4. Sokszögek és poliéderek

Hajós György: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Budapest, 22 – 30. oldal.
Pelle Béla: Geometria, Tankönyvkiadó, Budapest, 45 – 46. és 224 – 228. oldal.
Kovács Zoltán: Geometria, Kossuth Egyetemi Kiadó, 116 – 122. oldal,

4.1. Sokszögek

<u>Definíció:</u> Legyen $(P_i)_{i=1}^{n}$ a tér pontjainak egy n-tagú sorozata úgy, hogy bármely három egymást követő pont nem kollineáris. Ekkor az $\bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{P_i P_{i+1}}$ alakzatot töröttvonalnak nevezzük, amelynek a megadott P_i pontok a csúcsai, a $\overline{P_i P_{i+1}}$ szakaszok pedig az oldalai. Az egymáshoz csatlakozó $\overline{P_{i-1} P_i}$ és $\overline{P_i P_{i+1}}$ oldalakat szomszédosaknak nevezzük.

<u>Definíció:</u> Egy töröttvonal
- síkbeli, ha csúcsai komplanárisak,
- zárt, ha $n \geq 3$ és $P_1 \equiv P_n$,
- egyszerű, ha nem szomszédos oldalainak nincs közös pontja.

<u>Definíció:</u> A síkbeli zárt egyszerű töröttvonalat sokszögvonalnak vagy poligonnak nevezzük.

<u>Tétel:</u> Egy sokszögvonal a síkjának többi pontjait két osztályba sorolja úgy, hogy két pont akkor és csak akkor tartozik ugyanabba az osztályba, ha összeköthetők olyan töröttvonallal, amelynek az adott sokszögvonallal nincs közös pontja. E két osztály közül csak az egyik tartalmaz félegyenest.

<u>Definíció:</u> Egy sokszögvonal által meghatározott két osztály közül azt, amelyik nem tartalmaz félegyenest, a sokszögvonal belsejének, a félegyenest tartalmazót pedig a sokszögvonal külsejének nevezzük.

<u>Definíció:</u> Egy sokszögvonalnak és belsejének az egyesítését sokszögtartománynak vagy sokszögnek nevezzük.

A sokszögvonal értelmezéséből következik, hogy csak egyszerű sokszögekkel foglalkozunk, vagyis amelyekre bármely két nem szomszédos oldal metszete üres halmaz.

A sokszöget csúcsainak valamilyen ciklikus felsorolásával adjuk meg. Minden csúcsban két oldal találkozik, és minden oldal két csúcsot köt össze.

<u>Definíció:</u> A sokszög két nem szomszédos csúcsát összekötő szakaszt átlónak nevezzük.

<u>Tétel:</u> Ha a sokszög valamely csúcsában találkozó két oldalt e csúcsból kiinduló félegyenesekké egészítünk ki, akkor az így keletkező két szögtartomány közül pontosan az egyik tartalmaz a csúcshoz tetszőlegesen közeli belső pontot.

<u>Definíció:</u> Az előző tételbeli két szögtartomány közül azt, amelyik tartalmaz a választott csúcshoz tetszőlegesen közeli belső pontot, a sokszög ezen csúcsánál fekvő belső szögének nevezzük.

Az n oldalú sokszögnek n csúcsa, n belső szöge és minden csúcsában $n-3$ átlója van. Az n oldalú sokszöget röviden n–szögnek nevezzük.

<u>Definíció:</u> Egy sokszög konvex, ha tetszőleges oldalát kiválasztva a többi oldal a kiválasztott oldal egyenese által meghatározott ugyanazon (pozitív) félsíkban van. Ellenkező esetben a sokszög konkáv.

Konvex sokszög minden belső szöge konvex, és minden átlója a sokszögön belül halad. Konkáv sokszögnek van legalább egy konkáv belső szöge.

<u>Tétel:</u> Az n oldalú sokszög belső szögeinek összege $(n-2)\pi$.

Minden n oldalú sokszögnek van konvex belső szöge, ugyanis n konkáv szög összege nagyobb mint $n\pi$, de ez az előző tétel miatt nem lehet.

<u>Definíció:</u> Egy konvex sokszög bármely belső szögének mellékszögét a sokszög egyik külső szögének nevezzük.

Bármely konvex n–szög külső szögeinek összege $n\pi - (n-2)\pi = 2\pi$.

4.2. Poliéderek

Definíció: Azt mondjuk, hogy véges sok egyszerű sokszög uniója egyszerű poliéderfelület, melynek lapjai az adott sokszögek, élei a sokszögek oldalai és csúcsai a sokszögek csúcsai, ha teljesülnek a következő feltételek:

- két lap metszete mindkét lapnak oldala, csúcsa vagy üres halmaz,
- minden élt pontosan két lap tartalmaz,
- a közös csúcsponttal rendelkező lapok ciklikusan elrendezhetők úgy, hogy bármely két egymást követő lapnak közös éle legyen,
- ha a lapok közül legalább egyet elhagyunk, akkor a megmaradó lapokra az előbbi feltételek már nem teljesülnek.

Minden egyszerű poliéderfelület összefüggő abban az értelemben, hogy bármely két pontja összeköthető a poliéderfelület által tartalmazott töröttvonallal.
Definíció: Az egyszerű poliéderfelületet egyszeresen összefüggőnek nevezzük, ha minden általa tartalmazott sokszögvonal részekre bontja.
Minden egyszerű poliéderfelülethez hozzárendelhető a térnek egy olyan része, amely nem tartalmaz egyenest. A poliéderfelület és ezen térrész egyesítését poliédernek nevezzük. (Ezen hozzárendelés alapján a poliéderfelület és a poliéder a továbbiakban szinonímák.)
Definíció: Egy poliéder konvex, ha a poliéderfelület bármely lapját kiválasztva a többi lap a kiválasztott lap síkja által meghatározott ugyanazon (pozitív) féltérben van.
Euler-poliédertétel: Ha egy egyszeresen összefüggő egyszerű poliéderfelület csúcsainak száma c, éleinek száma e, lapjainak száma pedig l, akkor $l + c = e + 2$.
Definíció: Az egyszeresen összefüggő egyszerű poliéderfelületet (p,q) típusú kvázireguláris poliéderfelületnek nevezzük, ha valamennyi lapjának p csúcsa van, és minden csúcsában q él fut össze.
Tétel: A kvázireguláris poliéderfelületeknek az alábbi öt típusa létezik:

(3,3) tetraéder típus
(3,4) oktaéder típus
(3,5) ikozaéder típus
(4,3) hexaéder típus
(5,3) dodekaéder típus

Definíció: Egy poliéder lapjait alkotó sokszögek szögeit a poliéder élszögeinek nevezzük. Egy konvex poliéder belsején a lapjainak síkjai által meghatározott pozitív félterek metszetét értjük. Egy konvex poliéder valamely élét tartalmazó két lapjának szögén a közös élre merőlegesen felvett síknak és az élre illeszkedő két laphoz tartozó pozitív féltérnek a metszetét értjük. Egy konvex poliédert szabályosnak nevezünk, ha minden éle, minden élszöge és minden lapszöge kongruens.
A szabályos poliéder lapjai szabályos sokszögek, felülete pedig kvázireguláris poliéderfelület.
Tétel: Hasonlósági transzformációtól eltekintve ötféle szabályos poliéder van.

-