frac{\Gamma \to \Delta A(x||y)}{\Gamma \to \Delta\forall xA}$$

$(\exists \to)$ $$\frac{A(x||y)\Gamma \to \Delta}{\exists xA\Gamma \to \Delta}$$ $(\to \exists)$ $$\frac{\Gamma \to \Delta A(x||t)\exists xA}{\Gamma \to \Delta\exists xA}$$

Egy sequentet a Gentzen-kalkulusban **levezethető**nek nevezünk, ha

- vagy axióma,
- vagy van olyan levezetési szabály, melyben ez vonal alatti sequent és a vonal feletti sequent vagy sequentek pedig levezethetőek.

(a) A Gentzen kalkulus **helyes**, mert ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n \to B_1, B_2, \ldots, B_m$ seqvent levezethető a Gentzen-kalkulusban, akkor a $\top \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m \vee \bot$ formula logikai törvény.

(b) A Gentzen kalkulus **teljes**, mert ha az A formula logikai törvény, akkor a $\to A$ seqvent levezethető a Gentzen-kalkulusban.

1 Irodalomjegyzék

1. Dragálin Albert, Buzási Szvetlána, *Bevezetés a matematikai logikába*, Egyetemi jegyzet (KLTE), 4. kiadás, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 1996.
2. Pásztorné Varga Katalin, *Logikai alapozás alkalmazásokhoz*, Egyetemi jegyzet, ELTE, Budapest, 1992.
3. Madarász Tiborné, Pólos László, Ruzsa Imre, *A logika elemei*, Osiris Kiadó, Budapest, 1999.
4. Szendrei Ágnes, *Diszkrét matematika*, Polygon, Szeged, 1994.
5. Urbán János, *Matematikai logika (Példatár)*, 2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.