ANALÍZIS I.
(MT1301L, MT4301L, MT1301)

Előadást követő vázlatok

Dr. Rozgonyi Tibor
főiskolai docens

Néhány nevezetes egyenlőtlenség

Bernoulli-féle egyenlőtlenség

Ha $x \geq 0$ $x \in \Re$ és $n \in \aleph$, akkor $x^n \geq 1 + n(x-1)$.

Az egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $x = 1$ vagy $n = 1$.

Bizonyítás:

$x \rangle 1$

$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1) \geq (x-1) \cdot n$

ha $0 \leq x \langle 1$

$1 - x^n = (1-x)(1 + x + .. + x^{n-1}) \leq (1-x) \cdot n$

Megjegyzés: A Bernoulli egyenlőtlenséget gyakran a következő alakban használjuk.
Ha $h \geq -1$ $h \in \Re$ és $n \in \aleph$ $\Rightarrow (1+h)^n \geq 1 + nh$.
A fentiekből $x = 1 + h$ helyettesítéssel következik.

Számtani-, mértani-, harmonikus és négyzetes közép

Definíció: Az x_i $(i = 1,2,...n)$ pozitív számok A számtani (arítmetikai) G mértani, (geometriai), H harmónikus és Q négyzetes (kvadratikus) közepén az

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \quad G = \sqrt[n]{\pi_{i=1}^{n} x_i} \qquad H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \ , \quad Q = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$ számokat értjük.

A „közép” elnevezést az indokolja, hogy ezek a számok az x_i legkisebbike és legnagyobbika közé esnek.

Tétel: Az x_i pozitív számok $(i = 1,2,...n)$ számok számtani, mértani és harmonikus és négyzetes közepe között fenn áll a $H \leq G \leq A \leq Q$.

Bizonyítás:

Először $\quad G \leq A$

jelölje $\quad A_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$

$\forall k = 1,2,...,n$-re helyettesítsünk a Bernoulli-féle egyenlőtlenség első alakjába az x helyére $\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)$-et.

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n \geq 1+n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}-1\right)=\frac{A_{n-1}+nA_n-nA_{n-1}}{A_{n-1}}=\frac{nA_n-(n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}}=\frac{x_n}{A_{n-1}}$$

$$A_n^n \geq x_n \quad A_{n-1}^{n-1}$$

$$A_n^n \geq x_n \quad A_{n-1}^{n-1} \geq x_n \quad x_{n-1} \quad A_{n-2}^{n-2} \geq \ldots \geq x_n \cdot x_{n-1} \ldots x_1$$

$$A_n \geq \sqrt[n]{x_n x_{n-1} \ldots x_1}$$

Az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha

$$1=\frac{A_n}{A_{n-1}} \qquad A_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \quad A_{n-1}=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} x_k$$

$$nA_n-(n-1)A_{n-1}=x_n \qquad x_n=A_n=A_{n-1}=\ldots=A_1=x_1$$

$$H \leq G$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\ldots\frac{1}{x_n}} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)$$ mindkét oldal reciprokát véve

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$$

Megjegyzés: $H \leq A$ egyenlőtlenségből

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$$

$$A \leq Q$$

A $C-B-S$ egyenlőtlenségben legyen $b_i=1\ (i=1,2\ldots n)$, ekkor $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot n$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{-n} a_i \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenség

Legyenek a_i és b_i valós számok, ekkor

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Bizonyítás:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+\lambda b_i)^2 \geq 0$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}(a_i+\lambda b_i)^2=\sum a_i^2+2\lambda\sum_{i=1}^{n} a_i b_i+\lambda^2\sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2-4\left(\sum a_i^2\right)\cdot\left(\sum b_i^2\right) \leq 0$$

Definíció: Adott két halmaz A és B. Az A, B elemeiből készített rendezett elempáron olyan (a,b) szimbólumokat értünk, amelyben $a \in A, b \in B$, továbbá $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c$ és $b=d$.

Definíció: Az A és B halmazok Descartes-szorzatán az $AxB = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$ halmazt értjük.

T: Ha A,B,C tetszőleges halmazok, akkor
1. $AxB = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset,\ B = \emptyset$
2. $(A \cup B)xC = (AxC) \cup (BxC)$
3. $Ax(B \cup C) = (AxB) \cup (AxC)$
4. $(A \cap B)xC = (AxC) \cap (BxC)$
5. $Ax(B \cap C) = (AxB) \cap (AxC)$
6. $Ax = (B \setminus C) = (AxB) \setminus (AxC)$
7. $(A \setminus B)xC = (AxC) \setminus (BxC)$
8. $B \subset C \Rightarrow AxB \subset AxC$

B.: $(x,y) \in (A \cup B)xC \Rightarrow x \in A \cup B$ és $y \in C \Rightarrow x \in A$ vagy $x \in B$ és $y \in C \Rightarrow x \in A$ és $y \in C$ vagy $x \in B$ és $y \in C \Rightarrow (x,y) \in AxC$ vagy $(x,y) \in BxC \Rightarrow (x,y) \in (AxC) \cup (BxC)$
hasonlóan bizonyítható a többi állítás.

A reláció (leképezés)

Definíció: Legyen adott két halmaz *A* és *B*. Binér relációnak vagy *A*-ból *B*-be való leképezésnek nevezzük az $f \subset AxB$ részhalmazt.

Definíció: Adott az $f \subset AxB$ reláció. Ha $(x,y) \in f$, akkor azt mondjuk, hogy az *x* elem *f* relációban áll az *y* elemmel (vagy *f x*-hez hozzárendeli *y*-t) és ezt *xfy* módon is jelöljük.

Az *f* reláció értelmezési tartománya:
1. $D_f = \{x | x \in A \text{ és } \exists y \in B, \text{ hogy } (x,y) \in f\}$
2. Az *f* értékkészlete
   $R_f = \{y | y \in B \text{ és } \exists x \in A, \text{ hogy } (x,y) \in f\}$
3. Az *f* reláció inverze $f^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in f\}$.

A defincícióból következik $D_{f^{-1}} = R_f \qquad R_{f^{-1}} = D_f \qquad (f^{-1})^{-1} = f$

Megjegyzés:
Ha $D_f = A$ úgy A-nak B-be,
Ha $R_f = B$ úgy A-ból B-re,
Ha $D_f = A,\ R_f = B$ úgy A-nak B-re való leképezéséről beszélünk.

Pl.: $A = \{2,3\}$ $B = \{7,8,9\}$
$AxB = \{(2,7),(2,8),(2,9),(3,7),(3,8),(3,9)\}$
$f \subset AxB$ és $xfy \Leftrightarrow$ ha $x|y$
$f = \{(2,8),(3,9)\}$

Ekvivalencia reláció

Definíció: Adott az $A \neq \emptyset$. Az $f \subset AxA$ relációt ekvivalencia relációnak nevezzük, ha $\forall x, y, z \in A$ esetén.

(E1)	xfx	reflexiv
(E2)	ha, xfy akkor yfx	szimmetrikus
(E3)	ha xfy és yfx, akkor xfz	tranzitív.

Pl.: A síkbeli Δ-ek halmazán értelmezett hasonlóság. Az ekvivalencia relációt általában „~' jelöljük és x~y esetén azt mondjuk, hogy x ekvivalens y-nal.

Definíció: Adott az $A \neq \emptyset$. Az $f \subset AxA$ relációt rendezési relációnak nevezzük, ha $\forall x, y, z \in A$ esetén.

1. xfx — reflexív
2. ha xfy és $yfx \Rightarrow x = y$ — antiszimmetrikus
3. ha xfy és $yfz \Rightarrow xfy$ — tranzitív
4. vagy xfy vagy yfx — lineáris vagy teljes

Ekkor A-t rendezett halmaznak nevezzük, ha csak az első három teljesül, de a negyedik nem, akkor *f*-et parciális rendezésnek nevezzük.
Pl.: **Q**-n értelmezett "$\leq$" reláció rendezési reláció. $\aleph$-n értelmezett osztója reláció parciális rendezés. A rendezési relációt általában a "$\leq$"-vel jelöljük.

Definíció: Legyenek A, B, C, D adott halmazok, $f \subset AxB$ és $g \subset CxD$. A $gof = \{(x,z) | x \in A,\ z \in D \text{ és } \exists\ y \in B \cap C,\ xfy \text{ és } ygz\}$ relációt az f és a g kompozíciójának (szorzatának) vagy összetett relációnak nevezzük.
T: $(gof)^{-1} = f^{-1} o g^{-1}$
T: a relációk kompozíciója asszociatív $(fog)oh = fo(goh)$

A függvény

Definíció: Legyen adott két halmaz A és B. Egy $f \subset AxB$ relációt függvénynek nevezzük, ha $(x,y) \in f$ és $(x,z) \in f$ esetén $y = z$.
Megjegyzés: Ha $f \subset AxB$ függvény ekkor $(x,y) \in f$ esetén $y = f(x)$ jelöli az x elem képét, $f : A \to B$ azt, hogy f A-t B-be képezi, míg $\{(x, f(x))\}$ az f gráfját jelenti.
Definíció: $f : A \to B$; $A_1 \subset A$ és $B_1 \subset B$.
Az $f(A_1) = \{y | y \in B \text{ és } \exists x \in A_1,\ f(x) = y\}$ Az A_1 halmaz képe.
A B_1 halmaz inverz képe.
Az $f^{-1}(B_1) = \{x | x \in A \text{ és } f(x) \in B_1\}$

Definíció: Az $f : A \to B$ függvény invertálható, ha az f^{-1} reláció is függvény. Ekkor f^{-1}-et az f inverzének nevezzük.

Definíció: Az $f \subset AxB$ függvényt invertálhatónak nevezzük, ha $\forall y \in B$ pontosan egy $(x;y) \in f$ elempárban szerepel.
Megjegyzés:
1. Az invertálható függvényeket kölcsönösen egyértelmű vagy egy-egyértelmű hozzárendelésnek is nevezzük.
2. Ha f egy invertálható függvény, akkor $D_{f^{-1}} = R_f$ és $R_{f^{-1}} = D_f$
3. Ha $f : A \to B$ invertálható függvény $\Rightarrow f^{-1}$ invertálható és inverze az f függvény.

Tétel: Az $f : A \to B$ függvény $\Leftrightarrow$ invertálható, ha $\forall x, y \in A$ $x \neq y$ esetén $f(x) \neq f(y)$

Bizonyítás:$\Rightarrow$ f invertálható

Indirekt: $\exists\, x, y \in A$ $x \neq y$, $f(x) = f(y)$, ekkor $z = f(x) = f(y) \in B (z,x) \in f^{-1}$ és $(z,y) \in f^{-1}$.
Ez ellentmond annak, hogy f^{-1} függvény.
$(\forall x, y \in A\ x \neq y \text{ esetén } f(x) \neq f(y))$
$(z,x_1) \in f^{-1} \wedge (z,x_2) \in f^{-1}, (x_1,z) \wedge (x_2 z) \in f$, így $z = f(x_1)$ és $z = f(x_2)$, $x_1 = x_2$, tehát f^{-1} függvény, azaz f invertálható.

Definíció: $A \neq \emptyset$
$i_A : A \to A \qquad i_A(x) = x$
Az i_A függvényt az A halmaz identikus függvényének nevezzük.

Definíció: Legyenek A,B,C adott nem üres halmazok $A \subset B$; $f : B \to C$ és $g : A \to C$, továbbá $f(x) = g(x)$ $\forall x \in A$ esetén. Ekkor g-t az f A-ra való leszűkítésének, f-et a g B-re való kiterjesztésének nevezzük.

Definíció:Ha f és g függvény a gof kompoziciót összetett függvénynek nevezzük, és $gof = g(f)$
$(gof)(x) = g(f(x))$-el jelöljük.

f-et belső, g-t külső függvénynek nevezzük.

$gof = \{(x;z) | x \in A, z \in D \wedge \exists y \in B \;\; és \;\; (x,y) \in f \wedge (y,z) \in g\}$

$(x,y) \in f \Rightarrow y = f(x), \;\; (f(x)z) \in g \Rightarrow z = g(f(x))$

Jelölés: Ha az *f* függvény értelmezési tartománya az *AxB* halmaz és $(x,y) \in AxB, \Rightarrow f((x,y))$ helyett $f(x,y)$-t írunk.

T: Ha $f \subset AxB$ és $g \subset CxD$ függvények, akkor a *gof* reláció is függvény.

Biz.: $(x,z_1) \wedge (x,z_2) \in gof$. Ekkor $\exists \;\; y_1, y_2 \in B \cap C$.

$$\left.\begin{array}{l}(x,y_1) \in f \\ (x,y_2) \in f\end{array}\right\} \begin{array}{l}\wedge (y_1,z_1) \in g \\ \wedge (y_2,z_2) \in g\end{array}$$

f függvény $y_1 = y_2 \Rightarrow z_1 = z_2$

Definíció: ! $f : A \to B$ függvény, az *f* függvény

a) injektív ha $x \neq y \;\; x, y \in A$ esetén $f(x) \neq f(y)$
b) szűrjektív ha $f(A) = B$
c) bijektív ha a) és b)

A valós számok

Valós számnak nevezzük, annak az $\Re$ halmaznak az elemeit, amelyre az alábbi I-II-III. axiómacsoport axiómái teljesülnek.

I. Test-axiómák

Legyen az $\Re x \Re$ halmazon két függvény értelmezve $\Re$-beli értékkészlettel úgy, hogy – összeadásnak, ill. szorzásnak nevezve- és $F_1(x,y) = x + y$, ill. $F_2(x,y) = xy$ jelölve teljesüljenek a következő tulajdonságok.

(T1) $x + y = y + x$ és $xy = yx$ $\forall x, y \in \Re$ esetén, (kommutatív)
(T2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ és $(xg)z = x(yz)$ $\forall x, y \in \Re$ esetén, (asszociatív)
(T3) $x(y + z) = xy + xz$ $\forall x, y, z \in \Re$ esetén, (disztributív)
(T4) $\exists \, o \in \Re$, amelyre $x + 0 = x$ $\forall x \in \Re$ esetén (zérus elem)
(T5) $\forall x \in \Re$-hez $\exists(-x) \in \Re$, amellyel $x + (-x) = 0$ (additív inverz)
(T6) $\exists \, 1 \in \Re \;\; 1 \neq 0$, hogy $1x = x$ $\forall x \in \Re$ esetén (multipliktív egység)
(T7) $\forall x \in \Re \;\; x \neq 0$-hoz, $\exists(x^{-1}) \in \Re$ $x(x^{-1}) = 1$ (multipliktív inverz)

II. Elrendezési axiómák és az archimédeszi axióma

Legyen az $\Re$ halmazon egy „$\leq$”-vel jelölt reláció értelmezve úgy, hogy teljesüljenek a következő tulajdonságok.
(R1) $x \leq x$ $\forall x \in \Re$ reflexiv

(R2) ha $x \le y$ és $y \le x \Rightarrow x = y$ antiszimetrikus $\forall x, y \in \Re$ esetén
(R3) ha $x \le y$ és $y \le z \Rightarrow x \le z$ tranzitív $\forall x, y, z \in \Re$ esetén
(R4) $x \le y$ vagy $y \le x$ $\forall x, y \in \Re$ esetén
(R5) ha $x \le y \Rightarrow x + z \le y + z$ $\forall z \in \Re$ esetén
(R6) ha $0 \le x$ és $0 \le y \Rightarrow 0 \le xy$
(R7) ha $0 \le x \le y$ és $x \ne 0 \Rightarrow \exists n \in \aleph;\ y \le nx$

Az 1-4 rendezési reláció, 5-6 az összeadás, ill. szorzás monotonitás, a 7. Az archimédeszi axióma.

III. Folytonossági axióma (teljességi axióma)

Definíció: $a, b \in \Re$ és $a \le b$. Az $I = [a, b] = \{x | x \in \Re \text{ és } a \le x \le b\}$ halmazt *a,b* végpontú zárt intervallumnak nevezzük.

Definíció: Fogyó intervallumrendszernek nevezzük zárt intervallumokból álló $\{I_n\}$ $(n \in \aleph)$ halmazt ha $I_n \supseteq I_{n+1}$

Cantor- (folytonossági-) axióma. Fogyó intervallumrendszer metszete nem üres.
$\bigcap\limits_{n \in \aleph} I_n \ne \emptyset$
Megjegyzés: A valós számok halmaza egy archimédeszien elrendezett teljes test.

Az elrendezési axiómákat kiegészítjük a szigorú egyenlőtlenség fogalmának a definíciójával is.

Definíció: Akkor mondjuk, hogy *x* kisebb mint *y*, ha $x \le y$, de $x \ne y$. ($x \langle y$ v. $y \rangle x$).

T: A rendezési axiómák fontosabb következményei. Ha $x, y, z, u, v \in \Re$, akkor

1. $x \langle y \Rightarrow x + z \langle y + z$
2. $0 \langle x \Rightarrow -x \langle 0,\ x \langle 0 \Rightarrow 0 \langle -x$
3. $0 \langle x \wedge 0 \langle y \Rightarrow 0 \langle xy$
4. $0 \langle x^2 \vee x = 0,\ 0 \langle 1$
5. $0 \langle x \wedge y \langle 0 \Rightarrow xy \langle 0,\ x \langle 0 \wedge y \langle 0 \Rightarrow 0 \langle xy$
6. $0 \langle xy \wedge 0 \langle x \Rightarrow 0 \langle y,\ 0 \langle \frac{1}{x}$
7. $x \le y \wedge z \le u \Rightarrow x + z \le y + u,\ x \langle y \wedge z \langle u \Rightarrow x + z \langle y + u$
   ($0 \le x \wedge 0 \le y \Rightarrow 0 \le x + y,\ 0 \langle x \wedge 0 \langle y \Rightarrow 0 \langle x + y$)
8. $x \langle y \wedge 0 \langle z \Rightarrow xz \langle yz,\ x \langle y \wedge z \langle 0 \Rightarrow yz \langle xz$
9. $0 \langle y \langle x \wedge 0 \langle z \langle v \Rightarrow yz \langle xv$
10. $0 \langle x \langle y \wedge n \in \aleph \Rightarrow 0 \langle y^n \langle x^n$
11. $0 \langle x \langle y \Rightarrow 0 \langle \frac{1}{y} \langle \frac{1}{x}$

12. $n \in \aleph \Rightarrow n \geq 1$
13. $\forall k \in Z$ esetén $\nexists l \in Z, k\langle l\langle k+1$

Bizonyítás:

1. $x\langle y \Rightarrow x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$, ha $x+z=y+z$, akkor $x=y$ adódna, ami ellentmondás igy. $x+y\langle x+z$
2. $0\langle x \Rightarrow 0+(-x)\langle x+(-x) \Rightarrow -x\langle 0$
3. $0\langle x \wedge 0\langle y \Rightarrow 0 \leq xy$. Ha $0 = x \cdot y \Rightarrow x=0 \vee y=0$ ami ellentmondásos $0\langle xy$.

Hasonlóan lehet bizonyítani a többi állítást is.

Definíció: A egy rendezett halmaz $a,b \in A$ és $a\langle b$ továbbá

$(a,b) := \{x \mid x \in A \wedge a\langle x\langle b\}$

$[a,b) := \{x \mid x \in A \wedge a \leq x \leq b\}$

$(a,b] := \{x \mid x \in A \wedge a\langle x \leq b\}$

(a,b)-t nyílt intervallunak, $[a,b)$, $(a,b]$ félig nyílt intervallumnak nevezzük.

Definíció: ! $a \in \Re$. Az $x\langle a$, $x \leq a$, $a\langle x$, ill. $a \leq x$ számok összességére rendre

$(-\infty,a) := \{x \mid x \in \Re \wedge x\langle a\}$

$(-\infty,a] := \{x \mid x \in \Re \wedge x \leq a\}$

$(a,\infty) := \{x \mid x \in \Re \wedge a\langle x\}$

$[a,\infty) := \{x \mid x \in \Re \wedge a \leq x\}$

jelölést alkalmazzuk. A halmazokat végtelen intervallumoknak nevezzük.
Ezzel a $-\infty$ és ∞ szimbólumok is meghatározott jelentést kaptak.

Definíció: A valós számok $\Re$ halmazát $\Re := (-\infty,\infty)$-nel is jelöljük.

Definíció:

(1) Az $\Re_b := \Re \cup \{-\infty,\infty\}$ halmazt a valós számok kibővített halmazának nevezzük.

(2) $\forall x \in \Re$-re $-\infty\langle x\langle\infty, -\infty\langle\infty$ $x+\infty=\infty, x-\infty=-\infty, \dfrac{x}{\infty}=\dfrac{x}{-\infty}=0$

(3) Ha $x\rangle 0$, akkor $x(+\infty)=+\infty$, $x\cdot(-\infty)=-\infty$

(4) Ha $x\langle 0$, akkor $x\cdot(+\infty)=-\infty$ $x\cdot(-\infty)=+\infty$

(5) $(+\infty)\cdot(+\infty)=\infty$, $(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$, $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$

Megjegyzés: $+\infty+(-\infty), 0\cdot(+\infty), 0\cdot(-\infty), \dfrac{+\infty}{+\infty}; \dfrac{-\infty}{-\infty}; \dfrac{-\infty}{+\infty};$ szimbólumokat nem értelmezzük.

Ha hangsúlyozni akarjuk a különbséget a valós számok, valamint a $+\infty, -\infty$ szimbólumok között, akkor az előbbieket végesnek nevezzük.

Abszolútérték

Definíció: Legyen $x \in \Re$

1. Az x abszolút értéke
$$|x| = \begin{cases} x \ ha \ x \geq 0 \\ -x \ ha \ x \langle 0 \end{cases}$$
2. Az x előjele (szignuma)
$$signx = \begin{cases} 1, \ ha \ x \rangle 0 \\ 0, \ ha \ x = 0 \\ -1, \ x \langle 0 \end{cases}$$

Definíció: Legyen $x, y \in \Re$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x \ ha \ x \geq y \\ y \ ha \ y \geq x \end{cases}$$

$$\min\{x, y\} = \begin{cases} x \ h \ x \leq y \\ y \ ha \ y \leq x \end{cases}$$

Megjegyzés: Az $|x| = \max\{x, -x\}$ $\qquad |x| = +\sqrt{x^2}$

Tétel: Ha $x, y \in \Re \Rightarrow$ érvényesek a következő állítások.

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = |-x|$
3. $|x| \geq \pm x$
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$
5. $|x \cdot y| = |x||y|$
6. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$
7. $|x| \leq y \quad (y \rangle 0) \Leftrightarrow x \in [-y, y]$
8. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Megjegyzés:
Ha $x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$

$x \leq y \ \ \exists(-x) \qquad 0 \leq x + (-x) \leq y - x$

$\qquad\qquad\qquad -y \leq y - x + (-y) = -x$

Bizonyítás: 1,2,3 triv.

4. ! $x_i \in \Re(i=1,2...n)$ $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|$

Teljes indukció

I. n=2-re

a) ha $x_1 + x_2 \geq 0$

$|x_1 + x_2| = x_1 + x_2 \leq |x_1| + |x_2|$

b) ha $x_1 + x_2 \langle 0$

$|x_1 + x_2| = -(x_1 + x_2) = (-x_1) + (-x_2) \leq |x_1| + |x_2|$

II. Tételezzük fel, hogy *n*-re igaz azaz

$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|$

III. Igazoljuk, hogy *n+1*-re is igaz

$\left|\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| + |x_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i| + |x_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1}|x_i|$

5. ! $x_i \in \Re(i=1,2...n)$ $\left|\underset{i=1}{\overset{n}{\pi}} x_i\right| = \underset{i=1}{\overset{n}{\pi}}|x_i|$

I. $n=2$, ha $x_i = 0\ (i=1,2)$ akkor igaz

ha $x_1 \rangle 0$ *és* $x_2 \rangle 0$ $|x_1 \cdot x_2| = x_1 \cdot x_2 = |x_1| \cdot |x_2|$

ha $x_1 \langle 0$ *és* $x_2 \langle 0$ $|x_1 \cdot x_2| = x_1 \cdot x_2 = -|x_1|(-|x_2|) = |x_1| \cdot |x_2|$

ha $x_1 \langle 0$ *és* $x_2 \rangle 0$ $|x_1 \cdot x_2| = -(x_1 \cdot x_2) = -|x_2|(-|x_1|) = |x_1| \cdot |x_2|$

II. $\left|\underset{i=1}{\overset{n}{\pi}} x_i\right| = \underset{i=1}{\overset{n}{\pi}}|x_i| \cdot x$

III. $\left|\underset{i=1}{\overset{n+1}{\pi}} x_i\right| = \left|\underset{i=1}{\overset{n}{\pi}} x_i \cdot x_{n+1}\right| = \underset{i=1}{\overset{n}{\pi}}|x_i||x_{n+1}| = \underset{i=1}{\overset{n+1}{\pi}}|x_i|$

6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \left|x \cdot \frac{1}{y}\right| = |x|\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

7. $\Rightarrow$ ha $|x| \leq y$ $\quad (y \rangle 0) \quad \Rightarrow \quad x \in [-y; y] \quad -y \leq x \leq y$

ha $x \geq 0$ $\quad -y \leq 0 \leq x = |x| \leq y$

ha $x \langle 0$ $\quad -y \leq 0 \leq -x = |x| \leq y$

$\Leftarrow x \in [-y, y]$ azt jelenti $\quad -y \leq x \leq y$

ha $x \geq 0$ $\quad |x| = x \leq y$

ha $x \langle 0$ $\quad |x| = -x \leq y$

8. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ azaz $|x| - |y| \leq |x - y|$

$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x|$ azaz $|y| - |x| \leq |x - y|$

$$\left.\begin{array}{l} |x| - |y| \geq -|x - y| \\ |x| - |y| \leq |x - y| \end{array}\right\} \Rightarrow ||x| - |y|| \langle |x - y|$$

Metrika

Definíció: ! $A \neq \emptyset$ $\rho : AxA \rightarrow \Re *$ függvény. A ρ függvényt metrikának (vagy távolságfüggvénynek) nevezzük, ha teljesülnek a következők $\forall x, y, z \in A$-ra

1. $\rho(x,y) \geq 0 \quad 0 \Leftrightarrow ha \quad x = y$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \varsigma(y,z)$

Definíció: Ha egy A halmaz elempárjaira értelmezve vagy egy ρ függvény, amely teljesíti az 1,2,3 tulajdonságokat, akkor az A halmazt metrikus térnek nevezzük.

Tétel: Az $\Re$ halmaz a $\rho : \Re x \Re \rightarrow \Re *$ $\rho(x,y) := |x-y|$ függvénnyel metrikus tér.

Bizonyítás:

1. $\rho(x,y) \geq 0 \quad 0 \Leftrightarrow \quad ha \quad x = y$ triviális
2. $\rho(x,y) = \varsigma(y,x)$ triviális
3. $\rho(x,y) \leq \varsigma(xz) + \varsigma(y;z)$

$\rho(x,y) = |x-y| = |x-y+z-z| \leq |x-z| + |z-y| = \rho(x,z) + \rho(z,y)$

Pl:

1. $A[0,1]$-en ért valós értékű folytonos függvények halmaza $\rho(f,g) = \max|f-g|$-vel metrikus tér.
2. $\Re^2$-ben a $\rho : \Re^2 x \Re^2 \rightarrow \Re^*$ $\rho(x,y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_1)^2}$ $x(x_1, x_2) y(y_1, y_2)$

A környezet fogalma és tulajdonságai

Definíció: Az $x_0 \in \Re$ $V(x_0)$-al jelölt környezetén értünk minden olyan nyílt intervallumot, amely x_0-t tartalmazza.

$V(x_0) = (a,b)$ ha $x_0 \in (a,b)$

Definíció: ! $x_0 \in \Re$ és $\varepsilon \rangle 0 (\varepsilon \in \Re)$. Az x_0 ε sugarú környezetén a $V(x_0, \varepsilon) = \{x \in \Re \ |, \rho(x, x_0) \langle \varepsilon\}$

A környezet ún. Hausdorff-féle tulajdonságai:

! $x_0 \in \Re$ és $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle 0 \in \Re$

1. $\forall x_0 \in \Re$ és $V(x_0, \varepsilon)$ esetén $x_0 \in V(x_0, \varepsilon)$
2. $\forall V(x_0, \varepsilon)$ és $V(x_0, \varepsilon_1)$ esetén $\exists V(x_0, \varepsilon_2)$, hogy $V(x_0, \varepsilon_2) \subseteq V(x_0, \varepsilon)$ és $V(x_0, \varepsilon_2) \subseteq V(x_0, \varepsilon_1)$
3. $\forall V(x_0, \varepsilon)$ és $y_0 \in V(x_0, \varepsilon)$ esetén $\exists V(y_0, \varepsilon_1)$ úgy, hogy $V(y_0, \varepsilon_1) \subseteq V(x_0, \varepsilon)$
4. $\forall x_0 \neq y_0$ esetén $\exists V(x_0, \varepsilon)$ és $V(y_0, \varepsilon_1)$ úgy, hogy $V(x_0, \varepsilon) \cap V(y_0, \varepsilon_1)$ üres halmaz.

Bizonyítás:

1. triviális
2. $\varepsilon_2 \le \min\{\varepsilon, \varepsilon_1\}$
3. $\varepsilon_1 = \varepsilon - |x_0 - y_0|$

   ! $x \in V(y_0, \varepsilon_1)$ megmutatjuk, hogy $x \in V(x_0, \varepsilon)$

   $|x - y_0| \langle \varepsilon_1 = \varepsilon - |x_0 - y_0|$ azaz $|y_0 - x| + |x_0 - x| \langle \varepsilon$, de

   $|x - x_0| = |x - y_0 + y_0 - x_0| \le |x - y| \langle \varepsilon$ tehát $x \in V(x_0, \varepsilon)$

4. ! $\varepsilon = \varepsilon_1 = \dfrac{|x_0 - y_0|}{2}$

   Indirekt: $\exists x \in V(x_0, \varepsilon) \cap V(y_0, \varepsilon)$ azaz $|x - x_0| \langle \dfrac{|x_0 - y_0|}{2}$ és $|x - y_0| \langle \dfrac{|x_0 - y_0|}{2}$

$|x - x_0| + |x - y_0| \langle |x_0 - y_0|$

ellentmondás.

Definíció:

Az $x_0 \in \Re$ baloldali (jobboldali) környezetének nevezzük az $(a, x_0]$ $([x_0, b))$ intervallumot, ha $a \langle x_0 \langle b$.

Definíció:

! $a \in \Re$. $A + \infty$ $[-\infty]$ környezetén az (a, ∞) és $[(-\infty; a)]$ intervallumot értjük.

Korlátos számhalmazok

Definíció: ! $A \subset \Re$. A $k(k^*) \in \Re$ számot az A halmaz alsó (felső) korlátjának nevezzük, ha $\forall x \in A$-ra $k \le x$ $(x \le k^*)$. Az A alulról (felülről) korlátos ha van alsó (felső) korlátja.

Definíció: Egy A halmaz alulról (felülről) nem korlátos, ha $\forall\, k(k^*) \in \Re$-hez $\exists\, x \in A,\, x \langle k$ $(k^* \langle x)$.

Tétel: Egy $A \subset \Re$ halmaz $\Leftrightarrow$ korlátos, ha $\exists\, K \in \Re^+$, hogy $\forall x \in A$-ra $|x| \le K$.

Bizonyítás: $\Rightarrow$ ha A korlátos, akkor $\exists\, K \in \Re^+$

A korlátos akkor $\exists k, k^* \in \Re$ $\forall x \in A$-ra $k \le x \le k^*$

! $K = \max\{|k|, |k^*|\}$

$-K \le -|k| \le k \le x \le k^* \le |k^*| \le K$ azaz $|x| \le K$

$\Leftarrow$ Ha $|x| \le K$ $k = -K \le x \le K = k^*$

Definíció: Ha egy A halmaz korlátos, előfordulhat, hogy $k\left(k^*\right) \in A$ és az is $k\left(k^*\right) \notin A$. Az első esetben $k\left(k^*\right)$ az A halmaz legkisebb (legnagyobb) eleme.

Megjegyzés: Az alulról (felülről) korlátos halmaznak legfeljebb egy legkisebb (legnagyobb) eleme van.

Bizonyítás: ! k_1 és k_2 a két legkisebb elem $k_1 \leq k_2$ és $k_2 \leq k_1$ azaz $k_2 = k_1$

Nyilvánvaló, hogy ha egy $A \subset \Re$ halmaz alulról (felülről) korlátos akkor nem csak egy alsó (felső) korlátja van.

A legnagyobb alsó és a legkisebb felső korlátot külön is megnevezzük.

Definíció: ! $A \subset \Re$. Az A halmaz alsó határának, infinumának (felső határának, suprénumának) nevezzük azt a $h\left(h^*\right) \in \Re$ amelyre

1. $h(h^*)$alsó (felső) korlát
2. $\forall$ nála nagyobb (kisebb) szám már nem alsó (felső) korlát.

   $h = \inf A \quad \left(h^* = \sup A\right)$

   vagy

1. $\forall x \in A$-ra $h \leq x \quad \left(h^* \geq x\right)$
2. $\forall \varepsilon \rangle 0$-hoz $\exists x \in A \quad x \langle h + \varepsilon \quad \left(h^* - \varepsilon \langle x\right)$

A definícióból nyilvánvaló, hogy egy $A \subset \Re$-nek legfeljebb egy alsó, ill. felső határa van. (Van-e egyáltalán?)

T: (Korlátos számhalmaznak van alsó- és felső határa)
Alulról (felülről) korlátos számhalmaznak van alsó (felső) határa.

(! $A \subset \Re$ és $\exists k \in \Re$, $\forall x \in A$-ra $k \leq x$. Ekkor $\exists$ a $\inf A = h$))

Bizonyítás:

I. Ha A-nak $\exists$ legkisebb eleme. ! ez x_0

1. $x_0 \leq x \qquad \forall x \in A$-ra tehát x_0 alsó korlát.
2. $x_0 \langle x_0 + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon \rangle 0$-ra $\left(\varepsilon \in \Re\right)$

II. Ha A-nak $\nexists$ legkisebb eleme.

Ekkor folyóintervallumrendszerrel megkonstruálunk egy számot és megmutatjuk, hogy ez rendelkezik az alsó határ mindkét tulajdonságával.

! k egy alsó korlát és $x_0 \in A$

$k = a_1$ és $x_0 = b_1$ választással tekintsük az $\dfrac{a_1 + b_1}{2}$-t. Ha ez alsó korlát $a_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ és $b_2 = b_1$.

Ha nem alsó korlát $a_2 = a_1$ és $b_2 = \dfrac{b_1 + b_2}{2}$.

.
.
.

Ha $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ alsó korlát | ha nem

$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\cdot b_n=b_{n-1}$ | $a_n=a_{n-1}\qquad b_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$

.
.
.

A konstrukcióból látszik, hogy minden a_n alsó korlát és egyetlen b_n nem az.
Így egy fogyó intervallumrendszert kaptunk, amelyre
$\bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n,b_n]\neq\emptyset$. $\exists h\in\cap n\in\aleph[a_n,b_n]$ megmutatja, hogy h rendelkezik az alsó határ mindkét tulajdonságával.

1. h alsó korlát
   indirekt: h nem alsó korlát $\exists x\in A,\ x\langle h$. Ekkor $\exists n\in\aleph\ \ h-x\rangle b_n-a_n=\frac{1}{2^{n-1}}(b_1-a_1)$. Ez pedig azt jelenti $h\in[a_n,b_n]$ miatt, $x\langle a_n$. Ez ellentmond annak, bármely a_n alsó korlát volt.
2. Tőle nagyobb szám már nem alsó korlát. Ind. felt. $\exists x_1\in\Re\ \ h\langle x_1$ és x_1 alsó korlát. Ekkor $\exists n\in\aleph,\ x_1-h\rangle b_n-a_n=\frac{1}{2^{n-1}}(b_1-a_1)$. Ez pedig $h\in[a_n,b_n]$ miatt azt jelenti, $x_1\rangle b_n$. Ez ellentmond annak, hogy egyetlen b_n sem volt alsó korlát.

Definíció: Ha A alulról (felülről) nem korlátos, akkor $\inf A=-\infty\ \ (\sup A=\infty)$.

Torlódási pont

Definíció: ! $A\subset\Re$. Az $x_0\in\Re$ (szám)pont az A halmaz torlódási pontja, ha $x_0\forall\ V(x_0)$ környezetében van legalább egy tőle különböző A-beli elem.
$V(x_0)\cap(A\setminus\{x_0\})\neq\emptyset\ \ (\forall V(x_0)-ra)$

T: Az $x_0\in\Re$ az A halmaznak $\Leftrightarrow$ torlódási pontja, ha az $x_0\forall V(x_0)$ környezetében végtelen sok eleme van A-nak.

Bizonyítás:
$\Rightarrow$ A feltétel szükséges:
Ugyanis ha csak véges sok lenne, akkor ezek közül lenne olyan, amely x_0-hoz legközelebb van. ! ennek a távolsága x_0-tól δ ekkor $V(x_0,\delta)$ egyetlen x_0 különböző A-beli elemet sem tartalmaz. Azaz x_0 nem torlódási pont.
$\Leftarrow$ a feltétel elegendő:
Ugyanis ha végtelen sokat tartalmaz $\forall V(x_0)$, akkor legalább egyet is tartalmaz.

A torlódási pont hozzá is tartozhat *A*-hoz, meg nem is.

Pl.: $A := \left\{ \frac{1}{n} | n \in \aleph \right\}$ egyetlen torlódási pontja a *0*, de $0 \notin A$.

$B := \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} | n \in \aleph \right\}$ egyetlen torlódási pontja a *0*, de $0 \in B$.

Egy számhalmaznak lehet 1,2 több, sőt végtelen sok torlódási pontja is.

Pl.: $C := \{x | x \in Q \wedge 0 \leq x \leq 1\}$-nek torlódási pontja minden $x \in \Re \;\; 0 \leq x \leq 1$ és ezek közül $x \in C$ ha $x \in Q$ $\;x \notin C$ ha $x \in \Re \setminus Q$

Az egész számok ***Z*** halmazának nincs véges torlódási pontja.

Ha egy halmaz felülről nem korlátos, akkor a ∞ $\forall$ környezetében végtelen sok eleme van a halmaznak.

Definíció: A felülről (alulról) nem korlátos halmaz torlódási helye a $\infty(-\infty)$.

Pl.: Az $\aleph$-nek a ∞ torlódási helye.

Bolzano-Weierstrass tétele: Minden végtelen, korlátos valós számhalmaznak van legalább egy torlódási pontja.

Bizonyítás: ! $A \subset \Re$ korlátos, azaz $\exists\, k, k^* \in \Re$, $\forall x \in A$-ra $k \leq x \leq k^*$! $a_1 = k$ és $b_1 = k^*$.

Tekintsük az $\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right]$ és $\left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right]$ intervallumokat.

Ezek valamelyike végtelen sok elemet tartalmaz. Válasszuk ki ezt. (Ha mindkettő végtelen sokat tartalmaz akkor tetszés szerint az egyiket.)

Jelöljük $[a_2, b_2]$-vel ezt az intervallumot.

Megismételve ezt az eljárást egy fogyó intervallumrendszert kapunk, ahol $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$ Mivel $\cap [a_n, b_n] \neq \emptyset$. Ezért $\exists t \in \cap [a_n, b_n]$.

Megmutatjuk, hogy *t* torlódási pont.

Azt fogjuk megmutatni, hogy *t*-nek $\forall$ környezete tartalmaz egy $[a_n, b_n]$-t amelyben végtelen sok elem van.

$\forall \varepsilon \rangle 0$-hoz $\qquad \exists n \in \aleph \qquad |b_n - a_n| \langle \varepsilon$.

$$|b_n - a_n| = \frac{1}{2^{n-1}} (b_1 - a_1) \langle \varepsilon$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} (b_1 - a_1) \leq \frac{b_1 - a_1}{n} \langle \varepsilon \qquad n \rangle \frac{b_1 - a_1}{\varepsilon}.$$

Ilyen n az archimédeszi axióma alapján létezik.

Definíció: Az a P $(P \in A)$ pontot amely az *A* halmaznak nem torlódási pontja, azaz $\exists V(P)$ környezete, amely *A*-ból egyetlen *P*-től különböző pontot sem tartalmaz az *A* halmaz izolált pontjának nevezzük.

Valós számsorozatok

Definíció: Egy $f:\aleph \to \Re$ függvényt valós számsorozatnak nevezzük. Ha $f(n)=a_n$, akkor *f*-et $\langle a_n \rangle$ jelöljük és a_n-et a sorozat *n*-edik vagy általános tagjának nevezzük. Az *f* értékkészletét (az elemek halmazát) $\{a_n\}$-nel jelöljük.

Definíció: Az $\langle a_n \rangle \equiv \langle b_n \rangle$, ha $\forall n \in \aleph$-re $a_n = b_n$.

Egy sorozatot akkor tekintünk megadottnak, ha minden elemét ismerjük, vagy ismerjük azt a módot, amellyel elemeit a természetes számokhoz rendeljük.

A sorozat megadható:

1. Utasítással: pl. $\sqrt{2}$ tizedesjegyeinek sorozata.
2. Formulával: pl. $a_n = 2n-1$ a páratlan számok sorozata.
3. Rekurzióval: a sorozat elemei hogyan következnek, az őket megelőző(ek)ből. Pl.: Fibonacci sorozat.
   $a_1 = 1,\ a_2 = 1\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$
   1,1,2,3,5….
   $$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Definíció: Egy $\langle a_n \rangle$ korlátos, ha értékkészlete korlátos. (Az $\langle a_n \rangle$ korlátos ha $\exists k, k^* \in \Re$, $\forall n \in \aleph$-re $k \le a_n \le k^*$).

Definíció: Ha egy $\langle a_n \rangle$-ra $a_n = c$ $\forall n$-re akkor $\langle a_n \rangle$ konstans sorozatnak nevezzük.

Definíció: Az $\langle a_n \rangle$ monoton növekvő (csökkenő) ha $a_n \le a_{n+1}$ $(a_n \ge a_{n+1})$ $\forall n \in \aleph$ esetén.
Ha az egyenlőséget nem engedjük meg, akkor szigorúan monoton sorozatról beszélünk.

Definíció: ! $\langle a_n \rangle$ és $\varphi:\aleph \to \aleph$ szigorúan monoton növekvő és $\langle b_n \rangle : \aleph \to \Re, b_n := a_{\varphi(n)}$ ekkor $\langle b_n \rangle$-et az $\langle a_n \rangle$ részsorozatának nevezzük.

Műveletek sorozatokkal

Definíció: ! $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ és $c \in \Re$. Ekkor összegükön, különbségükön szorzatukon és az $\langle a_n \rangle$ c-szeresén a következő sorozatokat értjük $\langle a_n \pm b_n \rangle, \langle a_n \cdot b_n \rangle \langle c \cdot a_n \rangle$. Ha $0 \notin \langle b_n \rangle$ akkor hányadosukon az $\left\langle \frac{a_n}{b_n} \right\rangle$-n értjük. Az $\langle a_n \rangle$ abszolútértéken $\langle |a_n| \rangle$.

Konvergens sorozatok

Definíció: ! $\langle a_n \rangle$ egy valós számsorozat.
Az $\langle a_n \rangle$ konvergens ha $\exists a \in \Re$, hogy $\forall\ \varepsilon \rangle 0$-hoz $(\varepsilon \in \Re)\ \exists n_0(\varepsilon) \in \aleph,\ \forall n \rangle n_0(\varepsilon)(n \in \aleph)$ esetén $|a_n - a| \langle \varepsilon$.
Ekkor az *a* számot az $\langle a_n \rangle$ határétékének nevezzük vagy azt mondjuk, hogy $\langle a_n \rangle$ konvergál az *a* számhoz $(n_0(\varepsilon))$-t az ε-hoz tartozó küszöbindexnek nevezzük.
Azt a tényt, hogy az $\langle a_n \rangle$ határértéke az a *a* következő módon jelöljük
$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ vagy $a_n \to a$ vagy $\lim a_n = a$.

Definíció: Ha $\langle a_n \rangle$ nem konvergens (konvergál), akkor $\langle a_n \rangle$ divergens (divergál).
Definíció: Az $\langle a_n \rangle$ a $\infty(-\infty)$-hez divergál, ha $\forall K \in \Re^+$-hoz $\left(k \in \Re^-\right)$ $\exists n_0 \in \aleph$, hogy ha $\forall n \rangle n_0\ n \in \aleph$ esetén $a_n \rangle K\ \left(a_n \langle k\right)$. Ezt $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty(-\infty)$ jelöljük.
Definíció: Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens és a *0*-hoz konvergál, akkor $\langle a_n \rangle$-ot nullsorozatnak nevezzük.

T: Az $\langle a_n \rangle \Leftrightarrow$ konvergál az *a* számhoz, ha *a* $\forall V(a, \varepsilon)$ környezete véges sok elem kivételével tartalmazza $\langle a_n \rangle$ elemeit.

B: $\Rightarrow a_n \to a \ \Rightarrow\ \forall \varepsilon \rangle 0\ \ \exists n_0 \in \aleph,\ n \rangle n_0 \Rightarrow |a_n - a| \langle \varepsilon$ azaz $V(a, \varepsilon)$-n kívül legfeljebb n_0 elem van.
$\Leftarrow$ Ha a $\forall\ V(a, \varepsilon)$ kívül csak véges sok elem van, akkor ezek között van legnagyobb indexű. ! ez n_0.
Tehát ha $n \rangle n_0$ akkor $a - \varepsilon \langle a_n \langle a + \varepsilon$ azaz $|a_n - a| \langle \varepsilon$.

Köv.: Ha $a_n \to a$ akkor *a* az $\{a_n\}$ torlódási pontja. Itt is különböző n-ekre az $\{a_n\}$-halmaz (a sorozat értékkészlete) elemeit különbözőnek tekintjük. (A megfordítás nem igaz.)

T: Ha $a_n \to a$ és $a_n \to b \Rightarrow a = b$. (Egy sorozatnak legfeljebb egy határértéke van.)
B: Tételezzük fel, hogy $a \neq b$ és $!\ \varepsilon = \rho(a, b)$. Ekkor $V\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap V\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \emptyset$ és $\exists n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \forall n \rangle n_0$ esetén $a_n \in V\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ és $a_n \in V\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, ami lehetetlen.
Tehát *a*=*b*.

T: Ha $a_n \to a$, akkor $\langle a_n \rangle$ korlátos.
Biz.: $a_n \to a$ és $!\ \varepsilon = 1$ ekkor $\varepsilon = 1$-hez $\exists\ n_0 \in \aleph,\ n \rangle n_0$ esetén
$|a_n - a| \langle\ \varepsilon = 1$
$!K = |a| + \max\{\,1, |a_1 - a|, |a_2 - a|, \dots, |a_{n_0} - a|\ \}$

ha $n \rangle n_0$

$|a_n| \le |a_n - a| + |a| \le 1 + |a| \le K$

ha $n \langle n_0$

$|a_n| \le |a_n - a| + |a| \le K.$

Megjegyzés: A tétel megfordítása nem igaz. Pl. $a := (-1)^n$ korlátos, de nem konvergens. Ui, ha $a \in \Re$! $\varepsilon = \max\{|a-1|, |a+1|\}$, akkor $\langle a_n \rangle$ minden páros vagy páratlan tagja az $V(a,\varepsilon)$-n kívül van.

Definíció: ! $\langle a_n \rangle$ és jelölje $H := \{a | \ a \in \Re_b$ és a torlódási pontja $\{a_n\}$-nek $\}$.
Akkor
$\inf H = \underline{\lim}\, a_n$ és $\sup H = \overline{\lim}\, a_n$-t az $\langle a_n \rangle$ limesz inferiorja és limen superiorja.

Pl.: $a_n = 1 + (-1)^n$ ekkor az *0* és a *2* torlódási pontja $\langle a_n \rangle$ és más torlódási pontja nincs, így $\underline{\lim}\, a_n = 0$ és $\overline{\lim}\, a_n = 2$.

Megjegyzés: A definícióból következik $\underline{\lim}\, a_n \le \overline{\lim}\, a_n$.

T: ! $\langle a_n \rangle : \aleph \to \Re$

(1) $\underline{\lim}\, a_n \in \Re \Leftrightarrow$ ha $\exists\, a \in \Re, \forall \varepsilon \in \Re^+$ esetén az $A = \{n | \ n \in \aleph,\ a_n \langle a - \varepsilon\}$ véges halmaz és a $B = \{n | \ n \in \aleph,\ a_n \langle a + \varepsilon\}$ végtelen. Ekkor $\underline{\lim\, a_n} = a$.

(2) $\overline{\lim}\, a_n \in \Re \Leftrightarrow$, ha $\exists\, a \in \Re, \forall \varepsilon \in \Re^+$ esetén $A = \{n | \ n \in \aleph.\ a_n \rangle a + \varepsilon\}$ véges halmaz és a $B = \{n | \ n \in \aleph,\ a_n \rangle a - \varepsilon\}$ végtelen. Ekkor $\overline{\lim}\, a_n = a$.

Konvergencia kritériumok

Cauchy-féle konvergencia-kritérium.
Az $\langle a_n \rangle$ akkor, és csakis akkor konvergns, ha $\forall \varepsilon \rangle 0$-hoz $\exists n_0 \in \aleph$, hogy ha $n, m \rangle n_0$, akkor $|a_n - a_m| \langle \varepsilon$.

Definíció: Ha egy $\langle a_n \rangle$ teljesíti, hogy $\forall \varepsilon \rangle 0$-hoz $\exists n_0 \in \aleph$; hogy $\forall n, m \rangle n_0$ esetén $|a_n - a_m| \langle \varepsilon$, ekkor az $\langle a_n \rangle$ Cauchy-sorozat.

Biz.: (Ha konv. $\Rightarrow$ Cauchy)

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, akkor $\forall \varepsilon \rangle 0 \quad \exists n_0$, ha $n \rangle n_0 \Rightarrow |a_n - a| \langle \frac{\varepsilon}{2}$. Ha $m \rangle n_0$ $|a_m - a| \langle \frac{\varepsilon}{2}$. Így, ha $n, m \rangle n_0$ $|a_n - a_m| \le |a_n - a| + |a - a_m| \langle \varepsilon$, azaz $\langle a_n \rangle$ Cauchy sorozat

(Ha Cauchy$\Rightarrow$konvergens.)

Először megmutatjuk, hogy ha $\langle a_n \rangle$ Cauchy, akkor korlátos
$!\,\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \aleph,\ n, m \rangle n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| \langle 1$
$!K = |a_m| + \max\{1, |a_1 - a_m|, |a_2 - a_m|, \ \dots \ |a_{n_0} - a_m|\}$
Ha $n \langle n_0 \Rightarrow |a_n| \le |a_n - a_m| + |a_m| \le K$,
Ha $n \rangle n_0 \Rightarrow |a_n| \le |a_n - a_m| + |a_m| \le K$ azaz $\langle a_n \rangle$ korlátos.
Indirekt feltétel: az $\langle a_n \rangle$ nem konvergens azaz $\exists$ két torlódási pontja. ! ez $t \langle t_1$. Ezért $\forall \varepsilon \rangle 0$-hoz végtelen sok n-re és m-re igaz, hogy
$a_n \langle t + \varepsilon$ ill. $\quad a_m \rangle t_1 - \varepsilon \Rightarrow a_m - a_n \rangle t_1 - t - 2\varepsilon$.

Ha $\varepsilon = \dfrac{t_1 - t}{3} \Rightarrow a_m - a_n \rangle \varepsilon$ végtelen sok n-re fenn áll, ellentétben azzal, hogy ez csak legfeljebb n_0-ra állhat fenn.

T: Minden monoton korlátos sorozat konvergens.
Monoton növekvő (csökkenő) felülről (alulról) korlátos sorozat konvergál a felső (alsó) határához.

Biz: (Mon. növ. esetben) ! h^* felső korlát. Azaz $\forall \varepsilon \rangle 0$ esetén $h^* - \varepsilon$ már nem alsó korlát, így $\exists n_0 \in \aleph \quad a_{n_0} \rangle h^* - \varepsilon$, azaz ha $n \rangle n_0 \quad a_n \rangle h^* - \varepsilon$. Tehát ha $n \rangle n_0 \quad h^* - \varepsilon \langle a_n \langle h^* + \varepsilon$ azaz $|a_n - h^*| \langle \varepsilon$.

Közrefogási szabály:
Ha $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ konvergens számsorozatok és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, továbbá $\langle c_n \rangle$ olyan, hogy $a_n \le c_n \le b_n \quad \forall n \in \aleph$-re , akkor a $\langle c_n \rangle$ konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Biz.: $a_n \to a$ és $b_n \to a \Rightarrow \forall \varepsilon \rangle 0$-hoz $\exists n_0, \hat{n}_0 \in \aleph$, hogyha $n \rangle n_0 \ |a_n - a| \langle \varepsilon$ és ha $n \rangle n_0$ akkor $|b_n - a| \langle \varepsilon$.
$!\ n \rangle \max\left(n_0, \hat{n}_0\right)$ ekkor felírható
$a - \varepsilon \langle a_n \le c_n \le b_n \langle a + \varepsilon$ azaz $|c_n - a| \langle \varepsilon$.

T: ! $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$ amelyekre $a_n = b_n$ véges sok n kivételével. Ekkor $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ egyszerre konvergens és

B.: Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \ \ \forall\ \varepsilon \rangle 0 \ \ \exists \hat{n}_0 \in \aleph, n \rangle \hat{n}_0 \Rightarrow |a_n - a| \langle \varepsilon.$ A feltétel miatt $\exists \hat{\hat{n}}_0,\ n \rangle \hat{\hat{n}}_0 \ \ a_n = b_n$.
$!\ n_0 = \max\{\hat{n}_0, \hat{\hat{n}}_0\}$
$|b_n - a| = |a_n - a| \langle \varepsilon_0$ tehát b_n konvergens.

Ha $\langle a_n \rangle$ divergens, akkor a fentiek miatt $\langle b_n \rangle$ nem lehet konvergens.

Műveletek konvergens sorozatokkal

T: ! $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ konvergens sorozat és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Ekkor érvényesek a következők:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot a \quad \forall c \in \Re$ esetén

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$

e) Ha $b_n \neq 0$ és $b \neq 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Biz.:

a) ha $a_n \to a \Rightarrow \forall \varepsilon_1 \rangle 0 \ \exists \hat{n}_0 \in \aleph, n \rangle \hat{n}_0$ akkor $|a_n - a| \langle \varepsilon_1$ ha

$b_n \to b \Rightarrow \forall \varepsilon_2 \rangle 0 \ \exists \hat{\hat{n}}_0 \in \aleph, n \rangle \hat{\hat{n}}_0 \Rightarrow |b_n - b| \langle \varepsilon_2$

! $n_0 = \max(\hat{n}_0, \hat{\hat{n}}_0)$, akkor $|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \langle \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$

ha $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ és $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ akkor $|a_n + b_n - (a+b)| \langle \varepsilon$ amiből a) következik.

b) Ha $a_n \to a \Rightarrow \forall \frac{\varepsilon}{|c|} \rangle$ -hoz $\exists n_0 \in \aleph \ n \rangle n_0 \ |a_n - a| \langle \frac{\varepsilon}{|c|}$

$|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c||a_n - a| \langle |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$ hacsak $n \rangle \hat{n}_0$.

c) Ha $a_n \to a \Rightarrow \forall \varepsilon_1 \rangle 0 \ \exists \hat{n}_0 \in \aleph, n \rangle \hat{n}_0 \Rightarrow |a_n - a| \langle \varepsilon_1$, ha $b_n \to b \Rightarrow \forall \varepsilon_2 \rangle 0$ -hoz $\exists \hat{\hat{n}}_0 \in \aleph, n \rangle \hat{\hat{n}}_0 \Rightarrow |b_n - b| \langle \varepsilon_2$

$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|$

$\varepsilon \rangle 0$ és $n_0 = \max\{\hat{n}_0, \hat{\hat{n}}_0\}$ ha $n \rangle n_0$ és $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2K}, \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2|a|}$ ahol $|K_n| \leq K$ akkor

$|a_n b_n - ab| \leq \frac{K\,\varepsilon}{2K} + \frac{|a|\,\varepsilon}{2\,|a|} = \varepsilon$. Ezt pedig c) igazolja.

d) Ha $a_n \to a \Rightarrow \forall\varepsilon\rangle 0$-hoz $\exists n_0, n\rangle n_0 \Rightarrow |a_n - a|\langle\varepsilon$. Mivel $\big||a_n| - |a|\big| \le |a_n - a|\langle\varepsilon$, ami d)-t igazolja.

e) Először megmutatjuk, hogy ha $b_n \to b$, akkor $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ feltéve, hogy $b_n \neq 0$ és $b \neq 0$. $b_n \to b \Rightarrow \forall\varepsilon_1\rangle 0\ \ \exists\widehat{n}_0 \in \aleph\ \ n\rangle\widehat{n}_0 \Rightarrow |b_n - b|\langle\varepsilon_1$.

Ha $b_n \to b \Rightarrow |b_n| \to |b|$ Így $\exists\widehat{n}_0 \in \aleph, n\rangle\widehat{\widehat{n}}_0 \Rightarrow |b_n|\rangle\frac{|b|}{2}$, azaz $\frac{1}{|b_n|}\langle\frac{2}{|b|}$

! $n_0 = \max\left(\widehat{n}_0, \widehat{\widehat{n}}_0\right)$, akkor $n\rangle n_0$ esetén felírható, hogy $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|}\langle\frac{\varepsilon_1 \cdot 2}{|b|^2}$.

Ha tehát $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon|b|^2}{2}$ és $n\rangle n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right|\langle\varepsilon$ ami bizonyítandó volt. Az e) igazolása c) felhasználásával $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{a_n}$ triviális.

Megjegyzés:

1. Az a), b), c), d), e) megfordítása nem igaz.
2. a) és c) teljes indukcióval kiterjeszthető tetszőleges rögzített $k \in \aleph$-re.
3. Ha $a_n \to a$ és $p \in \aleph \Rightarrow a_n^p \to a^p$

   A fenti tételeket úgy is fogalmazhatjuk, hogy konvergens sorozatoknál a művelet és a határátmenet sorrendje felcserélhető, a későbbiekben magasabb rendű műveletek (hatványozás, gyökvonás, logaritmus) esetén is igazolni fogjuk.
4. Ha $a_n = c\ (c \in \Re)$ akkor $a_n \to c$.

Nevezetes sorozatok

T: Legyen $a_n = \dfrac{p_r n^r + p_{r-1} + n^{r-1} + \ldots + p_1 n + p_0}{q_s n^s + q_{s-1} n^{s-1} + \ldots + q_1 n + q_0}$

a. Ha $r = s$, akkor $a_n \to \frac{p_r}{q_s}$

b. Ha $r\langle s$, akkor $a_n \to 0$

c. Ha $r \rangle s$, akkor $a_n \to \begin{cases} +\infty \; ha \; \dfrac{p_r}{q_s} \rangle 0 \\ -\infty \; ha \; \dfrac{p_r}{q_s} \langle 0 \end{cases}$

Biz.: Használjuk fel, hogy rögzített $k \in \aleph$-re $\frac{1}{n^k} \to 0$.

T: ! $a_n := q^n$

a. Ha $q \rangle 1$ akkor $a_n \to \infty$

b. Ha $q = 1$ akkor $a_n \to 1$

c. Ha $-1 \langle q \langle 1$ akkor $a_n \to 0$

d. Ha $q = -1$ akkor $\langle a_n \rangle$ korlátos, de nem konvergens

e. Ha $q \langle -1$ akkor $\langle a_n \rangle$ nem korlátos és nem is konvergens.

Biz.:

a. Ha $q \rangle 1 \Rightarrow q = 1 + p \;\; (p \rangle 0, p \in \Re)$

$$q^n = (1+p)^n \geq 1 + n \cdot p \rangle n \cdot p \geq k^* \text{ hacsak } n \rangle n_0 = \left[\frac{k^*}{p} \right]$$

b. Triviális

c. Ha $q = 0$ triviális ha $|q| \langle 1$ és $q \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{|q|} \rangle 1$ és $\left| \frac{1}{q^n} \right| \to \infty$ azaz $\forall k^* \in \Re^+$-hez

$\exists\, n_0 \in \aleph, n \rangle n_0$ $\left| \frac{1}{q^n} \right| \rangle k^*$ azaz $|q^n| \langle \frac{1}{k^*}$ $|q^n - 0| = |q^n| \langle \frac{1}{k^*}$. Ha tehát $\varepsilon = \frac{1}{k^*}$ akkor $|q^n| \langle \varepsilon$.

d. Ha $q = -1$ akkor $a_n = -1$ vagy $a_n = 1$.

e. Ha $q \langle -1$ akkor $q^n = (-1)^n |q|^n \to \pm 1 \cdot \infty$.

T: Az $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens.

B: Megmutatjuk, hogy monoton növekvő és felülről korlátos.

a. Monoton növekvő

$$\sqrt[n+1]{1\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n-szer}} \le \frac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

b. felülről korlátos

$$\sqrt[n+2]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)} \le \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2} = 1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 4$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Az e szám az egész analízis legjelentősebb numerikus adata.

$e \approx 2{,}71828182845904583536\ldots$

Az e irracionális szám, az e nem algebrai szám.

Megjegyzés: A $b_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ sorozat is az e-hez konvergál.

$\log_e x = \ln x$.

T.: $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

B: $1 \le \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}\sqrt{n}1\ldots1} \le \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} \le 1+\frac{2}{\sqrt{n}}$ (Rendőr-tétel)

$U_i \; \frac{1}{\sqrt{n}} \langle \varepsilon$ ha $n \rangle \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$

T: Ha $c\rangle 0$ akkor $\lim \sqrt[n]{c} = 1$.

B: Ha $c = 1$ triviális. Ha $c \rangle 1$

$1 \le \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{\sqrt{c}\sqrt{c}1\ldots1} = \frac{\sqrt{c}+n-2}{n} = 1+\frac{2\sqrt{c}}{n}$ (Rendőr-tétel)

Ha $0\langle c \langle 1$ akkor $1\langle \frac{1}{c} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{c}} \to 1$

$$\sqrt[n]{c} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}} \to \frac{1}{1} = 1$$

Pl: $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{c}{a_{n-1}}\right) \to \sqrt{c}$ $\qquad (c \rangle 0 \ \ \acute{e}s \ \ a_0 \rangle 0)$

Megmutatja, hogy a_n mon. csökkenő és alulról korlátos.

$2a_n \cdot a_{n-1} = a_{n-1}^2 + c \Rightarrow a_n^2 - c = (a_n - a_{n-1})^2 \geq 0$ $\qquad a_n \geq \sqrt{c}$, tehát a_n alulról korlátos.

$a_{n-1} - a_n = a_{n-1} - \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{c}{a_{n-1}}\right) = \frac{1}{2a_{n-1}}\left(a_{n-1}^2 - c\right) = \frac{1}{2a_{n-1}}(a_{n-1} - a_{n-2})^2 \geq 0$, tehát mon. csökkenő.

$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right) \Rightarrow x = \sqrt{c}$.

A határértékre vonatkozó további tételek

T: Ha az $\langle a_n \rangle$ korlátos és $\langle b_n \rangle$ 0 sorozat, akkor $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ is nullsorozat.

Biz: $b_n \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon_1 \rangle 0 \quad \exists n_0, n \rangle n_0 \; |b_n| \langle \varepsilon_1$

a_n korlátos, ezért $\exists K \rangle 0 (\in \Re)$ $|a_n| \langle K \quad \forall n \in \aleph$-re

$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \langle K \cdot \varepsilon_1$ ha $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{K}$ akkor $|a_n \cdot b_n| \langle \varepsilon$ hacsak $n \rangle n_0$.

T: Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, továbbá $a_n \le b_n \quad \forall n \in \aleph$-re, akkor $a \le b$.

Biz.: Indirekt $a \rangle b$

$a_n \to a \qquad \varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$-höz $\qquad \exists \widehat{n}_0 ; \forall n \rangle \widehat{n}_0 \Rightarrow |a_n - a| \langle \varepsilon$

$b_n \to b \qquad \varepsilon = \dfrac{a-b}{2} \qquad \exists \hat{\hat{n}}_0 ; \forall n \rangle \hat{\hat{n}}_0 \Rightarrow |b_n - b| \langle \varepsilon$

! $n_0 = \max(\widehat{n}_0, \hat{\hat{n}}_0)$ és $n \rangle n_0$.

$b_n \langle b + \varepsilon = \dfrac{a+b}{2} = a - \varepsilon \langle a_n$ ez pedig ellentmond az $a_n \le b_n$ feltételnek.

Köv. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ és $a_n \ge 0$, akkor $a \ge 0$.

T: Ha $a \langle b$ akkor $\exists n_0 \in \aleph, \forall n \rangle n_0 \quad a_n \langle b_n$.

! $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$.

$a_n \to a \quad \varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$-höz $\exists \widehat{n}_0 \in \aleph, \forall n \rangle \widehat{n}_0 \qquad |a_n - a| \langle \varepsilon$

$b_n \to a \quad \varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$-höz $\exists \hat{\hat{n}}_0 \in \aleph, \forall n \rangle \hat{\hat{n}}_0 \qquad |b_n - b| \langle \varepsilon$

$! n_0 = \max\{\widehat{n}_0, \hat{\hat{n}}_0\}$ és $n \rangle n_0$

$a_n \langle a + \varepsilon = \dfrac{a+b}{2} = b - \varepsilon \langle b_n$

Megjegyzés: Ha $a_n \langle b_n \not\Rightarrow a \langle b$

Pl. $a_n := \dfrac{1}{n^2+1} \qquad b_n = \dfrac{1}{n}$

T: Ha $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \infty$ és $a_n \neq 0$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$.

Biz.: $|a_n| \to \infty$ $\forall k^* > 0$-hoz $\exists n_0 \in \aleph,\ n > n_0$ akkor $|a_n| > k^*$ $\frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{k^*}$. Tehát, ha $k^* = \frac{1}{\varepsilon}$ és $n > n_0$ ekkor $\left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$.

T: Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ $(a_n \neq 0)$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|} = \infty$

B.: $a_n \to 0$ $k^* \in \Re^+$ $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0 \in \aleph$ $\forall n > n_0 |a_n| < \varepsilon$

$\left|\frac{1}{a_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$. Ha tehát $\varepsilon = \frac{1}{k^*}$ és $n > n_0$, akkor $\frac{1}{|a_n|} > k^*$.

T: Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, akkor

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$, $\lim(a_n - b_n) = -\infty$ és

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \begin{cases} \infty\ ha\ a > 0 \\ -\infty\ ha\ a < 0 \end{cases}$.

B:

(1) Ha $a_n \to a$ akkor $\exists\, k \in \Re$ $k \leq a_n$ $\forall n \in \aleph - re$

ha $a_n \to \infty \Rightarrow \forall k_1^* \in \Re$-hez $\exists n_0 \in \aleph,\ n > n_0$ $b_n \geq k_1^*$

Tehát ha $n > n_0$ $a_n + b_n \geq k + k_1^*$. Ha $k_1^* = k^* - k \Rightarrow a_n + b_n \geq k^*$ hacsak $n > n_0$.

(2) $!a > 0$ ekkor $a_n \to a$ miatt $\exists \widehat{n}_0 \in \aleph,\ n > \widehat{n}_0$ $a_n > \frac{a}{2}$.

$b_n \to \infty$ akkor $\forall k_1^*$-hoz $\exists \widehat{\widehat{n}}_0 \in \aleph,\ n > \widehat{\widehat{n}}_0$ $b_n > k_1^*$.

Ha $n > \max(\widehat{n}_0, \widehat{\widehat{n}}_0)$ ekkor $a_n \cdot b_n > \frac{a}{2} \cdot k_1^*$. Tehát ha $k_1^* = \frac{2k^*}{a}$ és $n > n_0 = \max(\widehat{n}_0, \widehat{\widehat{n}}_0)$, akkor $a_n \cdot b_n > k^*$.

A többi állítás is hasonlóan igazolható.

Megjegyzés: A tétel (2) állítása $a = 0$-ra nem mond semmit.

Ha $a_n = a$ és $\lim\limits_{n\to\infty} = \infty$, ekkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \begin{cases} \infty \; ha \; a \rangle 0 \\ 0 \; ha \; a = 0 \\ -\infty \; ha \; a \langle 0 \end{cases}.$$

T: Ha

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ és $c\rangle 0 (c \in \Re)$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} = c^{a_n} = c^a$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \quad a_n \rangle 0,\ a \rangle 0$ és $c \neq 1\ c \rangle 0$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty} (\log_c a_n) = \log_c a$.

(3) Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \ (a_n \rangle 0,\ a \rangle 0)$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\ b_n} = a^b$

B:Bsz.

T: Legyen $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ olyan, hogy $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \aleph$-re, akkor

(1) ha $a_n \to \infty$ akkor $b_n \to \infty$

(2) ha $b_n \to -\infty$ akkor $a_n \to -\infty$

B:

(1) $a_n \to \infty \Rightarrow \forall k^* \in \Re$-hez $\exists n_0 \in \aleph,\ n \rangle n_0$ akkor $a_n \rangle k^*$. De ekkor $b_n \geq a_n \rangle k^*$ miatt $b_n \to \infty$

(2) hasonlóan.

Megjegyzés: A tétel állítása akkor is igaz, ha $a_n \leq b_n$ csak valamely n_0-tól áll fenn.

Részsorozat, sorozatok egyesítése

Definíció: ! $\langle a_n \rangle$ egy sorozat és $\varphi : \aleph \to \aleph$ szigorúan monoton növekvő, továbbá $\langle b_n \rangle : \aleph \to \Re,\ b_n = a_{\varphi(n)}$ akkor $\langle b_n \rangle$-t az $\langle a_n \rangle$ részsorozatának nevezzük.

T: Minden korlátos sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat. (B-W kiválasztási tétel)

B.: Mivel $\{a_n\}$ végtelen sok elemet tartalmaz és korlátos $\exists$ legalább egy torlódási pontja. Jelölje ezt a. $!\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$ és tekintsük $V(a, \varepsilon_n)(n = 1,2,3...)$. Mivel $\forall n$-re $V(a, \varepsilon_n)$ végtelen sok elemet tartalmaz, ezért választható mindegyikből olyan $b_n \quad n = 1,2...$ elem, hogy egyik se előzzön meg olyan tagot, amelynek az $\langle a_n \rangle$-beli indexe kisebb bármely kiválasztottnál.

T: Egy konvergens $\langle a_n \rangle$ minden részsorozata konvergens és határértéke megegyezik az $\langle a_n \rangle$ határértékével.

Biz.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ azt jelenti, hogy $\forall\, V(a,\varepsilon)$ tartalmazza az $\langle a_n \rangle$ majdnem minden elemét, így tehát a részsorozatoknak is majdnem minden elemét.

Definíció: ! $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$. Ha a $\langle b_n \rangle$ elemeit valamilyen szabály szerint az $\langle a_n \rangle$ sorozat elemei közé írjuk, akkor a két sorozat egyesített szorzatát kapjuk.

T: Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, akkor az $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ egyesítése $\Leftrightarrow$ konvergens, ha $a = b$.

Biz.: Ha az egyesítet sorozat konvergens, akkor $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$annak részsorozatai, így ugyanahhoz konvergál, mint az egyesített sorozat.

Ha $a = b$ akkor az $\langle a_n \rangle$-nek $\forall\, V(a,\varepsilon)$ kívül legfeljebb $\hat{n}_0$, a $\langle b_n \rangle$-nek legfeljebb $\hat{\hat{n}}_0$ eleme van. Így az egyesített sorozatnak legfeljebb $\hat{n}_0 + \hat{\hat{n}}_0$ eleme lehet $V(a,\varepsilon)$-n kívül.

T: Ha egy $\langle a_n \rangle$ minden részsorozata konvergens, akkor az $\langle a_n \rangle$ is konvergens.

Biz.: Indikrekt $\exists\, a \neq b$ két torlódási pont, úgy, hogy $a_{\varphi(n)} \to a$ és $a_{\eta(n)} \to b$. Tek. $a_{\varphi(n)}$ és $a_{\eta(n)}$ egyesített sorozatát. Ez nem konv. ($a \neq b$ miatt), de részsorozata $\langle a_n \rangle$. Ellentmondás.

Pl:

(1) $a_n = \dfrac{a^n}{n!} \rangle 0 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{a^n} = \dfrac{a}{n+1} \langle 1$ ha $n \rangle [a-1]$ $\langle a_n \rangle$ mon. csökkenő alulról korlátos

$\Rightarrow$ konvergens.

$$a_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{a^n}{n!} \qquad x = 0 \cdot x \Rightarrow x = 0$$

(2) $\sqrt[n]{n!} \to \infty$

$\dfrac{a_n}{n!} \to 0 \qquad \varepsilon = 1$-hez $\exists n_0 \in \aleph, \forall n \rangle n_0$ esetén $\dfrac{a^n}{n!} \langle 1 \;\Rightarrow\; a \langle \sqrt[n]{n!}$.

Végtelen sorok

A végtelen sorok elmélete az analízis egy fontos fejezete. Segítségével nemcsak bizonyos típusú sorozatok tulajdonságait ismerhetjük meg, hanem olyan függvények tulajdonságait, amelyek ki sem fejezhetők elemi függvényekkel véges sok művelet segítségével.

A végtelen numerikus sor fogalma

Definíció: ! adott egy valós $\langle a_n \rangle$. Az $\langle s_n \rangle$ sorozatot, ahol $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ végtelen sornak nevezzük és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ -nel jelöljük. s_n a sor n-edik részletösszege, a_n a sor n-edik tagja.

(Néha kényelmi okokból a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jelölést fogjuk használni.)

Pl: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + ...$

Definíció: a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha $\langle s_n \rangle$ konvergens és a $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ számot a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor összegének nevezzük. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, ha nem konvergens.

Pl.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 .$$

Mértani sor

Definíció: A $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ sort geometriai vagy mértani sornak nevezzük.

T: A geometriai sor konvergens, ha $|q|\langle 1$ és ekkor összege $s = \frac{a}{1-q}$.

B: ! $s_n = a + aq + ... + aq^n$

$$s_n = a \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$s_n \to \begin{cases} \frac{a}{1-q} \; ha \; |q|\langle 1 \\ div \; ha \; |q| \geq 1 \end{cases}$$

Mivel a sor konvergenciáját a sorozat konvergenciájára vezettük vissza, ezért a Cauchy-féle konvergencia kritériumot a következőképpen fogalmazhatjuk meg.

T: A $\sum a_n$ sor $\Leftrightarrow$ konvergens, ha $\forall\varepsilon\rangle 0$-hoz $\exists n_0 \in \aleph$, hogy ha $n\rangle m\rangle n_0$, akkor

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \langle \varepsilon .$$

Speciálisan ha $m = n-1$, akkor azt kapjuk, hogy $|a_n|\langle\varepsilon$. A sor konvergenciájához szükséges, hogy $a_n \to 0$.

Ez a feltétel azonban nem elégséges.

Pl.: $\sum \frac{1}{n}$ div., pedig $\frac{1}{n} \to 0$.

A harmonikus sor

Definíció: A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sort harmonikus sornak nevezzük.

T: a harmonikus sor divergens.

B: Nem teljesíti a Cauchy-féle konvergencia krit.

$$s_{2n} - s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \rangle \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Ha tehát $\varepsilon = \frac{1}{2}$ akkor nem teljesül a kritériumban megkívánt feltétel.

Műveletek sorokkal

D: A $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sor összegén a $\sum (a_n + b_n)$ sort *c*-szeresén a $\sum c \cdot a_n$ sort értjük.

Nyilvánvalóak a következő állítások.

T: Ha a $\sum a_n$ és a $\sum b_n$ konvergens, akkor a $\sum (a_n + b_n)$ is az és $s_{(a+b)} = s_a + s_b$

Ha a $\sum a_n$ konvergens és $c \in \Re$, akkor a $\sum c \cdot a_n$ is konvergens és $s_{c\cdot a} = c \cdot s_a$.

T: A sor konvergenciáját véges sok tag hozzávétele vagy elhagyása nem befolyásolja.

Konvergens sorokon az asszociativitás érvényben marad.

Definíció: ! $\sum a_n$ egy adott sor. Ha $\varphi : \aleph \to \aleph$ szig. mon. növekvő $b_1 = a_1 + \ldots + a_{\varphi(1)}, \ldots$ $b_n = a_{\varphi(n-1)+1} + \ldots + a_{\varphi(n)}$ akkor a $\sum b_n$ sort a $\sum a_n$ sor zárójelzett sorának nevezzük.

T: Ha a $\sum a_n$ sor konvergens, akkor a sor összege nem változik, ha tetszőleges sok egymást követő tagot egy taggá zárójelezünk.

B: $\sum a_n$ konv. ! $\sum \hat{a}_n$ az átzárójelzett sor és (s_n), ill. $(\hat{s}_n)$ a megfelelő részletösszegsorozatok $\langle \hat{s}_n \rangle$ az $\langle s_n \rangle$-nak részsorozata így azzal együtt konvergens.

Megjegyzés: Zárójeleket elhagyni azonban nem szabad, mert ezáltal konvergens sorból div. válhat.

$(1-1)+(1-1)+...=0$ konv.

$1-1+1-1...$ div.

Nem érvényes azonban a végtelen sorokra a véges összegekre érvényes kommutativitás törvénye. A tagok sorrendjének megváltoztatásakor a sor összege megváltozhat, sőt konvergensből divergens lehet.

Definíció: $\sum a_n$. Ha $\varphi : \aleph \to \aleph$ invertálható $\Re_\varphi = \aleph$ és $\langle b_n \rangle : \aleph \to \Re, b_n = a_{\varphi(n)}$, akkor a $\sum b_n$ sort a $\sum a_n$ átrendezett sorának nevezzük.

Pozitív tagú sorok konvergencia kritériumai

Definíció: a $\sum a_n$ pozitív tagú ha $a_n \rangle 0 \ \ \forall n \in \aleph$-re.

Megjegyzés: Minden pozitív tagú sor vagy konvergens vagy a ∞-be div. Ugyanis $\{s_n\}$ monoton növ., ezért vagy korlátos vagy nem korlátos.

T: A $\sum a_n$ pozitív tagú sor $\Leftrightarrow$ konvergens, ha részletösszegei korlátosak.

T: Majoráns kritérium (összehasonlító kritérium)

(1) Ha a $\sum a_n$ pozitív tagú sor konvergens és $\forall n \in \aleph$-re $b_n \le a_n$ akkor a $\sum b_n$ sor is konvergens

(2) Ha a $\sum a_n$ divergens és $\forall n \in \aleph -$re $a_n \le b_n$ akkor a $\sum b_n$ is divergens.

Biz:

(1) ! $\langle s_n \rangle$ a $\sum a_n$ és $\langle \hat{s}_n \rangle$ $\sum b_n$ részletösszeg sorozata.

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

$$\hat{s}_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$$

$\langle s_n \rangle$ konv. Így korlátos és $\exists k^* \in \Re \;\; s_n \le k^*$

$\hat{s}_n \le s_n \le k^* \;\; \langle \widehat{s}_n \rangle$ monoton növ. és felülről korlátos, így konvergens.

(2) Ind. $\sum b_n$ konvergens, de akkor a fentiek szerint $\sum a_n$ is konvengers. Ellentmondás.

Megjegyzés: A tétel akkor is érvényben marad ha $a_n \ge b_n \; (a_n \le b_n)$ csak bizonyos n_0-tól áll fenn. (Véges sok tag elhagyása a sor konvergens vagy divergens voltán nem változtat.)

Pl:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergens mert $n \ge 1$-re $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

(2) $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens, mert $n \rangle 1$-re $\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n(n-1)}$ sor konvergens.

(3) $\sum \frac{1}{\ln n}$ divergens, mert $n \ge 2$-re $\frac{1}{n} \langle \frac{1}{\ln n}$.

Hányados kritérium: Ha a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ pozitív tagú sorokban $\forall n \in \aleph$-re.

$(*) \; \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ és

(1) a $\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow \sum a_n$ is konvergens.

(2) a $\sum a_n$ divergens $\Rightarrow \sum b_n$ is divergens.

B:

(1) $(*)$-ból

$\frac{a_n}{b_n} \ge \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ és így

$\frac{a_1}{b_1} \ge \frac{a_2}{b_2} \ge ... \ge \frac{a_n}{b_n}$ azaz $a_n \le \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$

A $\sum a_n$ sornak majoránsa a $\sum \frac{a_1}{b_1} b_n$ konvergens sor.

(2) $(*)$-ból

$\frac{b_n}{a_n} \ge \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$

$$\frac{b_1}{a_1} \geq \frac{b_2}{a_2} \geq ... \geq \frac{b_n}{a_n} \text{ azaz } \frac{b_1}{a_1} a_n \leq b_n$$

$$\frac{b_1}{a_1} \sum a_n \text{ divergens ezért } \sum b_n \text{ is az.}$$

Megjegyzés: a kritérium akkor is alkalmazható ha az "$\leq$" csak bizonyos $n_0 \in \aleph$-tól áll fenn.

Ha a fenti kritériumban $\sum b_n$ -nek a $\sum q^n$ sort válasszuk akkor a következő D'Alembert-féle hányados kritériumhoz jutunk.

T: D'Alembert-féle hányados kritérium.

Ha a pozitív tagú $\sum a_n$ sorhoz $\exists q \langle 1 \left(q \in \Re \right)$ és $n_0 \in \aleph$ hogy $n \rangle n_0$, akkor ha

(1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \langle 1$ a $\sum a_n$ sor konvergens.

(2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ a $\sum a_n$ sor divergens.

A fentieknek egy enyhébb változata.

T: ! $\sum a_n$ pozitív tagú sor és $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, akkor

(1) $0 \leq a \langle 1$ esetén a sor konvergens.

(2) $a \rangle 1$ esetén a sor divergens.

(3) $a = 1$ esetén a sor lehet konvergens és divergens is.

Biz.:

(1), (2) D'Alembert kritérium következménye.

(3) $\sum \frac{1}{n}$ divergens és $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

$\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens és $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

T: Cauchy-féle gyök kritérium.

Ha a pozitív tagú $\sum a_n$ sorhoz $\exists\, q \langle 1 \left(q \in \Re \right)$ és $n_0 \in \aleph$, hogy ha $n \rangle n_0$ ekkor ha

(1) $\sqrt[n]{a_n} \leq q \langle 1$ a sor konvergens.

(2) $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ a sor divergens.

Biz.:

(1) ha $\sqrt[n]{a_n} \leq q \Rightarrow a_n \leq q^n$ (ha $n \rangle n_0$).

Így a $\sum a_n$ sort majorálja a konvergens $\sum q^n$ sor.

(2) Ha $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, akkor $a_n \not\to 0$, így nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

T: ! $\sum a_n$ pozitív tagú és $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, akkor

(1) $0 \leq a \langle 1$ esetén a sor konvergens.

(2) $a \rangle 1$ esetén a sor divergens.

(3) $a = 1$ esetén lehet konvergens és divergens is.

Megjegyzés: A fenti két kritériumban az $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \langle 1$ feltétel nem helyettesíthető $\frac{a_{n+1}}{a_n} \langle 1$ feltétellel. Ugyanis a $\sum \frac{1}{n}$-nél $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \langle 1$.

Bereznai-féle kritérium

Ha a pozitív tagú $\sum a_n$ sorhoz $\exists\ p \rangle e (p \in \Re)$ és $n_0 \in \aleph$, hogy ha $n \rangle n_0$ akkor,

(1) ha $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n \geq p \rangle e$ akkor $\sum a_n$ konvergens

(2) ha $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n \leq e$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Megjegyzés: A Cauchy-féle kritérium alkalmazható minden olyan esetben, amikor a D'Alembert-féle alkalamzható.

Biz.: Ha $\forall n$-re $\frac{a_2}{a_1} \leq k \langle 1 \quad \frac{a_3}{a_2} \leq k \langle 1 \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq k \langle 1$, ahol $0 \leq k \langle 1$.

$$\frac{a_n}{a_1} \leq k^{n-1} \qquad a_n \leq \frac{a_1}{k} \cdot k^n \qquad \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{a_1}{k}} \cdot k$$

$$\sqrt[n]{\frac{a_1}{k}} \to 1 \Rightarrow \forall k_1\ (1 \rangle k_1 \rangle k)\ \exists n_0 \in \aleph\ \ n \rangle n_0\ \ \sqrt[n]{\frac{a_1}{k}} \langle \frac{k_1}{k}$$

azaz $\sqrt[n]{a_n} \langle \frac{k_1}{k} \cdot k = k_1 \langle 1$.

A megfordítás nem igaz.

Pl.: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots$

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \; ha \; n \; páratlan \\ \frac{1}{3} \; ha \; n \; páros \end{cases}$$ Tehát $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1}{2} < 1$, azaz a sorozat konvergens.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \; ha \; n \; páratlan \to 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \; ha \; n \; páros \to \infty \end{cases}$$

T: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergens ha $\alpha > 1$, divergens $\alpha \leq 1$.

Abszolút konvergens sorok

Definíció: A $\sum a_n$ sort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a $\sum |a_n|$ sor konvergens.

T: Az abszolút konvergens sor konvergens.

Biz.: $\sum |a_n|$ konvergens $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0 \in \aleph \;\; m > n > n_0$, akkor

$\sum_{k=n+1}^{m} |a_n| < \varepsilon$, de $\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$.

Megjegyzés: Ha $\sum a_n = s$ és $\sum |a_n| = \widehat{s} \Rightarrow s \leq \widehat{s}$

$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n| = \widehat{s}_n$

$\lim\limits_{n \leftarrow \infty} s_n \leq \lim\limits_{n \to \infty} \widehat{s}_n$.

A tétel megfordítása nem igaz.

Pl.: A Leibniz-sor konvergens, de nem abszolút konvergens.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Mivel $\frac{1}{n} \to 0$. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \aleph \;\; \frac{1}{n_0 + 1} < \varepsilon$. Ekkor $\forall m > n > n_0$

$\left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + ... \pm \frac{1}{m} \right| < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0 + 1} < \varepsilon$. Azaz a sor konvergens. A $\sum \frac{1}{n}$ sor divergens.

Definíció: A konvergens, de nem abszolút konvergens sorokat feltételesen konvergens soroknak nevezzük.

T: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e$ azaz $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e.$

Először $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \langle 1+\frac{1}{n!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ ha $n\rangle 1$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\binom{n}{0}1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\ldots+\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}=1+\frac{n}{n}1+\frac{n(n-1)}{2!n2}+\frac{n!}{k!(n-k)!n^k}+\frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{n^n}$$

$$\langle 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}\le e\ \forall$ rögzített k-ra.

$!n\rangle k$

$$e\rangle\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

$$\rangle 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{s}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}(*)=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}\le e$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\Bigg)\le e$$

T: az e irracionális.

Biz.: *(*)* $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

Indirekt e rac. $e=\frac{p}{q}\quad p,q\in Z^+$.

Mivel $2\langle e\langle 3$, ezért $q\ge 2$. Szorozzuk meg *(*)*-ot $q!$-val!

$$\frac{p}{q}q!=q!+\frac{q!}{2!}+\frac{q!}{3!}+\ldots$$

$$p(q-1)!=\left(q!+q!+3\cdot 4\cdot\ldots\cdot q+4\cdot 5\cdot\ldots\cdot q+(q-1)q+q+1\right)+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots$$

Baloldala egész, ezért a jobboldalnak is egésznek kell lennie. A zárójelben lévő számok egészek. De a törtek összege egy $\frac{1}{2}$-nél nem nagyobb tört.

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

Alternáló sorok

Definíció: Az $\sum a_n$ sort változó előjelű vagy alternáló sornak nevezzük, ha $\operatorname{sgn} a_n \neq \operatorname{sgn} a_{n+1}$ és $a_n \neq 0\ \forall n \in \aleph$.

T: (Leibniz-kritérium). Ha a $\sum a_n$ alternáló sorban a $\langle |a_n| \rangle$ monoton csökkenő nullsorozat, akkor $\sum a_n$ konvergens.

B: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ ahol $a_n \rangle 0$ és $a_1 \rangle a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots \rangle 0$

$s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq s_{2n-1}$ a páratlan indexű monoton csökkenő.

$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \leq s_{2n}$ a páros monoton növekvő.

És bármely páros indexű részletösszeg kisebb mint bármely páratlan indexű részletösszeg.

$s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n} \leq s_{2n-1}$

$s_2 \leq s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$.

Tehát $\langle s_{2n} \rangle$ és $\langle s_{2n-1} \rangle$ konvergensek és $\exists \lim_{n\to\infty} s_{2n}$, ill. $\lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$

$s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n} \to 0$. Ezért a két határérték egyezik.

$s_2 = a_1 - a_2 \leq s \leq s_1 = a_1$.

Tehát az alternáló sor összege nem haladja meg a sor első tagját abszolút értékben.

A fenti tétel feltételeinek eleget tevő sorokat Leibniz típusú soroknak nevezzük.

T: Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens, akkor minden átrendezése konvergens és a sor összege mindig ugyanaz.

Biz.: ! $\sum a_n$ abszolút konvergens és $\sum a_n = s$.

$\forall \varepsilon \rangle 0\ \ \exists n_0 \in \aleph\ \ m \rangle n \rangle n_0 \Rightarrow (*) |s_m - s_n| = \sum_{i=n+1}^{m} |a_i| \langle \frac{\varepsilon}{2}$.

Jelölje a $\sum a_n$ egy átrendezett sorát $\sum b_n$

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ $\hat{s}_n = b + b_2 + \ldots + b_n$ és $\hat{n}_0 = \sup\{\varphi(1), \varphi(2), \ldots \varphi(n_0)\}$ akkor $\forall n \rangle n_0$-ra $|\hat{s}_n - s_n| \langle \varepsilon$ (Ui. $a_1, a_2 \ldots a_{n_0}$ számoknak meg van az ellenkező előjelű párja.

Tétel: (Riemann) Ha a $\sum a_n$ sor feltételesen konvergens és $c \in \Re$ tetszőleges, akkor létezik olyan $\sum b_n$ átrendezése a $\sum a_n$ -nek, hogy $\sum b_n = c$, sőt olyan is, hogy $\sum b_n = \infty$.

B:Bsz.

Pl:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \ln 2 \qquad / \cdot \frac{1}{2}$$

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \ln 2$$ összeadva a két sort kapjuk, hogy

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \ln 2$$

Ennek a sornak ugyanazok a tagjai csak más sorrendben.

Definíció: A $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok szorzatának nevezünk minden olyan sort, amelynek tagjai $a_i b_j$ alaknak és minden ilyen szorzat pontosan egyszer fordul elő.

Megjegyzés: különböző sorozatok egymásból csoportosításokkal és átrendezésekkel kaphatók.

Definíció: (Cauchy-szorzat) A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sor Cauchy szorzatán a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sort értjük, ahol $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$.

T: Ha a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ abszolút konvergens sorok az s-hez, ill. $\hat{s}$ konvergálnak, akkor a két sor szorzata is abszolút konvergens, melynek összege $s \cdot \hat{s}$.

Biz.: Megmutatjuk, hogy a szorzatsor abszolút konvergens, jelölje $\langle s_n \rangle$ a szorzatok abszolút értékéből alkotott sor n-edik részletösszegét. m jelentse az $a_i \cdot b_j$ szorzatok indexének a nagyobbikát.

$0 \le s_n \le \sum_{i=1}^{m} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{m} |b_j| \le s \cdot \hat{s}$ mivel s_n monoton és korlátos, így konvergens is.

Képezzük a következő részsorozatát a szorzatsor n-edik részletösszegének $a_1 b_1 + a_2 b_1 + \ldots + a_n b_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$ ez mivel $\sum a_n$ és $\sum b_n$ abszolút konvergens (s, ill. $\hat{s}$-hoz) $s \cdot \hat{s}$-hez konvergál.

Mivel ez a konvergens szorzatsor részletösszeg-szorzatának részszorzata, így a szorzatsor összege $s \cdot \hat{s}$.

Tétel: Két konvergens sor szorzata konvergál éspedig az összegek szorzatához, ha legalább az egyik sor abszolút konvergens.

Tétel: (Cauchy): ! a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorban $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge 0$.

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Leftrightarrow$ konvergens, ha a $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots +$ sor konvergens.

Biz.:

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$t_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k}$

A konvergenciához elegendő belátni a korlátosságot. Ha $n \langle 2^k$

(*) $s_n \le a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + \left(a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1} \right) \le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 2^k a_{2^k} = t_k$

ha $n \rangle 2^k$

$$s_n \ge a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + \left(a_{2^{k-1}} + \ldots + a_{2^k}\right) \ge \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k$$

$s_n \geq \frac{1}{2} t_k \qquad 2s_n \geq t_k \qquad (**)$

azaz $(*)$ és $(**)$ alapján $\langle s_n \rangle$ és $\langle t_k \rangle$ egyszerre korlátos vagy nem korlátos.

T: A $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergens ha $\alpha \rangle 1$ és divergens ha $0 \langle \alpha \leq 1$.

B:

1) ha $\alpha \rangle 1$ $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^k$ konvergens $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergens.
2) A div: $!0 \langle \alpha \leq 1$ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ a $\sum \frac{1}{n}$ divergens $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ is divergens.

Függvények globális tulajdonságai (paritás, korlátosság, periódikus, monoton függvény)

Definíció: Az $f : A \to \Re$ függvény páros (páratlan) ha $\forall x \in D_f$ számra $(-x) \in D_f$ és $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.

Megjegyzés:
1) Az $f(x) := x^n$ függvény páros, ha *n* páros és páratlan, ha *n* páratlan.
2) A páros függvény grafikonja az *y* tengelyre a páratlan az origóra tükrös.

Definíció.: Az f függvény periódikus, ha $\exists p \neq 0 (p \in \Re)$, hogy $\forall x \in D_f$-re $x + p \in D_f$, $x - p \in D_f$ és $f(x + p) = f(x)$. (*) *p*-t az *f* periódusának nevezzük.

Megjegyzés:
1) Nyilvánvaló, hogy (*) teljesüléséből $f(x + kp) = f(x)$ is teljesül, ahol $k \in Z$.
2) Az *f* függvény periódusán a legkisebb pozitív *p*-t értjük, ha van ilyen.
3) Nem minden periodikus függvénynek van legkisebb pozitív periódusa.
   Pl: az $f(x) = \begin{cases} 1 & ha \;\; x \; rac. \\ 0 & ha \;\; x \; irrac. \end{cases}$ függvénynek minden pozitív racionális szám periódusa, és ezek között nincs legkisebb.

Definíció: Az *f* függvény korlátos, ha R_f korlátos.

T: Az $f : A \to \Re$ függvény $\Leftrightarrow$ korlátos *A*-n, ha $\exists K \rangle 0 (K \in \Re)$, $\forall x \in A$-ra $|f(x)| \leq K$.

Definíció: Az $f : A \to \Re \; (A \subseteq \Re)$ monoton növekvő (csökkenő) ha $\forall x_1 \langle x_2 \; (x_1, x_2 \in A)$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2) \; (f(x_1) \geq f(x_2))$.

Ha az „=”-et nem engedjük meg, akkor az *f* szigorúan monoton.

T: Ha az *f* függvény szigorúan monoton, akkor invertálható és inverze ugyanolyan értelemben szigorúan monoton.

Biz.: Csak a szigorúan monoton növekvőre. $!f : A \to \Re(A \subset \Re)$ és f szigorúan monoton növekvő.

1) Megmutatja, hogy f^{-1} is függvény:

   Indirekt f^{-1} nem függvény, azaz $\exists x_1 < x_2 \in A$ úgy, hogy $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1} \Rightarrow (x_1, y), (x_2, y) \in f$ azaz $f(x_1) = f(x_2)$ ami ellentmond annak, hogy f szigorúan monoton növekvő.

2) Megmutatja, hogy f^{-1} is szigorúan monoton növekvő

   Indirekt: f^{-1} szigorúan monoton csökkenő azaz $y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2$ esetén $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$ áll fenn.

   $y_1 = f(f^{+1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2)) = y_2$ ellentmondás.

Megjegyzés: Előfordulhat, hogy f-nek nincs inverze az egész ért-on, de az inverz létezik D_f egy részhalmazán. (Van az f leszűkítésének inverze.)

Nem biztos, hogy egy invertálható függvény szigorúan monoton, pl.:

$$f(x) = \begin{cases} x \quad ha \quad 0 \le x < 1 \\ 3 - x \quad ha \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Műveletek függvények körében

Definíció: Azt mondjuk, hogy $f = g$, ha $D_f = D_g$ és $\forall x \in D_f$ esetén $f(x) = g(x)$.

Definíció: ! $f : A \to \Re$ és $g : A \to \Re$ függvények. $f + g$ függvényen az $f + g : A \to \Re$ függvényt értjük, amelyre $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Hasonlóan történik a $c \cdot f$, $f \cdot g$ és $g(x) \ne 0$ esetén $\dfrac{f}{g}$, *c*-szeres, szorzat-, ill. hányados függvény értelmezése.

Függvény határértéke

Definíció: $!f :\to \Re(A \subset \Re)$ és $x_0 \in \Re$ az A halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértéke az értelmezési tartománya x_0 torlódási pontjában az *a*, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy valahányszor $0 < |x - x_0| < \delta$ mindannyiszor $|f(x) - a| < \varepsilon$.

A fenti tényt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$-val jelöljük.

A környezet segítségével megfogalmazva.

Definíció: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.Ha $\forall V(a, \varepsilon)$-hoz $\exists V(x_0, \delta)$, hogy $x \in V(x_0, \delta)$ $x \ne x_0$ esetén $f(x) \in V(a, \varepsilon)$.

Megjegyzés:

1) $x_0 \in A$ és $x_0 \notin A$ is lehet, de x_0 torlódási pont kell, hogy legyen. Ugyanis ha x_0 izolált pont, akkor $V(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}=\emptyset$.
2) $0\langle|x-x_0|$ lényeges ugyanis

$$f(x)=\begin{cases} x \quad ha \quad 0\le x\langle 1 \\ \dfrac{1}{2} \quad ha \quad x=1 \\ 2-x \quad ha \quad 1\langle x\le 2 \end{cases}$$

$f(x)-nek \quad x\neq x_0 \quad esetben \quad x_0=1 \quad helyen \quad \exists$ *határértéke*,

$x=x_0 \quad esetben \quad x_0=1 \quad helyen \quad \nexists$ *határérétéke.*

3) x_0 lehet véges és lehet a $\pm\infty$ valamelyike is.
4) a lehet véges és lehet a $\pm\infty$ valamelyike $a=f(x_0)$ és $a\neq f(x_0)$ is lehet.

A határérték és a „konvergencia” közötti kapcsolatot teremti meg a következő tétel.

Tétel (Heine vagy Átviteli elv)

! $f: A\to\Re$ $(A\subset\Re)$ és $x_0\in\Re$ az A halmaz torlódási pontja.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \iff ha$

$\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n)=a \qquad \forall$ olyan A-beli $\langle x_n\rangle$-ra, amelyre

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $(x_n\neq x_0)$.

(Az f függvény határértéke az x_0 torlódási pontban a, ha $\forall x_n\to x_0, x_n\neq x_0$ esetén $f(x_n)\to a$.)

Biz.:

1. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$

(*) $\forall\varepsilon\rangle 0$-hoz $\exists\delta\rangle 0$, $0\langle|x-x_0|\langle\delta \Rightarrow |f(x)-a|\langle\varepsilon.$

(Bizonyítandó: $x_n\to x_0 \quad x_n\neq x_0 \quad esetén \quad f(x_n)\to a$.)

! $\langle x_n\rangle$ olyan A-beli sorozat $x_n\to x_0$ $(x_n\neq x_0)$

Ekkor $\delta\rangle 0$-hoz $\exists\, n_0\in\aleph,\ n\rangle n_0 \Rightarrow 0\langle|x_n-x_0|\langle\delta$, és így (*) miatt $|f(x_n)-a|\langle\varepsilon$, azaz $f(x_n)\to a$.

2. $\Leftarrow x_n \to x_0 \quad x_n \neq x_0$ esetén $f(x_n) \to a$.

(Bizonyítandó $\forall \varepsilon \rangle 0$ -hoz $\exists \delta \rangle 0$ hogyha $0 \langle |x - x_0| \langle \delta \Rightarrow |f(x) - a| \langle \varepsilon$)

Indirekt feltétel: *f*-nek $\nexists$ *h.é.* x_0-ban. Azaz $\exists \varepsilon \rangle 0$ amelyhez $\nexists \delta \rangle 0$.

$\delta_n = \frac{1}{n}(n = 1,2,3...)$ nem jó δ

$\exists x_1 \quad 0 \langle |x_1 - x_0| \langle \delta_1 = 1$ de $|f(x_1) - a| \geq \varepsilon$

$\exists x_2 \quad 0 \langle |x_2 - x_0| \langle \delta_2 = \frac{1}{2}$ de $|f(x_2) - a| \geq \varepsilon$

.

.

.

$\exists x_n \quad 0 \langle |x_n - x_0| \langle \delta_n = \frac{1}{n}$ de $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon$

.

.

.

Tehát $x_n \to x_0 \ (x_n \neq x_0)$ de $f(x_n) \not\to a$. Ellentmondás.

Pl.: $\chi(x) = \begin{cases} 1 & ha \quad x \ rac. \\ 0 & ha \quad x \ irrac. \end{cases}$ Egyetlen pontban sincs határértéke.

Def: $! f : A \to \Re \ (A \subset \Re)$ és $x_0 \in \Re$ torlódási pontja *A*-nak. Az *f* függvény baloldali (jobboldali) határértéke az $a_b(a_j) \in \Re$, ha $\forall \varepsilon \rangle 0$ -hoz $\exists \delta \rangle 0$, hogyha $0 \langle x_0 - x \langle \delta \ (0 \langle x - x_0 \langle \delta)$ akkor $|f(x) - a_b| \langle \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = a_b$ ($\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = a_j$)

T: Az $f : A \to \Re \ (A \subset \Re)$ függvény határértéke az x_0 torlódási pontban $\Leftrightarrow \exists$, ha ott létezik mindkét oldali, féloldali határértéke és azok egyenlőek.

Biz: $\Rightarrow$ Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Rightarrow$ léteznek a baloldali és jobboldali határértékek és azok egyenlőek.

$\Leftarrow \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = a_b$ és $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = a_j$ és $a_b = a_j = a$

$\forall \varepsilon \rangle 0 \ \exists \delta_b \rangle 0 \ \ 0 \langle x_0 - x \langle \delta_b \Rightarrow |f(x) - a| \langle \varepsilon$

$\forall \varepsilon \rangle 0 \ \exists \delta_j \rangle 0 \ \ 0 \langle x - x_0 \langle \delta_j \Rightarrow |f(x) - a| \langle \varepsilon$.

$! \delta = \min(\delta_b, \delta_j) \Rightarrow ha \ 0 \langle |x - x_0| \langle \delta \Rightarrow |f(x) - a| \langle \varepsilon$.

T: ! $f, g : A \to \Re (A \subset \Re)$ és $(x_0 \in \Re) x_0$ torlódási pontja *A*-nak, továbbá $c \in \Re$ tetszőleges. Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ és $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, akkor x_0-ban

$\exists$ az $f \pm g, f \cdot g, c \cdot f,$ és $b \neq 0$ esetben $\dfrac{f}{g}$ függvényeknek a határértéke és ezek $a \pm b, a \cdot b, c \cdot a$ és $\dfrac{a}{b}$.

Biz: A Heine tétel és a sorozatokra vonatkozó tételekből következik:
$x_n \to x_0 \ (x_n \neq x_0),\ f(x_n) \to a$ és $g(x_n) \to b \Rightarrow f(x_0) \pm g(x_0) \to a \pm b$.

T: ! $f : A_1 \to \Re$ és $g : A_2 \to \Re\ (A_1, A_2 \subset \Re)\, C_f \subset A_2$ és $(x_0 \in \Re) x_0$ torlódási pontja A_1-nek. Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ és y_0 torlódási pontja A_2-nek, továbbá $x \neq x_0, x \in A_1$ esetén $f(x) \neq y_0$, és $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = z_0$, akkor gof-nek létezik határértéke x_0-ban és $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = z_0$.

Biz.: $\forall \varepsilon \rangle 0\ \ \exists \delta, 0 \langle |x - x_0| \langle \delta \Rightarrow |g(f(x)) - z_0| \langle \varepsilon$.

$\varepsilon \rangle 0$-hoz $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = z_0$ miatt $\exists \delta_g \rangle 0,\ 0 \langle |y - y_0| \langle \delta_g \Rightarrow |g(y) - z_0| \langle \varepsilon$

$\delta_g \rangle 0 \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ miatt $\exists \delta_f \rangle 0 \quad 0 \langle |x - x_0| \langle \delta_f \Rightarrow |f(x) - y_0| \langle \delta_g$

Tehát ha

$$0 \langle |x - x_0| \langle \delta_f \Rightarrow 0 \langle |f(x) - y_0| \langle \delta_g \Rightarrow |g(y) - z_0| = |g(f(x)) - z_0| \langle \varepsilon$$

Pl:

1. hogy x_0 torlódási pontja legyen az lényeges

   $f(x) := -x^2 \qquad g(x) := \sqrt{x} \qquad (gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{-x^2}$

   $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 0} g(f(x))$ értelmetlen mert $D_{gof} = \{0\}$

2. $\chi(x) = \begin{cases} 1 & ha \ \ x\ rac. \\ 0 & ha \ \ x\ irrac. \end{cases}$

   $\chi(\chi(x)) = 1 \qquad \lim\limits_{x \to x_0} \chi(\chi(x)) = 1$

A tétel „csak" elegendő feltételt ad az összetett függvény határértékének létezésére. Az összetett függvénynek úgy is lehet határértéke, hogy *f*-nek és *g*-nek nincs.

3. Az $f(x) \neq y_0$ lényeges. Ugyanis

   $f(x) = \begin{cases} 0\ ha\ x\ irrac. \\ \dfrac{1}{q}\ ha\ x = \dfrac{p}{q} \quad (p, q) = 1\ q \rangle 0. \end{cases}$

   $g(x) = \begin{cases} 0 & ha \ \ x \neq 0 \\ 1 & ha \ \ x = 0 \end{cases}$

   $(gof)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 1\ ha\ x\ irrac. \\ 0\ ha\ x\ rac. \end{cases}$

   $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ és $\qquad \lim\limits_{x \to 0} g(f(x))$ nem létezik.

A végtelen mint határérték és határérték

Definíció: ! $f: A \to \Re$ és $x_0 \in \Re$ az A torlódási pontja. Az *f* függvény határértéke x_0-ban ∞, ha tetszőleges $K \rangle 0$-hoz $\exists\, \delta \rangle 0$, hogy ha $0 \langle |x - x_0| \langle \delta$ akkor $f(x) \rangle K$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Az *f* függvény határértéke x_0-ban $-\infty$, ha $\forall k \langle 0$-hoz $(k \in \Re)\, \exists \delta \rangle 0$, ha $0 \langle |x - x_0| \langle \delta \Rightarrow f(x) \langle k$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$! f: \Re \to \Re$

Definíció: $! f: \Re \to \Re$ Az f függvény határértéke ∞-ben a ha $\forall \varepsilon \rangle 0$-hoz $\exists\, K \rangle 0\ (K \in \Re)$, hogy ha $x \rangle K$ akkor $|f(x) - a| \langle \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$

Definíció: A f függvény határértéke $-\infty$-ben a ha $\forall \varepsilon \rangle 0$-hoz $\exists\, k \langle 0 (k \in \Re)$ $x \langle k$, akkor $|f(x) - a| \langle \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$

$! f: \Re \to \Re$ Az f függvény határértéke ∞-ben ∞, ha $\forall K \rangle 0$-hoz $\exists\, K_1 \rangle 0$, hogy ha $x \rangle K_1$, akkor $f(x) \rangle K$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Az *f* függvény határértéke $-\infty$-ben $-\infty$ ha $\forall k \langle 0$-hoz $\exists\, k_1 \langle 0$ „ hogy ha $x \langle k_1 \Rightarrow f(x) \langle k_0$

Az *f* függvény határértéke ∞-ben $-\infty$, ha $\forall k \langle 0$-hoz $\exists\, K_1 \rangle 0$, hogy ha $x \rangle K_1 \Rightarrow f(x) \langle k$

Az f függvény határértéke $-\infty$-ben ∞, ha $\forall K \rangle 0$-hoz $\exists\, k_1 \langle 0$, hogyha $x \langle k_1 \Rightarrow f(x) \rangle K$.

A definíciók megfogalmazhatók az átviteli elv segítségével is.

További tételek a határértékre

Definíció: Az f függvény x_0-ban jeltorló ha $\exists V(x_0, \delta)$ úgy, hogy $x \in V(x_0, \delta)$, akkor *sign* $f(x) = \textit{állandó}$.

T.: Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \neq 0$, akkor $f(x)$ jeltartó x_0-ban.

Bizonyítás: $! a \rangle 0$, akkor $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$-höz $\exists \delta \rangle 0,\ 0 \langle |x - x_0| \langle \delta \Rightarrow |f(x) - a| \langle \dfrac{a}{2}$ azaz

$-\dfrac{a}{2} \langle f(x) - a \langle \dfrac{a}{2} \Rightarrow \dfrac{a}{2} \langle f(x) \langle \dfrac{3a}{2}$ Tehát $f(x)$ jeltartó x_0-ban ($a \langle 0$-ra hasonlóan).

T: ! $f, g: A \to \Re$ és $x_0 \in \Re$ torlódási pontja *A*-nak, továbbá $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in A$-ra és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a,\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, akkor $a \leq b$.

T: ! $f, g, h : A \to \Re$ és $x_0 \in \Re$ torlódási pontja A-nak és $f(x) \le h(x) \le g(x)$ $\forall x \in A$-ra. Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$.

Bizonyítás: A fenti két tétel az átviteli elv alapján triviális.
T.: ! $f, g : A \to \Re$ és $x_0 \in \Re$ torlódási pontja A-nak, ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \rangle \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ akkor $\exists V(x_0, \delta), \forall x \in V(x_0, \delta)$ $x \neq x_0$ $f(x) \rangle g(x)$.
Bizonyítás: ! $F(x) = f(x) - g(x)$ ekkor $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) \rangle 0$. Így a jeltartás miatt $\exists V(x_0, \delta), F(x) \rangle 0$.

T: Ha $f : A \to \Re$ és f monoton, akkor az értelmezési tartománya bármely torlódási helyén $\exists$ mindkét oldali véges vagy végtelen határértéke.

Bizonyítás: mon. növ. esetben és ! x_0 torlódási pontja A-nak.
! $x_n \to x_0^-$ $\{x_n\}$ mon.növ., ezért $\langle f(x_n) \rangle$ is mon. növekvő.

Ha $\langle f(x_n) \rangle$ felülről korlátos akkor a_b véges.
Ha $\langle f(x_n) \rangle$ felülről nem korlátos akkor $a_b = \infty$.

! $x_n \to x_0^+$ hasonlóan.

T: Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ és a g függvény az x_0 egy környezetében korlátos akkor $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$

Bizonyítás: Ha $g(x)$ korlátos egy $V(x_0, \delta_1)$-ra $|g(x)| \langle K (K \rangle 0)$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ $\quad \dfrac{\varepsilon}{K}$-hoz $\exists \delta_2$, $x \in V(x_0, \delta_2) \Rightarrow |f(x)| \langle \dfrac{\varepsilon}{K}$.

! $\delta = \min.(\delta_1, \delta_2)$. Ekkor $0 \langle |x - x_0| \langle \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x)| \langle \dfrac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon$.

T: Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Rightarrow f$ az x_0 hely valamely környezetében korlátos.
B: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ $\quad \forall \varepsilon \rangle 0$-hoz $\quad \exists \delta \rangle 0$ $\quad 0 \langle |x - x_0| \langle \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - a| \langle \varepsilon$

$-\varepsilon \langle f(x) - a \langle \varepsilon$
$a - \varepsilon \langle f(x) \le a + \varepsilon$

Megfordítás nem igaz, pl.: $\chi(x)$

T: Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |a|$

Bizonyítás: $\left||f(x)|-|a|\right| \leq |f(x)-a| \langle \varepsilon$.

Megfordítás nem igaz $\quad f(x)=\begin{cases} 1 & x \ \ rac. \\ -1 & x \ irrac. \end{cases}$

Folytonosság

Definíció: $!\, f : A \to \Re$. Az *f* függvény folytonos az $x_0 \in A$ pontban, ha $\forall \varepsilon \rangle 0$-hoz $\exists \delta \rangle 0$, hogyha $|x - x_0| \langle \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| \langle \varepsilon$.

T: Az *f* függvény $\Leftrightarrow$ folytonos $x_0 \in A$-ban, ha $\forall x_n \to x_0$ esetén $f(x_n) \to f(x_0)$

Megjegyzés:
1) $x = x_0$ is lehet az x_0 helyen folytonos függvényre.
2) A folytonosság pontbeli tulajdonság.
3) $f : \aleph \to \Re$ folytonos $\aleph$-n.

Definíció: Az $f : A \to \Re$ *f* függvény folytonos *A*-n, ha $A\ \forall$ pontjában folytonos.

T: Ha *f* és *g* folytonos x_0-ban, akkor ott folytonos $f \pm g, c \cdot f (C \in \Re), |f|, f \cdot g$, és ha $g(x_0) \neq 0$ akkor $\dfrac{f}{g}$ is.

T: Ha *f* folytonos x_0-ban és *g* folytonos $f(x_0)$-ban, akkor $(gof)(x) = g(f(x))$ is folytonos x_0-ban.

Definíció: $!\, f : A \to \Re$ és $x_0 \in A$. Az *f* függvény x_0-ban jobbról (balról) folytonos, ha $\forall \varepsilon \rangle 0 \ \ \exists \delta \rangle 0,\ 0 \leq x - x_0 \langle \delta\ (0 \leq x_0 - x \langle \delta)$, akkor $|f(x) - f(x_0)| \langle \varepsilon$.

T: Az *f* függvény $\Leftrightarrow$ folytonos x_0-ban, ha ott jobbról is és balról is folytonos.

T: $!\, f : A \to \Re$ és $x_0 \in A$. Ha x_0 izolált pontja *A*-nak, akkor *f* folytonos x_0-ban.

Bizonyítás: $!\ \varepsilon \rangle 0$ tetszőleges. Mivel x_0 izolált pont $\exists \delta \rangle 0, V(x_0, \delta) \cap A = \{x_0\}$, ekkor $x \in A$ és $|x - x_0| \langle \delta$ esetén $x = x_0$ ezért $|f(x) - f(x_0)| \langle \varepsilon$.

T: Ha *f* szigorúan monoton és olyan x_0 pontban folytonos, amely az értelmezési tartomány kétoldali torlódási helye, akkor az f^{-1} folytonos $f(x_0)$-ban.

B: ! $f\uparrow$ Ekkor f^{-1} létezik.

! $V(x_0,\varepsilon)$ tetszőleges és $x_1,x_2\in V(x_0,\varepsilon)$ úgy, hogy $x_1\langle x_0\langle x_2$ és $\delta=\min\{\,|f(x_1)-f(x_0)|,\ f|\ (x_2)-f(x_0)\ |\ \}$

Ha $|f(x)-f(x_0)|\langle\delta$ ekkor $-\delta+f(x_0)\langle f(x)\langle f(x_0)+\delta$

$f(x_1)\langle f(x)\langle f(x_2)$, de ekkor $x_1\langle x\langle x_2$ ($\uparrow$ miatt) $|x-x_0|\langle\varepsilon$.

Definíció: Ha az *f* függvény x_0-ban nem folytonos, akkor ott szakadásos.

Az *f* függvény x_0 helyen való folytonossága, vagy szakadása szempontjából a következő esetek állnak fenn:

1. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ és $f(x_0)$ léteznek és megegyeznek $\Rightarrow$ *f* folytonos.
2. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a$, de $f(x_0)$ vagy nem létezik vagy $f(x_0)\neq a$. Ekkor ez esetben megszüntethető szakadása van. $f(x)$-nek x_0-ban. (Ui.: $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ értelmezéssel folytonossá tehető.)
3. $a_b=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a_j$ ekkor *f*-nek „ugráshelye” van x_0-ban.

   A 2.-at, és 3.-at. együttesen elsőfajú szakadásnak nevezzük.
4. Minden más szakadást másodfajú szakadásnak nevezzük.

Pl.:

2.-re $f(x)=\begin{cases} x^2 & ha\ \ x\neq 0\\ 1 & ha\ \ x=0\end{cases}$ $x_0=0$ helyen.

3.-ra $f(x)=\operatorname{sgn} x$ $x_0=0$ helyen.

4.-re $\chi(x)$-nek minden pontjában.

! $f(x)=\begin{cases}\chi & ha\ \ x\ rac.\\ 2-x & ha\ \ x\ irrac.\end{cases}$

Az $x_0=1$ kivételével mindenütt másodfajú szakadása van.

Az $x_0=1$ helyen folytonos.

Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvények

Definíció: Az $f:[a,b]\to\Re$ függvény folytonos az $[a,b]$-on ha $[a,b]$ minden belső pontjában folytonos, *a*-ban jobbról, *b*-ben balról folytonos.
Az $[a,b]$-on folytonos függvények összegét $\mathbf{C}[a,b]$-vel jelöljük.

T: Ha $f\in\mathbf{C}[a,b]$, akkor *f* korlátos $[a,b]$-n.
Bizonyítás: Indirekt: f felülről nem korlátos. Azaz $\forall k^{*}\in\Re^{+}$-hez $\exists x_{k*}\in[a,b]$, hogy $f(x_{k*})\rangle k*$.

Ha *k** végigfut az *1,2,3…, n…* $\in\aleph$ számok mindegyikén, kapjuk az $x_1,x_2...,x_n...$ $\langle x_n\rangle$-ot, és a nekik megfelelő $\langle f(x_n)\rangle$-ot.

Az $\langle x_n\rangle$ korlátos $\Rightarrow\exists$ konvergens részsorozata. ! ez $\langle x_{\varphi(n)}\rangle$. ! $x_{\varphi(n)}\to x_0$. Ekkor $f(x_{\varphi(n)})\to f(x_0)$ (a folytonosság miatt), ami ellentmond, $f(x_{\varphi(n)})\rangle\varphi_{(n)}$

Megjegyzés:
1. A tétel nyílt intervallumra nem érvényes.
   Pl.: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ függvény a $(0,1)$-ben folyt, de nem korlátos.
2. Egy szakadásos függvény, amely egy zárt intervallum minden helyén értelmezve van, lehet, hogy nem korlátos ezen az intervallumon.
   $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & ha\ \ 0\langle x\le 1\\ 0\ \ ha & x=0.\end{cases}$$

T: (Weierstrass) Ha $f\in$ $\mathbf{C}[a,b]$, akkor $\exists\xi,\eta\in[a,b]$, hogy $f(\xi)=h$, ill. $f(\eta)=h*$. ($h=\inf R_f$, $h*=\sup R_f$).

B: Ha $f\in\mathbf{C}[a,b]\Rightarrow f$ korlátos, így *f*-nek $\exists$ alsó és felső határa. Megmutatja, hogy $\exists\xi\in[a,b]$, $f(\xi)=h$.
Indirekt: $\nexists x\in[a,b]$, hogy $f(x)=h$ $\forall x\in[a,b]$-ra $f(x)\rangle h$

$F(x)=\dfrac{1}{f(x)-h}\rangle 0.$ F folytonos $\Rightarrow$ korlátos, azaz $\exists k*\in\Re^{+}$,

$0\langle F(x)=\dfrac{1}{f(x)-h}\langle k*\Rightarrow f(x)\rangle h+\dfrac{1}{k*}$

Ez ellentmond annak, hogy *h* alsó határ.

Hasonlóan lehet h*-ra is.

Megjegyzés: A tétel nyitott intervallumra nem érvényes.
Pl.: $f(x)=x \;\; ha \;\; 0<x<1 \quad h=0,\, h^*=1,\;\; de \;\; f(x)\neq 0 \; és \;\; f(x)\neq 1$

A tétel nem ad választ arra, hogy hány olyan hely van, ahol *f* felveszi az alsó és felső határt.

Definíció: ! $f : A \to \Re \;\; (A \subset \Re)$ és $x_0 \in A.$ Az f függvénynek x_0-ban helyi minimuma (maximuma) van, ha $\exists V(x_0,\delta)$ úgy, hogy ha $x \in V(x_0,\delta)$ akkor $f(x_0)\leq f(x)$ $(f(x)\leq f(x_0))$.

Definíció: A helyi min. (max.) legkisebbikét (legnagyobbikát) abszolút min (max.)-nak nevezzük.

Ezek figyelembevételével a fenti tétel azt mondja ki, hogy:
T: Ha $f \in \mathbf{C}\,[a,b] \Rightarrow f$ felveszi abszolút min.-át és max.-át.

T: Ha $f \in \mathbf{C}[a,b]$ és $x_1<x_2$ olyan, hogy $f(x_1)\neq f(x_2)$ továbbá c$\in \Re$ $f(x_1) \lessgtr c \lessgtr f(x_2)$, akkor $\exists \xi \in (x_1,x_2)$ úgy, hogy $f(\xi)=c$.

Bizonyítás: Először bebizonyítjuk a következő lemmát.
Lemma: Ha $f \in \mathbf{C}[a,b]$ **és** $f(a)\cdot f(b)<0$**,** akkor $\exists \xi \in (a,b), f(\xi)=0$.

Bizonyítás: ! $f(a)<0$ és $f(b)>0$ és $H=\{\, x | x \in [a,b] \wedge f(x)<0\}$.

H korlátos ezért $\exists$ felső határa ! az ξ. $\xi \neq a$ és $\xi \neq b$, mert pl. $\xi = b$ esetén *f* *b*-ben nem folytonos.

Megmutatjuk, hogy $f(\xi)=0$. Ha $f(\xi)>0$, akkor $\exists$-ne $V(\xi,\delta)$, hogy ha $x \in V(\xi,\delta) \Rightarrow f(x)>0$, de akkor ξ nem felső határ, hisz $\xi-\delta$ is felső korlát.
Ha $f(\xi)<0 \Rightarrow \exists\, V(\xi,\delta_1)$ $f(x)<0$ $(x \in V(\xi,\delta_1))$. Ez nem lehet, mert ha $\xi<x<\xi+\delta_1$ ellentmond annak, hogy ξ felső határ.

Ezek után a tétel biz.: ! $x_1<x_2$ és $f(x_1)<f(x_2)$, továbbá $f(x_1)<c<f(x_2)$

! $F(x)=f(x)-c \Rightarrow F(x_1)<0,\;\; F(x_2)>0$ tehát $\exists\, \xi \in (x_1,x_2)$, hogy $F(\xi)=0$ azaz $f(\xi)=c$.

Megjegyzés:

1. Ha ismeretes, hogy *f*-nek egy zárt intervallumon létezik legnagyobb és legkisebb értéke, továbbá minden olyan értéket felvesz, amely ezek közé esik, akkor ebből nem következik, hogy *f* folytonos ebben a zárt intervallumban.

   Pl.: $f(x)=\begin{cases} x+1 & ha \ \ -1\le x\le 0 \\ -x & ha \ \ 0\langle x\le 1 \end{cases}$

2. A tételben szereplő *f* függvény-t Darboux-tulajdonságúnak is szokás nevezni.

Egyenletes folytonosság

Pl: $!f:[0,2]\Rightarrow \Re \quad f(x):=x^2$. Igazoljuk, hogy f az $x_0=1,\dfrac{1}{3}$ helyen folytonos, azaz

$\lim\limits_{x\to 1} x^2=1$, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} x^2=\dfrac{1}{9}$

$!\varepsilon\rangle 0$ tétel

$\left|x^2-1\right|=|x-1||x+1\langle 3\cdot|x-1| \quad ! \ \ \delta=\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$ akkor ha $|x-1|\langle\delta\Rightarrow\left|x^2-1\right|\langle\varepsilon$

$\left|x^2-\dfrac{1}{3}\right|=\left|x-\dfrac{1}{3}\right|\left|x+\dfrac{1}{3}\right|\langle\dfrac{4}{3}\left|x-\dfrac{1}{3}\right|\langle\varepsilon \ \ ! \ \ \delta=\min\left(1,\dfrac{3\varepsilon}{4}\right)$ akkor ha $\left|x-\dfrac{1}{3}\right|\langle\delta\Rightarrow\left|x^2-\dfrac{1}{9}\right|\langle\varepsilon$.

Ugyanahhoz az $\varepsilon\rangle 0$ különböző x_0 esetén különböző δ tartozik. Ha van olyan δ, amely $\forall x_0$-hoz jó (ún. univerzális δ), akkor egy, az intervallumon való folytonosságnál „erősebb” kikötéshez jutunk.

Definíció: az *f* függvény egyenletesen folytonos az $\langle a,b\rangle$-on ha $\forall\varepsilon\rangle 0$-hoz $\exists\delta\rangle 0$, hogy ha $|\xi-\eta|\langle\delta \ (\xi,\eta\in\langle a,b\rangle)\Rightarrow|f(\xi)-f(\eta)|\langle\varepsilon$.

T: (Heine, Cantor). Ha $f\in \mathbf{C}[a,b]$, akkor *f* egyenletesen folytonos $[a,b]$-n.

B: Indirekt. $f\in\mathbf{C}[a,b]$ és *f* nem egyenletesen folytonos.

$\exists\varepsilon\rangle 0$, hogy $\nexists\delta\rangle 0$ úgy, hogy ha $|\xi-\eta|\langle\delta\Rightarrow|f(\xi)-f(\eta)|\langle\varepsilon$ teljesüljön.

$\delta_n=\dfrac{1}{n}$ nem jó δ azaz $\exists\xi_n$ és η_n úgy, hogy $|\xi_n-\eta_n|\langle\delta_n$ de $|f(\xi_n)-f(\eta_n)|\ge\varepsilon$.

Mivel $\{\xi_n\},\{\eta_n\}\subset[a,b]$ ezért léteznek $\langle\xi_{n_k}\rangle,\langle\eta_{n_k}\rangle$ konvergens részsorozatok úgy, hogy $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\eta_{n_k}=x_0$. Ekkor $f(\xi_{n_k})\to f(x_0)$ és $f(\eta_{n_k})\to f(x_0)$, ami ellentmond annak, hogy $\left|f(\xi_{n_k})-f(\eta_{n_k})\right|\ge\varepsilon$.

Az elemi függvények folytonossága

Definíció: Az $\begin{cases} f(x)=c \\ f(x)=\sin x \\ f(x)=e^x \end{cases}$ függvényeket elemi alapfüggvényeknek nevezzük.

Az elemi függvények az elemi alapfüggvényekből az alapműveletek az összetett- és inverz függvényképzés segítségével előállított függvények.

Pl: $f(x)=x$ az $x=e^{\ln x}$ segítségével.
Az $f(x)=|x|, f(x)=[x]$ nem elemi függvények.

T: Az elemi függvények az értelmezési tartományok minden pontjában folytonosak.

Biz.: Elég csak az elemi alapfüggvényekre igazolni.
1. $|c-c|\langle\varepsilon \;\; ha \;\; |x-x_0|\langle\delta \quad \delta=\varepsilon$ "jó" δ
2. $f(x)=\sin x$

$$|\sin x-\sin x_0| = \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|\langle\delta$$

$\delta=\varepsilon$ jó δ.
3. $\lim\limits_{x\to x_0} e^x = \lim\limits_{x\to x_0}\left(e^{x-x_0}\cdot e^{x_0}\right) = e^{x_0}\lim\limits_{x\to x_0}\left(e^{x-x_0}\right) = e^{x_0}$

Csak ezt kell igazolni, $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$.

$!\langle x_n\rangle \to 0(x_n\rangle 0)$ ekkor $\exists\langle\eta_n\rangle\in\aleph \quad \eta_n \le \frac{1}{x_n}\langle\eta_n+1$ azaz $\frac{1}{\eta_n+1}\langle x_n \le \frac{1}{\eta_n}$ és így

$e^{\frac{1}{\eta_n+1}}\langle e^{x_n}\langle e^{\frac{1}{\eta_n}}$ hasonlóan $(x_n\langle 0)$

T: $\lim\limits_{x_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$

B: $\forall x_n\to\infty$ ha $\exists\langle p_n\rangle p_n\in\aleph$,
$p_n \le x_n \le p_n+1$

$$\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n+1} \ge \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \ge \left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n}$$

$$\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}\left(1+\frac{1}{p}\right) \ge \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x} \ge \left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n+1}\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{-1}$$ (Rendőr-tétel)

Pl.: $\lim\limits_{x_n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \lim\limits_{z_n\to\infty}\left(1-\frac{1}{z_n}\right)^{-z_n} = \lim\limits_{z_n\to\infty}\left(\frac{z_n}{z_n-1}\right)^{z_n} = \lim\limits_{z_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{z_n-1}\right)^{z_n-1}\left(1+\frac{1}{z_n-1}\right) = e$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$ Az ábrát lásd előadáson!

$|\sin x|\langle|x|$

$t(OAB\Delta)\langle t(OAB\angle)\langle t(OAC\Delta)$

$|\sin x|\langle|x|\langle|\mathrm{tg}\,x|$

$1\langle\left|\frac{x}{\sin x}\right|\langle\frac{1}{|\cos x|}$ $0\langle x\langle\frac{\Pi}{2}$ esetén mindegyik pozitív

$\cos x\langle\frac{\sin x}{x}\langle 1$ $0\langle 1-\frac{\sin x}{x}\langle 1-\cos x$

$-\cos x\rangle-\frac{\sin x}{x}\rangle-1$

$1-\cos x\rangle 1-\frac{\sin x}{x}\rangle 0$

$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\langle 2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}$

! $\varepsilon\rangle 0$ tetszőleges ha $\delta=\min\left(\frac{\Pi}{2},\sqrt{2\varepsilon}\right)$ akkor ha $|x|\langle\delta$

$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|\langle\frac{x^2}{2}\langle\varepsilon$ azaz $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.