2. Síkgeometriai szerkesztések

Hajós György: Bevezetés a geometriába, 156-168. oldal
Pelle Béla: Geometria, 180-181. oldal
Faragó – Forgó: Geometriai szerkesztések, 7-20. oldal
Czédli – Szendrei: Geometriai szerkeszthetőség
Szőkefalvi Nagy Gyula: A geometriai szerkesztések elmélete
Kovács Zoltán: Geometriai szerkesztések, http://zeus.nyf.hu/~kovacsz/szerk.pdf
Falus Róbert: Az aranymetszés legendája
Peter Schreiber: Theorie der geometrischen Konstruktionen
George Martin: Geometric Constructions
Sain Márton: Matematikatörténeti ABC
Lévárdi – Sain: Matematikatörténeti feladatok

2.1. Euklideszi szerkeszthetőség

Egy síkbeli alakzat bizonyos adatok alapján megszerkeszthető, amihez egyrészt elegendő és ellentmondást nem tartalmazó adatok szükségesek, másrészt előzőleg meg kell állapodnunk abban, hogy milyen eszközöket használhatunk és azokkal milyen szerkesztéseket végezhetünk el. A legegyszerűbb eszköz a körző és az egyélű (beosztás nélküli) vonalzó, amelyekkel elvégezhető elemi szerkesztések a következők:

1. két pont összekötő egyenesének megrajzolása,
2. két metsző egyenes metszéspontjának meghatározása,
3. adott szakasz körzőnyílásba vétele,
4. adott pont körül adott szakasszal kör rajzolása,
5. két metsző kör közös pontjainak meghatározása,
6. kör és azt metsző egyenes közös pontjainak meghatározása.

Minthogy ezt a hat műveletet a fentivel egyenértékű módon Euklidesz adta meg, ezért ha csak körzőt és egyélű vonalzót használunk és csak ezen hat elemi szerkesztést alkalmazzuk véges sok lépésben, akkor azt mondjuk, hogy euklideszi szerkesztést végzünk. A síkban euklideszi szerkesztéssel az adatokból kiindulva tehát úgy jutunk el a szerkesztendő alakzathoz, hogy közben

- csak olyan pontot használunk fel, amely két ismert egyenes, vagy két ismert kör, vagy pedig ismert egyenes és kör metszéspontja,
- csak olyan egyenest szerepeltetünk, amelynek két pontja ismert,
- csak olyan kört rajzolunk, amelynek középpontja ismert és a sugara két ismert pontnak az összekötő szakasza.

Ha egy síkbeli alakzat megszerkesztése véges sok lépésben így elvégezhető, akkor azt euklideszi értelemben megszerkeszthetőnek nevezzük.
Egy valós hosszúságú ismeretlen szakasz megadott szakaszokból euklideszi értelemben történő szerkeszthetőségének szükséges és elegendő feltétele az, hogy az ismeretlen szakasz a megadottakból véges sok racionális művelet (összeadás, kivonás, szorzás és osztás) valamint véges sok négyzetgyökvonás segítségével meghatározható legyen.
Az a tény, hogy egyáltalán szerkeszthetőségről beszélünk, csak akkor érthető, ha tudjuk, hogy vannak euklideszi szerkesztéssel meg nem oldható feladatok is. Közülük a leghíresebbek az alábbiak:

- kör négyszögesítése (kvadratúra): megszerkesztendő egy olyan négyzetnek az oldala, amelynek területe egy adott kör területével egyenlő,
- kocka megkettőzése (déloszi probléma): megszerkesztendő egy olyan kockának az éle, amelynek térfogata egy adott kocka térfogatának a kétszerese,

- szögharmadolás (triszekció): megszerkesztendő egy tetszőlegesen adott szög harmada,
- szabályos hétszög szerkesztése.

Ugyanis algebrailag igazolható, hogy a kör négyszögesítése a transzcendens π (Lindemann 1882) négyzetgyökének, a kocka megkettőzése a 2 köbgyökének megszerkesztéséhez vezet, továbbá tetszőleges α szög harmadolása a $4\left[\cos\frac{\alpha}{3}\right]^3 - 3\cos\frac{\alpha}{3} - \cos\alpha = 0$ harmadfokú egyenlethez, amelynek általában nincs racionális gyöke (Wantzel 1837). A szabályos n-szög ($3 \le n \in \mathbb{Z}$) pedig pontosan akkor szerkeszthető meg euklideszi értelemben, ha $n = 2^k p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$, ahol $p_1, \ldots, p_r$ egymástól különböző $2^{2^m}+1$ alakú prímszámokat jelöl, továbbá k, r és m tetszőleges nem negatív egész szám (Gauss 1796). Az első néhány n, amelyekre szabályos n-szög körzővel és egyélű vonalzóval megszerkeszthető:

n	3	4	5	6	8	10	12	15	16	17	20	24
k	0	2	0	1	3	1	2	0	4	0	2	3
r	1	0	1	1	0	1	1	2	0	1	1	1
m	0	-	1	0	-	1	0	0 és 1	-	2	1	0

A 60^o-os és 90^o-os szög megszerkeszthető körzővel és vonalzóval, s így a 30^o-os szög is, ami azt jelenti, hogy a 90^o-os szög harmadolható euklideszi értelemben. Ugyanakkor a 60^o-os szöget nem tudjuk megharmadolni, minthogy a szabályos 18-szög nem szerkeszthető meg.
Ha a szabályos n-szög megszerkeszthető, akkor véges számú szögfelezéssel a szabályos $2^k \cdot n$-szög ($k = 1, 2, \ldots$) is.
<u>Példa:</u> $n = 3 \Rightarrow \{6, 12, 24, 48, \ldots\}$, $n = 4 \Rightarrow \{8, 16, 32, 64, \ldots\}$
Ha a szabályos $m \cdot n$-szög megszerkeszthető, akkor annak minden m-edik csúcsát összekötve szabályos n-szöget kapunk.
<u>Példa:</u> $m \cdot n = 24 = 2\cdot 12 = 3\cdot 8 = 4\cdot 6 = 6\cdot 4 = 8\cdot 3$
Ha $(m,n) = 1$ esetén a szabályos m-szög és a szabályos n-szög megszerkeszthető, akkor a szabályos $m \cdot n$-szög is.
<u>Példa:</u> $m = 3$ és $n = 5$ esetén $m \cdot n = 15$

$$\frac{360^o}{3}\cdot x + \frac{360^o}{5}\cdot y = \frac{360^o}{15}$$

$$120^o \cdot x + 72^o \cdot y = 24^o$$

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 3y = 1 \\ (3,5) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow (x.y) \in \{ (3k-1, -5k+2) \mid k \in Z \}$$

Ennek alapján a szabályos 15-szög 24^o-os középponti szöge megszerkeszthető, ha például a 72^o kétszereséből levonjuk a 120^o-ot ($k = 0$), vagy ha a 120^o kétszereséből levonjuk a 72^o háromszorosát ($k = 1$), de más út is van: a $24^o = 60^o - 36^o$ egyenlet szintén célra vezet
<u>Feladat:</u> Hogyan szerkeszthető szabályos n-szög, ha $n \in \{24, 30, 42, 51, 85\}$?

A szerkesztések előírásait megszabhatjuk úgy is, hogy vagy csak a körző (Mohr 1672, Mascheroni 1797, Adler 1890), vagy egy körvonal és annak középpontja megadása esetén csak az egyélű vonalzó (Poncelet 1822, Steiner 1833) használatát engedjük meg. Ezen két szerkesztési móddal az euklideszi értelemben megoldható feladatok mindegyike elvégezhető; eltekintve attól, hogy az elsővel nem rajzolhatunk egyenest és a másodikkal kört. Megállapodás szerint a körzős szerkesztés során egy egyenest két pontjával, a vonalzós szerkesztés során egy kört három pontjával vagy a középpontjával és a sugarával meghatározottnak tekintünk.

2.2. Alapszerkesztések

A fentebb megismert hat elemi euklideszi szerkesztési lépés egyszerű összetételéből adódó alapszerkesztések a következők:

1) adott szakasz és szög felezése,
2) adott szakasz és szög másolása,
3) adott egyenesre rajta kívül lévő illetve rá illeszkedő pontból merőleges egyenes állítása,
4) adott egyenessel rá nem illeszkedő ponton át párhuzamos egyenes szerkesztése.

Adott szakaszt úgy felezhetünk meg, hogy végpontjai körül egyenlő sugarakkal két metsző kört írunk, és ezek metszéspontjainak összekötő egyenesével a szakaszt elmetsszük.
Adott szög felezőjét úgy szerkeszthetjük meg, hogy szárait a szög csúcsa körül írt körrel elmetsszük, majd az így kapott metszéspontok körül egyenlő sugarakkal két metsző kört írunk, és ezeknek a (szög csúcsától különböző) metszéspontját a szög csúcsával összekötjük.
Adott szakaszt adott kezdőpontú félegyenesre úgy másolunk át, hogy e félegyenes kezdőpontja körül az adott szakasszal mint sugárral rajzolt körrel a félegyenest elmetsszük.
Adott szöget egy adott félegyenes valamelyik oldalára úgy másolunk át, hogy a szög csúcsa körül írt tetszőleges sugarú körrel a szög mindkét szárát elmetsszük, majd ugyanezzel a sugárral a másoláshoz felvett félegyenes kezdőpontja körül e félegyenest metsző kört rajzolunk, amit a félegyenesen így kapott metszéspontból az adott szög esetén megrajzolt körívhez tartozó húrral mint sugárral írt körrel a félegyenes kijelölt oldalán elmetsszük, s végül erre a pontra illeszkedő és a kitűzött félegyenes kezdőpontjából kiinduló másik félegyenest rajzolunk.
Adott egyenesre egy rajta kívül lévő pontból úgy szerkesztünk merőleges egyenest, hogy e pont körül az egyenest metsző kört írunk, majd ennek a körnek az egyenessel alkotott metszéspontjai körül egyenlő sugarakkal újabb két metsző kört rajzolunk, és ezen köröknek (az adott ponttól különböző) valamelyik metszéspontját az adott ponttal összekötjük.
Adott egyenesre annak egy pontjában állított merőleges egyenes megszerkesztéséhez ugyanez az előírás vezet, csak a másodszorra választott sugárnak az elsőnél nagyobbnak kell lennie.
Adott *e* egyenessel egy rá nem illeszkedő *P* ponton át az alábbiak szerint szerkeszthetünk *f* párhuzamos egyenest:

0. A *P* pontból az *e* egyenesre bocsátott *m* merőlegesre a *P* pontban *f* merőlegest állítunk.
1. A *P* pontból az *e* egyenesre bocsátott merőleges talppontját *Q*-val jelöljük, az *e* egyenes *Q*-tól különböző *R* pontjában *e*-re állított merőlegesre *R*-ből kiindulva az *e* egyenes *P*-t tartalmazó oldalán a $\overline{PQ}$ szakaszt felmérve egy *S* pontot kapunk, amit *P*-vel összekötünk: $f = \overleftrightarrow{PS} \parallel e$.
2. Az *e* egyenes tetszőleges *Q* pontját a *P* ponttal összekötjük, majd a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenesnek az *e*-vel bezárt szögét a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes másik oldalán a $\overrightarrow{PQ}$ félegyenesre átmásoljuk. Az így kapott szög $\overleftrightarrow{PQ}$ -ra nem illeszkedő szárának egyenese lesz a keresett *f* egyenes.
3. Az *e* egyenes tetszőleges *Q* pontját a *P* ponttal összekötjük, majd a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenesnek az *e*-vel bezárt szögét a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes ugyanezen oldalán a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenesnek a *P* kezdőpontú és *Q*-t nem tartalmazó félegyenesére átmásoljuk. Az így kapott szög $\overleftrightarrow{PQ}$ -ra nem illeszkedő szárának egyenese lesz a keresett *f* egyenes.
4. Az *e* egyenesen tetszőlegesen felvesszük az *A* és *B* pontokat, az *A*-t *P*-re tükrözve kapjuk a *Q* pontot, ami körül *PB* sugárral rajzolt körívet a *P* körül *AB* sugárral rajzolt körívvel az $\overleftrightarrow{AQ}$ egyenesnek a *B* pontot tartalmazó oldalán elmetszve egy *R* pontot kapunk : $f = \overleftrightarrow{PR} \parallel e$.
5. Az *e* egyenes tetszőleges *Q* pontját a *P* ponttal összekötjük, majd a $\overline{PQ}$ szakasz *F* felező pontjára tükrözzük az *e* egyenes *Q*-tól különböző valamely *R* pontját, a tükörképet *S*-sel jelöljük és *P*-vel összekötjük: $f = \overleftrightarrow{PS} \parallel e$.
6. Az *e* egyenesen tetszőlegesen felvesszük az *A* és *B* pontokat, az *A*-ra *P*-t tükrözve kapjuk a *Q* pontot, amit *B*-re tükrözve kapjuk az *R* pontot: $f = \overleftrightarrow{PR} \parallel e$.

7. Az e egyenes tetszőleges Q pontját P-re tükrözve egy R pontot kapunk, majd az e egyenes Q-tól különböző valamely S pontját kiválasztva megszerkesztjük az $\overline{RS}$ szakasz F felező pontját, és azt P-vel összekötjük: $f = \overleftrightarrow{PF} \parallel e$.
8. Az e egyenesen tetszőlegesen felvett A pont körül AP sugárral rajzolt körív messe az e egyenest egy B pontban, a P és B pontok körül ugyanezen sugárral megrajzolt körívek messék egymást egy (A-tól különböző) Q pontban: $f = \overleftrightarrow{PQ} \parallel e$.
9. Az e egyenes tetszőleges Q pontja körül PQ sugárral rajzolt körív az e egyenest egy R pontban metszi. Ugyanezen sugárral a P körül kört rajzolunk, amit a Q körül írt PR sugarú körív (az e egyenes P-t tartalmazó oldalán) egy S pontban metsz: $f = \overleftrightarrow{PS} \parallel e$.
10. Az e egyenesen tetszőlegesen felvesszük az A és B pontokat, az A pont körül BP sugárral és a B pont körül AP sugárral rajzolt köríveknek az e egyenes P-t tartalmazó oldalán lévő metszéspontját Q-val jelöljük: $f = \overleftrightarrow{PQ} \parallel e$.
11. Az e egyenesen $AP > d(P.e)$ feltétellel felvett A pont körül PA sugárral rajzolt k kör az e egyenest messe B és C pontokban, a C pont körül BP sugárral rajzolt körív a k kört az e egyenes P-t tartalmazó oldalán messe egy Q pontban: $f = \overleftrightarrow{PQ} \parallel e$.
12. A P pont körül az e egyenest metsző k kört rajzolunk: $k \cap e = \{Q, R\}$ és $k \cap \overleftrightarrow{PQ} = \{Q, S\}$. Az R és S pontok körül változatlan sugárral rajzolt körök P-től különböző metszéspontját T–vel jelölve: $f = \overleftrightarrow{PT} \parallel e$.
13. Az e egyenesen $AP > d(P,e)$ feltétellel felvett A pont körül AP sugárral k kört rajzolunk és a P-t tartalmazó átmérő másik végpontját Q-val jelöljük. A Q pont körül változatlan sugárral rajzolt kör az e egyenesen kimetsz egy (A-tól különböző) B pontot, ami körül változatlan sugárral írt kör a k-t egy (Q-tól különböző) R pontban metszi: $f = \overleftrightarrow{PR} \parallel e$.
14. Körzős szerkesztés!
   Az e egyenest az A és B pontokkal adjuk meg: $e = \overleftrightarrow{AB}$.
   A P pont körül AB sugárral és a B pont körül AP sugárral rajzolt köröknek az e egyenes P-t tartalmazó oldalán lévő metszéspontját Q-val jelölve: $f = \overleftrightarrow{PQ} \parallel e$.
15. Körzős szerkesztés!
   Az e egyenest az A és B pontokkal adjuk meg: $e = \overleftrightarrow{AB}$.
   Az A és B pontok körül AB-nél nagyobb sugárral rajzolt körök két metszéspontja legyen Q és R. Ezután a Q pont körül QP sugárral , majd az R pont körül RP sugárral egy-egy kört rajzolunk, amelyek P-től különböző metszéspontját S-sel jelölve: $f = \overleftrightarrow{PS} \parallel e$.

16. Egyélű vonalzós szerkesztés!
   Előfeltétel: Az e egyenesen adott egy $\overline{AB}$ szakasz és annak F felező pontja: az A és B pontok az e egyenes valamely F pontja körül írt tetszőleges sugarú kör és az e egyenes metszeteként kaphatók.
   Az $\overrightarrow{AP}$ félegyenesen $A - P - Q$ elrendezéssel felveszünk egy Q pontot, amit B-vel és F-fel összekötünk. Megrajzoljuk a $\overleftrightarrow{PB}$ egyenest, ami a $\overleftrightarrow{QF}$ egyenest egy R pontban metszi. Megrajzoljuk az $\overleftrightarrow{AR}$ egyenest, ami a $\overleftrightarrow{QB}$ egyenest egy S pontban metszi. Végül a P és S pontokat összekötjük: $f = \overleftrightarrow{PS} \parallel e$.

Ha a körző és az egyélű vonalzó mellett a derékszögű háromszögvonalzó használatát is megengedjük, akkor a merőleges illetve a párhuzamos egyenes is megrajzolható a derékszögvonalzó eltolásával vagy alkalmas elforgatásával. Így viszonylag gyorsabban jutunk gyakorlatilag elfogadható pontosságú eredményhez, jóllehet nem végzünk euklideszi szerkesztést

2.3. Szerkesztési feladatok megoldása

Egy szerkesztési feladat teljes megoldása a következő lépésekből tevődik össze: vázlat, elemzés, szerkesztés menete, szerkesztés kivitelezése, bizonyítás és diszkusszió.
A feladat megoldását vázlat készítésével kezdjük, melyben az adatokat kiemelve a már megszerkesztve gondolt ábrából indulunk ki. Ez az ábra célszerűen kiegészíthető úgy, hogy az adatok vagy az azokból könnyen nyerhető további elemek (pontok, egyenesek, szakaszok, szögek vagy körök) közvetlenül is szerepeljenek a kiegészített ábrán. A szerkesztést az így kiegészített ábra és annak elemzése készíti elő, amely során geometriai kapcsolatokat és mennyiségi összefüggéseket keresünk az ábra adott és azon ismeretlen elemei között, amelyek megszerkeszthetők és megszerkesztésük elvezethet a megoldáshoz is. A vázlat kiegészítése és az elemzés egyidejűleg történik. Az elemzés akkor ér véget, ha annak alapján a szerkesztés már kivitelezhető. Így tehát az elemzésre alapul mind a szerkesztés menete, mind pedig a szerkesztés kivitelezése. A szerkesztés során ügyeljünk a rajz pontosságára, továbbá arra is, hogy jól megkülönböztethetők legyenek egymástól az adatok, a szerkesztés során szerepeltetett segédvonalak és a szerkesztés eredménye. A szerkesztés elvégzése után külön bizonyítást igényel az, hogy a szerkesztett ábra valóban rendelkezik-e a megadott adatokkal és tulajdonságokkal. A szerkesztési feladat befejező és gyakran a legnehezebb, bár nem feltétlenül szerves része a diszkusszió, vagyis a megoldhatóság szükséges és elegendő feltételeinek, valamint az adatok megválasztásától függően a megoldások számának a megadása. A diszkussziót lehetőleg csak az adatokkal végezzük. Ugyanazon feladatnak többféle megoldása is lehet, amelyek közül előnyben részesítjük az egyszerűbb rajzot kívánó és kevesebb előismeretre építő megoldást.

2.4. Műveletek szakaszokkal

Adott szakaszokat körzőnyílásba véve fel tudunk mérni egy adott félegyenesre, azaz a szakaszok összeadása, kivonása és többszörözése euklideszi értelemben elvégezhető.
Egy adott kör tetszőleges ívének a körvonal valamely pontjától a körvonalra történő felmérése hasonlóképpen a szögek összeadására, kivonására és többszörözésére ad lehetőséget.
Adott szakaszt úgy osztunk n egyenlő részre, hogy a szakasz egyik végpontjából kiinduló és a szakasszal 0° és 180° közötti szöget bezáró félegyenesre n egyenlő szakaszt mérünk fel, az utolsónak és az adott szakasznak a végpontját összekötjük, majd ezzel az összekötő egyenessel párhuzamost húzunk az utolsó előtt felmért szakaszok mindegyikének a végpontján át. Ezek a párhuzamosok az adott szakaszt a keresett osztópontokban metszik (Hajós: 161. oldal 156. ábra).
Adott szakaszt úgy osztunk $m:n$ arányban, hogy a szakaszt felosztjuk $m+n$ egyenlő részre, majd a szakasz egyik végpontjától számított m-edik osztópontot tekintjük. E felosztás során m és n helyett tetszőleges a és b szakasz is választható, vagyis egy szakasz felosztható két másik adott szakasz arányában.
Ha négy szakasz egy aránypárt alkot, és közülük három ismert, akkor az ismeretlen negyedik a párhuzamos szelők tétele alapján könnyen megszerkeszthető.
Tetszőlegesen adott két szakasz és az egységszakasz birtokában megszerkeszthető két szakasz szorzata, hányadosa és mértani közepe, valamint egy szakasz reciproka, négyzete és négyzetgyöke (Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötet 1351. feladat; Pelle: Geometria, 465. oldal 29(206) feladat).

2.5. Aranymetszés

Definíció: Aranymetszésnek nevezzük egy szakasznak két nem egyenlő részre osztását, ha a kisebbik rész úgy aránylik a nagyobbikhoz, mint a nagyobbik az egész szakaszhoz.
Ha az adott szakaszt $\overline{AB}$ és annak aranymetszés szerinti osztópontját P jelöli, továbbá $AB = a$ és $x = AP > PB = a - x$, akkor az aranymetszés értelmezése alapján fennáll az $(a - x) : x = x : a$ arány, ahonnan az $x^2 + ax - a^2 = 0$ másodfokú egyenlet adódik, melynek pozitív gyöke $x = \frac{(\sqrt{5}-1)a}{2} \approx 0{,}619a$.
Tétel: Minden szakasz felosztható az aranymetszés szerint.
Bizonyítás: Az adott $\overline{AB}$ szakasz aranymetszés szerinti P osztópontját $AP > PB$ feltétellel az alábbi módon szerkeszthetjük meg.
Legyen $AB = a$, és rajzoljunk olyan $k(C, a/2)$ kört, amely az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenest B pontban érinti (Hajós: 163. oldal 158. ábra, Pelle: 131. oldal 115. ábra). Ha az $\overline{AC}$ szakasz és a k körvonal metszéspontját Q-val jelöljük, akkor

$$AQ = AC - QC = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{(\sqrt{5}-1)a}{2},$$

minthogy az ABC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt $AC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Ha tehát ezt a Q pontot az $\overline{AB}$ szakaszra leforgatjuk, akkor a keresett P osztópontot kapjuk.
Feladat: Adott szakasz aranymetszés szerinti osztópontjának megszerkesztése.
Egy adott szakasz aranymetszés szerinti osztópontja egyértelműen van meghatározva, ha megállapodunk abban, hogy a nagyobbik rész a szakasz melyik végpontjánál legyen.
Ha az $\overline{AB}$ szakasz aranymetszés szerinti osztópontja P úgy, hogy $AP > PB$ teljesül, akkor $AC = AB + BC$ és $BC = AP$ esetén B pont az $\overline{AC}$ szakasznak, továbbá $AP = AD + DP$ és $AD = PB$ esetén D pont az $\overline{AP}$ szakasznak az aranymetszés szerinti osztópontja. Ennek megfelelően a fenti tételben megadott szerkesztésben szereplő $\overline{AB}$ és $\overline{AQ}$ szakaszok egy $AB+AQ$ hosszúságú szakasznak az aranymetszés szerinti szeletei, s így ez a szerkesztés módot ad arra, hogy az aranymetszés nagyobbik szeletéből kiindulva megszerkesszük a kisebbiket.

2.6. Szabályos öt- és tízszög oldalának szerkesztése

Tétel: Adott körbe írható szabályos tízszög oldala a kör sugarának az aranymetszés szerinti nagyobbik szelete (Pelle: 131. oldal), vagy annak az aranymetszésnek a kisebbik szelete, amelynek a nagyobbik szelete a kör sugara. (Hajós: 163. oldal)
E tétel alapján az adott kör sugarából kiindulva megszerkeszthetjük a szabályos tízszög oldalát, s így a körbe írt szabályos tízszöget, majd annak minden második csúcsát összekötve az ugyanezen körbe írt szabályos ötszöget is.
Tétel: Adott körbe írható szabályos ötszög oldala egy olyan derékszögű háromszög átfogója, amelynek egyik befogója a kör sugara, másik befogója pedig e körbe írt szabályos tízszög oldala. (Hajós: 164. oldal)
Adott körbe írható szabályos ötszög és tízszög egy-egy oldalának megszerkesztését egyetlen ábrába tömöríthetjük (Hajós: 164. oldal 161. ábra, Pelle: 132. oldal 118. ábra).

2.7. Közelítő szerkesztések

Olyan geometriai szerkesztés, melynek minden egyes lépése euklideszi, és eredménye a szerkesztendő mennyiség valódi értékéhez nagyon közel jut. Akkor alkalmazzuk, ha a teljesen pontos euklideszi szerkesztés eleve lehetetlen, vagy lehetséges ugyan, de túl bonyolult. A jó közelítő szerkesztések esetén a hiba igen kicsi: századrész százaléknyi tartományba esik.

Példák közelítő szerkesztésekre:

1. Szabályos n-szög közelítő szerkesztése [Hajós: 158. oldal 148. ábra, Pelle: 476. oldal 404. ábra (Renaldini 17. sz.), $n \in \{3,4,6\}$ esetén pontos, de n növekedtével már durva hiba adódik].
2. π hosszúságú szakasz közelítő szerkesztése [Pelle: 476. oldal 403. ábra (Kochanski 1685, a hiba 0,002 %)].
3. Kör négyszögesítése (π négyzetgyökének Kochanski-féle közelítő szerkesztése).
4. Szög harmadolása (O.E. Engel 1982).

2.8. Nem-euklideszi szerkesztések

Olyan geometriai szerkesztés, amely során a megengedett euklideszi eszközök és lépések mellett további eszközök és lépések is szerepelhetnek.
A nem-euklideszi szerkesztés eredménye teljesen pontos.
A legismertebb nem-euklideszi eszköz a kétféle derékszögű vonalzó, a skálával ellátott egyenes vonalzó és a szögmérő.
Használható még az egységátrakó vagy betoló vonalzó elnevezésű olyan egyélű vonalzó, amelynek élére be van jelölve két pont, s ezek az alapszakasz vagy egységszakasz végpontjai. Ezzel a vonalzóval az alábbi szerkesztési lépések elvégzése megengedett:
1. két pont összekötő egyenesének megrajzolása,
2. adott egyenes és adott pont esetén az adott egyenesen az adott ponttól egységszakasznyi távolságra lévő pontok meghatározása,
3. két különböző egyenes és egy pont megadása esetén az adott ponton áthaladó olyan egyenesek megrajzolása, amelyekből a két adott egyenes egységszakasznyi hosszúságú szakaszt metsz ki.

Az 1. lépés azonos az euklideszi 1. lépéssel. A 2. lépés az euklideszi 4. és 6. lépéseket foglalja magába: a betoló vonalzót úgy helyezzük el, hogy a rajta lévő egységszakasz egyik végpontja az adott pont legyen és a másik végpont az adott egyenesre illeszkedjen. A 3. lépés révén viszont olyan pontokat is kaphatunk, amelyek euklideszi úton nem szerkeszthetők. Ezt a lépést a következőképpen kell végrehajtani: a vonalzót betoljuk a két egyenes közé úgy, hogy a vonalzó éle az adott pontra illeszkedjen és a vonalzón bejelölt egységszakasz végpontjai a két egyenesre essenek.
Az egységátrakó vagy betoló vonalzóval – körző nélkül – minden euklideszi szerkesztés elvégezhető, s még a szögharmadolás és a kockakettőzés is megoldható (Czédli – Szendrei: 210-213. oldal).

Példák egységátrakó vonalzóval –körző nélkül– elvégezhető szerkesztésekre:
1. Adott szög felezőjének szerkesztése.
2. Adott egyenessel egy rá nem illeszkedő adott ponton át párhuzamos szerkesztése.
3. Adott szakasz felezőpontjának szerkesztése.
4. Adott egyenesre adott pontból merőleges állítása.
5. Adott egyenesre egy rá nem illeszkedő adott pont tükrözése.
6. 2 egység oldalú szabályos háromszög (60^o-os szög) szerkesztése.
7. Szögharmadolás [Czédli – Szendrei: 211-212. oldal 6. ábra, Pelle: 477. oldal 405. ábra (Papposz i. sz. 320 körül), Sain: 290. oldal, Lévárdi – Sain : 62. oldal 31. ábra (Arkhimédész i.e. 3. sz.)].

8. Szakasz köbgyökének szerkesztése [Czédli – Szendrei: 212-213. oldal 7. ábra, Lévárdi – Sain: 66. oldal 34. ábra (Hilbert 1862-1943), P. Schreiber: 280-281. oldal 80. ábra (Newton 1676 körül), G. Martin: 128-129. oldal 9.5. ábra (Nikomédész i.e. 2. sz.)].