Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az általános - és a középiskolai oktatásban általában olyan egyenleteket (vagy egyenletrendszereket) vizsgálunk, illetve oldunk meg a valós számok halmazán, amelyekben egy vagy több ismeretlen szerepel adott számok és (vagy) paraméterek mellett.

Ugyanakkor egyes feladatgyűjteményekben vagy matematikai versenyeken gyakran találkozhatunk olyan egyenletekkel (illetve egyenletrendszerekkel) is, amelyek ismeretlen, esetleg adott tulajdonságú függvényeket tartalmaznak, számok, paraméterek vagy ismert függvények mellett. Ezek megoldása azt jelenti, hogy meg kell határozni az összes olyan függvényt, amelyre az egyenlet (egyenletrendszer) teljesül.

Néhány bevezető probléma (melyek bemutatása előtt jelezzük, hogy a jegyzetben $\mathbb{N}$ a pozitív természetes számok, $\mathbb{R}$ a valós számok, $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok, míg $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát jelöli):

1. Határozzuk meg azon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyek bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesítik az

   $$f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0$$

   függvényegyenletet és amelyekre $f(1) = 2$, $f(2) = 3$.
   Ez egy, **a természetes számok halmazán teljesülő függvényegyenlet**.

   Felhasználva a sorozat definícióját, az $a_n = f(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ jelöléssel a következőket is mondhatjuk. Adjuk meg az összes olyan sorozatot, amely teljesíti az

   $$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n;\ a_1 = 2, a_2 = 3$$

   rekurziót. Az (a_n) sorozat tehát egy **rekurzív sorozat**.

2. Határozzuk meg azon $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyek teljesítik az

   $$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x + 6 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

úgynevezett **egyváltozós függvényegyenletet**.

Itt egyrészt a keresett f függvény argumentumában a

$$g_1(x) = x \text{ és a } g_2(x) = \frac{1}{x}\ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

ismert vagy adott függvények szerepelnek, másrészt az argumentumon kívül a $h(x) = 3x+6 \quad (x \in \mathbb{R})$ ismert függvény és a 2 konstans is.

3. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre teljesülő

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cos y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenlet megoldásait. Ez egy **kétváltozós függvényegyenlet**, melyben a $g(y) = \cos y \quad (y \in \mathbb{R})$ adott függvény is szerepel.

4. Adjuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, amelyre teljesül az

$$f(2x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenlet. Itt az előbbieken túl fontos, hogy a **függvényegyenlet folytonos megoldásait keressük**.

5. Keressük az összes olyan differenciálható (vagy olyan folytonos) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely teljesíti az

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Cauchy-féle alapegyenletet.

Ez egy egyváltozós függvényekre teljesülő **kétváltozós függvényegyenlet**. Az összeadás és a szorzás disztributív tulajdonsága nyilvánvalóan adja, hogy $f(x) = cx \quad (x \in \mathbb{R})$ megoldása a Cauchy-alapegyenletnek.

Lehetnek más differenciálható (folytonos) megoldásai?

A középfokú iskolai oktatásban néha ,,elbújtatva" találkoznak a tanulók függvényegyenletekkel.

- Tudják például, hogy az $f(x) = x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény bármely $n \in \mathbb{N}$-re teljesíti a
$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
függvényegyenletet, hiszen $(xy)^n = x^n y^n \quad (x, y \in \mathbb{R})$ (az egyenlő kitevőjű hatványok szorzásának szabálya) ismert.
- Az $l(x) = \log_a(x)$ $(x \in \mathbb{R}^+)$ függvény az $\log_a$ függvény „addíciós” tulajdonsága miatt teljesíti az
$$l(xy) = l(x) + l(y) \quad \left(x, y \in \mathbb{R}^+\right)$$
függvényegyenletet.

  Kérdés, hogy vannak-e más folytonos függvények, amelyekre az utóbbi két függvényegyenlet teljesül.

  Ismert a tény, hogy bizonyos függvényegyenletekkel definiálunk egyes függvényosztályokat.
- Az $f(x) = f(-x)$ vagy $f(-x) = -f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényegyenleteket teljesítő függvényeket nevezzük páros, illetve páratlan függvényeknek.
- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt akkor nevezzük $a(\neq 0)$ szerint periodikusnak, ha teljesíti az
$$f(x + a) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$
függvényegyenletet.

A következőkben az 1 – 5. példákban tekintett „függvényegyenlettípusok” megoldásainak néhány lehetséges módszerét mutatjuk be. Meg kell azonban jegyezzük, hogy a függvényegyenletek megoldásában viszonylag kevés általános módszer létezik.

Az irodalomjegyzék azt mutatja, hogy magyar kutatók és tanárok alapvető szerepet játszottak a függvényegyenletek elméletének kidolgozásában, illetve az iskolai alkalmazások felkutatásában, összegyűjtésében.

Az egyenletek, sorozatok és függvények tanításához a normál tananyag feldolgozása során is kapcsolódhatnak egyszerűbb függvényegyenletek megoldására vonatkozó feladatok. Ezek az alapvető fogalmak, tételek és megoldási módszerek elmélyítését segíthetik az egyenletek és az egyenletrendszerek megoldásánál és a függvények vizsgálata során. Ugyanakkor az iskolai szakköri foglalkozásokon vagy a tehetséggondozás (versenyelőkészítés) keretei között lényegesen bővíthetjük a tanulók ismeretanyagát és a rendelkezésre álló feladatmegoldási módszereket, ha szélesebb kitekintést adunk nekik a függvényegyenletek megoldási módszereiről.

A) Függvényegyenletek a természetes számok halmazán (rekurzív sorozatok)

A középiskolában vizsgált függvények közül kitüntetett szerepük van azoknak, melyek a pozitív természetes számok halmazán vannak értelmezve. Az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fügvényt sorozatnak nevezzük és ennek a sorozatnak az n-edik általános tagjára az $a_n = f(n)$ $(n \in \mathbb{N})$, míg magára a sorozatra az (a_n) jelölést is használjuk.

Speciálisan foglalkozunk például az

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (n \in \mathbb{N}) \, , \qquad b_{n+1} = b_n q \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

szerint (rekurzióval) definiált számtani, illetve mértani sorozatokkal (ahol $d \in \mathbb{R}$ a számtani sorozat differenciája, $q \in \mathbb{R}$ pedig a mértani sorozat hányadosa).

Ha $f_1(n) = a_n$, $f_2(n) = b_n$, úgy (1) adja $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$f_1(n+1) = f_1(n) + d \quad (n \in \mathbb{N}) \, , \qquad f_2(n+1) = qf_2(n) \tag{1'}$$

függvényegyenleteket a természetes számok halmazán.

A tanulók ismerik annak teljes indukciós bizonyítását, hogy $a_n = a_1 + (n-1)d$ $(n \in \mathbb{N})$ (a számtani sorozat n-edik tagjára), míg $b_n = b_1 q^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ (a mértani sorozat n-edik tagjára).

Így az $(1')$ alatti függvényegyenletek megoldása $n \in \mathbb{N}$-re

$$f_1(n) = f_1(1) + (n-1)d \, , \qquad f_2(n) = f_2(1)q^{n-1} \tag{1''}$$

Ennél a megoldás (adott d, illetve q mellett) függ az $a_1 = f_1(1)$ illetve $b_2 = f_2(1)$ értékektől, amelyek szabadon választhatók. Ha ezek adottak, úgy a számtani és a mértani sorozat, illetve az $(1')$ alatti függvényegyenletek megoldása egyértelműen meghatározott $(1'')$ által.

Azzal is találkoznak a tanulók, hogy úgy határozunk meg egy sorozatot, hogy megadjuk az első néhány tagját és azt a képzési szabályt, amelynek segítségével az n-edik tag értéke a korábbi tagokból kiszámítható. Ilyen például a Fibonacci-sorozat meghatározása. $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_1 = 1 \; , \qquad a_2 = 1 \; , \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \tag{F}$$

Ez egy úgynevezett rekurzív sorozat, amely egyértelműen meghatározott. a_5 vagy a_{10} nem túl sok számolással meghatározható a definícióból, de mondjuk a_{1000} meghatározása már kényelmetlen lenne.

Ezért jó lenne (hasonlóan a számtani és mértani sorozathoz) találni olyan képletet, amely a_n-et n értékével fejezi ki.

Az előbbiek, az $a_n = f(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ jelölés mellett, az

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n) \; , \qquad f(1) = f(2) = 1 \tag{F'}$$

függvényegyenletre kérdezik, hogyan adható meg $f(n)$ (vagyis az f az n függvényében).

Általánosabban (F') helyett tekinthetünk $n \in \mathbb{N}$-re egy

$$a_k(n)f(n+k) + \ldots + a_1(n)f(n+1) + a_0(n)f(n) = g(n) \tag{2}$$

alakú függvényegyenletet a természetes számok halmazán, ahol f ismeretlen, $a_i(n), g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ adott (esetleg konstans) függvények.

Az előbbi „tapasztalatok" alapján akkor várhatjuk, hogy (2)-nek létezik egyértelmű megoldása, ha $f(1), f(2), \ldots, f(k)$ értékét megadjuk.

A (2) alakú egyenleteket szokás (k-adrendű) lineáris differencia-egyenleteknek (vagy k-adrendű rekurziónak) is nevezni. Ezek megoldására nincsenek általános szabályok.

Van azonban a (2) alakú egyenleteknek egyértelmű megoldása, ha ebben $a_i(x) = c_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ konstansok. Ekkor (2) az

$$f(n+k) = a_k f(n+k-1) + \ldots + a_1 f(n) + g(n) \tag{3}$$

alakba hozható $(n \in \mathbb{N})$. Ez egy állandó együtthatós lineáris differencia-egyenlet (rekurzív összefüggés), amelyet $g(n) = 0$ esetén homogénnek nevezünk.
(Ha $k = 2, g(n) = 0$, így ez adja (F)-et.)

Ismert (3) megoldásának általános elmélete, de ez nehézségeket okozhatna a középiskolai feldolgozásban.

Itt most a (2) és (3) egyenletek azon speciális eseteit tekintjük, amikor $k = 1$, vagy $k = 2$.

A $k = 1$ mellett (2)-ből az

$$a_1(n)f(n+1) + a_0(n)f(n) = g(n) \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{2'}$$

függvényegyenlet következik a természetes számok halmazán, ahol $f(1)$-et tetszőlegesen írhatjuk elő.

A (2′) egyenlet megoldásánál (a többnyire adott a_1, a_0 és g függvények mellett) követhetjük azt a módszert is, hogy $f(n)$ értékét néhány n-re kiszámítjuk, majd megfogalmazunk egy sejtést $f(n)$ általános alakjára. Ezt a sejtést azután teljes indukcióval bebizonyítjuk (ahogy azt a középiskolában az (1″) esetében megtettük).

Ugyanakkor ha $a_0(n) = -1, a_1(n) = a$ konstans, úgy más módszert (az úgynevezett teleszkópos összegeket) is használunk majd $f(n)$ meghatározásához.

Ha $k = 2$, úgy (3)-ból

$$f(n+2) = af(n+1) + bf(n) + g(n) \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3'}$$

adódik. Ezt $g(n) \neq 0$ esetén csak speciális esetekben oldjuk meg.

Ha $g(n) = 0$, úgy leírjuk az

$$f(n+2) = af(n+1) + bf(n), f(1) = A, f(2) = B \tag{3''}$$

függvényegyenlet megoldást ($n \in \mathbb{N}$).

(3″) megoldásából $a = b = A = B = 1$ esetén pedig kapjuk az (F) Fibonacci-sorozat $a_n = f(n)$ általános tagjának előállítását.

Vizsgálunk majd néhány nem lineáris differencia-egyenletet is, melyek megoldását egy sejtés megfogalmazása után, indukciós bizonyítással teszszük majd teljessé.

Olyan rekurzív sorozatokra vonatkozó feladatokkal is találkoznak a tanulók, amelyekben a sorozat konvergenciáját kell megvizsgálni, esetleg határértékének meghatározását is el kell végezni.

Ilyenkor az egyik lehetséges módszer a következő tétel felhasználása (melynek pontos bizonyításához a középiskolában hiányzik a valós számok teljességi tulajdonsága, de szemléletesen elfogadtatható a tanulókkal):

Ha (x_n) egy felülről (alulról) korlátos monoton növekedő (csökkenő) valós számsorozat, akkor konvergens.

1. Feladat
(a_n) olyan sorozat, amelyre $a_{n+1} + a_n = n^2 \ \ (n \in \mathbb{N})$; $a_{20} = 94$. $a_n =?$
(*AIME* - 1994)
Átfogalmazás: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy
$f(n+1) + f(n) = n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$; $f(20) = 94$. $f(n) =?$

Megoldás
Használjuk most a középiskolából jobban ismert sorozatos írásmódot.

Írjuk fel a rekurzív összefüggést $n = 1, 2, 3$-ra. Azt kapjuk, hogy
$a_2 = 1 - a_1,\ a_3 = 4 - a_2 = 3 + a_1,\ a_4 = 9 - a_3 = 6 - a_1$.

Ebből megfogalmazzuk azt a sejtést, hogy

$$a_n = \tfrac{(n-1)n}{2} + (-1)^{n-1} a_1 \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4}$$

Ezt teljes indukcióval egyszerűen beláthatjuk, hiszen:

- $n = 1$-re nyilván igaz (4).
- Ha n-re igaz (4), úgy a rekurzió szerint
  $a_{n+1} = n^2 - a_n = n^2 - \frac{(n-1)n}{2} - (-1)^{n-1} a_1 = \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n a_1$,
  ami adja (4)-et az n helyett $n+1$-et írva.
- Így a teljes indukció elve alapján (4) igaz $\forall n \in \mathbb{N}$-re.

Ugyanakkor $94 = a_{20} = \frac{19 \cdot 20}{2} - a_1$ miatt kapjuk, hogy $a_1 = 96$. Ezért (4) adja, hogy

$$a_n = \frac{(n-1)n}{2} + (-1)^{n-1} 96 \quad (n \in \mathbb{N}) \ ;$$

illetve, hogy

$$f(n) = \frac{(n-1)n}{2} + (-1)^{n-1} 96 \quad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

2. Feladat
Állítsuk elő az (a_n) sorozat a_n tagját n függvényében, ha
$a_1 = 1$; $a_{n+1} = na_n + n^2 - n - 1$.
(*OKTV* - 2002)
Átfogalmazás: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$-re teljesíti az
$f(n+1) = nf(n) + n^2 - n - 1$ függvényegyenletet és $f(1) = 1$.
$f(n) = ?$

Megoldás
Az adott rekurzió mindkét oldalához $n+1$-et adva

$$a_{n+1} + (n+1) = n(a_n + n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

következik, ami a $b_n = a_n + n$ jelöléssel felhasználva, hogy ekkor
$b_1 = a_1 + 1 = 2$, adja a

$$b_{n+1} = nb_n \ , \quad b_1 = 2$$

egyszerűbb rekurziót, melyből teljes indukcióval azonnal bizonyíthatjuk, hogy

$$b_n = 2(n-1)! \quad (n \in \mathbb{N}) \ ,$$

ami b_n definíciója miatt adja, hogy

$$a_n = 2(n-1)! - n \quad (n \in \mathbb{N}) \ ,$$

vagyis

$$f(n) = 2(n-1)! - n \quad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

3. Feladat
Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy

$$f(n+1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 f(n) + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}) \ , \quad f(1) = A \ ;$$

ahol $A \in \mathbb{R}$ konstans. $f(n) = ?$
Átfogalmazás: (a_n) olyan sorozat, hogy

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 a_n + \frac{1}{n} \ , \quad a_1 = A \ , \quad a_n = ?$$

Megoldás
A feladat függvényegyenlete $n = 1, 2, 3, 4$ mellett adja, hogy
$f(2) = (1-1)^2 f(1) + 1 = 1 = \dfrac{2}{2}$
$f(3) = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^2 f(2) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$
$f(4) = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)^2 f(3) + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{6}$
$f(5) = \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)^2 f(4) + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{8}$
Ebből azt sejtjük, hogy $f(n) = \dfrac{n}{2n-2}$ $(n \geq 2)$.

- $n = 2$-re láttuk, hogy ez igaz.
- Ha n-re igaz a sejtés, úgy a függvényegyelet adja, hogy

$$f(n+1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \frac{n}{2(n-1)} + \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{n}{2(n-1)} + \frac{1}{n} = \frac{n-1}{2n} + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n} \,,$$

  azaz $n+1$-re is teljesül.
- A teljes indukció elve adja sejtésünk igazolását.
  Az $f(n) = \frac{n}{2(n-1)}$ $(n \geq 2)$ függvény teljesíti a feladatot és $f(1) = A$.

Megjegyzések

- Érdekes, hogy $f(n)$ $n \geq 2$-re nem függ $f(1) = A$-tól.
- (a_n) rekurzív sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2} \,.$$

4. Feladat
Az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(n+1) = 1 - \frac{n}{n+1} f(n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

függvényegyenletet és $f(1)=1$. $f(n)=?$

Átfogalmazva

(a_n) olyan sorozat, hogy $a_{n+1}=1-\dfrac{n}{n+1}\,a_n\ ,\ \ a_1=1\ .$

$(n\in\mathbb{N})\ ,a_n=?$

Megoldás

A függvényegyenletből $n=1,2,3,4,5,6$ mellett kapjuk, hogy:

$$f(2)=1-\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}\ \ ;\ \ f(3)=1-\frac{2}{3}f(2)=\frac{2}{3}\ \ ;$$

$$f(4)=1-\frac{3}{4}f(3)=\frac{1}{2}\ \ ;\ \ f(5)=1-\frac{4}{5}f(4)=\frac{3}{5}\ \ ;$$

$$f(6)=1-\frac{5}{6}f(5)=\frac{1}{2}\ \ ;\ \ f(7)=1-\frac{6}{7}f(6)=\frac{4}{7}\ \ .$$

Ez azt sugallja, hogy

$$\left.\begin{array}{l} f(2n)=\frac{1}{2}\quad (n\in\mathbb{N}),\\ f(2n+1)=\frac{n+1}{2n+1}\quad (n\in\mathbb{N}).\end{array}\right\}\qquad (*)$$

- Ez nyilván igaz (hiszen beláttuk) $n=1$ esetén.
- Tegyük fel, hogy n-re igaz sejtésünk, akkor egyenletünket is használva:

  $$f\left(2(n+1)\right)=f\left[(2n+1)+1\right]=1-\tfrac{2n+1}{2n+2}f(2n+1)=$$
  $$=1-\tfrac{2n+1}{2n+2}\tfrac{n+1}{2n+1}=\tfrac{1}{2}\ ,$$

  $$f\left(2(n+1)+1\right)=1-\tfrac{2(n+1)}{2(n+1)+1}f\left(2(n+1)\right)=1-\tfrac{2(n+1)}{2(n+1)+1}\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{(n+1)+1}{2(n+1)+1}\ ,$$

  azaz sejtésünk $n+1$ mellett is igaz.
- Így a teljes indukció elve alapján f $(*)$ alakú.
  Rövid számolás adja, hogy a $(*)$ alakú f, $f(1)=1$ mellett megoldása a feladat függvényegyenletének.

Megjegyzés

A feladatot teljesítő (a_n) sorozat, melyre $a_1=1$, $a_{2n}=\frac{1}{2}$, $a_{2n+1}=\frac{n+1}{2n+1}$ konvergens és határértéke $\frac{1}{2}$, hiszen két diszjunkt részsorozatra bontható és $a_{2n}\to\frac{1}{2}$, illetve $a_{2n+1}\to\frac{1}{2}$ teljesül.

5. Feladat
Az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(n+2) = -\frac{1}{n+2} f(n+1) + \frac{n}{n+1} f(n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

függvényegyenletet és $f(1) = 1$, $f(2) = \frac{1}{2}$. $f(n) =?$

Átfogalmazva
(a_n) olyan sorozat, hogy
$a_{n+2} = -\frac{1}{n+2} a_{n+1} + \frac{n}{n+1} a_n \ \ (n \in \mathbb{N})$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_n =?$

Megoldás
A függvényegyenlet $n = 1, 2, 3$ mellett adja, hogy

$f(3) = -\frac{1}{3} f(2) + \frac{1}{2} f(1) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$,

$f(4) = -\frac{1}{4} f(3) + \frac{2}{3} f(2) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,

$f(5) = -\frac{1}{5} f(4) + \frac{3}{4} f(3) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$.

Ebből azt vélhetjük, hogy $f(n) = \frac{1}{n} \ \ (n \in \mathbb{N})$. Ez igaz, mert

- $n = 1, 2, 3$-ra például teljesül.
- Ha $k \leq n$-re igaz a sejtés, úgy – felhasználva az egyenletet is – kapjuk, hogy

  $$f(n+1) = -\frac{1}{n+1} f(n) + \frac{n-1}{n} f(n-1) =$$

  $$= -\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} ,$$

  azaz $n + 1$-re is igaz a sejtés.
- Így a teljes indukció elve alapján

  $$f(n) = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

  Ez valóban teljesíti függvényegyenletünket.

  A másik írásmódban:

  $$a_n = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

Megjegyzés
A feladatot teljesítő rekurzív sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ .$$

6. Feladat
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $\forall n \in \mathbb{N},\ n > 1$ esetén
$f(n) = f(n-1) + a^n$, ahol $a \in \mathbb{R}$ konstans. $f(n) = ?$, ha $f(1) = b$, $b \in \mathbb{R}$.

Megoldás
A függvényegyenletet az $f(n) - f(n-1) = a^n$ $(n > 1)$ alakba írható, melyet $n = 2, 3, \ldots, n$ esetén felírva kapjuk az

$$\begin{aligned}
f(2) - f(1) &= a^2 \\
f(3) - f(2) &= a^3 \\
&\vdots \\
f(n-1) - f(n-2) &= a^{n-1} \\
f(n) - f(n-1) &= a^n
\end{aligned}$$

egyenlőségeket. Ezeket összeadva a bal oldali (teleszkópos) összeg $f(n) - f(1)$ lesz, így

$$f(n) - f(1) = a^2 + \ldots + a^n \quad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

Ebből pedig $f(1) = b$ miatt felhasználva, hogy a jobb oldal egy $n-1$-tagú geometriai sor az a hányadossal és az a^2 első taggal, kapjuk

$$f(n) = b + a^2 \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1} \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ , ha } \ a \neq 1 \ ,$$

míg

$$f(n) = b + n - 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ , ha } \ a = 1 \ .$$

7. Feladat
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $af(n+1) = f(n) + g(n)$, ahol $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konstans, $f(1) = b \in \mathbb{R}$ $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ adott függvény. $f(n) = ?$

Megoldás
A függvényegyenletetből $n = 1, 2, \ldots, n-1$ mellett kapjuk az

$$\begin{aligned} af(2) &= f(1) + g(1) \\ af(3) &= f(2) + g(2) \\ &\vdots \\ af(n) &= f(n-1) + g(n-1) \end{aligned}$$

illetve ezek közül a másodikat a-val, …, az utolsót a^{n-2}-nel beszorozva és rendezve az

$$\begin{aligned} af(2) - f(1) &= g(1) \\ a^2 f(3) - af(2) &= ag(2) \\ a^3 f(4) - a^2 f(3) &= a^2 g(3) \\ &\vdots \\ a^{n-2} f(n-1) - a^{n-3} f(n-2) &= a^{n-3} g(n-2) \\ a^{n-1} f(n) - a^{n-2} f(n-1) &= a^{n-2} g(n-1) \end{aligned}$$

azonosságokat. Ezeket összeadva kapjuk, hogy

$$a^{n-1} f(n) - f(1) = g(1) + ag(2) + \ldots + a^{n-2} g(n-1) \quad (n \in \mathbb{N}) ,$$

amiből $f(1) = b$ miatt jön, hogy

$$f(n) = \frac{b + g(1) + ag(2) + \ldots + a^{n-2} g(n-1)}{a^{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

8. Feladat
Az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fügvény bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesíti az
$f(n+2) = 2f(n+1) - f(n)$ függvényegyenletet és $f(1) = 2,\ f(2) = 3$.
Határozzuk meg f-et n függvényében.
Átfogalmazva: (a_n) olyan sorozat, amelyre
$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$; $a_1 = 2, a_2 = 3$. $a_n = ?$

Megoldás
Egyenletünk $[f(n+2) - f(n+1)] - [f(n+1) - f(n)] = 0$ alakba is

írható, ami azt mutatja, hogy a $p(n) = f(n+1) - f(n)$ szerint definiált függvény teljesíti a $p(n+1) = p(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ függvényegyenletet és $p(1) = f(2) - f(1) = 1$, azaz p konstans $\mathbb{N}$-en, pontosabban $p(n) = 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Ezt és p definícióját felhasználva kapjuk f-re az egyszerűbb

$$f(n+1) - f(n) = 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \ , \quad f(1) = 2$$

függvényegyenletet. Ez pedig adja (a fejezet bevezetésében a számtani sorozatokról, illetve a nekik megfelelő függvényegyenletekről mondottak szerint, (1) miatt, hogy

$$f(n) = n + 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \ ,$$

ami megoldása egyenletünknek.

9. Feladat

Az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fügvény bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesíti az $f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 1$ függvényegyenletet és $f(1) = 1$, $f(2) = 2$. Határozzuk meg f-et n függvényében.

Átfogalmazva: (a_n) olyan sorozat, amelyre
$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 1$; $a_0 = 1, a_1 = 2$. $a_n =$?
(*HBM* - 2000)

Megoldás

Az előbbi feladatban használt ötlettel azonnal kapjuk az egyenletből, hogy a

$$p(n) = f(n+1) - f(n) \quad (n \in \mathbb{N}) \ , \quad p(1) = 1$$

szerint definiált függvény teljesíti a

$$p(n+1) - p(n) = 1 \ , \quad p(1) = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

függvényegyenletetet, ami (hasonló okok miatt, mint az előbbi példában) adja, hogy $p(n) = n$ $(n \in \mathbb{N})$. Így p definíciója miatt

$$f(n+1) - f(n) = n \quad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

Ezt $n = 1, 2, \ldots, n-1$-re felírva kapjuk az

$$\begin{aligned} f(2) - f(1) &= 1 \\ f(3) - f(2) &= 2 \\ &\vdots \\ f(n-1) - f(n-2) &= n-2 \\ f(n) - f(n-1) &= n-1 \end{aligned}$$

azonosságokat, melyeket összeadva

$$f(n) - f(1) = 1 + 2 + \ldots + n - 1 \quad (n \in \mathbb{N}) ,$$

azaz

$$f(n) = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

következik, ami valóban teljesíti a függvényegyenletet.

10. Feladat
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy
$f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n)$ $(n \in \mathbb{N})$; $f(1) = 3, f(2) = 7$.
$f(n) =?$
Átfogalmazás: (a_n) olyan sorozat, amelyre
$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ $(n \in \mathbb{N}),\ a_1 = 3,\ a_2 = 7.\ a_n =?$

Megoldás
$f(1) = 3 = 2^2 - 1$, $f(2) = 7 = 2^3 - 1$, továbbá az egyenletet $n = 1, 2$-re is felírva

$$\begin{aligned} f(3) &= 3f(2) - 2f(1) = 15 = 2^4 - 1 \\ f(4) &= 3f(3) - 2f(2) = 31 = 2^5 - 1 \end{aligned}$$

adódik. Így az a sejtésünk, hogy

$$f(n) = 2^{n+1} - 1 \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

Ez teljes indukcióval egyszerűen bizonyítható. Az ilyen alakú f valóban teljesíti a feladat függvényegyenletét.

11. Feladat
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(n+2) = \frac{f(n+1) + f(n)}{2} \ , \ f(1) = A \ , \ f(2) = B \ ,$$

ahol $A, B \in \mathbb{R}$ konstansok. $f(n) =?$
Átfogalmazva
(a_n) olyan sorozat, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$,
$a_1 = A,\ a_2 = B$, ahol $A, B \in \mathbb{R}$ konstansok. $a_n =?$

Megoldás
A függvényegyenlet adja, hogy $(k \in \mathbb{N})$-re

$f(k+2)-f(k+1)=\frac{f(k+1)+f(k)}{2}-f(k+1)=-\frac{f(k+1)-f(k)}{2}$.

A kapott egyenlőség ismételt alkalmazásával $\forall k \in \mathbb{N}$-re kapjuk, hogy

$$f(k+2)-f(k+1)=-\frac{f(k+1)-f(k)}{2}=\frac{f(k)-f(k-1)}{2^2}=\cdots=$$

$$=(-1)^k\frac{f(2)-f(1)}{2^k}=(-1)^k\frac{B-A}{2^k}\ ,$$

azaz

$$f(k+2)-f(k+1)=(-1)^k\frac{B-A}{2^k}\quad (k\in\mathbb{N})\ .$$

Ezen egyenlőtlenséget $k=1,\ldots,n-2$-re felírva és összegükhöz az $f(2)-f(1)=B-A$ egyenlőséget hozzáadva kapjuk, hogy

$$f(n)-f(1)=B-A-\frac{B-A}{2}+\frac{B-A}{2^2}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{B-A}{2^{n-2}}\ .$$

Így a geometriai sor összegképletét használva $f(n)=$

$$=A+(B-A)\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1}{-\frac{1}{2}-1}=A+\frac{2}{3}(B-A)+\frac{B-A}{3}(-1)^n\frac{1}{2^{n-2}}\ ,$$

azaz

$$f(n)=\frac{2B+A}{3}+(-1)^n\frac{B-A}{3}\frac{1}{2^{n-2}}\ (n\geq 2)\ .$$

Ezen $f(n)$ valóban teljesíti a függvényegyenletet.

Megjegyzés

Nyilván az $a_n=\frac{2B+A}{3}+(-1)^n\frac{B-A}{3}\frac{1}{2^{n-2}}$ $(n\in\mathbb{N})$ adja $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0\ \text{ miatt}\right)$, hogy

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2B+A}{3}\ .$$

12. Feladat

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $\forall n\in\mathbb{N}$-re
$f(n+2)=(\alpha+\beta)f(n+1)-\alpha\beta f(n);\ f(1)=A,\ f(2)=B,$
ahol $\alpha,\beta,A,B\in\mathbb{R}$ konstansok. $f(n)=?$

Megoldás

a) Ha $\alpha \neq \beta$, úgy $\forall n \in \mathbb{N}$-re igazak a következők:

$$\underbrace{f(n+2) - \beta f(n+1)} = \alpha[f(n+1) - \beta f(n)] \qquad \underbrace{f(n+2) - \alpha f(n+1)} = \beta[f(n+1) - \alpha f(n)]$$

$$g(n+1) = \alpha g(n)\ ,\ g(1) = B - \beta A \qquad h(n+1) = \beta h(n)\ ,\ h(1) = B - \alpha A$$
$$g(n) = \alpha^{n-1} g(1) = \alpha^{n-1}[B - \beta A] \qquad h(n) = \beta^{n-1} h(1) = \beta^{n-1}[B - \alpha A]$$
$$f(n+1) - \beta f(n) = \alpha^{n-1}[B - \beta A] \qquad f(n+1) - \alpha f(n) = \beta^{n-1}[B - \alpha A]$$

$$f(n) = \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^{n-1}(B - \beta A) - \beta^{n-1}(B - \alpha A)\right] \ (n \in \mathbb{N})$$

b) Ha $\alpha = \beta$, úgy az egyenlet írható az

$$f(n+2) - \alpha f(n+1) = \alpha[f(n+1) - \alpha f(n)] \ (n \in \mathbb{N})$$

alakba, melyből $k(n) = f(n+1) - \alpha f(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ mellett kapjuk a következőket:

$$k(n+1) = \alpha k(n)\ ,\ \ k(1) = B - \alpha A \ (n \in \mathbb{N})$$

$$k(n) = \alpha^{n-1}(B - \alpha A) \ (n \in \mathbb{N})$$

$$f(n+1) - \alpha f(n) = \alpha^{n-1}(B - \alpha A) \ (n \in \mathbb{N})$$

$$\underbrace{\frac{f(n+1)}{\alpha^{n+1}}} - \underbrace{\frac{f(n)}{\alpha^{n}}} = \frac{B - \alpha A}{\alpha^2}$$

$$l(n+1) - l(n) = \frac{B - \alpha A}{\alpha^2}\ ,\ \ l(1) = \frac{A}{\alpha}$$

$$l(n) = \frac{A}{\alpha} + (n-1)\frac{B - \alpha A}{\alpha^2}$$

$$f(n) = (n-1)B\alpha^{n-2} - (n-2)A\alpha^{n-1}$$

13. Feladat

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$-re
$f(n+2) = af(n+1) + bf(n);\ f(1) = A,\ f(2) = B,$
ahol $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a^2 + b^2 \neq 0$, $a^2 \geq -4b$. $f(n) = ?$

Megoldás

Bármely, a feladatban szereplő tulajdonságnak megfelelő a, b esetén $\exists\ \alpha, \beta$,

$a = \alpha + \beta$, $b = -\alpha\beta$ (α, β az $x^2 - ax - b = 0$ gyökei), így a feladat megoldása visszavezethető a 12. feladatra.

14. Feladat
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$-re
$f(n+2) = f(n+1) + f(n)$; $f(1) = 1$, $f(2) = 1$. $f(n) =?$
(Fibonacci-sorozat)

Megoldás
Ez a 13. feladat $a = b = 1$, $A = B = 1$ mellett.
Az $x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet gyökei: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, így a 12. feladat szerint

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] .$$

15. Feladat
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olyan függvény, hogy $f(n+1) = 1 - \frac{1}{4f(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ és $f(1) = 1$. $f(n) =?$

Átfogalmazva
(a_n) olyan sorozat, hogy $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$; $a_n =?$

Megoldás
Ez nem lineáris differencia-egyenlet (rekurzív sorozat).
$f(1) = 1$ és a függvényegyenlet $n = 2, 3, 4, 5$-re adja, hogy

$$f(2) = 1 - \frac{1}{4 \cdot 1} = \frac{3}{4} \ , \ \ f(3) = 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{4}{6} \ ,$$

$$f(4) = 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{4}{6}} = \frac{5}{8} \ , \ \ f(5) = 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{5}{8}} = \frac{6}{10} \ .$$

Ebből megfogalmazhatjuk azt a sejtést, hogy

$$f(n) = \frac{n+1}{2n} \quad (n \in \mathbb{N}) \ ,$$

ami teljes indukcióval bizonyítható.

- $n = 1$-re igaz az állítás.

- Ha n ($\in \mathbb{N}$)-re igaz a sejtés, úgy a függvényegyenlet adja, hogy

$$f(n+1) = 1 - \tfrac{1}{4f(n)} = 1 - \tfrac{1}{4\frac{n+1}{2n}} = 1 - \tfrac{n}{2(n+1)} = \tfrac{(n+1)+1}{2(n+1)} \ .$$

- Így a teljes indukció elve alapján valóban igaz a sejtés.

Az $f(n) = \frac{n+1}{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) függvény valóban teljesíti a feladatot.

A másik írásmódban: $a_n = \frac{n+1}{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Megjegyzés

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}$, azaz rekurzív sorozatunk konvergens és határértéke $\frac{1}{2}$.

16. Feladat

(a_n) olyan sorozat, melyre $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+2a_n}$. $a_n =?$

Átfogalmazás $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy

$$f(n+1) = \frac{f(n)}{1+2f(n)} \ , \ \ f(1) = \frac{3}{4} \ . \ \ f(n) =?$$

Megoldás

$a_1 = \frac{3}{4} = \frac{3}{6-2}$.

Írjuk fel a rekurziót $n = 1, 2, 3$ mellett, akkor

$$a_2 = \frac{a_1}{1+2a_1} = \frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{6}{4}} = \frac{3}{10} = \frac{3}{6\cdot 2-2} \ ,$$

$$a_3 = \frac{a_2}{1+2a_2} = \frac{\frac{3}{10}}{1+\frac{6}{10}} = \frac{3}{16} = \frac{3}{6\cdot 3-2} \ ,$$

Sejtésünk az, hogy $a_n = \dfrac{3}{6n-2}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Ezt teljes indukcióval láthatjuk be.

- $n = 1$-re már beláttuk.
- Ha n-re igaz az állítás, úgy a rekurziót használva:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+2a_n} = \frac{\frac{3}{6n-2}}{1+\frac{6}{6n-2}} = \frac{3}{6n-2+6} = \frac{3}{6(n+1)-2}$$

következik, ami adja $n+1$-re is sejtésünket.

- Így a teljes indukció elve alapján

$$a_n = \frac{3}{6n-2} \quad (n \in \mathbb{N}) \; .$$

A másik írásmódban

$$f(n) = \frac{3}{6n-2} \quad (n \in \mathbb{N}) \; .$$

Egyszerű számolással kapjuk, hogy ezek teljesítik a feladatot.

17. Feladat
Legyenek $a, b > 0$ valós konstansok, (x_n) az

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}) \; , \quad x_1 = b$$

rekurzióval adott sorozat. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Megoldás
A képzési szabály adja, hogy $x_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$.
A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget felhasználva:

$$\sqrt{a} = \sqrt{x_n \frac{a}{x_n}} \leq \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = x_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \; ,$$

ami adja, hogy (x_n) alulról korlátos és $x_n \geq \sqrt{a}$, illetve $x_n^2 \geq a$ $(n \geq 2)$ teljesül. A rekurzió és az utóbbi egyenlőtlenség adja, hogy $n \geq 2$-re

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} - x_n\right) = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0 \; ,$$

azaz (x_n) monoton csökkenő, ha $n \geq 2$.

Így a bevezetőben ismertetett tétel adja, hogy létezik $c \geq \sqrt{a}$, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Ugyanakkor a rekurzió adja, hogy

$$c = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(c + \frac{a}{c}\right) \; ,$$

ami csak úgy lehetséges, ha $c^2 = a$, azaz $c = \sqrt{a}$. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$ valóban teljesül.

Megjegyzés
Eredményünk mutatja, hogy az adott rekurzív összefüggés alkalmas $\sqrt{a}$ közelítő értékeinek meghatározására.

Ha például $a = 2$ és $x_1 = 1$, akkor

$x_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = 1,5$,
$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12} \approx 1,41666.$

$x_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{17}{24} + \frac{12}{17} = \frac{577}{408} \approx 1,414215.$ Így már x_4 is elég jó közelítését adja $\sqrt{2}$-nek.

18. Feladat
Legyen $a > 0$ adott valós szám, (x_n) az

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \quad (n \in \mathbb{N}) \ , \quad x_1 = \sqrt{a}$$

rekurzióval adott sorozat. Bizonyítsuk be, hogy (x_n) konvergens. Határozzuk meg a határértékét.

Megoldás
Először megmutatjuk, hogy (x_n) monoton növekedő.

- $x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a + \sqrt{a}} = x_2$.
- Tegyük fel, hogy $x_{n-1} < x_n$, akkor a rekurzió miatt

  $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}} < \sqrt{a + x_n} = x_{n+1}$.
- Így a teljes indukció elve adja, hogy $x_n < x_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

  Most belátjuk, hogy (x_n) felülről korlátos.
- $n = 1$-re $x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a} + 1$.
- Tegyük fel, hogy $x_n < \sqrt{a} + 1$, akkor a rekurziót használva

  $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} < \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} < \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} =$
  $= \sqrt{\left(\sqrt{a} + 1\right)^2} = \sqrt{a} + 1$.
- Így a teljes indukció elve adja, hogy

$$x_n < \sqrt{a} + 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

(x_n) monoton növekvő és felülről korlátos, így $\exists c \in \mathbb{R}$ és $c \geq \sqrt{a}$, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

De $x_{n+1}^2 = a + x_n$ adja, hogy
$c^2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a + x_n) = a + c$, ami csak úgy lehetséges, ha $c^2 - c - a = 0$, azaz $c = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$
$\left(\text{hiszen} \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} < 0\right)$. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

19. Feladat
Legyen x_n olyan sorozat, hogy $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_{n+1}^2 = 3x_n - 2 \quad (n \in \mathbb{N})$. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Megoldás
Megmutatjuk, hogy $1 < x_n < 2 \ (n \in \mathbb{N})$.

- $1 < x_1 = \frac{3}{2} < 2$.
- Tegyük fel, hogy $1 < x_n < 2 \quad (n \in \mathbb{N})$, akkor a rekurziót is felhasználva $1 < 3x_n - 2 = x_{n+1}^2 = 3x_n - 2 < 4$

  ami adja, hogy $1 < x_{n+1} < 2$
- Így a teljes indukció elve adja, hogy $1 < x_n < 2 \ (n \in \mathbb{N})$.

(x_n) monoton növekvő, mert

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{3x_n - 2} - x_n = \frac{3x_n - 2 - x_n^2}{\sqrt{3x_n - 2} + x_n} = \frac{(x_n - 1)(2 - x_n)}{\sqrt{3x_n - 2} + x_n} \geq 0 ,$$

hiszen $x_n - 1 > 0$, $2 - x_n > 0$, $\sqrt{3x_n - 2} > 0$, $x_n > 0$.

(x_n) tehát monoton növekedő és felülről korlátos, így $\exists c \in \mathbb{R}$, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, továbbá $1 \leq x_n < 2$ miatt $1 \leq c \leq 2$ is teljesül.

A rekurzió miatt ekkor

$$c^2 = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} (3x_n - 2) = 3c - 2 ,$$

azaz $c^2 - 3c + 2 = 0$, tehát $c = 1$ vagy $c = 2$. $1 < x_n < 2$ és x_n monoton növekedése adja, hogy csak $c = 2$ lehetséges.

Így $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

20. Feladat
Vizsgáljuk az $x_{n+1} = \frac{x_n^2+16}{10}$ $(n \in \mathbb{N})$, $x_1 = 1$ szerint adott rekurzív sorozat konvergenciáját.

Megoldás
Megmutatjuk, hogy (x_n) felülről korlátos, mégpedig $x_n < 5$ $(n \in \mathbb{N})$.

- Ez $n = 1$-re $x_1 = 1 < 5$ miatt igaz.
- Tegyük fel, hogy $x_n < 5$, akkor a rekurzió miatt

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{10} < \frac{25 + 16}{10} = \frac{41}{10} < 5\ .$$

- Így a teljes indukció elve adja állításunkat.

(x_n) monoton növekedő, mert

- $x_1 = 1 < \frac{1+16}{10} = \frac{17}{10} = x_2$.
- Tegyük fel, hogy $x_{n-1} < x_n$, akkor ($x_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$-et is használva)

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{10} > \frac{x_{n-1}^2 + 16}{10} = x_n\ .$$

- A teljes indukció elve adja (x_n) monotonitását.

(x_n) monoton növekvő és felülről korlátos, így $\exists c \in \mathbb{R}$, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, továbbá $x_n < 5$ miatt $c \leq 5$.

A rekurzív összefüggés ekkor adja, hogy

$$c = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 + 16}{10} = \frac{c^2 + 16}{10}\ ,$$

azaz $c^2 - 10c + 16 = 0$, ami csak $c = 2$ vagy $c = 8$ esetén lehetséges. Tehát: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Megjegyzés
Ha $x_1 = 1$ helyett $x_1 = 10$-et adnánk meg a feladatban, akkor egyszerűen kapnánk, hogy $x_n \geq 10$, így ha (x_n) konvergens lenne, akkor határértékére $c \geq 10$ kellene, hogy teljesüljön. Ugyanakkor az előbbiek szerint $c = 2$ vagy $c = 8$, ez ellentmond annak, hogy $c \geq 10$. Ezért $x_1 = 10$ mellett az adott rekurzív sorozat nem konvergens.

21. Feladat
Legyenek $0 < a < b$ adott valós számok, (x_n) és (y_n) olyan sorozatok, hogy

$$x_1 = a \ , \ y_1 = b \ , \ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \ , \ y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}) \ ,$$

akkor létezik $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \mu(a,b)$.

(Ezt a $\mu(a,b)$ számot az a, b számok Gauss-féle aritmetikai-geometriai középének is szokás nevezni, mert a problémával először Gauss foglalkozott 14 évesen, bebizonyítva a feladat állítását.)

Megoldás
A középértékek ismert tulajdonságai alapján

$$0 < a < x_n \le y_n < b \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1) \ .$$

Másrészt, az előbbi egyenlőtlenséget is felhasználva

$$x_n = \sqrt{x_n^2} \le \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \ ,$$

azaz (x_n) monoton növekedő.

Ugyanakkor

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \le \frac{y_n + y_n}{2} = y_n \quad (n \in \mathbb{N}) \ ,$$

azaz (y_n) monoton csökkenő.

Ezeket összegezve igazak a következők is.

$$x_n \le y_n \le y_1 \ , \ \ y_n \ge x_n \ge x_1 \quad (n \in \mathbb{N}) \ ,$$

azaz (x_n) felülről, míg (y_n) alulról korlátos.

Így a monoton sorozatok konvergencia-kritériuma miatt létezik A, B valós szám, hogy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \ , \ \ \lim_{n\to\infty} y_n = B \ .$$

Az $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ összefüggés ekkor adja, hogy

$$B = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{A + B}{2} \ ,$$

amiből azonnal jön, hogy $A = B$.

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

22. Feladat
Legyenek $0 < a < b$ adott valós számok, (x_n) és (y_n) olyan sorozatok, hogy

$$x_1 = a \ , \ y_1 = b \ , \ x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \ , \ y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}) \ ,$$

akkor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sqrt{ab}$.

(Ez is egy Gauss-típusú közép: a harmonikus-aritmetikai közép, melyről azt állítjuk, hogy éppen a $\sqrt{ab}$ geometriai közép, lásd [8].)

Megoldás
A harmonikus és számtani közép közötti ismert egyenlőtlenség miatt

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \le \frac{x_n + y_n}{2} = y_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \ ,$$

így $x_1 = a < b = y_1$ miatt $0 < x_n \le y_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Az utóbbi egyenlőtlenség adja, hogy $\frac{1}{x_n} \ge \frac{1}{y_n}$ $(n \in \mathbb{N})$, így

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} = \frac{2}{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_n}} \ge \frac{2}{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n}} = x_n \quad (n \in \mathbb{N}) \ ,$$

azaz (x_n) monoton növekedő.

Másrészt

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \le \frac{y_n + y_n}{2} = y_n \quad (n \in \mathbb{N}) \ ,$$

azaz (y_n) monoton csökkenő.

Továbbá $x_n \le y_n \le y_1$ és $x_1 \le x_n \le y_n$ adja, hogy (x_n) felülről, (y_n) alulról korlátos.

Így a monoton sorozatok konvergencia-kritériuma miatt létezik A, B valós szám, hogy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \ , \ \lim_{n\to\infty} y_n = B \ .$$

Az $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$ összefüggés adja, hogy

$$B = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{A + B}{2} \ ,$$

ami csak úgy lehetséges, ha $A = B$.

Ugyanakkor $x_{n+1}y_{n+1} = x_n y_n = \ldots = x_1 y_1 = ab$ és az előbbiek adják, hogy $A^2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$, azaz $A = \sqrt{ab}$, és ezt kellett bizonyítani.

Megjegyzés

Ha $a = 1$, $b = 2$, úgy $A^2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 2$.

Az (x_n) és (y_n) sorozatok tagjai nyilván racionális számok, melyek határértéke egy olyan A szám, melyre $A^2 = 2$. Ezt nevezzük a 2 négyzetgyökének és ezt $A = \sqrt{2}$-vel jelöljük.

Így feltételezve, hogy igaz a monoton korlátos sorozatok konvergenciájára kimondott tétel (mely a valós számok teljességi axiómájából következik), kapjuk $\sqrt{2}$ létezését. Annak egyértelműsége már egyszerűen igazolható.

Ugyanakkor $x_n \leq \sqrt{2} \leq y_n$, így az iteráció a $\sqrt{2}$ racionális számokkal való kétoldali közelítését adja. Az iteráció meglehetősen gyors.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg az $n \in \mathbb{N}$-re teljesülő

   a) $f(n+2) = f(n+1) + 2f(n)\ ,\ f(1) = 1\ ,\ f(2) = 3$

   b) $f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n)\ ,\ \ f(1) = 1\ ,\ \ f(2) = 2$

   c) $f(n+2) = 4f(n+1) - 4f(n)\ ,\ \ f(1) = f(2) = 1$

   d) $f(n+2) = f(n)$

   függvényegyenleteket.

2. Legyen (a_n) olyan sorozat, hogy $a_1 = 0$ és $a_{n+1} = \frac{1}{4(1-a_n)}$ $(n \in \mathbb{N})$. $a_n =?$

3. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely $n \in \mathbb{N}$-re teljesíti az

   $$f(n+2) = \frac{1}{n+2}f(n+1) + \frac{n+1}{n+2}f(n) + \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$$

   függvényegyenletet és $f(1) = 1$, $f(2) = \frac{3}{2}$. $f(n) =?$

4. Határozzuk meg azt az (a_n) sorozatot, amelyre $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$; $a_1 = 10,\ a_2 = 16$ teljesül.

5. Legyen (a_n) olyan sorozat, hogy $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2a_n+3}{a_n+3}$ $(n \in \mathbb{N})$.
   $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =?$
6. Legyen (a_n) olyan sorozat, hogy $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 4}$ $(n \in \mathbb{N})$.
   $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =?$

B) Egyváltozós függvényegyenletek megoldása helyettesítésekkel (csoportok és függvényegyenletek)

A bevezetés második példájában szereplő

$$f(x)+2f\left(\tfrac{1}{x}\right)=3x+6 \quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}) \tag{1}$$

függvényegyenletben az ismeretlen f függvény argumentumában a

$$g_1(x)=x,\ g_2(x)=\frac{1}{x}\ \ (x\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

adott (ismert) függvények szerepelnek.

Ha (1)-ben az $x\mapsto\frac{1}{x}$ helyettesítéssel élünk, úgy a

$$g_1\left(g_2(x)\right)=\frac{1}{x}=g_2(x),\ g_2\left(g_2(x)\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x=g_1(x)$$

$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ miatt kapott

$$f\left(\tfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\tfrac{3}{x}+6 \quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}) \tag{2}$$

egyenletben is az $f\left(\frac{1}{x}\right)$ és $f(x)$ található.

Az (1) és (2) egyenletek így egy lineáris egyenletrendszert alkotnak az $f(x)$ és $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ismeretlenekre, mely megoldható, és ekkor $f(x)$ kapott alakja megadja (1) megoldását.

(1) általánosításaként tekintsünk az $f:E\to\mathbb{R}\ \ (E\subseteq\mathbb{R})$ ismeretlen függvényre $x\in E$ esetén teljesülő

$$a_1(x)f\left(g_1(x)\right)+a_2(x)f\left(g_2(x)\right)+\ldots+a_n(x)f\left(g_n(x)\right)=h(x) \tag{3}$$

alakú függvényegyenletet, ahol $a_i,h:E\to\mathbb{R}\quad(i=1,\ldots,n)$ adott függvények (melyek lehetnek konstansok, sőt bizonyosak 0-k is), míg $g_1,\ldots,g_n$ olyan adott függvények, hogy valamelyik, mondjuk g_1 az identikus függvény E-n, azaz $g_1(x)=x\ \ (x\in E)$, továbbá $\forall i,j\in\{1,\ldots,n\}$ esetén létezik $k\in\{1,\ldots,n\}$, hogy g_i és g_j kompozíciója (a belőlük készített összetett függvény) egyenlő g_k-val, azaz

$$\left(g_i\circ g_j\right)(x)=g_i\left(g_j(x)\right)=g_k(x)\ \ (x\in E)$$

teljesül. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a $g_1, \dots, g_n$ függvények félcsoportot alkotnak az összetett függvény képzésre, mint műveletre nézve (ami persze lehet csoport is).

A $g_2, \dots, g_n$ függvények között lehetnek konstansok is.

Ekkor (3)-ban az x helyébe rendre $g_2(x)$-et, $\dots, g_n(x)$-et helyettesítve, az eredeti egyenlettel együtt egy n egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kapunk az $f(x), f(g_2(x)), \dots, f(g_n(x))$ (n darab) ismeretlenre. Ha ez megoldható, úgy a kapott $f(x)$ megadja a (3) függvényegyenlet megoldását.

Az f értelmezési tartománya egy olyan ($E \subset \mathbb{R}$) halmaz, melyen az összes adott függvény értelmezett.

Miután (3)-ban bizonyos $a_i(x)$ együtthatók 0-k is lehetnek, így a hozzájuk tartozó, az f argumentumában szereplő $g_i(x)$-ek nem ,,látszanak", így nem látjuk az értelmezési tartományukat sem, ezért az f ismeretlen függvény értelmezési tartományát sem tudjuk előre (3) alakjából. A javasolt eljárás azonban segít a nem látszó g_i-k és így az f értelmezési tartományának meghatározásában is.

Ha (3)-ban látszik $g_1(x), g_2(x)$ és mondjuk nincs ott $g_3(x)$, de $g_2(g_2(x)) = g_3(x)$ (azaz g_3 különbözik g_1-től és g_2-től is), úgy a (3)-ból $x \mapsto g_2(x)$ helyettesítéssel kapott egyenletben megjelenik egy, (3)-ban nem szereplő „új" $g_3(x)$ függvény az f argumentumában. Ezután, (3)-ban az $x \mapsto g_3(x)$ helyettesítéssel élve, $g_2(g_3(x)) = g_4(x)$ vagy ott van f argumentumában (3)-ban is, vagy nincs. Ha nincs, úgy (3)-ban az $x \to g_4(x)$ helyettesítést is el kell végezni. Ennek folytatásával minden g_i ,,megkerül" legfeljebb $n-1$ lépésben, s megkapjuk a megoldandó egyenletrendszert is.

Természetesen (3) lehet olyan is, hogy $a_1(x) = 0$, azaz $g_1(x) = x$ nem látszik, ekkor a javasolt eljárásban valamikor megjelenik g_1 is, de eljárhatunk úgy is, hogy először egy olyan $x \to g_0(x)$ helyettesítést végzünk, hogy $g_i(g_0(x)) = x$ legyen valamilyen $i \in \{2, \dots, n\}$ esetén és akkor (3) helyett ezt az új ((3)-mal általában ekvivalens) egyenletet oldjuk meg.

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az

$$\{x, -x\}\ , \quad \{x, a-x\}\ , \quad \left\{x, \frac{1}{x}\right\}\ , \quad \left\{x, \frac{a}{x}\right\}\ , \quad \left\{x, \frac{x}{2x-1}\right\}$$

függvénypárok $\{g_1(x), g_2(x)\}$ kételemű csoportot alkotnak az összetett függvény képzés műveletére, $g_1(x) = x$, míg a $g_2(x)$ függvényre $g_2(g_2(x)) = x$ teljesül (vagy bármely $x \in \mathbb{R}$-re vagy bizonyos x-ek, például $x = 0$, vagy $x = \frac{1}{2}$ kivételével).

Így ha egy függvényegyenletben ezen függvénypárok valamelyikének függvényei vannak az ismeretlen függvény argumentumában, úgy az $x \to g_2(x)$ helyettesítéssel kapott új egyenletből és az eredeti egyenletből álló egyenletrendszer megoldása $f(x)$-re (ha létezik) adja a függvényegyenlet megoldását.

Általánosabban az $\left\{x, \frac{ax+b}{cx-a}\right\} = \{g_1(x), g_2(x)\}$ függvénypár is csoport a $cx - a \neq 0$ esetén, mert egyszerű számolás adja, hogy $g_2(g_2(x)) = x$.

A fentebb említett öt függvénypár jól láthatóan ennek speciális esete. (Belátható, hogy az $\left\{x, \frac{ax+b}{cx+d}\right\}$ függvénypár pontosan akkor kételemű csoport, ha $d = -a$.)

Így adott p_1, p_2, p_3 függvényekkel és a, b, c, d konstansokkal a

$$p_1(x)f(x) + p_2(x)f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = p_3(x)$$

függvényegyenlet (minden $x \in E \subset \mathbb{R}$ esetén), ha $d = -a$ is teljesül, az $x \to \frac{ax+b}{cx-a}$ helyettesítéssel kezdve, a fentebb jelzett módszerrel megoldható.

Lássunk erre néhány példát.

1. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$5f(x) + f(2-x) = 3x + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

Megoldás
A feladat egyenlete az $x \to 2 - x$ helyettesítéssel adja az

$$5f(2-x) + f(x) = -3x + 10 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet.

Ez az eredeti egyenlettel adja bármely $x \in \mathbb{R}$-re az

$$\begin{cases} 5f(x) + f(2-x) = 3x + 4 \\ 5f(2-x) + f(x) = -3x + 10 \end{cases}$$

egyenletrendszert az $f(x)$, $f(2-x)$ ismeretlenekre.

Könnyen kapjuk ennek megoldását $f(x)$-re az

$$f(x) = \frac{9x+5}{12} \quad (x \in \mathbb{R})$$

előállítást, ami valóban teljesíti egyenletünket.

2. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x + 6 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$
(*KÖMAL*)

Megoldás
A fejezet elején vizsgált (1) függvényegyenlet megoldásait keressük. A javasolt $x \mapsto \frac{1}{x}$ helyettesítéssel kapott (2), (1)-gyel együtt egyenletrendszert ad az $f(x)$ és $f\left(\frac{1}{x}\right)$ mennyiségekre (bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén). Ezen egyszerű lineáris egyenletrendszerből $f\left(\frac{1}{x}\right)$-et eliminálva kapjuk $f(x)$-re, hogy

$$f(x) = -x + \frac{2}{x} + 2 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\ .$$

Egyszerű számolás adja, hogy ez a függvény valóban teljesíti az (1) függvényegyenletet.

3. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{0, -1\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x) + kx^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x+1} \quad (x \neq 0, -1)$$

függvényegyenletet, ahol $k \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $0 < k^2 \neq 1$. $f(x) =?$
(*OKTV* - 2001)

Megoldás
A feladat egyenlete és a belőle $x \mapsto \frac{1}{x}$ helyettesítéssel kapott

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + k\frac{1}{x^2}f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (x \neq 0, -1)$$

függvényegyenlet egy lineáris egyenletrendszer az $f(x)$ és $f\left(\frac{1}{x}\right)$ mennyiségekre. Utóbbiból $f\left(\frac{1}{x}\right)$-et kifejezve és beírva a feladat egyenletébe rövid számolás adja, hogy

$$f(x) = \frac{kx^2 - x}{(k^2-1)(x+1)} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}) \ ,$$

ami valóban teljesíti függvényegyenletünket.

4. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x) + xf\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 2 \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}\right)$$

függvényegyenletet. $f(x) = ?$

Megoldás
f argumentumában az előbb már bemutatott $\{x, \dfrac{x}{2x-1}\}$ csoport elemei vannak. Így az $x \to \dfrac{x}{2x-1}$ helyettesítéssel kapott egyenlet az eredetinél adja az

$$\begin{cases} f(x) + xf\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 2 \\ f\left(\frac{x}{2x-1}\right) + \frac{x}{2x-1}f(x) = 2 \end{cases}$$

egyenletrendszert $f(x)$, $f\left(\frac{x}{2x-1}\right)$ ismeretlenekre bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}$ esetén.

Egyszerű számolás adja, hogy

$$f(x) = \frac{4x-2}{x-1} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}\right) \ ,$$

ami valóban megoldása az egyenletünknek.

Megjegyzés
Ha egyenletünket bármely $x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$ esetén tekintjük az $f : \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$ függvényre (ami elég természetes), akkor az $x = 1$ helyettesítéssel kapjuk az egyenletből, hogy $f(1) = 1$. Az előbbi megoldás, ezzel együtt adja, hogy ekkor az egyenlet megoldása az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x-2}{x-1} & , x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}) \\ 1 & , x = 1 \end{cases}.$$

5. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f\left(\frac{3x+1}{x-3}\right) = 2f(x) + 3 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{3\})$$

függvényegyenletet. Bizonyítsuk be, hogy f konstans függvény.
(*HBM Matematika Verseny, 2004.*)

Megoldás
Az f ismeretlen függvény argumentumában az $\left\{x, \dfrac{3x+1}{x-3}\right\}$ függvénypár szerepel, azaz a már jelzett $\left\{x, \dfrac{ax+b}{cx-a}\right\}$ pár speciális esete, $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$ mellett. Az $x \to \frac{3x+1}{x-3}$ helyettesítéssel kapott és az eredeti egyenlet adja minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$-ra a

$$\begin{cases} f\left(\frac{3x+1}{x-3}\right) = 2f(x) + 3 \\ f(x) = 2f\left(\frac{3x+1}{x-3}\right) + 3 \end{cases}$$

egyenletrendszert az $f(x)$, $f\left(\frac{3x+1}{x-3}\right)$ ismeretlenekre.

Ennek megoldása $f(x)$-re az

$$f(x) = -3 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{3\})$$

konstans függvény ($\mathbb{R} \setminus \{3\}$)-on!), amit bizonyítani kellett.

Ha a függvényegyenlet f ismeretlen függvényének argumentumában valamilyen $\{x, g_2(x)\}$ csoport függvényei helyett a $\{\varphi(x), g_2(\varphi(x))\}$ függvények szerepelnek, ahol φ invertálható függvény, akkor az $x \to \varphi^{-1}(x)$

vagy $\varphi(x) \to x$ helyettesítés után az argumentumban már az $\{x, g_2(x)\}$ csoport függvényei lesznek, így a korábbi módszer alkalmazható. A fentiek miatt elég általános az, ha az ismeretlen függvény argumentumában a $\left\{\varphi(x), \dfrac{a\varphi(x)+b}{c\varphi(x)-a}\right\}$ függvénypár szerepel, ahol φ invertálható függvény.

6. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$af(x-1) + bf(1-x) = cx \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan konstansok, amelyekre $a^2 \neq b^2$. $f(x) =?$

Megoldás
Egyenletünk (3) típusú, de nem „látszik" az f függvény argumentumában a $g_1(x) = x$ identikus függvény. De azt is mondhatjuk, hogy az $\{x, -x\}$ félcsoport függvényei helyett a $\varphi(x) = x - 1$-gyel $\{\varphi(x), -\varphi(x)\}$ függvénypár szerepel.

Ha az egyenletben először az $x \mapsto x+1$ helyettesítéssel élünk, kapjuk az eredetivel ekvivalens

$$af(x) + bf(-x) = c(x+1) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet a $g_1(x) = x$ és $g_2(x) = -x \quad (x \in \mathbb{R})$ argumentumokkal. Ha itt elvégezzük az $x \mapsto -x$ helyettesítést, úgy

$$af(-x) + bf(x) = c(-x+1) \quad (x \in \mathbb{R})$$

adódik (vagyis nem kapunk új argumentumot).

Az utóbbi két egyenlet egy lineáris egyenletrendszert ad az $f(x)$ és $f(-x)$ mennyiségekre.

Az egyikből $f(-x)$-et kifejezve és beírva a másikba azonnal kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{cx}{a-b} + \frac{c}{a+b} \quad (x \in \mathbb{R}) \,,$$

ami megoldása feladatunk egyenletének.

7. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

Megoldás
Az argumentumokat szemlélve látjuk, hogy az $\left\{x, \dfrac{1}{x}\right\}$ csoport függvényei helyett $\varphi(x) = \frac{x+1}{x-2}$ mellett a $\left\{\varphi(x), \dfrac{1}{\varphi(x)}\right\}$ függvények szerepelnek. Az $\frac{x+1}{x-2} = t$ egyenlet megoldásával x-re kapjuk, hogy $\varphi^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ $(x \neq 1)$, így az $x \to \frac{2x+1}{x-1}$ $(x \neq 1)$ helyettesítés adja, hogy

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x+1}{x-1} \quad (x \neq 0, 1)\ .$$

Ebből az $x \to \frac{1}{x}$ helyettesítéssel következik a

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{x+2}{1-x} \quad (x \neq 0, 1)$$

egyenlet. A két egyenletből álló egyenletrendszer

$$f(x) = \frac{4x+5}{3-3x} \quad (x \neq 0, 1)$$

megoldása az eredeti egyenletnek is megoldása.

8. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x^3) - 2f\left(\frac{2x^3+1}{x^3-2}\right) = x^3 + 1 \quad \left(x \neq \sqrt[3]{2}\right)$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

Megoldás
Az argumentumok az $\left\{x, \dfrac{2x+1}{x-2}\right\}$ csoport helyett, $\varphi(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$

mellett, a $\left\{\varphi(x), \dfrac{2\varphi(x)+1}{\varphi(x)-2}\right\}$ függvények. φ inverze nyilván a $\varphi^{-1}(x) =$
$= \sqrt[3]{x}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény.

Egyenletünkből az $x \to \sqrt[3]{x}$ helyettesítéssel kapjuk a

$$f(x) - 2f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = x+1 \quad (x \neq 2)$$

függvényegyenletet, illetve ebből az $x \to \frac{2x+1}{x-2}$ helyettesítéssel az

$$f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) - 2f(x) = \frac{3x-1}{x-2} \quad (x \neq 2)$$

egyenletet.

Ezen egyenletrendszer megoldása $f(x)$-re az

$$f(x) = \frac{x^2+5x-4}{3(2-x)} \quad (x \neq 2)$$

függvény, mely megoldása az eredeti egyenletnek is.

Ha $\{x, g_2(x)\}$ egy csoport, akkor $\left\{x, \varphi^{-1}\left(g_2(\varphi(x))\right)\right\}$ is csoport,mert az
$x \to \varphi^{-1}\left(g_2(\varphi(x))\right)$ helyettesítés adja, hogy

$$\varphi^{-1}\left(g_2\left(\varphi\left(\varphi^{-1}\left(g_2(\varphi(x))\right)\right)\right)\right) = \varphi^{-1}\left(g_2\left(g_2(\varphi(x))\right)\right) =$$
$$= \varphi^{-1}\left(\varphi(x)\right) = x\ .$$

9. Feladat

Az $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x) + 5f\left(\sqrt[5]{\frac{x^5+1}{x^5-1}}\right) = 2 \quad (x \neq 1)$$

függvényegyenletet. $f(x) = ?$

Megoldás

Ismeretes, hogy $\left\{x, \dfrac{x+1}{x-1}\right\}$ egy csoport a függvények kompozíciójára (összetételére) $(x \neq 1)$.

A $\varphi(x) = x^5$ $(x \in \mathbb{R})$ invertálható függvény, a $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$ inverzzel, így az előbbiek szerint $\left\{x, \sqrt[5]{\dfrac{x^5+1}{x^5-1}}\right\}$ $(x \neq 1)$ is csoport.

Az $x \to \sqrt[5]{\frac{x^5+1}{x^5-1}}$ helyettesítéssel kapjuk egyenletünkből a

$$f\left(\sqrt[5]{\frac{x^5+1}{x^5-1}}\right) + 5f(x) = 2 \quad (x \neq 1)$$

egyenletet.

E két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása az

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad (x \neq 1)$$

függvény, ami megoldása feladatunk függvényegyenletének.

10. Feladat
Az $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$2f(x) + f\left[\lg\left(\frac{2 \cdot 10^x + 1}{3 \cdot 10^x - 2}\right)\right] = 10^x \quad (x > 0)$$

függvényegyenletet. $f(x) = ?$

Megoldás
$\left\{x, \dfrac{2x+1}{3x-2}\right\}$ $(x > 0)$, mint $\left\{x, \dfrac{ax+b}{cx-a}\right\}$ speciális esete, csoport az összetett függvény képzésre, mint műveletre nézve.

A $\varphi(x) = 10^x$ $(x > 0)$ függvény invertálható, inverze $\varphi^{-1}(x) = \lg x$ $(x > 1)$. Így az előbbiek adják (de közvetlenül is ellenőrizhető), hogy $\left\{x, \lg\left(\dfrac{2 \cdot 10^x + 1}{3 \cdot 10^x - 2}\right)\right\}$ is csoport, ha $x > 0$. Egyenletünk az $x \to \lg\left(\frac{2 \cdot 10^x + 1}{3 \cdot 10^x - 2}\right)$ helyettesítéssel adja a

$$2f\left[\lg\left(\frac{2 \cdot 10^x + 1}{3 \cdot 10^x - 2}\right)\right] + f(x) = \frac{2 \cdot 10^x + 1}{3 \cdot 10^x - 2} \quad (x > 0)$$

függvényegyenletet, mely az eredeti egyenlettel együtt egy egyenletrendszer az $f(x)$ és $f\left[\lg\left(\frac{2\cdot 10^x+1}{3\cdot 10^x-2}\right)\right]$ ismeretlenekre. Az $f(x)$-re kapott

$$f(x) = \frac{6\cdot 10^{2x} - 6\cdot 10^x - 1}{3(3\cdot 10^x - 2)} \quad (x > 0)$$

megoldás teljesíti a feladat függvényegyenletét, ahogy ezt egy kevés számolás mutatja.

Tekintsük most a következő még általánosabb esetet, a p_1, p_2, p_3 adott függvényekkel az f ismeretlen függvényre teljesülő

$$p_1(x)f\left(\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}\right) + p_2(x)f\left(\frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}\right) = p_3(x)$$

függvényegyenletet valamilyen $E \subset \mathbb{R}$ halmazon, ahol a_i, b_i, c_i, d_i konstansok $(i = 1, 2)$.

Ha létezne olyan $x \to \varphi(x)$ lineáris törtfüggvény, amely az argumentumokat egymásba viszi át, akkor az egyenlet megoldását egy egyenletrendszer megoldására vezethetnénk vissza, majd például $f\left(\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}\right)$ ismeretében már adódna $f(x)$ is.

Egy ilyen helyettesítést úgy kereshetünk,hogy az

$$\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1} = \frac{a_2t+b_2}{c_2t+d_2}$$

egyenlet $x = \varphi(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ megoldását tekintjük $t = x$-re. Ez az $x \to \varphi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ helyettesítés az $\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}$ argumentumot az $\frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}$ argumentumba viszi át.

Ha φ olyan, hogy $d = -a$, azaz $\varphi(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$ alakú, akkor az is igaz, hogy φ az $\frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}$ argumentumot átviszi az $\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}$ argumentumba, s ekkor elértük amit akartunk.

A másik lehetséges út, hogy az $\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1} \to x$ inverzét az $x \to \frac{d_1x-b_1}{-c_1x+a_1}$ helyettesítést használjuk (ezt az $\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1} = t$ egyenlet x-re való megoldásával, majd a $t \to x$ változócserével kapjuk).

Ekkor az f első argumentuma x lesz, a második most is valamilyen $\frac{ax+b}{cx+d}$ lineáris törtfüggvény. Ha $d = -a$, akkor olyan egyenletet kapunk, melynél az $\left\{x, \dfrac{ax+b}{cx-a}\right\}$ csoport lesz az argumentumban, amit már vizsgáltunk korábban.

11. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{3}{2}\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti a

$$2f\left(\frac{x}{x-1}\right) - 3f\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right) = x \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -\frac{1}{2}\}\right)$$

függvényegyenletet. $f(x) = ?$

1. Megoldás
Keressük meg azt az $x \to \varphi(x)$ helyettesítést, amely az ismeretlen függvény argumentumait egymásba viszi át.

Az $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{3t-2}{2t+1}$ egyenlet megoldása x-re adja az $x = \frac{-3t+2}{-t+3} = \varphi(t)$ függvényt ($t \neq 3$), így használjuk az $x \to \frac{-3x+2}{-x+3}$ helyettesítést az egyenletben. Ekkor $\frac{x}{x-1} \to \frac{3x-2}{2x+1}$, $\frac{3x-2}{2x+1} \to \frac{x}{x-1}$ és így kapjuk a

$$2f\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right) - 3f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{-3x+2}{-x+3} \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -\frac{1}{2}, 3\}\right).$$

Az $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -\frac{1}{2}, 3\}$ esetén teljesülő

$$\begin{cases} 2f\left(\frac{x}{x-1}\right) - 3f\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right) = x \\ 2f\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right) - 3f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{-3x+2}{-x+3} \end{cases}$$

egyenletrendszerből rövid számolás adja, hogy

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{5}\frac{-2x^2-3x+6}{-x+3}$$

amiből az $x \to \frac{x}{x-1}$ helyettesítés adja, hogy

$$f(x) = -\frac{x^2-9x+6}{5(x-1)(2x-3)} \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{1, \frac{3}{2}\right\}\right),$$

ami valóban teljesíti egyenletünket.

2. Megoldás
Az $x \to \frac{x}{x-1}$ helyettesítéssel kapjuk egyenletünkből a

$$2f(x) - 3f\left(\frac{x+2}{3x-1}\right) = \frac{x}{x-1} \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{1}{3}\}\right)$$

függvényegyenletet, ahol $\frac{x+2}{3x-1}$ a kívánt $\frac{ax+b}{cx-a}$ alakú.

Így az $x \to \frac{x+2}{3x-1}$ helyettesítéssel

$$2f\left(\frac{x+2}{3x-1}\right) - 3f(x) = \frac{x+2}{-2x+3} \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\}\right)$$

következik.

A minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}, 1, \frac{3}{2}\}$-re teljesülő

$$\begin{cases} 2f(x) - 3f\left(\frac{x+2}{3x-1}\right) = \frac{x}{x-1} \\ 2f\left(\frac{x+2}{3x-1}\right) - 3f(x) = \frac{x+2}{-2x+3} \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása

$$f(x) = -\frac{1}{5}\frac{x^2-9x+6}{(2x-3)(x-1)} \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{3}{2}\}\right) ,$$

ami egyezik a másik megoldással.

12. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti a

$$(7x-6)f\left(\frac{x+2}{-3x+4}\right) + 5f\left(\frac{x-3}{-2x+1}\right) = \frac{x^2+2x-5}{x-1}$$

$\left(x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1, \frac{4}{3}\}\right)$ függvényegyenletet. $f(x) =?$

Megoldás
Az $\frac{x+2}{-3x+4} = t$ egyenlet megoldása $x = \frac{4t-2}{3t+1}$, így az $x \to \frac{4x-2}{3x+1}$ helyettesítéssel kapjuk az egyenletünkből a

$$\frac{10x-20}{3x+1}f(x) + 5f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -5\frac{x^2+10x+1}{(3x+1)(x-3)}$$

$\left(x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, 1, 3\}\right)$ illetve ebből az $x \to \frac{x+1}{x-1}$ helyettesítéssel a

$$\frac{-10x+30}{4x+2}f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + 5f(x) = 5\frac{3x^2-2}{(2x+1)(x-2)}$$

$\left(x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}\right)$ egyenletet. Az utóbbi két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása

$$f(x) = \frac{x}{x-2} \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\}\right),$$

s ez megoldása a feladat egyenletének.

Legyen $\{g_1(x), g_2(x), g_3(x)\}$ olyan függvényhármas, hogy $g_1(x) = x$, $(g_2 \circ g_2)(x) = g_3(x)$, $(g_3 \circ g_3)(x) = g_2(x)$, $(g_2 \circ g_3)(x) = (g_3 \circ g_2)(x) = x$, azaz $\{g_1, g_2, g_3\}$ csoport a függvények kompozíciójára.

Ha olyan függvényegyenletet tekintünk,ahol az ismeretlen f függvény argumentumában e függvények (de közülük legalább kettő) szerepelnek, úgy a korábban említettek szerint az $x \to g_2(x)$, majd $x \to g_3(x)$ helyettesítés (az eredeti egyenletbe) olyan egyenleteket ad, melyeknél az f argumentumában ugyancsak a g_1, g_2, g_3 függvények lesznek. A kapott három egyenlet az $f(g_1(x))$, $f(g_2(x))$, $f(g_3(x))$ értékekre adhatja az egyenlet megoldását.

Hogyan juthatunk ilyen háromelemű csoportokhoz? Egyszerűen ellenőrizhető például, hogy $\left\{x, -\frac{1}{x+1}, -\frac{x+1}{x}\right\}$ és $\left\{x, \frac{x-7}{x-3}, \frac{3x-7}{x-1}\right\}$ csoportot alkotnak (az első nyilván olyan x-ekre, hogy $x \neq -1$, $x \neq 0$, a másodiknál pedig $x \neq 3$, $x \neq 1$ esetén).

Ezek az $\left\{x, \dfrac{\lambda_1 x + \mu_1}{x + \delta_1}, \dfrac{\lambda_2 x + \mu_2}{x + \delta_2}\right\} = \{g_1(x), g_2(x), g_3(x)\}$ függvényhármas speciális esetei (melyre nyilván visszevezethetők az általánosabbnak tűnő $\left\{x, \dfrac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}, \dfrac{a_2 x + b_2}{c_2 x + d_2}\right\}$ hármasok).

A lineáris törtfüggvényeket tartalmazó $\{g_1(x), g_2(x), g_3(x)\}$ függvényhármasnál $\lambda_1 = 0$ (vagy $\lambda_2 = 0$) esetén megmutatható, hogy csak akkor lesz csoport, ha $\delta_1 = -a$, $\mu_1 = \mu_2 = -a^2$, $\delta_2 = 0$, $\lambda_2 = a$, azaz $\left\{x, \dfrac{a^2}{a-x}, \dfrac{ax - a^2}{x}\right\}$ alakú $x \neq 0$, $x \neq a$ mellett.

Ha $a = -1$, úgy e hármas a fentebb említett első példa.

Ha $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, akkor $(g_2 \circ g_3)(x) = x$ és $(g_3 \circ g_2)(x) = x$ azonnal adja, hogy $\delta_1 = -\lambda_2$, $\delta_2 = -\lambda_1$ és $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

Így csak $\left\{x, \dfrac{\lambda_1 x+\mu}{x-\lambda_2}, \dfrac{\lambda_2 x+\mu}{x-\lambda_1}\right\}$ hármasok jöhetnek számításba.

A $(g_2 \circ g_2)(x) = g_3(x)$, $(g_3 \circ g_3)(x) = g_2(x)$ azonosságok tovább szűkítik a lehetőségeket. Belátható, hogy csak olyan λ_1, λ_2 lehetséges, melyekhez $\exists\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, hogy $\lambda_1 - \lambda_2 = \alpha$, továbbá $\exists\beta \in \mathbb{R}$, $\beta < 0$ úgy, hogy $\lambda_1\lambda_2 = \beta - \mu$.

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\mu = -7$ esetén létezik ilyen α, β, s akkor kapjuk a fenti második példát.

Itt is igaz, hogy ha $\{x, g_2(x), g_3(x)\}$ csoport, úgy ha a $\{\varphi(x), g_2(\varphi(x)), g_3(\varphi(x))\}$ függvények szerepelnek az f ismeretlen függvény argumentumában, ahol φ invertálható,akkor az $x \to \varphi^{-1}(x)$ helyettesítéssel már olyan egyenletünk lesz, melyben az $\{x, g_2(x), g_3(x)\}$ csoport elemei lesznek az f argumentumában.

Az is ellenőrizhető, hogy egy φ invertálható függvény esetén az $\left\{x, \left(\varphi^{-1} \circ g_2 \circ \varphi\right)(x), \left(\varphi^{-1} \circ g_3 \circ \varphi\right)(x)\right\}$ hármas is csoport, ha $\{x, g_2(x), g_3(x)\}$ az.

A következőkben az előbbiekre tekintünk feladatokat.

13. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{0, a\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x) + f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) = x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, a\})$$

függvényegyenletet, ahol $a \in \mathbb{R}$ konstans. $f(x) =?$

Megoldás
A feladat egyenletében a $g_1(x) = x$, $g_2(x) = \frac{a^2}{a-x}$ szerepel az f argumentumában. Ha az $x \mapsto \frac{a^2}{a-x} = g_2(x)$ bevezetőben javasolt helyettesítést elvégezzük, úgy $g_2(g_2(x)) = \frac{ax-a^2}{x} = g_3(x) \neq g_2(x), g_1(x)$, így próbálkozzunk az $x \mapsto \frac{ax-a^2}{x} = g_3(x)$ helyettesítéssel. Ekkor $g_2(g_3(x)) = x = g_1(x)$ már nem ad új argumentumot.

Az eredeti egyenlet és belőle az előbbi $x \mapsto g_2(x)$, illetve $x \mapsto g_3(x)$ helyettesítéssel kapott egyenletek adják az

$$\begin{cases} f(x) + f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) = x \\ f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) + f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right) = \frac{a^2}{a-x} \\ f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right) + f(x) = \frac{ax-a^2}{x} \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszert az $f(x)$, $f\left(\frac{a^2}{a-x}\right)$, $f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right)$ ismeretlenekre bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, a\}$ esetén. Előbb $f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right)$, majd $f\left(\frac{a^2}{a-x}\right)$ eliminálása után (ami nyilván egyszerű), kapjuk $f(x)$-re, hogy

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{x} + \frac{x^2}{a-x}\right) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, a\}) ,$$

ami teljesíti függvényegyenletünket.

14. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{1}{x} - x + 1 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

Megoldás
Az f argumentumában az x, $\frac{x-1}{x}$ függvények, míg ha az $x \to \frac{x-1}{x}$ helyettesítéssel élünk,akkor az $\frac{x-1}{x}$ $\frac{1}{1-x}$ függvények szerepelnek. A két egyenletben tehát az argumentum függvényei az $\left\{x, \frac{1}{1-x}, \frac{x-1}{x}\right\}$ függvényhármas tagjai,ami az $\left\{x, \frac{a^2}{a-x}, \frac{ax-a^2}{x}\right\}$ csoport speciális esete $a = 1$ mellett.

Alkalmazható tehát a már jelzett módszer. Tekintsük az eredeti egyenletet és az abból az $x \to \frac{x-1}{x}$, majd $x \to \frac{1}{1-x}$ helyettesítéssel kapott egyenletekből álló, minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$-re teljesülő

$$\begin{cases} f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{1}{x} - x + 1 \\ f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x} + 1 \\ f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = -x - \frac{1}{1-x} + 2 \end{cases}$$

egyenletrendszert az $f(x)$, $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$, $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$ ismeretlenekre. Ennek megoldása $f(x)$-re az $f(x) = 1-x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\})$ függvény, ami megoldása lesz a feladatnak is.

15. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{0,2\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x) + f\left(\frac{4}{2-x}\right) = x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

Megoldás
Ha az egyenletben elvégezzük az $x \to \frac{4}{2-x}$ helyettesítést, akkor a kapott egyenletben f argumentumában a $\frac{4}{2-x}$, $\frac{2x-4}{x}$ függvények lesznek. Ugyanakkor az $\left\{x, \dfrac{4}{2-x}, \dfrac{2x-4}{x}\right\}$ függvényhármas az $\left\{x, \dfrac{a^2}{a-x}, \dfrac{ax-a^2}{x}\right\}$ csoport speciális esete $a = 2$ mellett.

Így elvégezve a feladat egyenletében az $x \to \frac{4}{2-x}$, majd $x \to \frac{2x-4}{x}$ helyettesítést, úgy kapjuk az

$$\begin{cases} f(x) + f\left(\frac{4}{2-x}\right) = x \\ f\left(\frac{4}{2-x}\right) + f\left(\frac{2x-4}{x}\right) = \frac{4}{2-x} \\ f\left(\frac{2x-4}{x}\right) + f(x) = \frac{2x-4}{x} \end{cases}$$

egyenletrendszert minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$-re, az $f(x)$, $f\left(\frac{4}{2-x}\right)$, $f\left(\frac{2x-4}{x}\right)$ ismeretlenekre.

Az $f(x)$-re kapott

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x-2}{x} - \frac{2}{2-x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\})$$

megoldás (ahogy ezt egy egyszerű számolás mutatja) megoldása lesz a feladat függvényegyenletének.

16. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{0,-1\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f\left(\frac{x}{1-x}\right) + f\left(-\frac{1}{x}\right) = x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\})$$

függvényegyenletet. $f(x) = ?$

Megoldás
Az egyenletben nem szerepel a $g_1(x) = x$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\})$ identikus függvény f argumentumában. Az $x \mapsto -\frac{1}{x}$ helyettesítéssel kapott, az eredetivel ekvivalens

$$f\left(-\tfrac{1}{x+1}\right) + f(x) = -\tfrac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\}) \qquad (*)$$

egyenletben már igen, a $g_2(x) = -\frac{1}{x+1}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\})$ függvénnyel együtt.

Az $x \mapsto g_2(x) = -\frac{1}{x+1}$ helyettesítéssel a $(*)$ egyenlet olyan egyenletet ad, melyben megjelenik a $g_3(x) = g_2(g_2(x)) = -\frac{x+1}{x}$ argumentum. $(*)$-ból az $x \mapsto -\frac{x+1}{x} = g_3(x)$ helyettesítés a $g_1(x)$ és $g_3(x)$ argumentumokat adja (vagyis nem kapunk újabb argumentumot). Az előbbi helyettesítések után kapott

$$\begin{cases} f\left(-\frac{1}{x+1}\right) + f(x) = -\frac{1}{x} \\ f\left(-\frac{x+1}{x}\right) + f\left(-\frac{1}{x+1}\right) = x+1 \\ f(x) + f\left(-\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x}{x+1} \end{cases}$$

bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\}$-re teljesülő lineáris egyenletrendszer az $f(x)$, $f\left(-\frac{1}{x+1}\right)$, $f\left(-\frac{x+1}{x}\right)$ ismeretlenekre, melynek megoldása $f(x)$-re

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\}),$$

ami megoldása a feladat egyenletének is.

Megjegyzés
Az $\left\{x, -\frac{1}{x+1}, -\frac{x+1}{x}\right\}$ függvényhármas egyébként a $\left\{x, \frac{a^2}{a-x}, \frac{ax-a^2}{x}\right\}$ csoport $a = -1$ melletti speciális esete.

17. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{1,3\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti a

$$2f(x) + 3f\left(\frac{x-7}{x-3}\right) = x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1,3\})$$

függvényegyenletet. $f(x) = ?$

Megoldás
Az ismeretlen függvény argumentumában az $\left\{x, \dfrac{x-7}{x-3}, \dfrac{3x-7}{x-1}\right\}$ csoport (melyről már szóltunk) két eleme van.

Valóban az $x \to \frac{x-7}{x-3}$ helyettesítéskor $\frac{x-7}{x-3} \to \frac{\frac{x-7}{x-3}-7}{\frac{x-7}{x-3}-3} = \frac{3x-7}{x-1}$, míg az $x \to \frac{3x-7}{x-1}$ helyettesítéskor $\frac{x-7}{x-3} \to \frac{\frac{3x-7}{x-1}-7}{\frac{3x-7}{x-1}-3} = x$ következik.

Az eredeti egyenlethez hozzávéve az így kapott egyenleteket, kapjuk a

$$\begin{cases} 2f(x) + 3f\left(\frac{x-7}{x-3}\right) = x \\ 2f\left(\frac{x-7}{x-3}\right) + 3f\left(\frac{3x-7}{x-1}\right) = \frac{x-7}{x-3} \\ 2f\left(\frac{3x-7}{x-1}\right) + 3f(x) = \frac{3x-7}{x-1} \end{cases}$$

egyenletrendszert bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{1,3\}$ esetén az $f(x)$, $f\left(\frac{x-7}{x-3}\right)$, $f\left(\frac{3x-7}{x-1}\right)$ ismeretlenekre.

A harmadik egyenletből kifejezve $f\left(\frac{3x-7}{x-1}\right)$-et $f(x)$-el, a kapott kifejezést a második egyenletbe írva, majd abból $f\left(\frac{x-7}{x-3}\right)$ (ugyancsak $f(x)$-től függő) értékét kifejezve és beírva az első egyenletbe, rövid számolás után kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{4}{35}x - \frac{6}{35}\frac{x-7}{x-3} + \frac{9}{35}\frac{3x-7}{x-1} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1,3\})$$

Ez valóban teljesíti függvényegyenletünket. Ellenőrizzük!

18. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{1,3\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti a

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + f\left(\frac{3x-4}{x-2}\right) + (2-x)f(-2x+5) = \frac{x^2-2}{x-1}$$

$(x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\})$ függvényegyenletet. $f(x) =?$

Megoldás
A feladat függvényegyenletében nem szerepel a $g_1(x) = x$ identikus függvény az ismeretlen f függvény argumentumában. Korábban jeleztük, hogy alkalmas helyettesítéssel ez elérhető.

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az $x \to \frac{x+1}{x-1}$ $(x \neq 1)$ lineáris függvény inverze önmaga (egyébként általánosan az $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ inverze az $x \to \frac{dx-b}{-cx+a}$ lineáris tört, ahogy erről már szóltunk, s ez is használható itt). Az $x \to \frac{x+1}{x-1}$ helyettesítéssel, egyszerű számolással kapjuk egyenletünkből az

$$f(x) + f\left(\frac{x-7}{x-3}\right) - \frac{x-3}{x-1} f\left(\frac{3x-7}{x-1}\right) = \frac{-x^2+6x-1}{2(x-1)} \quad (x \neq 1, 3)$$

függvényegyenletet az $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ függvényre.

Látható, hogy ebben az egyenletben az $\left\{x, \dfrac{x-7}{x-3}, \dfrac{3x-7}{x-1}\right\}$, az előző feladatban is szerepet játszó csoport elemei vannak az f ismeretlen függvény argumentumában. Így utóbbi egyenletünk az $x \to \frac{x-7}{x-3}$, illetve $x \to \frac{3x-7}{x-1}$ helyettesítésekkel kapott két egyenlettel együtt egy egyenletrendszert ad az $f(x)$, $f\left(\frac{x-7}{x-3}\right)$, $f\left(\frac{3x-7}{x-1}\right)$ ismeretlenekre. $f\left(\frac{3x-7}{x-1}\right)$, majd $f\left(\frac{x-7}{x-3}\right)$ eliminálása után elég egyszerűen következik, hogy

$$f(x) = \frac{2}{x-1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\})$$

ami valóban megoldása függvényegyenletünknek.

19. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x) + 2f\left(\frac{2x-3}{x-1}\right) + 3f\left(\frac{x-3}{x-2}\right) = 2x - 6 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\})$$

függvényegyenletet. $f(x) = ?$

Megoldás
Az ismeretlen függvény argumentumában lévő
$\left\{x, \dfrac{2x-3}{x-1}, \dfrac{x-3}{x-2}\right\} = \{g_1(x), g_2(x), g_3(x)\}$ függvényhármas jól láthatóan a korábban már vizsgált $\left\{x, \dfrac{\lambda_1 x + \mu}{x - \lambda_2}, \dfrac{\lambda_2 x + \mu}{x - \lambda_1}\right\}$ hármas speciális esete $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\mu = -3$ mellett, így
$g_2(g_2(x)) = g_3(x)$ és $g_3(g_3(x)) = g_2(x)$ teljesül (tessék azért ellenőrizni).

Ha belátjuk, hogy g_2 és g_3 egymás inverzei, úgy alkalmazható a vázolt (s az előbbiekben már használt) módszer.

S valóban, ha $x \neq 1, 2$:
$g_2(g_3(x)) = \frac{2\frac{x-3}{x-2}-3}{\frac{x-3}{x-2}-1} = \frac{-x}{-1} = x$; $g_3(g_2(x)) = \frac{\frac{2x-3}{x-1}-3}{\frac{2x-3}{x-1}-2} = \frac{-x}{-1} = x$.

Így ha az eredeti egyenletből és az abból az $x \to \frac{2x-3}{x-1}$, illetve $x \to \frac{x-3}{x-2}$ helyettesítéssel kapott két egyenletből nyerhető, bármely $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$-re teljesülő

$$\begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{2x-3}{x-1}\right) + 3f\left(\frac{x-3}{x-2}\right) = 2x-6 \\ f\left(\frac{2x-3}{x-1}\right) + 2f\left(\frac{x-3}{x-2}\right) + 3f(x) = \frac{-2x}{x-1} \\ f\left(\frac{x-3}{x-2}\right) + 2f(x) + 3f\left(\frac{2x-3}{x-1}\right) = \frac{-4x+6}{x-2} \end{cases}$$

egyenletrendszert az $f(x)$, $f\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)$, $f\left(\frac{x-3}{x-2}\right)$ ismeretlenekre megoldjuk (amit egyszerű számolással megtehetünk), kapjuk $f(x)$-re, hogy

$$f(x) = -\frac{5}{9}x + \frac{5}{3} + \frac{1}{9}\frac{-2x+3}{x-2} - \frac{7}{9}\frac{x}{x-1} \quad (x \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}) .$$

Ez valóban teljesíti is a feladat egyenletét.

20. Feladat
Az $f : \mathbb{R}\setminus\{0,3\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x^5) + x^5 f\left(\frac{9}{3-x^5}\right) = x^5 - 3 \quad \left(x \in \mathbb{R}\setminus\{\sqrt[5]{3}\}\right)$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

Megoldás
A $\varphi(x) = x^5$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény invertálható, $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$ $(x \in \mathbb{R})$ inverzzel, így próbálkozhatnánk az $x \to \sqrt[5]{x}$ helyettesítéssel kapott

$$f(x) + xf\left(\frac{9}{3-x}\right) = x - 3 \quad (x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}) \qquad (*)$$

függvényegyenlet megoldásával.

Ha a korábbi tapasztalatok alapján az $x \to \frac{9}{3-x}$ helyettesítést alkalmazzuk, úgy $\frac{9}{3-x}$ helyébe $\frac{9}{3-\frac{9}{3-x}} = \frac{3x-9}{x}$ kerül, így kapjuk az

$$f\left(\frac{9}{3-x}\right) + \frac{9}{3-x}f\left(\frac{3x-9}{x}\right) = \frac{3x}{3-x} \quad (x \in \mathbb{R}\setminus\{0,3\})$$

egyenletet.

A két egyenletben az f ismeretlen függvény argumentumában az x, $\frac{9}{3-x}$, $\frac{3x-9}{x}$ függvények szerepelnek, melyek $a=3$ mellett az $\left\{x, \dfrac{a^2}{a-x}, \dfrac{ax-a^2}{x}\right\}$ (már vizsgált) csoport elemei.

A $(*)$-ból az $x \to \frac{3x-9}{x}$ helyettesítéssel kapott

$$f\left(\frac{3x-9}{x}\right)+\frac{3x-9}{x}f(x)=-\frac{9}{x} \quad (x \neq 0,3)$$

egyenletben, a várakozásnak megfelelően nincs új argumentuma f-nek.

Ha az utóbbi három egyenletből álló bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$-ra teljesülő

$$\begin{cases} f(x)+xf\left(\frac{9}{3-x}\right)=x-3 \\ f\left(\frac{9}{3-x}\right)+\frac{9}{3-x}f\left(\frac{3x-9}{x}\right)=\frac{3x}{3-x} \\ f\left(\frac{3x-9}{x}\right)+\frac{3x-9}{x}f(x)=-\frac{9}{x} \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldható az $f(x)$, $f\left(\frac{9}{3-x}\right)$, $f\left(\frac{3x-9}{x}\right)$ ismeretlenekre, úgy megkaphatjuk az eredeti egyenlet megoldását is.

Az egyenlet megoldható és egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$f(x)=\frac{1}{13}\,\frac{2x^2-3x+45}{3-x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}) ,$$

ami megoldása is lesz a feladat függvényegyenletének.

Megjegyzés
Ha a feladatban az $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ függvényt keresnénk, ami elég természetes, úgy az $x=0$ helyettesítés adná, hogy $f(0)=-3$, míg $x \neq 0$ esetén ($x \neq 3$ mellett) kapnánk f előbbi alakját. Ekkor tehát az f függvény

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{13}\frac{2x^2-3x+45}{3-x} & \text{, ha } x \neq 0,3 \\ -3 & \text{, ha } x=0 \end{cases}$$

alakú.

21. Feladat
Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ függvényt, ha teljesíti az

$$f(x) + f\left(\sqrt[n]{\frac{x^n - 1}{x^n}}\right) = \sqrt[n]{1 + x^n} \quad (x \neq 0, 1)$$

függvényegyenletet, ahol n páratlan természetes szám.

Megoldás
Ha tekintjük a $\varphi(x) = x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt (ahol n páratlan) úgy ez invertálható, és $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Az f ismeretlen függvény argumentumában szereplő $\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}$ függvény $(\varphi^{-1} \circ g_2 \circ \varphi)(x)$ alakú, ahol $g_2(x) = \frac{x-1}{x}$ $(x \neq 0)$. Az $\left\{x, \dfrac{x-1}{x}\right\}$ pár a már korábban vizsgált $\left\{x, \dfrac{x-1}{x}, \dfrac{1}{1-x}\right\}$ csoport két eleme, így (ahogyan ezt már megjegyeztük) ha $g_3(x) = \frac{1}{1-x}$, úgy az $\left\{x, \sqrt[n]{\dfrac{x^n-1}{x^n}}, \sqrt[n]{\dfrac{1}{1-x^n}}\right\}$ hármas is csoport lesz.

Alkalmazható tehát a következő ismert eljárás. Helyettesítsünk egyenletünkben x helyére $\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}$-t úgy kapjuk az

$$f\left(\sqrt[n]{\frac{x^n - 1}{x^n}}\right) + f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{1 - x^n}}\right) = \sqrt[n]{\frac{2x^n - 1}{x^n}} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$$

függvényegyenletet.

Ha pedig az eredeti egyenletben az $x \to \sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}$ helyettesítéssel élünk úgy az

$$f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{1 - x^n}}\right) + f(x) = \sqrt[n]{\frac{2 - x^n}{1 - x^n}} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$$

egyenlet.

Ha a minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$-re teljesülő

$$\begin{cases} f(x) + f\left(\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}\right) = \sqrt[n]{1+x^n} \\ f\left(\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}\right) + f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}\right) = \sqrt[n]{\frac{2x^n-1}{x^n}} \\ f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}\right) + f(x) = \sqrt[n]{\frac{2-x^n}{1-x^n}} \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldható az $f(x)$, $f\left(\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}\right)$, $f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}\right)$ ismeretlenekre, úgy megkaphatjuk a feladat megoldását.

Előbb $f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}\right)$ kifejezése a harmadik egyenletből, majd a kapott formula segítségével $f\left(\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}\right)$ kifejezése a második egyenletből, s végül ennek felhasználása az első egyenletben adja, hogy

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{1+x^n} + \sqrt[n]{\frac{2-x^n}{1-x^n}} - \sqrt[n]{\frac{2x^n-1}{x^n}}\right) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}),$$

ami teljesíti a feladat függvényegyenletét.

Keressünk most olyan $\{g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x)\}$ négyeseket, hogy $g_1(x) = x$ és legyen a négyelemű halmaz csoport vagy félcsoport az összetett függvény képzés műveletére. Általános megjegyzéseket itt már nem teszünk, de például könnyen belátható, hogy a $\left\{x, \frac{x-1}{x+1}, -\frac{1}{x}, \frac{x+1}{1-x}\right\}$, $\{x, 1-x, 0, 1\}$ és $\left\{x, -\frac{2}{x}, 2, -1\right\}$ négyesek közül az első csoportot a másik kettő félcsoportot alkot.

Nézzünk néhány feladatot, melyeknél ezt a tényt felhasználhatjuk.

22. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

Megoldás
A szokásos módon, az $x \mapsto \frac{x-1}{x+1} = g_2(x)$ helyettesítéssel kezdve kapjuk az új $-\frac{1}{x} = g_3(x)$, majd az $x \mapsto -\frac{1}{x} = g_3(x)$ helyettesítéssel az $\frac{x+1}{1-x} = g_4(x)$

argumentumot, így az eredeti egyenletben még az $x \mapsto \frac{x+1}{1-x} = g_4(x)$ helyettesítést is végre kell hajtani, s akkor már a $g_2\left(g_4(x)\right) = x$ adódik.

Az eredeti egyenlet, illetve az ebből a fenti helyettesítéssekkel kapott három új egyenlet adja az

$$\begin{cases} xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 \\ \frac{x-1}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = 1 \\ -\frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right) + 2f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = 1 \\ \frac{x+1}{1-x}f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) + 2f(x) = 1 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszert az $f(x)$, $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, $f\left(-\frac{1}{x}\right)$, $f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ ismeretlenekre. Az eliminációt a negyedik egyenlettel kezdve, ,,felfelé” haladva, három lépésben kapjuk, hogy

$$f(x) = -\frac{1}{15x} + \frac{8}{15} + \frac{2}{15}\frac{(x+1)(2x+1)}{x(x-1)} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}) \ .$$

Kevés számolással megyőződhetünk, hogy ez megoldása a feladat egyenletének.

23. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti a

$$2f(x) + f(1-x) = 3 - xf(1) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) = ?$

Megoldás
Egyenletünkben a $g_1(x) = x, g_2(x) = 1 - x$ és $g_3(x) = 1$ függvények szerepelnek f argumentumában (azaz az egyik függvény konstans).

Az $x \mapsto 1 - x = g_2(x)$ helyettesítés nem ad új argumentumot, de az $f(x)$, $f(1-x)$ és $f(1)$ ismeretlenekre csak két egyenletünk van.

Folytassuk az $x \mapsto 1 = g_3(x)$ helyettesítéssel az eredeti egyenletben, úgy kapunk egy új, a $g_2\left(g_3(x)\right) = 0 = g_4(x)$ argumentumot. Most három egyenletünk lesz az $f(x)$, $f(1-x)$, $f(1)$, $f(0)$ ismeretlenekre.

Végül az $x \mapsto 0 = g_4(x)$ helyettesítéssel az eredeti egyenletből olyan egyenletet kapunk, melyben nem szerepel új argumentum.

Összefoglalva: az eredeti egyenlet és az abból az $x \mapsto 1-x$, majd $x \mapsto 1$, majd $x \mapsto 0$ helyettesítéssel kapott egyenletek a

$$\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = 3 - xf(1) \\ 2f(1-x) + f(x) = 3 - (1-x)f(1) \\ 2f(1) + f(0) = 3 - f(1) \\ 2f(0) + f(1) = 3 \end{cases}$$

egyenletrendszert adják az $f(x)$, $f(1-x)$, $f(1)$, $f(0)$ ismeretlenekre bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

A harmadik és negyedik egyenlet csak az $f(0)$ és $f(1)$ ismeretleneket tartalmazza, amiből egyszerűen adódik, hogy $f(1) = \frac{3}{5}$, $f(0) = \frac{6}{5}$.

Ekkor, $f(1) = \frac{3}{5}$ mellett tekintsük az első két egyenletet az $f(x)$ és $f(1-x)$ ismeretlenekre, a megoldás

$$f(x) = \frac{6-3x}{5} \quad (x \in \mathbb{R}) \ ,$$

ami teljesíti az eredeti egyenletet, hiszen
$2f(x) + f(1-x) = 2\frac{6-3x}{5} + \frac{6-3(1-x)}{5} = 3 - \frac{3}{5}x = 3 - xf(1)$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

24. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$(x-2)f(x) + f\left(-\frac{2}{x}\right) - xf(2) = 5 \quad (x \neq 0)$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

Megoldás
Az f argumentumának függvényei az $\left\{x, -\frac{2}{x}, 2, -1\right\}$ fentebb jelzett négyelemű félcsoport tagjai.

Az eredeti egyenlet és az ebből $x \to -\frac{2}{x}$, majd $x \to 2$, végül $x \to -1$ helyettesítéssel kapott három egyenlet adja (bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$-ra) az

$$\begin{cases} (x-2)f(x) + f\left(-\frac{2}{x}\right) - xf(2) = 5 \\ \left(-\frac{2}{x} - 2\right) f\left(-\frac{2}{x}\right) + f(x) + \frac{2}{x}f(2) = 5 \\ f(-1) - 2f(2) = 5 \\ -3f(-1) + 2f(2) = 5 \end{cases}$$

egyenletrendszert az $f(x)$, $f\left(-\frac{2}{x}\right)$, $f(2)$, $f(-1)$ ismeretlenekre.

Az utolsó két egyenlet azonnal adja, hogy
$f(-1) = f(2) = -5$. $f(2) = -5$-öt az első két egyenletbe helyettesítve egyszerű számolás adja, hogy

$$f(x) = -5 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \ ,$$

ami megoldása a feladat függvényegyenletének.

Gyakorló feladatok

1. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$(5-x)f(x) + xf(5-x) = 5 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

2. Az $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x) + xf\left(\frac{-2x-2}{3x+2}\right) = x+1 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

3. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$5f(x^7) + 3f\left(-x^7\right) = 4x \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

4. Az $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$xf(2x+1) + f\left(\frac{2}{2x+1}\right) = x-2 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

5. Az $f : \mathbb{R} \setminus \{-5, 0, \frac{3}{5}\} \to \mathbb{R}$ függvény $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2, \frac{5}{3}\}$ esetén teljesíti az

$$f\left(\frac{x}{x-2}\right) - \frac{x+3}{2}f\left(\frac{x+3}{-3x+5}\right) = \frac{x^2-2x-2}{x}$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

6. Az $f : \mathbb{R} \setminus \{0, -3\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x) + f\left(\frac{-3x-9}{x}\right) = 2x + 3 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -3\})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

7. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$2f(x) + xf\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = 5 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

8. Az $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = 2 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

9. Az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti a

$$\lg\left(1 - 10^x\right) f(x) - 2xf\left(\lg(1 - 10^x)\right) = 1 \quad (x < 0)$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

10. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x) + f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{1-x^3}}\right) = x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

11. Az $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x) + f\left(\sqrt[n]{\frac{x^n - 1}{x^n}}\right) = \sqrt[n]{1 + x^n} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$$

függvényegyenletet, ahol $n \in \mathbb{N}$ páratlan. $f(x) =?$

12. Az $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, \frac{3}{2}\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti a

$$2f\left(\frac{1}{1-x}\right) - 3f\left(\frac{-2x+3}{x+2}\right) = \frac{13x - 4x^2}{2x-3}$$

függvényegyenletet ($x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, \frac{3}{2}\}$). $f(x) =?$

13. Az $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti a

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + f\left(\frac{3x-4}{x-2}\right) + (2-x)f(-2x+5) = \frac{x^2-2}{x-1}$$

($x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$) függvényegyenletet. $f(x) =?$

14. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti a

$$3f(x) + xf(3-x) + xf(3) = 5 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

C) Többváltozós függvényegyenletek megoldása helyettesítésekkel

Ebben a fejezetben olyan, egyváltozós függvényre teljesülő, több független változót tartalmazó függvényegyenleteket vizsgálunk, melyek a változók speciális megadásával (helyettesítésével) egy, illetve általában több lépésben megoldhatók. Általános eljárás ugyan ezeknél a viszonylag speciális típusú egyenleteknél sincs, de több esetben megvizsgáljuk, hogy milyen kézenfekvő ötletek kínálkoznak, illetve vezetnek eredményre.

Az itt tekintett egyenlettípusok olyanok lesznek, hogy a bennük szereplő ismeretlen függvényre nem teszünk korlátozást, nem követelünk meg például folytonosságot vagy más „jó” tulajdonságot.

A ráhangolódás miatt először olyan egyszerű feladatokat választunk, amikor már egy speciális helyettesítés is megadja a függvényegyenlet megoldását.

1. Feladat
Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely teljesíti az

$$f(xy) = y^k f(x) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

függvényegyenletet, ahol $k \in \mathbb{N}$ rögzített. Határozzuk meg f-et.

Megoldás
Látható, hogy a jobb oldalon az y nem szerepel az f argumentumában, míg a bal oldalon f-et az xy helyen tekintjük, így az x speciális választása reménykeltő lehet. Miután pedig (1) $x = 1$-re is teljesül, végezzük el ezt a helyettesítést, s azt kapjuk, hogy

$$f(y) = y^k f(1) \quad (y \in \mathbb{R}) ,$$

azaz egyből megkaptuk f értékét bármely $(y \in \mathbb{R})$ esetén. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy $f(1) = c$ bárhogyan választható, így (1) megoldása

$$f(x) = cx^k \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

alakú, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans, hiszen

$$f(xy) = c(xy)^k = y^k(cx^k) = y^k f(x) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

miatt a (2) alakú függvények valóban teljesítik (1)-et.
Itt egyetlen, az $x = 1$ helyettesítés adta az egyenlet megoldását.

2. Feladat
Melyek azok az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények, amelyek teljesítik az

$$x^n f(y) = y^n f(x) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet?

Megoldás
Ha létezik $0 \neq y_0 \in \mathbb{R}$, hogy $f(y_0) = 0$, akkor egyenletünk adja, hogy $y_0^n f(x) = x^n f(y_0) = 0$, azaz $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$, ami nyilván megoldása a feladatnak.

Ha bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) \neq 0$, akkor egyenletünkben $y = 1$-et helyettesítve

$$f(x) = f(1)x^n \quad (x \in \mathbb{R}) \ ,$$

adódik, ahol $f(1) \neq 0$. A kapott f függvény valóban teljesíti egyenletünket $f(1) \neq 0$ tetszőleges választása mellett.

Ezeket összefoglalva: a feladat függvényegyenletét az

$$f(x) = cx^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények teljesítik, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

3. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$xf(y) + yf(x) = (x^2 + y^2)f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

Megoldás
Az egyenlet az $x = y = 1$ helyettesítéssel adja, hogy $2f(1) = 2\left(f(1)\right)^2 \Leftrightarrow f(1)\left(f(1) - 1\right) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1$ vagy $f(1) = 0$.

Ha $f(1) = 0$, úgy az egyenletből az $y = 1$ helyettesítéssel

$$f(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

következik, ami megoldás.

Ha $f(1)=1$, akkor az $y=1$ helyettesítés $x\in\mathbb{R}$ esetén adja, hogy
$x+f(x)=(x^2+1)f(x) \Leftrightarrow x=x^2f(x) \Leftrightarrow x\,(xf(x)-1)=0$.

Ha $x\neq 0$, úgy az utóbbi egyenlet adja, hogy

$$f(x)=\frac{1}{x}\ \ (x\in\mathbb{R})\ .$$

Ha $x=0$, úgy legyen $f(0)=c$, ahol $c\in\mathbb{R}$ konstans. Megmutatjuk, hogy az

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ c & (x=0)\end{cases}$$

függvény bármely $c\in\mathbb{R}$ esetén megoldása a függvényegyenletünknek.

Ha $x,y\in\mathbb{R}$ és $x,y\neq 0$, úgy

$$xf(y)+yf(x)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{x\cdot y}=(x^2+y^2)f(x)f(y)\ ,$$

azaz teljesül egyenletünk.

Ha $x=y=0$, akkor $x^2+y^2=0$, így

$$xf(y)+yf(x)=0\cdot c+0\cdot c=0\cdot c=0\cdot c^2=(x^2+y^2)c\cdot c=$$
$$=(x^2+y^2)f(x)f(y)\ .$$

Ha $x=0, y\neq 0$, akkor

$$xf(y)+yf(x)=yf(0)=yc=y^2c\cdot\frac{1}{y}=(0+y^2)f(0)f(y)=$$
$$=(x^2+y^2)f(x)f(y)\ .$$

Az $x\neq 0, y=0$ eset ugyanígy ellenőrizhető.

4. Feladat
Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$x^2f(y)+y^2f(x)=(x+y)f(x)f(y)\ \ (x,y\in\mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) = ?$

Megoldás
Az $x = y = 1$ helyettesítéssel kapjuk egyenletünkből, hogy
$2f(1) = 2\left(f(1)\right)^2 \Leftrightarrow f(1)\left(f(1) - 1\right) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0 \vee f(1) = 1$.

Ha $f(1) = 0$, akkor az $y = 1$ helyettesítés adja, hogy
$f(x) = (x+1)f(x) \cdot f(1) \Rightarrow f(x) = 0 \ (x \in \mathbb{R})$.

Az $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény megoldása egyenletünknek.

Ha $f(1) = 1$, úgy az $y = 1$ helyettesítés adja, hogy $x \in \mathbb{R}$ esetén
$x^2 + f(x) = (x+1)f(x) \Leftrightarrow xf(x) = x^2 \Leftrightarrow x\left(f(x) - x\right) = 0$.

Így ha $x \neq 0$, akkor $f(x) = x$. Legyen $f(0) = c$. Megmutatható, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x & ,\text{ha } x \neq 0 \\ c & ,\text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény is teljesíti függvényegyenletünket bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén, hiszen:

$x \neq 0, y \neq 0$ esetén
$x^2 f(y) + y^2 f(x) = x^2 y + xy^2 = (x+y)xy = (x+y)f(x)f(y)$;

$x = 0, y \neq 0$ esetén
$x^2 f(y) + y^2 f(x) = y^2 c = (0+y)cy = (x+y)f(x)f(y)$;

$x \neq 0, y = 0$ esetén
$x^2 f(y) + y^2 f(x) = x^2 c = (x+0)xc = (x+y)f(x)f(y)$.

5. Feladat
Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre teljesülő

$$f(x+y) = f(y) + x \quad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

függvényegyenlet megoldását.

Megoldás
A jobboldalon itt is csak az egyik változó, most az y szerepel f argumentumában. Ez a tény és az, hogy a bal oldalon $x+y$ alakú f argumentuma sugallja az $y = 0$ helyettesítést (3)-ban. Ekkor kapjuk, hogy

$$f(x) = f(0) + x \quad (x \in \mathbb{R}) ,$$

azaz f előállítását. Mivel pedig bármely $f(0) = a$ választással

$$f(x+y) = f(0) + (x+y) = (f(0)+y) + x = f(y) + x \ (x, y \in \mathbb{R}),$$

így (3) általános megoldása

$$f(x) = x + a \ \ (x \in \mathbb{R}) \ ,$$

ahol $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

Itt is egyetlen helyettesítés adja a megoldást.

6. Feladat
Határozzuk meg azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyek teljesítik az

$$f(x+y) - f(x-y) = 4xy \ \ (x, y \in \mathbb{R}) \tag{4}$$

függvényegyenletet.

Megoldás
Most az x vagy az y speciális választása nem tűnik eredményesnek.

Ugyanakkor, mivel csak $x+y$ és $x-y$ szerepel f argumentumában, ha az $x = y$ választással élünk, úgy a bal oldal második tagja konstans lesz. Elkerülendő az újabb helyettesítést, legyen (4)-ben $x = y = \frac{t}{2}$, így

$$f(t) = t^2 + f(0) \ \ (x \in \mathbb{R})$$

adódik.
$f(0)$ bármilyen választása mellett, ezen f-re és $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x+y) - f(x-y) = (x+y)^2 + f(0) - (x-y)^2 - f(0) = 4xy,$$

azaz teljesül (4), így az általános megoldás

$$f(x) = x^2 + a \ \ (x \in \mathbb{R}) \ ,$$

ahol $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

A megoldást itt is egyetlen helyettesítéssel kaptuk, de ez az előzőektől eltérő jellegű volt.

A 3. és 4. feladatokban szereplő egyenletek a

$$H\left(f(x+y), f(x-y), f(x), f(y), x, y\right)=0 \quad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad (H)$$

típusba sorolhatók, ahol f az ismeretlen (keresett) függvény, míg $H : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ típusú adott függvény.

Ha itt $y = 0$-t helyettesítünk azt kapjuk, hogy

$$H\left(f(x), f(x), f(x), f(0), x, 0\right)=0 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad (H')$$

Ha ez az egyenlet megoldható $f(x)$-re (erre már láttunk példát), úgy a kapott megoldás megoldása lesz (H)-nak is, mely legfeljebb egy szabadon választható konstanst tartalmaz. Ez a konstans a (H')-ben szereplő $f(0)$ miatt lehet, de az alábbi példák mutatják, hogy $f(0)$ nem választható mindig tetszőlegesen.

7. Feladat
Határozzuk meg azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyek teljesítik az

$$[f(x-y)]^3 + [f(x+y)]^2 f(x) = (x-y)^3 + x\,[f(x+y)]^2 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet.

Megoldás
Egyenletünk (H) típusú. Próbálkozzunk az $y = 0$ helyettesítéssel; ekkor

$$[f(x)]^3 + [f(x)]^2 f(x) = x^3 + x\,[f(x)]^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

illetve

$$[f(x)]^3 - x^3 + [f(x)]^2 \left(f(x) - x\right) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

következik, mely az $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ azonosság felhasználásával írható az

$$\left(f(x) - x\right)\left([f(x)]^2 + xf(x) + x^2 + [f(x)]^2\right) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakba. Egyszerűen belátható, hogy $x \neq 0$-ra a második tényező nem zérus, így $f(x) = x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$. De $x = y = 0$-val az egyenlet adja, hogy $f(0) = 0$, ezért $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$.

8. Feladat
Határozzuk meg azt az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre teljesül az

$$f(x+y) + \cos(x-y) = 2f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad (5)$$

függvényegyenlet.

Megoldás
Ismeretes, hogy az $f(x) = \cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ teljesíti a

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos(x)\cos(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

azonosságot, s így a függvényegyenletünket. Megmutatjuk, hogy (5)-nek nincs más megoldása.

(5) a (H) típusba tartozik. Éljünk az $y = 0$ helyettesítéssel, úgy következik

$$f(x) + \cos(x) = 2f(0)f(x) \quad (x \in \mathbb{R}) ,$$

illetve a vele ekvivalens

$$f(x)\,[2f(0) - 1] = \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{6}$$

egyenlőség.

$2f(0) - 1 \neq 0$, mert ha $2f(0) - 1$ egyenlő lenne 0-val, úgy a (6)-ból $x = 0$-val következő

$$f(0)\,[2f(0) - 1] = 1 \tag{7}$$

nem állhatna fenn, hiszen $0 \neq 1$.

Ugyanakkor egyszerűen következik (7)-ből, hogy $f(0)$-ra

$$f(0) = 1 \text{ vagy } f(0) = -\tfrac{1}{2}$$

lehetséges. Ezt és (6)-ot felhasználva kapjuk, hogy

$$f(x) = \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ vagy } f(x) = -\tfrac{1}{2}\cos(x) \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

Az $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény azonban nem teljesíti az (5) függvényegyenletet, így egyedüli megoldása az $f(x) = \cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény.

9. Feladat
Adjuk meg az

$$f(x-y) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{8}$$

függvényegyenletet teljesítő $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket.

Megoldás
(8) is (H) alakú és ebből az $y = 0$ helyettesítéssel

$f(x) = f(x)f(0)$ $(x \in \mathbb{R})$ következik, s ez $f(0) = 0$ esetén adja, hogy $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$, ami megoldása (8)-nak.

Ha $f(0) \neq 0$, akkor a (8)-ból az $x = y = 0$ helyettesítéssel kapott $f(0) = [f(0)]^2$ egyenlőség adja, hogy $f(0) = 1$.

Ha $f(0) = 1$, úgy (8)-ból $x = 0$ helyettesítéssel

$$f(-y) = f(0)f(y) = f(y) \quad (y \in \mathbb{R})$$

következik, azaz ekkor f páros függvény.

Végül (8) $x = y$-nal adja, hogy $[f(x)]^2 = f(0) = 1$ $(x \in \mathbb{R})$, míg $x = -y = \frac{t}{2}$ esetén $f(t) = f\left(\frac{t}{2}\right) f\left(-\frac{t}{2}\right) = \left[f\left(\frac{t}{2}\right)\right]^2$ $(t \in \mathbb{R})$, így $f(x) = 1$ $(x \in \mathbb{R})$ következik, ami megoldása (8)-nak.
(8) megoldásai tehát az

$$f(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad f(x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények.

10. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x + y) = f(x)f(y) - a \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet, ahol $0 \neq a \in \mathbb{R}$ adott. $f(x) =?$

Megoldás
Az $x = y = 0$ helyettesítéssel $f(0) = [f(0)]^2 - a$ adódik az egyenletből, ami akkor és csak akkor teljesül, ha

$$f(0) = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2} .$$

Ahhoz, hogy $f(0) \in \mathbb{R}$ legyen $a \geq -\frac{1}{4}$ kell, hogy teljesüljön. Másrészt a feltétel miatt $a \neq 0$, így $f(0) \neq 1$ (hiszen $f(0) = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} = 1$ akkor és csak akkor, ha $a = 0$).

Az egyenlet az $y = 0$ helyettesítéssel adja, hogy

$$f(x) = f(x)f(0) - a \quad (x \in \mathbb{R}) ,$$

amiből $f(0) \neq 1$ miatt következik, hogy

$$f(x) = \frac{a}{f(0) - 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2} \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

Egyszerű számolás adja, hogy az $f(x) = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, illetve $f(x) = = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények valóban teljesítik függvényegyenletünket.

Megjegyzések

1. Ha $a = 2$, úgy csak az $f(x) = 2$ és $f(x) = -1$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények teljesítik az

$$f(x+y) = f(x)f(y) - 2 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

   függvényegyenletet.

2. A feladat függvényegyenlete $a = 0$ esetén az

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

   úgynevezett Cauchy exponenciális egyenlet. Ennek vizsgálatára később visszatérünk, s látni fogjuk, hogy megoldása lényegesen bonyolultabb.

11. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x+y) = f(x)f(y) - f(x) - f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

Megoldás
Egyenletünk írható a vele ekvivalens

$$f(x+y) - 1 = f(x)f(y) - f(x) - f(y) + 1 - 2 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

illetve az

$$f(x+y) - 1 = (f(x) - 1)(f(y) - 1) - 2 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

alakban is.

Utóbbi mutatja, hogy a

$$g(x) = f(x) - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

szerint definiált függvény teljesíti az előző feladatot követő 1. megjegyzés függvényegyenletét. Ezért csak

$$g(x) = 2\ , \quad \text{vagy} \quad g(x) = -1 \ \ (x \in \mathbb{R})$$

lehetséges.

Ebből pedig, g definíciója miatt kapjuk, hogy

$$f(x) = 3\ , \quad \text{vagy} \quad f(x) = 0 \ \ (x \in \mathbb{R})\ ,$$

melyek valóban teljesítik a feladat függvényegyenletét.

Megjegyzés
Vizsgálható az általánosabb

$$f(x+y) = f(x)f(y) - bf(x) - bf(y) - a \ \ (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenlet is az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre.

Ez $b = 1$, $a = 0$ mellett adja a feladat, míg $b = 0$ mellett az előző feladat függvényegyenletét.

Várható persze, hogy csak bizonyos, az a-ra és b-re tett feltételek mellett létezik megoldás az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények körében.

12. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x+y) = [f(x)]^n + f(y) \ \ (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet, ahol $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ rögzített. $f(x) =?$

Megoldás
Egyenletünk az $x = y = 0$ helyettesítéssel adja, hogy $f(0) = [f(0)]^n + f(0)$, azaz $f(0) = 0$ teljesül.

Az $y = 0$ helyettesítéssel kapjuk egyenletünkből, hogy $f(x) = [f(x)]^n$, azaz $f(x)\left([f(x)]^{n-1} - 1\right) = 0$.

Ha $n = 2k$, akkor

$f(x)\left([f(x)]^{2k-1} - 1\right) = 0$, azaz $f(x) \in \{0, 1\}$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ha létezik $x_0 \in \mathbb{R}$, hogy $f(x_0) = 1$, akkor egyenletünkből az $x = y = x_0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$f(2x_0) = [f(x_0)]^n + f(x_0) = 2\ ,$$

ami ellentmondás, hiszen ekkor $f(2x_0) \notin \{0,1\}$.

Így $n = 2k$ mellett csak az

$$f(x) = 0 \ \ (x \in \mathbb{R})$$

lehet egyenletünk megoldása, ami valóban megoldás.

Ha $n = 2k+1$, akkor

$$f(x)\left([f(x)]^{2k} - 1\right) = 0 \ \Leftrightarrow \ f(x)\left\{\left([f(x)]^2\right)^k - 1\right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ f(x)\left([f(x)]^2 - 1\right)\left(\left([f(x)]^2\right)^{k-1} + \left([f(x)]^2\right)^{k-2} + \cdots + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ $f(x) = 0$ vagy $f(x) = 1$ vagy $f(x) = -1$. Tehát bármely $x \in \mathbb{R}$-re $f(x) \in \{0,1,-1\}$. Ha létezik $x_1 \in \mathbb{R}$, hogy $f(x_1) = 1$, akkor az előbbiekhez hasonlóan kapjuk, hogy $f(2x_1) = 2$, ami ellentmondás. Ha létezne $x_2 \in \mathbb{R}$, hogy $f(x_2) = -1$, akkor egyenletünk adja, hogy $f(2x_1) = (-1)^{2k+1} - 1 = -2$, ami szintén ellentmondás.

Így $n = 2k+1$-re is csak az $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ lehet megoldás.

Összefoglalva: bármely $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ mellett a feladat függvényegyenletét csak az $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény teljesíti.

Megjegyzés
A feladatban szereplő függvényegyenlet $n = 1$ esetén az

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \ \ (x, y \in \mathbb{R})$$

Cauchy-alapegyenletet adja, melynek lényegesen bonyolultabb megoldására még visszatérünk.

13. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x+y) = [f(x)]^2 + [f(y)]^2 \ \ (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

Megoldás
Az $x = y = 0$ helyettesítéssel egyenletünk adja, hogy $f(0) = 2\,[f(0)]^2$, azaz $f(0)\,[2f(0) - 1] = 0$, ami csak úgy lehetséges, ha $f(0) = 0$ vagy $f(0) = \frac{1}{2}$.

Ha $f(0)=0$, akkor a feladat függvényegyenletéből az $y=0$ helyettesítéssel $f(x)=[f(x)]^2$, azaz $f(x)[f(x)-1]=0\ \ (x\in\mathbb{R})$ következik, így $f(x)\in\{0,1\}$ bármely $x\in\mathbb{R}$-re. Ha létezik $x_0\in\mathbb{R}$, hogy $f(x_0)=1$, akkor az $x=y=x_0$ helyettesítés adja, hogy $f(2x_0)=2$, ami ellentmondás.

Így $f(0)=0$ mellett csak $f(x)=0\ \ (x\in\mathbb{R})$ lehet a feladat megoldása, s ez valóban az.

Ha $f(0)=\frac{1}{2}$, úgy egyenletünk az $y=0$ helyettesítéssel adja, hogy

$$f(x)=[f(x)]^2+\frac{1}{4}\ \ (x\in\mathbb{R})\ ,$$

amiből következik, hogy

$$\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2=0\ \ (x\in\mathbb{R})\ ,$$

s ez akkor és csak akkor teljesül, ha $f(x)=\frac{1}{2}\ \ (x\in\mathbb{R})$. Ez a függvény valóban teljesíti függvényegyenletünket.

Összefoglalva: a feladat megoldásai az

$$f(x)=0\ \ (x\in\mathbb{R})\ \text{és}\ f(x)=\frac{1}{2}\ \ (x\in\mathbb{R})$$

függvények.

Megjegyzés
A feladat általánosítható úgy, hogy az

$$f(x+y)=[f(x)]^n+[f(y)]^n\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

függvényegyenlet $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ megoldásait keressük.

Ekkor is követhetjük a fenti módszert. $f(0)$ lehetséges értékei egyszerűen adódnak, az $f(0)=0$-hoz tartozó megoldás is.

Az $f(0)=\frac{1}{\sqrt[n-1]{2}}$ illetve $f(0)=-\frac{1}{\sqrt[n-1]{2}}$ esetén speciális n-edfokú egyenletek adódnak, melyek vizsgálata túl megy a középiskolai tananyagon. Ha a megjegyzés függvényegyenletét olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre akarjuk megoldani, melyre $f(0)=0$, úgy az a középiskolás tananyag eszközeivel elvégezhető.

$n = 1$-re most is a Cauchy-alapegyenletet kapjuk.

Egy másik kínálkozó módszer (H) megoldásának meghatározására az, hogy (H)-ból az $x = 0, y = t$, illetve $x = 0, y = -t$ helyettesítéssel kapott

$$\begin{cases} H\left(f(t), f(-t), f(0), f(t), 0, t\right) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ H\left(f(-t), f(t), f(0), f(-t), 0, -t\right) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

egyenletrendszert vizsgáljuk.

Ha ez $f(-t)$ eliminálása után megoldható $f(t)$-re, úgy $f(t)$ kapott alakja az egyedüli lehetséges megoldása (H)-nak. A megoldás legfeljebb egy tetszőleges konstanst tartalmaz.

14. Feladat
Határozzuk meg az

$$f(x+y) + 2f(x-y) - 3f(x) - y = 0 \quad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{9}$$

függvényegyenlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldását.

Megoldás
A (9) ((H) – típusú) egyenlet megoldását kíséreljük meg az utóbb javasolt helyettesítésekkel.

Az $x = 0, y = t$, illetve $x = 0, y = -t$ helyettesítésekkel kapjuk (9)-ből a

$$\begin{cases} f(t) + 2f(-t) - 3f(0) - t = 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ f(-t) + 2f(t) - 3f(0) + t = 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

egyenletrendszert az $f(t)$ és $f(-t)$ ismeretlenekre.

Ennek megoldására $f(t)$-re (az $f(-t)$ eliminálása után)

$$f(t) = f(0) - t \quad (t \in \mathbb{R}) ,$$

ami $f(0)$ bármilyen választása mellett teljesíti (9)-et, mert

$$f(x+y) + 2f(x-y) - 3f(x) - y =$$

$$= f(0) - x - y + 2f(0) - 2x + 2y - 3f(0) + 3x - y = 0 .$$

Így (9)-et csak az

$$f(x) = c - x \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény teljesíti, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

15. Feladat

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x) + f(x + y) = 2f(y) + 2f(x - y) + y - 4 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

Megoldás

Egyenletünk is (H) alakú. Továbbá az $x = y = 0$ helyettesítés adja, hogy $f(0) = 2$. Próbálkozzunk most is az $x = 0$, $y = t$, majd az $x = 0$, $y = -t$ helyettesítéssel. Akkor $f(0) = 2$ miatt, rendezés után kapjuk az

$$\begin{cases} f(t) + 2f(-t) = -t + 6 \\ 2f(t) + f(-t) = t + 6 \end{cases}$$

egyenletrendszert bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén az $f(t)$, $f(-t)$ ismeretlenekre. A megoldás egyszerűen adódik és kapjuk, hogy

$$f(t) = t + 2 \quad (t \in \mathbb{R}) \ .$$

Ez a függvény valóban teljesíti feladatunk függvényegyenletét, így csak az

$$f(x) = x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény a függvényegyenlet megoldása.

16. Feladat

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x)f(x + y) = [f(y)]^2 \, [f(x - y)]^2 \, a^{y+4} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet, ahol $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ adott. $f(x) =?$

Megoldás

Ha azt is feltettük volna, hogy $f(x) > 0$ $(x \in \mathbb{R})$, úgy a $g(x) = \log_a f(x) = x - 2$, illetve $f(x) = a^{x-2}$ $(x \in \mathbb{R})$ következne, ami megoldása egyenletünknek.

Ha nincs korlátozás $f(x)$ előjelére, úgy a probléma nehezebb.

Az $x = y = 0$ helyettesítés adja az $[f(0)]^2 = [f(0)]^4 \, a^4$ egyenlőséget, azaz $[f(0)]^2 \left(1 - [f(0)]^2 \, a^4\right) = 0$, ami akkor teljesül, ha $f(0) = 0$ vagy $f(0) = \frac{1}{a^2}$ vagy $f(0) = -\frac{1}{a^2}$.

Ha $f(0) = 0$, akkor az $y = 0$ helyettesítéssel kapjuk egyenletünkből, hogy

$$[f(x)]^2 = [f(0)]^2 [f(x)]^2 a^4 = 0 \ \ (x \in \mathbb{R}) \ ,$$

így $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$, ami megoldása egyenletünknek.

Ha $f(0) = \frac{1}{a^2}$, akkor próbálkozzunk most is az $x = 0$, $y = t$ majd $x = 0$, $y = -t$ helyettesítéssel. Ekkor bármely $t \in \mathbb{R}$-re teljesül az

$$\begin{cases} f(0)f(t) = [f(t)]^2 [f(-t)]^2 a^{t+4} \\ f(0)f(-t) = [f(-t)]^2 [f(t)]^2 a^{-t+4} \end{cases}$$

illetve az $f(0)$ beírása és rendezés után kapott

$$\begin{cases} f(t)a^{-t-6} = [f(t)]^2 [f(-t)]^2 \\ f(-t)a^{t-6} = [f(t)]^2 [f(-t)]^2 \end{cases}$$

egyenletrendszer az $f(t)$, $f(-t)$ ismeretlenekre.

Ebből azonnal kapjuk, hogy $f(-t) = f(t)a^{-2t}$ $(t \in \mathbb{R})$, amit az első egyenletbe helyettesítve, rendezés után kapjuk, hogy

$$f(t) \left\{ [f(t)]^3 a^{-3t+6} - 1 \right\} = 0 \ \ (t \in \mathbb{R}) \ .$$

Ezt minden olyan függvény teljesíti, melyre

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ,\text{ha } \ t \in A \ , \ \ t \neq 0 \\ & \\ a^{t-2} & ,\text{ha } \ t \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases} \qquad (*)$$

ahol $0 \notin A \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz.

Ha $A = \varnothing$, úgy $f(x) = a^{x-2}$ $(x \in \mathbb{R})$, ami megoldása a feladat függvényegyenletének.

Ha $f(0) = -\frac{1}{a^2}$, úgy hasonló számolás adja, hogy az

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ,\text{ha } \ t \in A \ , \ \ t \neq 0 \\ & \\ -a^{t-2} & ,\text{ha } \ t \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases} \qquad (**)$$

függvény teljesíti az egyenletrendszert, ahol $0 \notin A \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz.

Ha $A = \varnothing$, úgy az $f(x) = -a^{x-2}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény teljesíti egyenletünket is.

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ha $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, úgy az

$$f(x) = \begin{cases} \pm a^{x-2} & \text{, ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{, ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

függvények teljesítik a feladat függvényegyenletét.

Kérdés: milyen A halmazok esetén lesznek a $(*)$ és $(**)$ szerint adott függvények megoldásai a feladat függvényegyenletének.

További lehetséges megoldási módszert kínál a (H) típusú egyenletek megoldására az

a) $x = 0, y = t; x = t, y = 2t; x = 2t, y = t; x = y = t,$

illetve

b) $x = t, y = -t; x = -t, y = t; x = y = t; x = y = -t$
helyettesítéssor.

Az *a)* esetben az $f(t), f(-t), f(2t), f(3t)$, míg a *b)* esetben az $f(t), f(-t), f(2t), f(-2t)$ ismeretlenekre kapunk egy négy egyenletből álló egyenletrendszert. Ezek megoldása $f(t)$-re (ha persze létezik) adja (H) megoldásait.

17. Feladat
Adjuk meg az

$$f(x + y) - 2f(x - y) + f(x) - 2f(y) = y - 2 \tag{10}$$

függvényegyenlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldásait $(x, y \in \mathbb{R})$.

Megoldás
A 11. feladatban használtak mellett az előbb vázolt módszer is alkalmazható.

Az $x = 0, y = t; x = t, y = 2t; x = 2t, y = t; x = y = t$ helyettesítésekkel kapjuk bármely t-re az

$$\begin{cases} -f(t) - 2f(-t) = t - 2 - f(0) \\ f(3t) - 2f(-t) + f(t) - 2f(2t) = 2t - 2 \\ f(3t) - 4f(t) + f(2t) = t - 2 \\ f(2t) - f(t) = t - 2 + 2f(0) \end{cases}$$

egyenletrendszert az $f(t), f(-t), f(2t), f(3t)$ ismeretlenekre, ami megoldható $f(t)$-re.
A megoldás t és $f(0)$ függvénye lesz, de (10)-ből az $x = y = 0$ helyettesítés adja, hogy $f(0) = 1$.
Végül kapjuk, hogy

$$f(x) = x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ami valóban megoldása (10)-nek.

A másik módszer azért lényegesen egyszerűbb lenne.

18. Feladat
Adjuk meg a

$$2f(x+y) - f(x-y) - f(x) + 2f(y) = 5y + 2 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenlet összes megoldását az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények körében.

Megoldás
Oldjuk meg a feladatot a 17. feladat előtt javasolt b) módszer segítségével.

Az $x = y = 0$ helyettesítés adja, hogy $f(0) = 1$. Hajtsuk végre a függvényegyenletben rendre az

$$x = t\ ,\ \ y = -t\ ;\ \ x = -t\ ,\ \ y = t\ ;\ \ x = y = t\ ;\ \ x = y = -t$$

helyettesítéseket, akkor $f(0) = 1$ felhasználásával – rendezés után – kapjuk minden $t \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\begin{cases} -f(2t) - f(t) + 2f(-t) = -5t \\ -f(-2t) - f(-t) + 2f(t) = 5t \\ 2f(2t) + f(t) = 5t + 3 \\ 2f(-2t) + f(-t) = -5t + 3 \end{cases}$$

egyenletrendszert az $f(t), f(-t), f(2t), f(-2t)$ ismeretlenekre. A harmadik és negyedik egyenletből kifejezve $f(2t)$-t illetve $f(-2t)$-t és a kapott értékeket az első két egyenletbe helyettesítve egyszerűen kapjuk minden $t \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\begin{cases} -f(t) + 4f(-t) = -5t + 3 \\ 4f(t) - f(-t) = 5t + 3 \end{cases}$$

egyenletrendszert az $f(t), f(-t)$ ismeretlenekre. Ennek létezik megoldása, és a kapott

$$f(t) = t + 1 \quad (t \in \mathbb{R})$$

függvény teljesíti is a feladat függvényegyenletét.

Megjegyzés
A feladat megoldható az $x = 0$, $y = t$; $x = 0$, $y = -t$ helyettesítésekkel is.

Látni fogjuk, hogy érdekes (H)-nak az a speciális esete, amikor az egyenletben nem szerepel az $f(y)$, vagyis az

$$H\left(f(x+y), f(x-y), f(x), x, y\right) = 0 \quad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad (HH)$$

alakú.

Persze ekkor is használhatók esetleg az előbb vázolt lehetőségek, de adódnak olyanok is, amelyek az általános esetben nem működnek.

Egy ilyen új általános lehetőség (HH) esetén az
$x = 0, y = t; x = t, y = 2t; x = t, y = -2t$ helyettesítéssel az $f(t), f(-t)$ és $f(3t)$ ismeretlenekre kapott egyenletrendszer megoldása $f(t)$-re, amennyiben egyáltalán megoldható az egyenletrendszer.

19. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti a

$$2f(x+y) + f(x-y) = 3f(x) + y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

Megoldás
Egyenletünk (HH) alakú. Próbálkozzunk az előbb javasolt lehetőséggel. Egyenletünk az $x = 0$, $y = t$, majd $x = t$, $y = 2t$, végül az $x = t$, $y = -2t$ helyettesítéssel adja bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\begin{cases} 2f(t) + f(-t) = 3f(0) + t \\ 2f(3t) + f(-t) = 3f(t) + 2t \\ 2f(-t) + f(3t) = 3f(t) - 2t \end{cases}$$

egyenletrendszert az $f(t), f(-t), f(3t)$ ismeretlenekre.

A harmadik egyenlet rendezéssel az

$$f(3t) = 3f(t) - 2f(-t) - 2t \quad (t \in \mathbb{R})$$

alakba írható. $f(3t)$ ezen előállítását a második egyenletbe helyettesítve, kevés számolás adja az

$$f(t) = t + f(0) \quad (t \in \mathbb{R}) \ ,$$

ami $f(0)$ tetszőleges választása mellett teljesíti is a feladat függvényegyenletét. Így $f(x) = x + c \quad (x \in \mathbb{R})$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans a függvényegyenlet megoldása.

A következő feladatban szereplő (HH) típusú speciális egyenletnél azonban ez nem adna eredményt, így valamilyen speciális helyettesítést kell keresni.

20. Feladat
Oldjuk meg az

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{11}$$

függvényegyenletet az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre.

Megoldás
Miután $f(x)$ együtthatójában szerepel $\cos(y)$, melyre $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, így remélhetjük, hogy a helyettesítésekben szerepe lehet a $\frac{\pi}{2}$-nek (ha például $y = \frac{\pi}{2}$, úgy a jobb oldal 0 lesz).

Használva az
$x = 0, y = t; x = \frac{\pi}{2}+t, y = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}+t$ helyettesítéseket (11)-ben, kapjuk bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\begin{cases} f(t) + f(-t) = 2f(0)\cos(t) \\ f(t+\pi) + f(t) = 0 \\ f(t+\pi) + f(-t) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(t) \end{cases}$$

egyenletrendszert az $f(t), f(-t), f(t+\pi)$ ismeretlenekre. A második és a harmadik egyenlet különbsége adja, hogy bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(t) - f(-t) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(t) \ .$$

Ezt az egyenletrendszer első egyenletéhez adva azonnal kapjuk, hogy

$$f(t) = f(0)\cos(t) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(t) \ \ (t \in \mathbb{R}) \ .$$

Egyszerű számolás adja, hogy $f(0)$ és $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ tetszőleges választása mellett ez a függvény eleget tesz a (11) függvényegyenletnek, így annak általános megoldása:

$$f(x) = c_1\cos x + c_2\sin x \ \ (x \in \mathbb{R}) \ ,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

Általában, ha egy

$$f(x+y) + f(x-y) = f(x)g(y) + h(x,y) \ (x,y \in \mathbb{R}) \tag{12}$$

alakú egyenletben az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ismeretlen, a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ismert (adott) függvények, továbbá létezik $y_0 \in \mathbb{R}$, hogy $g(y_0) = 0$, akkor próbálkozhatunk az

$$x = 0 \ , \ \ y = t \ ; \ \ x = t + y_0 \ , \ \ y = y_0 \ ; \ \ x = y_0 \ , \ \ y = t + y_0$$

helyettesítésekkel, s az $f(t), f(-t), f(t+2y_0)$ ismeretlenekre teljesülő egyenletrendszer megoldásával.

21. Feladat
Határozzuk meg azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyek teljesítik az

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)(y+1) + 2xy(3y - x^2) \tag{13}$$

függvényegyenletet $(x, y \in \mathbb{R})$.

Megoldás
(13) nyilván (12) típusú, hogy $g(y) = 2(y+1)$, ami $y_0 = -1$-re lesz 0. Így az előbbi megállapítás miatt végezzük el (13)-ban rendre az
$x = 0, y = t; x = t-1, y = -1; x = -1, y = t-1$ helyettesítéseket, kapjuk az

$$\begin{cases} f(t) + f(-t) = 2f(0)(1+t) \\ f(t-2) + f(t) = -2(t-1)(2t - t^2 - 4) \\ f(t-2) + f(-t) = 2f(-1)t - 2(t-1)(3t-4) \end{cases}$$

egyenletrendszert bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén az $f(t), f(-t)$ és $f(t-2)$ ismeretlenekre.

Az előző feladatban használt módszer (a második és harmadik egyenlet különbségét hozzáadjuk az elsőhöz) egyszerűen adja $f(t)$ előállítását az $a = f(0), b = f(-1)$ jelöléssel az

$$f(t) = t^3 + t(a - b - 1) + a \quad (t \in \mathbb{R})$$

alakban.

Könnyen belátható, hogy ez a függvény csak az $a = 0, b = -1$ választással teljesíti (13)-at, így annak megoldása az

$$f(x) = x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

szerint adott függvény.

Vizsgálhatjuk a

$$H\left(g(xy), g\left(\frac{x}{y}\right), g(x), g(y), x, y\right) = 0 \quad (x, y > 0)$$

egyenlettípust is.

Látható, hogy ez az $x = e^u, y = e^v \quad (u, v \in \mathbb{R})$ helyettesítéssel, valamint a $f(t) = g\left(e^t\right) \quad (t \in \mathbb{R})$ függvénnyel a

$$H\left(f(u+v), f(u-v), f(u), f(v), e^u, e^v\right) = 0 \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

egyenletre vezet, ami (H) alakú, így az előbbi módszerek alkalmazhatók.

22. Feladat
A $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti a

$$g(xy) + 2g\left(\tfrac{x}{y}\right) = 3g(x) + \ln(y) \quad (x, y > 0) \tag{14}$$

függvényegyenletet. $g(x) = ?$

Megoldás
A függvényegyenletből kapjuk, hogy az $f(t) = g\left(e^t\right) \quad (t \in \mathbb{R})$ függvény teljesíti az

$$f(x+y) + 2f(x-y) = 3f(x) + y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet, azaz éppen a (9) egyenletet, amit már megoldottunk.

A megoldás az $f(x) = c - x \ (x \in \mathbb{R})$ függvény.

Ezután már egyszerűen megkaphatjuk a (14) egyenlet g megoldását

$g(x) = c - \ln x \ (x > 0)$ alakban, ami valóban megoldás.

Most bemutatunk még egy, az előbbiektől jellegében eltérő, de egyszerű helyettesítésekkel megoldható feladatot.

23. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x) \ (x, y \in \mathbb{R}) \tag{15}$$

függvényegyenletet, ahol $a \in \mathbb{R}$ adott, továbbá $f(0) = \frac{1}{2}$. Határozzuk meg f-et.

Megoldás
(15) az $x = y = 0$ helyettesítéssel adja, hogy $f(0) = 2f(0)f(a)$, így $f(a) = \frac{1}{2}$.
(15)-ből az $y = 0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$f(x) = f(x)f(a) + f(0)f(a-x) \quad (x \in \mathbb{R}) \ ,$$

amiből $f(a) = f(0) = \frac{1}{2}$ miatt következik, hogy

$$f(a-x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Utóbbi miatt (15) a

$$f(x+y) = 2f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{16}$$

alakba írható.

(15) az $y = a - x$ helyettesítéssel, és az előbbiek felhasználásával adja, hogy

$$\frac{1}{2} = f(a) = [f(x)]^2 + [f(a-x)]^2 = 2\,[f(x)]^2 \ ,$$

azaz

$$[f(x)]^2 = \frac{1}{4} \quad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Végül (16)-ból az $x \mapsto \frac{x}{2}$, $y \mapsto \frac{y}{2}$ helyettesítéssel és az utóbbi azonosság felhasználásával

$$f(x) = 2\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

következik, ami teljesíti (15)-öt.

A feladat egyenletét tehát csak az $f(x) = \frac{1}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény teljesíti.

Gyakorló feladatok

1. Adjuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyek teljesítik az
$$x^2 f(y) = y^3 f(x) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
függvényegyenletet.

2. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az
$$\left(x^2 + y^2\right) f\left(\sqrt[3]{xy}\right) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
függvényegyenletet. $f(x) =?$

3. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az
$$f\left[(x - y)^2\right] = [f(x)]^2 - 2xf(y) + y^2 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
függvényegyenletet. $f(x) =?$

4. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az
$$xf(y) + yf(x) = \left(x^k + y^k\right) \cdot f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
függvényegyenletet, ahol $k \in \mathbb{N}$ rögzített. $f(x) =?$

5. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az
$$x^k f(y) + y^k f(x) = (x + y)f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
függvényegyenletet, ahol $k \in \mathbb{N}$ rögzített. $f(x) =?$

6. Bizonyítsuk be, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 = f(x+y)f(x-y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet, akkor f a konstans függvény.

7. Határozzuk meg azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyek teljesítik az

$$f(x+y) + f(y-x) - (y+2)f(x) + y(x^2 - 2y) = 0 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet.

8. Melyek azok az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények, melyek teljesítik az

$$f(x+y) + 2f(x-y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet.

9. Határozzuk meg azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyek teljesítik az

$$f(x+y) = f(x)f(y) - bf(x) - bf(y) - a \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ adottak.

10. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy $f(0) = 0$ és teljesíti az

$$f(x+y) = [f(x)]^3 + [f(y)]^3 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) = ?$

11. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x+y) + 2f(x-y) = 3f(x) - y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) = ?$

12. Adjuk meg az

$$f(x+y) + f(x-y) - (y+2)f(x) + y(x^2 - 2y) = 0 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú megoldásait.

13. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x+y) + 3f(x-y) = 4f(x) + 2y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

14. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti a

$$3f(x) - 2f(x-y) - f(x+y) = 0 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

D) Függvényegyenletek megoldása az analízis elemeinek felhasználásával

A fejezet feladatainak többségénél feltesszük, hogy a függvényegyenletekben szereplő függvények folytonosak.

A folytonosság fogalmát visszavezetjük a valós sorozatok konvergenciájára. Az $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt akkor mondjuk folytonosnak az $x_0 \in E$ pontban, ha bármely olyan (x_n), $(x_n \in E)$ sorozatra, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. f folytonos E-n, ha bármely $x_0 \in E$-ben folytonos.

Ez a fogalom vagy szerepel az iskolai oktatásban, vagy ha nem, úgy a tehetségesebb tanulók (de talán a többiek is) könnyen befogadják.

Szükségünk lesz annak elfogadtatására is, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ valós számra létezik (r_n) sorozat, hogy $r_n \in \mathbb{Q}$ (r_n racionális) és $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$ (azaz bármely x valós számhoz létezik racionális számok (r_n) sorozata, mely konvergál x-hez).

Feladataink első csoportjában egyváltozós függvényekre teljesülő egyváltozós függvényegyenletek, a másodikban egyváltozós függvényekre teljesülő többváltozós egyenletek szerepelnek.

1. Feladat
Határozzuk meg azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyek teljesítik az

$$f(2x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet.

Megoldás
Egyenletünk az $x \mapsto \frac{x}{2}$ helyettesítéssel a vele ekvivalens

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakba írható, melynek ismételt alkalmazásával (pontosabban teljes indukcióval) kapjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) = \ldots = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

Egyszerűen belátható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Így f 0-beli folytonossága miatt $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(0) = c$ $(x \in \mathbb{R})$ továbbá $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = f(x)$ (konstans sorozat), ezért kapjuk f-re, hogy

$$f(x) = c \quad (x \in \mathbb{R}) \ ,$$

ami bármely $c \in \mathbb{R}$ konstanssal nyilvánvalóan teljesíti a feladat függvényegyenletét.

A folytonos függvények közül tehát csak a konstans függvények teljesítik, hogy $f(2x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

2. Feladat
Határozzuk meg azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyek teljesítik az

$$f(2x+1) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet.

Megoldás
Egyenletünk az $x \mapsto \frac{x-1}{2}$ helyettesítéssel a vele ekvivalens

$$f(x) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakba írható. Ez az $x \mapsto \frac{x-1}{2}$ helyettesítéssel adja, hogy

$$f\left(\frac{x-1}{2}\right) = f\left(\frac{x-3}{4}\right) = f\left(\frac{x-(2^2-1)}{2^2}\right) \ , \quad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Ebből az $x \mapsto \frac{x-1}{2}$ helyettesítéssel $x \in \mathbb{R}$ esetén
$f\left(\frac{x-3}{4}\right) = f\left(\frac{x-(2^2-1)}{2^2}\right) = f\left(\frac{\frac{x-1}{2}-(2^2-1)}{2^2}\right) = f\left(\frac{x-(2^3-1)}{2^3}\right)$
is igaz.

Azt sejtjük, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$-re igaz, hogy

$$f(x) = f\left(\frac{x-(2^n-1)}{2^n}\right) \quad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Ez teljes indukcióval egyszerűen belátható.

Ugyanakkor
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x-(2^n-1)}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{2^n} - 1 \right) = -1$ miatt f folytonosságát használva következik, hogy

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x-(2^n-1)}{2^n} \right) = f(-1) \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

Egyszerűen kapjuk végül, hogy bármely $f(-1) = c$ konstanssal az $f(x) = c$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények megoldásai a feladat függvényegyenletének.

3. Feladat
Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyek teljesítik az alábbi függvényegyenletet:

$$3f(2x+1) = f(x) + 5x \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

Megoldás
Egyenletünkből az $x \mapsto \frac{x-1}{2}$ helyettesítéssel a vele ekvivalens

$$f(x) = \frac{1}{3} f\left(\frac{x-1}{2} \right) + \frac{5}{3} \frac{x-1}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet kapjuk.

Ebből, ismét az $x \mapsto \frac{x-1}{2}$ helyettesítéssel

$$f\left(\frac{x-1}{2} \right) = \frac{1}{3} f\left(\frac{x-(2^2-1)}{2^2} \right) + \frac{5}{3} \frac{x+1-2^2}{2^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

következik, s így $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \frac{1}{3^2} f\left(\frac{x-(2^2-1)}{2^2} \right) + \frac{5}{3} \frac{x+1-2}{2} + \frac{5}{3^2} \frac{x+1-2^2}{2^2}$$

illetve

$$f(x) = \frac{1}{3^2} f\left(\frac{x-(2^2-1)}{2^2} \right) + 5(x+1)\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} \right) - 5\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \right) .$$

Ebből (vagy az előbbi eljárás néhány ismétléséből) megfogalmazhatjuk a sejtést, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén minden $x \in \mathbb{R}$-re

$f(x) = \frac{1}{3^{n+1}} f\left(\frac{x-(2^{n+1}-1)}{2^{n+1}}\right) + 5(x+1)\left(\frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{6^{n+1}}\right) - 5\left(\frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^{n+1}}\right).$
Ez teljes indukcióval egyszerűen bizonyítható.

Az előző feladatban már használtuk, hogy
$\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{x-(2^n-1)}{2^n}\right) = f(-1)$, így
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n+1}} f\left(\frac{x-(2^{n+1}-1)}{2^{n+1}}\right) = 0\ .$

Másrészt ismeretes, hogy $|q| < 1$ esetén $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$, így

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{6^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{5}$$

és

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\ .$$

Ezeket felhasználva bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}} f\left(\frac{x-(2^{n+1}-1)}{2^{n+1}}\right) + 5(x+1)\left(\frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{6^{n+1}}\right) - 5\left(\frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^{n+1}}\right)\right] =$$

$$= 5(x+1)\frac{1}{5} - 5\frac{1}{2} = x - \frac{3}{2}\ .$$

Az $f(x) = x - \frac{3}{2}$ folytonos függvény valóban megoldása a feladat függvényegyenletének.

4. Feladat
Határozzuk meg azokat az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyek teljesítik az

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad (CA)$$

Cauchy-alapegyenletet.
Megoldás

- Először megmutatjuk, hogy a (CA)-t teljesítő f függvényre bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, hogy

  $$f(nx) = nf(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \ . \qquad (*)$$

  Ez $n = 1$-re nyilván igaz.

  Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás, úgy bármely $x \in \mathbb{R}$-re
  $f[(n+1)x] = f[nx + x] = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) =$
  $= (n+1)f(x)$, azaz $(*)$ $n+1$-re is igaz.

  Így a teljes indukció elve alapján $(*)$ bármely $n \in \mathbb{N}$-re teljesül.

- Most belátjuk, hogy $f(r) = rf(1)$ $(r \in \mathbb{Q})$ is igaz. $(*)$-ból $x = 1$ mellett kapjuk, hogy

  $$f(n) = nf(1) \quad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

  Ezt és $(*)$-ot felhasználva kapjuk, hogy bármely $n, m \in \mathbb{N}$ esetén

  $$nf(1) = f(n) = f\left(m\frac{n}{m}\right) = mf\left(\frac{n}{m}\right) \ ,$$

  ami adja, hogy $f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}f(1)$.

  Miután pedig bármely $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ racionális számhoz létezik $n, m \in \mathbb{N}$, hogy $r = \frac{n}{m}$, így

  $$f(r) = rf(1) \quad (r > 0 \ , \ \ r \in \mathbb{Q}) \ .$$

  (CA)-ból az $x = y = 0$ helyettesítés adja, hogy

  $$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0) \ ,$$

  így $f(0) = 0$, ezért
  $$f(0) = 0f(1)$$
  is igaz.

  (CA)-ban az $y = -x$ helyettesítést és $f(0) = 0$-t használva

  $$0 = f(0) = f\left(x + (-x)\right) = f(x) + f(-x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

következik, azaz

$$f(-x) = -f(x) \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

Ha $r \in \mathbb{Q}$ és $r < 0$, akkor $-r > 0$, így $-rf(1) = f(-r) = = -f(r)$, ami adja, hogy

$$f(r) = rf(1) \quad (r < 0 \ , \ \ r \in \mathbb{Q})$$

is igaz.

Ezeket összegezve kapjuk, hogy $f(r) = rf(1)$ bármely $r \in \mathbb{Q}$-ra.

- Legyen most $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám. Akkor (a bevezetőben mondottak szerint) létezik (r_n) sorozat, hogy $r_n \in \mathbb{Q}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.

  f folytonosságát felhasználva ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = f(x)$.

  Másrészt $f(r_n) = r_n f(1)$ miatt

  $$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n f(1) = f(1) \lim_{n\to\infty} r_n = f(1)x .$$

  Így (CA) tetszőleges folytonos megoldása

  $$f(x) = cx \quad (x \in \mathbb{R}) ,$$

  ahol $c = f(1)$ tetszőleges konstans.

5. Feladat
Határozzuk meg azokat az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyek teljesítik a

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad (N)$$

függvényegyenletet. (Ezt szokás normanégyzet egyenletnek is nevezni.)

Megoldás
(N) az $x = y = 0$ helyettesítéssel adja, hogy $f(0) = 0$, míg az $x = 0$ helyettesítéssel ($f(0) = 0$ miatt), hogy $f(-x) = f(x)$, azaz f páros függvény.

$$f(0 \cdot x) = f(0) = 0 = 0^2 f(x) \text{ és } f(1 \cdot x) = f(x) = 1^2 f(x) \ (x \in \mathbb{R}) ,$$

továbbá az $x = y$ helyettesítéssel kapott

$$f(2x) = 2^2 f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlőség azt sugallja, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$-re

$$f(nx) = n^2 f(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \ . \tag{$*$}$$

Ezt teljes indukcióval látjuk be.

- $n = 1$-re ezt már tudjuk.
- Tegyük fel, hogy bármely $k \leq n$-re igaz a bizonyítandó egyenlőség, akkor bármely $x \in \mathbb{R}$-re

$$f\left[(n+1)x\right] = f(nx + x) = 2f(nx) + 2f(x) - f\left((n-1)x\right) =$$
$$= \left[2n^2 + 2 - (n-1)^2\right] f(x) = (n+1)^2 f(x) \ .$$

- A teljes indukció elve adja állításunkat $\forall n \in \mathbb{N}$-re.

$(*)$ $x = 1$ esetén adja, hogy $f(n) = n^2 f(1)$ $(n \in \mathbb{N})$, $x = \frac{1}{n}$ esetén, hogy $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} f(1)$ $(n \in \mathbb{N})$, míg $x = \frac{m}{n}$ $(n, m \in \mathbb{N})$-re $f\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^2 f(1)$.

Ebből következik, hogy ha $r \in \mathbb{Q}$ és $r > 0$, akkor $f(r) = r^2 f(1)$.

f párossága miatt $f(-r) = f(r) = r^2 f(1) = (-r)^2 f(1)$ $(r > 0)$ is következik és $f(0) = 0 = 0^2 f(1)$-t is felhasználva:

$$f(r) = r^2 f(1) \quad (r \in \mathbb{Q}) \tag{$**$}$$

Ha $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $\exists\, (r_n)$ $(r_n \in \mathbb{Q})$ sorozat, hogy $r_n \to x$.

f folytonossága és $(**)$ adja, hogy

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} {r_n}^2 f(1) = x^2 f(1) = cx^2 \quad (x \in \mathbb{R}) \ ,$$

ami bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén megoldása (N)-nek.

6. Feladat

Az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény teljesíti az

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x) + f(y)} \quad (x + y, x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

függvényegyenletet. $f(x) = ?$

Megoldás

- Megmutatjuk, hogy $f(x) \neq 0$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

  Ha ugyanis létezne $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, hogy $f(y_0) = 0$, akkor az egyenlet adja, hogy $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

  $$f(x) = f((x - y_0) + y_0) = \frac{f(x - y_0)f(y_0)}{f(x - y_0) + f(y_0)} = 0 ,$$

  s akkor az egyenletünknek nem lenne értelme.

- Belátjuk, hogy $f(nx) = \frac{1}{n}f(x)$ bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ esetén. (Ennek megsejtéséhez előbb $f(2x)$-et határozzuk meg az egyenletből az $x = y$ helyettesítéssel, majd például még $f(3x)$-et.)

  $n = 1$-re nyilván $f(1 \cdot x) = \frac{1}{1}f(x)$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ igaz.

  Ha n-re igaz az állítás, úgy

  $$f\left((n+1)x\right) = f(nx + x) = \frac{f(nx) \cdot f(x)}{f(nx) + f(x)} =$$

  $$= \frac{\frac{1}{n}\left(f(x)\right)^2}{\frac{1}{n}f(x) + f(x)} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 1}f(x) = \frac{1}{n+1}f(x) \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

  miatt $n + 1$-re is igaz.

  Így az indukciós axióma miatt igaz az állítás bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén, minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$-ra.

- Ha az $f(nx) = \frac{1}{n}f(x)$ egyenlőségben x helyére $\frac{m}{n}x$-et írunk, (ahol $m \in \mathbb{N}$), akkor $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

  $$\frac{1}{m}f(x) = f(mx) = \frac{1}{n}f\left(\frac{m}{n}x\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{1}{\frac{m}{n}}f(x) .$$

  Ha $r \in \mathbb{Q}$ és $r > 0$, akkor létezik $m, n \in \mathbb{N}$, hogy $r = \frac{m}{n}$, így

  $$f(rx) = rf(x) \ \ (x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q}, r > 0)$$

- Egyenletünk az $x \to 2x, y \to -x$ helyettesítéssel adja, hogy $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

$$f(x) = f(2x - x) = \frac{f(2x)f(-x)}{f(2x) + f(-x)} = \frac{\frac{1}{2}f(x)f(-x)}{\frac{1}{2}f(x) + f(-x)} \ ,$$

amiből $f(x) \neq 0$ miatt bármely $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$-ra igaz, hogy $\frac{1}{2}f(x) + f(-x) = \frac{1}{2}f(-x)$, azaz $f(-x) = -f(x)$, azaz f páratlan függvény.

- Az $f(rx) = \frac{1}{r}f(x)$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, r \in \mathbb{Q}, r > 0)$ egyenlőségből az $x \to -x$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$f(-rx) = \frac{1}{r}f(-x) = -\frac{1}{r}f(x) = \frac{1}{-r}f(x) \ .$$

az $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, r \in \mathbb{Q}, r > 0)$ feltételek esetében.

Ezek pedig adják, hogy

$$f(rx) = \frac{1}{r}f(x) \ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}) \ .$$

- Az utóbbi egyenlőség $x = 1$, $f(1) = c \neq 0$ mellett adja, hogy

$$f(r) = \frac{1}{r}f(1) = \frac{c}{r} \quad (r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}) \ .$$

- Legyen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges, akkor létezik (r_n) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$-beli sorozat, hogy

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{r_n} = \frac{c}{x} \ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \ .$$

Az $f(x) = \frac{c}{x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ alakú függvények bármely $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén megoldásai a feladat függvényegyenletének.

Megjegyzés

Egyszerűen belátható, hogy ha az egyenlet minden $x, y \in \mathbb{R}$-re teljesülne, úgy nem létezne megoldása.

7. Feladat

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény teljesíti az

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1 \quad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad (\circ)$$

függvényegyenletet. $f(x) = ?$

Megoldás
$(\circ)$ az $x = y = 0$ helyettesítéssel adja, hogy

$$f(0) = (f(0))^2 - f(0) + 1 \Leftrightarrow (f(0) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1 ,$$

míg az $x = 1$, $y = -1$ helyettesítéssel

$$f(-1) = f(1)f(-1) - f(0) + 1 \Leftrightarrow f(-1)(f(1) - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(-1) = 0 \vee f(1) = 1$$

következik.

Ha $f(1) = 1$, akkor $(\circ)$-be $y = 1$-et helyettesítve kapjuk, hogy $\forall x \in \mathbb{R}$-re

$$f(x) = f(x) - f(x+1) + 1 \Leftrightarrow f(x+1) = 1 \Leftrightarrow f(x) \equiv 1 .$$

Az $f(x) = 1$ $(x \in \mathbb{R})$ teljesíti $(\circ)$-t.
Ekkor természetesen $f(-1) = 1$ is igaz.

Ha $f(-1) = 0$ akkor $f(1) \neq 1$, mert az előzőek miatt $f(1) = 1 \Rightarrow f(-1) = 1$, ami ellentmondást adna.

$(\circ)$-ből az $x = y = -1$ helyettesítés adja az $f(1) = -f(-2) + 1$, míg az $x = -2$, $y = 1$ helyettesítés az $f(-2) = f(-2)f(1) + 1$ azonosságot, melyekből azonnal következik, hogy

$$1 - f(1) = (1 - f(1))\, f(1) + 1 \Leftrightarrow (f(1))^2 - 2f(1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(1)(f(1) - 2) = 0 .$$

Így az $f(-1) = 0$ esetben $f(1) = 0$ vagy $f(1) = 2$ kell, hogy teljesüljön.
Ha $f(1) = 2$ és persze $f(0) = 1$, akkor $(\circ)$-ből $y = 1$-gyel kapjuk, hogy

$$f(x) = f(x)f(1) - f(x+1) + 1 \Leftrightarrow f(x+1) = f(x) + 1 \;\; (x \in \mathbb{R}) .$$

Utóbbiból teljes indukcióval kapjuk, hogy

$$f(x+n) = f(x) + n \;\; (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}) .$$

Ebből $x=0$ adja, hogy $f(n)=n+1$ $(n\in\mathbb{N})$.

Ugyanakkor az $x=-n$ helyettesítéssel, $f(0)=1$ miatt az is igaz, hogy

$$1=f(0)=f(-n+n)=f(-n)+n \;\Leftrightarrow\; f(-n)=-n+1 \;\; (n\in\mathbb{N}).$$

Így $f(p)=p+1$ $\;(p\in\mathbb{Z})$ is teljesül.

$(\circ)$-ből az $x=n$, $y=\frac{1}{n}$ helyettesítéssel $n\in\mathbb{N}$-re

$$2=f(1)=f(n)f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}+n\right)+1=(n+1)f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)-n+1,$$

azaz $1=nf\left(\frac{1}{n}\right)-n$ illetve $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+1$ $\;(n\in\mathbb{N})$ következik.

Helyettesítsünk most úgy $(\circ)$-be, hogy $x=p$, $y=\frac{1}{q}$ $(p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N})$, akkor az előbbieket is felhasználva:

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=f(p)f\left(\frac{1}{q}\right)-f\left(\frac{1}{q}+p\right)+1=(p+1)\left(\frac{1}{q}+1\right)-f\left(\frac{1}{q}\right)-p+1=$$

$$=\frac{p}{q}+p+\frac{1}{q}+1-\frac{1}{q}-1-p+1=\frac{p}{q}+1\,.$$

Így, mivel $\forall r\in\mathbb{Q}$-hoz $\exists p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$, hogy $r=\frac{p}{q}$, az utóbbi egyenlőség adja, hogy

$$f(r)=r+1 \quad (r\in\mathbb{Q})\,.$$

Ha $x\in\mathbb{R}$, úgy létezik (r_n) sorozat, hogy $r_n\in\mathbb{Q}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=x$.

Ekkor, felhasználva f folytonosságát is, kapjuk $f(x)$-re, hogy

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(r_n)=\lim_{n\to\infty}(r_n+1)=x+1 \;\; (x\in\mathbb{R})\,.$$

Egyszerűen belátható, hogy az $f(x)=x+1$ $(x\in\mathbb{R})$ függvény teljesíti $(\circ)$-t.

Végül, ha $f(1)=0$ és persze $f(0)=1$, akkor $(\circ)$ az $y=1$ helyettesítéssel adja:

$$f(x)=f(x)f(1)-f(x+1)+1 \Leftrightarrow f(x+1)=-f(x)+1 \;\; (x\in\mathbb{R})\,.$$

Utóbbi teljes indukcióval adja, hogy

$$f(x+n)=-f(x)+1 \;\; (x\in\mathbb{R}, n=2k+1)\,,$$

s ebből $x = 0$-val $f(n) = -f(0) + 1 = 0$ $(n = 2k+1)$ következik. Legyen $x = n$, $y = \frac{1}{n}$ $(n = 2k+1)$, akkor $(\circ)$-ből jön, hogy

$$0 = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f(n) f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n} + n\right) + 1 =$$

$$= f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + 1 = f\left(\frac{1}{n}\right) .$$

Az $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{2k+1}\right)$ 0-sorozat.

Ha f folytonos lenne úgy $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \neq 1 = f(0)$. Így $(\circ)$-nek olyan folytonos megoldása, amelynél $f(1) = 0$ nem létezik.

$(\circ)$ folytonos megoldásait tehát a

$$f(x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ és } f(x) = x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények adják.

8. Feladat
Határozzuk meg azokat az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyek teljesítik a

$$2f\left(\tfrac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad (J)$$

Jensen-függvényegyenletet.

Megoldás
Ha f teljesíti (J)-t, úgy az $x = 0$ helyettesítés adja, hogy

$$2f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) + f(0) \quad (x \in \mathbb{R}) ,$$

azaz

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x+y) + f(0) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

is teljesül. Ezt és (J)-t összehasonlítva kapjuk, hogy

$$f(x+y) + f(0) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}) ,$$

illetve (ha az utóbbi egyenlet mindkét oldalából kivonunk $2f(0)$-t) igaz az is, hogy

$$f(x+y) - f(0) = f(x) - f(0) + f(y) - f(0) \quad (x, y \in \mathbb{R}) .$$

Ez mutatja, hogy az $A(x) = f(x) - f(0)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény teljesíti (CA)-t, azaz $A(x+y) = A(x) + A(y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ha f folytonos, úgy A is, így $A(x) = cx$ $(x \in \mathbb{R})$, s akkor $f(x) = A(x) + f(0) = cx + b$ $(x \in \mathbb{R})$ a (J) folytonos megoldása, ahol $c, b \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

9. Feladat

Határozzuk meg azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyek teljesítik az

$$f(x) + f(x + 2y) = 2f(x + y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet.

(**Átfogalmazva**: azon folytonos függvényeket, amelyek bármely a, b, c számtani sorozatot az $f(a), f(b), f(c)$ számtani sorozatba visznek át.)

Megoldás

Ha f teljesíti egyenletünket, úgy abból az $x = u$, $x+2y = v$ helyettesítéssel, $x + y = \frac{u+v}{2}$ miatt

$$f(u) + f(v) = 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

következik, azaz f teljesíti (J)-t.

Így f folytonossága miatt, a 8. feladat szerint

$$f(x) = cx + b \ (x \in \mathbb{R})$$

következik, ami bármely $c, b \in \mathbb{R}$ konstans mellett valóban teljesíti egyenletünket.

10. Feladat

Határozzuk meg azokat az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyek teljesítik az

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - xy \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet.

1. Megoldás

Az egyenletből az $x = y = 0$ helyettesítés adja, hogy $f(0) = 2f(0)$, így $f(0) = 0$.

Az $y \mapsto -x$ helyettesítés és $f(0) = 0$ adja, hogy

$$f(x)+f(-x)+x^2=0 \quad (x\in\mathbb{R})\ . \qquad (\circ)$$

Az $x\mapsto -x$, $y\mapsto -y$ helyettesítéssel az eredeti egyenletből kapjuk, hogy

$$f(-(x+y))=f(-x)+f(-y)-xy \quad (x,y\in\mathbb{R})\ ,$$

amit kivonva az eredeti egyenletből kapjuk a

$$f(x+y)-f(-(x+y))=f(x)-f(-x)+f(y)-f(-y) \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

függvényegyenletet.

Ez mutatja, hogy az $A(x)=f(x)-f(-x)$ függvény teljesíti (CA)-t, másrészt f folytonossága miatt folytonos is, ezért

$$f(x)-f(-x)=c_1x \quad (x\in\mathbb{R})\ ,$$

ahol $c_1\in\mathbb{R}$ tetszőleges konstans. Utóbbit $(\circ)$-höz adva kapjuk, hogy

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{c_1}{2}x \quad (x\in\mathbb{R})\ ,$$

azaz

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+cx \quad (x\in\mathbb{R})\ ,$$

ami $c=\frac{c_1}{2}\in\mathbb{R}$ tetszőleges konstanssal valóban teljesíti függvényegyenletünket.

2. Megoldás

Egyenletünk két oldalához hozzáadva az $\frac{(x+y)^2}{2}=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+xy$ azonosság megfelelő oldalait, kapjuk a vele ekvivalens

$$f(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2}=f(x)+\frac{x^2}{2}+f(y)+\frac{y^2}{2} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

függvényegyenletet. Ez mutatja, hogy az

$$A(x)=f(x)+\frac{x^2}{2} \quad (x\in\mathbb{R})$$

függvény additív, azaz teljesíti a Cauchy-alapegyenletet, így a 4. feladat miatt $A(x)=cx$ $(x\in\mathbb{R})$, ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

Ezután A definíciója adja, hogy

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + cx \quad (x \in \mathbb{R}) \, .$$

11. Feladat
Határozzuk meg azokat az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyek teljesítik az

$$f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) = 2y^2 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet.

Megoldás
Egyenletünk az $x = 0$ helyettesítéssel adja, hogy

$$f(y) + f(-y) = 2y^2 + 2f(0) \quad (y \in \mathbb{R}) \, ,$$

míg x és y felcserélésével

$$f(x+y) + f(y-x) - 2f(y) = 2x^2 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

következik. Utóbbit hozzáadva az eredeti egyenlethez kapjuk a

$$2f(x+y) + f(x-y) + f\left[-(x-y)\right] - 2f(x) - 2f(y) = 2x^2 + 2y^2$$

függvényegyenletet $(x, y \in \mathbb{R})$.

A megoldás első egyenlősége miatt

$$f(x-y) + f\left[-(x-y)\right] = 2(x-y)^2 + 2f(0) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \, ,$$

amit felhasználva az előző egyenlet adja $x, y \in \mathbb{R}$ esetén a

$$2f(x+y) + 2(x-y)^2 + 2f(0) - 2f(x) - 2f(y) = 2x^2 + 2y^2 \, ,$$

illetve a rendezés után az

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - f(0) \;\; (x, y \in \mathbb{R})$$

egyenletet.

Utóbbi egyenlet mindkét oldalából $(x+y)^2+f(0)$-t kivonva kapjuk, hogy $x, y \in \mathbb{R}$-re

$$f(x+y)-(x+y)^2-f(0)=f(x)-x^2-f(0)+f(y)-y^2-f(0)\,.$$

Látható, hogy az

$$A(x)=f(x)-x^2-f(0)\quad(x\in\mathbb{R})$$

függvény teljesíti a Cauchy-alapegyenletet.

Az f, az $x \to x^2$ és az $x \to f(0)$ függvények folytonossága adja, hogy A is folytonos, így a 4. feladat miatt

$$A(x)=cx\quad(c\in\mathbb{R})\,,$$

ahol $(c \in \mathbb{R})$ tetszőleges konstans.

Az A-t definiáló egyenlőségből pedig következik, hogy

$$f(x)=x^2+cx+f(0)\quad(x\in\mathbb{R})\,.$$

Egyszerű számolás adja, hogy $f(0)$ bármely választása esetén ez a függvény teljesíti a feladatot.

Így a függvényegyenlet minden folytonos megoldása

$$f(x)=x^2+cx+b\quad(x\in\mathbb{R})$$

alakú, ahol $b, c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

Megjegyzés
Ha nem tesszük fel f folytonosságát, úgy annyit mondhatunk, hogy függvényegyenletünket az

$$f(x)=x^2+A(x)+b\quad(x\in\mathbb{R})$$

függvények teljesítik, ahol $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény, $b \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

Léteznek nem folytonos additív függvények, így egyenletünknek is vannak nem folytonos megoldásai.

12. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x+y)-f(x-y)-2f(y)=6x^2y\quad(x,y\in\mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) = ?$

Megoldás
Egyenletünkből az $x = 0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$f(-y) = -f(y) \quad (y \in \mathbb{R}) \ ,$$

azaz f páratlan függvény.

A feladat függvényegyenletéből x és y felcserélésével kapjuk az

$$f(x+y) - f\left[-(x-y)\right] - 2f(x) = 6xy^2 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

egyenletet.

Ezt hozzáadva az eredeti egyenlethez, felhasználva f páratlanságát is kapjuk, hogy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 3x^2y + 3xy^2 \quad (x, y \in \mathbb{R}) \ .$$

Ezen egyenlet mindkét oldalából $(x+y)^3$-t kivonva és felhasználva az $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ azonosságot, jön az

$$f(x+y) - (x+y)^3 = f(x) - x^3 + f(y) - y^3 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet. Ez mutatja, hogy az

$$A(x) = f(x) - x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény teljesíti a Cauchy-alapegyenletet, továbbá f és az $x \to x^3$ folytonossága miatt A is folytonos. A 4. feladat miatt ezért

$$A(x) = cx \quad (x \in \mathbb{R}) \ ,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

Az A függvény definíciója adja, hogy

$$f(x) = x^3 + cx \quad (x \in \mathbb{R}) \ ,$$

ami, ahogy azt egy egyszerű számolás adja, valóban teljesíti a feladat függvényegyenletét.

Megjegyzés
Ha nem tesszük fel f folytonosságát, úgy az

$$f(x) = x^3 + A(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakú függvények a függvényegyenlet megoldásai, ahol $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges additív függvény.

13. Feladat
Határozzuk meg azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, melyek teljesítik az

$$f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2 \quad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{L}$$

úgynevezett Lobacsevszkij-féle függvényegyenletet.

Megoldás
Ha f teljesíti (L)-t akkor az

$$x + y = u\ , \quad x - y = v\ , \quad \Rightarrow x = \frac{u+v}{2}$$

adja, hogy

$$f(u)f(v) = \left[f\left(\tfrac{u+v}{2}\right)\right]^2 \quad (u, v \in \mathbb{R}) \tag{$*$}$$

(hiszen minden $u, v \in \mathbb{R}$-hez létezik x, y úgy, hogy $u = x + y$, $v = x - y$).

$(*)$-ból $v = 0$, $u \to 2u$ helyettesítéssel következik, hogy

$$f(2u)f(0) = [f(u)]^2 \quad (u \in \mathbb{R})\ .$$

Utóbbi adja, hogy ha $f(0) = 0$, akkor $f(u) = 0$ $(u \in \mathbb{R})$, és az $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény teljesíti (L)-t.

Ha $f(0) \neq 0$, akkor a $(*)$-ból a $v = -u$ helyettesítéssel kapott

$$f(u)f(-u) = [f(0)]^2 \quad (u \in \mathbb{R})$$

egyenlet adja, hogy $f(u) \neq 0$ $(u \in \mathbb{R})$.

Ugyanakkor $(*)$-ból a $v = 0$ helyettesítéssel jön, hogy

$$f(u)f(0) = \left[f\left(\frac{u}{2}\right)\right]^2 \quad (u \in \mathbb{R})\ .$$

Ez és $f(0) \neq 0$ adja, hogy

$$\frac{f(u)}{f(0)} = \frac{\left[f\left(\frac{u}{2}\right)\right]^2}{[f(0)]^2} > 0 \quad (u \in \mathbb{R})\ .$$

$(*)$-ot $[f(0)]^2$-tel elosztva következik, hogy

$$\frac{f(u)}{f(0)} \cdot \frac{f(v)}{f(0)} = \left[\frac{f\left(\frac{u+v}{2}\right)}{f(0)}\right]^2 \quad (u, v \in \mathbb{R}) ,$$

ami mutatja, hogy a

$$g(u) = \log_a \left[\frac{f(u)}{f(0)}\right] \quad (u \in \mathbb{R}) , \quad g(0) = 0 , \quad \text{ahol } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

függvény teljesíti a $g\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{g(u)+g(v)}{2}$ $(u, v \in \mathbb{R})$ Jensen-egyenletet, továbbá g folytonos is (hiszen f és az $x \to \log_a x$ függvény is az).

A 8. feladat és $g(0) = 0$ adja, hogy

$$g(x) = cx \quad (x \in \mathbb{R}) ,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. Ezután g definíciójából következik, hogy

$$f(x) = f(0)a^{cx} \quad (x \in \mathbb{R}) ,$$

s egyszerűen beláthatjuk, hogy ez a függvény bármely $f(0) \neq 0$, $f(0) \in \mathbb{R}$ esetén teljesíti (L)-t.

Miután az $f \equiv 0$ függvény is teljesíti (L)-t, így minden folytonos megoldása

$$f(x) = ba^{cx} \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakú, ahol $b, c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok lehetnek.

14. Feladat
Határozzuk meg azokat az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyek az x, $x+y$, $x+2y$ számtani sorozatot az $f(x)$, $f(x+y)$, $f(x+2y)$ mértani sorozatba viszik át.

Megoldás
A mértani sorozat ismert tulajdonsága adja az

$$[f(x+y)]^2 = f(x)f(x+2y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet az $f \neq 0$ függvényre.

Ebből az $x \to x-y$ helyettesítéssel éppen az (L) Lobacsevszkij-egyenletet kapjuk az $f \neq 0$ folytonos függvényre, melyet az

$$f(x) = ba^{cx} = bd^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények teljesítenek, ahol $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $c \in \mathbb{R}$ valamint $d = a^c \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges konstansok.

15. Feladat
Az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ folytonos függvény teljesíti az

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^+) \qquad (CL)$$

úgynevezett Cauchy logaritmikus egyenletet. $f(x) =?$

Megoldás
Ha x, $y > 0$, akkor az $u = \log_a x$, $v = \log_a y$ transzformáció értékkészlete $\mathbb{R}^2$, azaz u és v minden valós értéket felvesz (ez nyilvánvaló az $x \to \log_a x$ $(x \in \mathbb{R}^+)$ függvény ismert tulajdonsága miatt).

Elvégezve (CL)-ben az $x = a^u$, $y = a^v$ $(u, v \in \mathbb{R})$ helyettesítéseket kapjuk a

$$f\left(a^{u+v}\right) = f\left(a^u\right) + f\left(a^v\right) \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet, azaz a

$$g(u) = f\left(a^u\right) \quad (u \in \mathbb{R})$$

függvény, mely az f és az $x \to a^u$ $(u \in \mathbb{R})$ függvény folytonossága miatt folytonos, teljesíti (CA)-t, így

$$g(x) = cx \quad (x \in \mathbb{R}) \ ,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.
Ekkor g definíciója adja, hogy

$$f(x) = c \log_a x \quad (x \in \mathbb{R}^+) \ ,$$

ami ahogy azt könnyen beláthatjuk, valóban teljesíti (CL)-t.

Megjegyzések

1. Ha (CL) minden $x, y \in \mathbb{R}$-re teljesül, akkor az $y = 0$ helyettesítés adja, hogy $f(0) = f(x) + f(0)$, azaz $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$
2. Ha (CL) minden $x, y \neq 0$ valós számra teljesül, úgy $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$-ra $2f(t) = f(t^2) = 2f(-t)$, úgy az f páros.
   Ezért $f(x) = f(-x) = c \log_a(|x|)$ $\quad (x \in \mathbb{R})$.

16. Feladat
Az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(xy) = xf(y) + yf(x) \quad (x, y \in \mathbb{R}^+)$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

Megoldás
Osszuk el egyenletünk mindkét oldalát az $xy \neq 0$-val, úgy kapjuk az

$$\frac{f(xy)}{xy} = \frac{f(y)}{y} + \frac{f(x)}{x} \quad (x, y \in \mathbb{R}^+)$$

függvényegyenletet. Ez mutatja, hogy az

$$l(x) = \frac{f(x)}{x} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

függvény teljesíti az

$$l(xy) = l(x) + l(y) \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

Cauchy logaritmikus egyenletet, továbbá l nyilván folytonos. Így a 15. feladat miatt

$$l(x) = c \log_a(x) \quad (x \in \mathbb{R}^+)\ ,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$ $(a \neq 1)$ tetszőleges konstansok. Ezután már l definíciója adja, hogy

$$f(x) = cx \log_a(x) \quad (x \in \mathbb{R})\ ,$$

ami valóban megoldása függvényegyenletünknek bármely $c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$ $(a \neq 1)$ konstanssal.

17. Feladat
Adjuk meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre teljesülő

$$f(x + y) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad (CE)$$

úgynevezett Cauchy exponenciális függvényegyenlet folytonos megoldásait.

Megoldás
(CE) megoldását visszavezetjük (CA) megoldására.

Az $x = y = \frac{t}{2}$ helyettesítéssel kapjuk (CE)-ből, hogy

$$f(t) = \left[f\left(\frac{t}{2}\right) \right]^2 \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow f(t) \geq 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \; .$$

Ha létezik $t_0 \in \mathbb{R}$, hogy $f(t_0) = 0$, akkor egyenletünk adja, hogy

$$f(t) = f\left[(t - t_0) + t_0\right] = f(t - t_0) f(t_0) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \; .$$

Így, vagy $f(t) > 0$ minden $t \in \mathbb{R}$-re vagy $f(t) \equiv 0$.

Ha $f(t) > 0$ bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén, akkor képezhetjük (CE) mindkét oldalának logaritmusát és kapjuk, hogy

$$\log_a f(x + y) = \log_a f(x) + \log_a f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \; ,$$

ami mutatja, hogy a

$$g(x) = \log_a \left[f(x)\right] \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény teljesíti a

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Cauchy-alapegyenletet.

Ugyanakkor az f és az $\log_a$ függvény folytonossága adja g folytonosságát. Így

$$g(x) = cx \quad (x \in \mathbb{R}) \; .$$

Ekkor g definíciójából következik, hogy

$$f(x) = a^{cx} \quad (x \in \mathbb{R}) \; .$$

Az $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ és $f(x) = a^{cx}$ $(x \in \mathbb{R})$ folytonos függvények valóban megoldásai (CE)-nek.

18. Feladat

Határozzuk meg az összes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, mely teljesíti az

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) =?$

Megoldás
Az egyenletet -1-gyel megszorozva, majd a kapott egyenlet mindkét oldalához 1-et adva, kapjuk a

$$1 - f(x+y) = 1 - f(x) - f(y) + f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet, ami írható az

$$1 - f(x+y) = [1 - f(x)]\,[1 - f(y)] \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

alakban is. Utóbbi mutatja, hogy a

$$g(x) = 1 - f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény teljesíti a

$$g(x+y) = g(x)g(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Cauchy exponenciális egyenletet. Továbbá f folytonossága miatt g is folytonos, így a 17. feladat szerint

$$g(x) = a^{cx} \quad (x \in \mathbb{R})\,, \quad \text{vagy} \quad g(x) \equiv 0$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. g definíciója végül adja, hogy

$$f(x) = 1 - a^{cx} \quad (x \in \mathbb{R})\,, \quad \text{vagy} \quad f(x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Ezek a függvények valóban teljesítik a feladat függvényegyenletét.

19. Feladat
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény teljesíti az

$$f(x+y) = 10^{xy} f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x) = ?$

Megoldás
Az egyenlet mindkét oldalát a

$$10^{-\frac{(x+y)^2}{2}} = 10^{-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - xy}$$

azonosság megfelelő oldalaival szorozva kapjuk $x, y \in \mathbb{R}$ esetén az

$$f(x+y) \cdot 10^{-\frac{(x+y)^2}{2}} = 10^{-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - xy} 10^{xy} f(x)f(y)\,,$$

illetve a jobb oldal rendezése után az

$$f(x+y)\cdot 10^{-\frac{(x+y)^2}{2}} = f(x)\cdot 10^{-\frac{x^2}{2}}\cdot f(y)\cdot 10^{-\frac{y^2}{2}} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

függvényegyenletet. Utóbbiból látható, hogy a

$$g(x) = f(x)\cdot 10^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x\in\mathbb{R})$$

függvény, mely az f és az $x\to 10^{-\frac{x^2}{2}}$ $(x\in\mathbb{R})$ függvény folytonossága miatt folytonos, teljesíti a

$$g(x+y) = g(x)g(y) \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Cauchy exponenciális egyenletet, így

$$g(x) = a^{cx} \quad (x,y\in\mathbb{R})\ , \quad \text{vagy} \quad g(x)\equiv 0\ ,$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ és $a\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges konstansok. Végül g definíciója adja, hogy

$$f(x) = 10^{\frac{x^2}{2}}a^{cx} \quad (x\in\mathbb{R})\ , \quad \text{vagy} \quad f(x)\equiv 0\ ,$$

melyek megoldásai egyenletünknek.
$a = 10^{\lg a}$ adja, hogy $a^{cx} = 10^{(c\,\lg a)x} = 10^{dx}$ miatt f az $f(x) = 10^{\frac{x^2}{2}+dx}$ $(x\in\mathbb{R})$ alakba is írható, ahol $d\in\mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

20. Feladat
Határozzuk meg azon $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvényeket, melyek teljesítik az

$$f(x+y) = g(x)+h(y) \quad (x,y\in\mathbb{R}) \qquad (PA)$$

úgynevezett Pexider-alapegyenletet.

Megoldás
(PA)-ból az $y=0$, illetve $x=0$ helyettesítéssel $x\in\mathbb{R}$-re

$$f(x) = g(x)+h(0)\ , \quad \text{illetve} \quad f(y) = h(y)+g(0) \qquad (\triangle)$$

következik, melyekből g-t, illetve h-t kifejezve és (PA)-ba helyettesítve kapjuk, hogy

$$f(x+y) = f(x)+f(y)-h(0)-g(0) \quad (x,y\in\mathbb{R})\ .$$

Ez mutatja, hogy az

$$A(x) \doteq f(x) - h(0) - g(0) \quad (x \in \mathbb{R})$$

szerint definiált függvény teljesíti az

$$A(x+y) = A(x) + A(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Cauchy-alapegyenletet és folytonos, így a 4. feladat miatt

$$A(x) = cx \quad (x \in \mathbb{R}) \ ,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

Ezért A definíciójából kapjuk f-re az

$$f(x) = cx + h(0) + g(0) \quad (x \in \mathbb{R})$$

előállítást. Ezután $(\triangle)$-ból jön, hogy

$$g(x) = cx + g(0) \ ; \ \ h(x) = cx + h(0) \quad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Az így kapott f, g, h függvények $g(0)$ és $f(0)$ tetszőleges választása mellett kielégítik (PA)-t. Tehát (PA) folytonos megoldásai az

$$f(x) = cx + a + b \ ; \ \ g(x) = cx + a \ ; \ \ h(x) = cx + b \ \ (x \in \mathbb{R})$$

függvények, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen választható konstansok.

21. Feladat
Az $f, g, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ folytonos függvények teljesítik az

$$f(xy) = g(x) + h(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^+) \tag{PL}$$

úgynevezett Pexider logaritmikus egyenletet. $f, g, h =?$

Megoldás
(PL) az $y = 1$, illetve $x = 1$ helyettesítéssel adja, hogy

$$f(x) = g(x) + h(1) \ \ (x \in \mathbb{R}^+) \ \text{ és } \ f(y) = g(1) + h(y) \ \ (y \in \mathbb{R}^+) \ ,$$

amiből a $h(1) = a$, $g(1) = b$ jelöléssel kapjuk, hogy

$$g(x) = f(x) - a \ \ ; \ \ h(y) = f(y) - b \ \ (x \in \mathbb{R}^+) \ .$$

Ezeket (PL)-be helyettesítve

$$f(xy) = f(x) + f(y) - a - b \;\; (x, y \in \mathbb{R}^+)$$

következik, ami mutatja, hogy az

$$l(x) = f(x) - a - b \;\; (x \in \mathbb{R}^+)$$

függvény teljesíti a (CL) Cauchy logaritmikus egyenletet, azaz

$$l(xy) = l(x) + l(y) \;\; (x, y \in \mathbb{R}^+) \; .$$

Így a 15. feladat szerint

$$l(x) = c \log_d(x) \;\; (x \in \mathbb{R}^+) \; ,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ és $d \in \mathbb{R}^+$ $(d \neq 1)$ tetszőleges konstansok. Ezután l, g és h fenti előállítása (f-fel) adja, hogy

$$f(x) = c \log_d(x) + a + b \; ; \; g(x) = c \log_d(x) + b \; ; \; h(x) = c \log_d(x) + a$$

bármely $x \in \mathbb{R}$-re. Ezen f, g, h függvények valóban teljesítik (PL)-t bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $d \in \mathbb{R}^+$ $(d \neq 1)$ konstanssal.

Megjegyzések

1. Ha az $f, g, h : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ függvények bármely $x, y \geq 0$-ra teljesítik (PL)-t, úgy $l \equiv 0$, így $f(x) = a + b$; $g(x) = b$; $h(x) = c$ $(x \geq 0)$.
2. Elég feltenni f folytonosságát, ebből már következik g és h folytonossága.

22. Feladat
Határozza meg az $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, ha teljesítik az

$$f(x + y) = g(x)h(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad (PE)$$

úgynevezett Pexider exponenciális egyenletet.

Megoldás
Ha f, g, h teljesítik (PE)-t és $f(0) = 0$, akkor (PE)-ből az $x = y = 0$

helyettesítéssel $f(0) = g(0)h(0)$ következik, ami adja, hogy $g(0) = 0$ vagy $h(0) = 0$. (PE)-ből az $y = 0$, illetve $x = 0$ helyettesítéssel

$$f(x) = g(x)h(0) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad f(y) = g(0)h(y) \quad (y \in \mathbb{R})$$

következik, így $g(0) = 0$ és $h(0) = 0$ is adja, hogy

$$f(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \, .$$

Ha létezne $x, y \in \mathbb{R}$, hogy $g(x) \neq 0$, $h(y) \neq 0$, akkor (PE) adná, hogy $f(x+y) \neq 0$, ami lehetetlen $f \equiv 0$ miatt. Ezért ekkor $\big(f(0) = 0$ mellett!$\big)$ $g \equiv 0$ és $h \equiv 0$ teljesül.

Ha $g \equiv 0$ $\big(f \equiv 0$ továbbra is$\big)$, akkor h tetszőleges lehet.

Ha $h \equiv 0$ $\big(f \equiv 0$ mellett$\big)$, akkor g tetszőleges lehet.

Az

$$\begin{cases} f \equiv 0 \\ g = \text{tetszőleges} \\ h \equiv 0 \end{cases} \qquad \qquad \begin{cases} f \equiv 0 \\ g \equiv 0 \\ h = \text{tetszőleges} \end{cases}$$

függvényhármasok valóban megoldásai (PE)-nek.

Ha $f(0) \neq 0$, akkor $f(0) = g(0)h(0)$ adja, hogy $a = g(0) \neq 0$ és $b = h(0) \neq 0$ is teljesül.

(PE) az $y = 0$, illetve $x = 0$ mellett (az előbbi jelölésekkel) adja, hogy

$$f(x) = g(x)h(0) = bg(x) \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{b} f(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \, ,$$

$$f(y) = g(0)h(y) = ah(y) \Leftrightarrow h(y) = \frac{1}{a} f(y) \quad (y \in \mathbb{R}) \, .$$

g és h itt kapott alakját (PE)-be helyettesítve

$$f(x+y) = \frac{1}{ab} f(x) f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

következik, ami adja, hogy az

$$E(x) \doteq \frac{f(x)}{ab} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény teljesíti az

$$E(x+y) = E(x)E(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Cauchy exponenciális egyenletet, és E folytonos is, így a 17. feladat miatt

$$E(x) = d^{cx} \quad (x \in \mathbb{R})$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ és $d \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges konstansok. Ekkor E definíciója, továbbá g és h előállításai (f-fel) adják, hogy

$$f(x) = abd^{cx} \ ; \ \ g(x) = ad^{cx} \ ; \ \ h(x) = bd^{cx} \ \ (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Ezen függvényhármas teljesíti (PE)-t, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges konstansok.

23. Feladat
Az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények teljesítik az

$$f(x)f(y) - f(xy) = g(x+y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet, továbbá $g(0) = 0$, $g(1) = 1$. $f, g =?$

Megoldás
Egyenletünk $x = y = 0$ mellett adja, hogy

$$[f(0)]^2 - f(0) = g(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)\,[f(0) - 1] = 0 \ ,$$

így $f(0) = 0$ vagy $f(0) = 1$.

Egyenletünkből $y = 0$, $x = 1$ mellett következik, hogy

$$f(1)f(0) - f(0) = g(1) = 1 \ ,$$

így $f(0) = 0$ nem lehetséges, mert az utóbbi egyenlőség a $0 = 1$ lehetetlenséget adná. Így csak $f(0) = 1$ lehetséges.

Ha $f(0) = 1$, úgy

$$f(1) - 1 = 1 \Leftrightarrow f(1) = 2 \ .$$

A feladat függvényegyenlete $y = 0$-val adja, hogy

$$f(x)f(0) - f(0) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \ ,$$

amiből $f(0) = 1$ miatt jön, hogy

$$g(x) = f(x) - 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Ezt az egyenletbe behelyettesítve következik f-re az

$$f(x)f(y) - f(xy) = f(x+y) - 1 \quad (x, y \in \mathbb{R}) ,$$

illetve átrendezve az

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1 \quad (x, y \in \mathbb{R}) ,$$

a 7. feladatban szereplő függvényegyenletet és mint láttuk $f(1) = 2$ is teljesül. Így a 7. feladat miatt
$f(x) = x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$, míg $g(x) = f(x) - 1 = x$ $(x \in \mathbb{R})$.

Az $f(x) = x + 1$, $g(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények valóban megoldásai a feladatnak.

24. Feladat
Milyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények teljesítik az

$$f\,[x + 2f(y)] = f(x) + y + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{M}$$

függvényegyenletet? (Ld. [4])

Megoldás

- Először belátjuk, hogy $f(0) = 0$.
  (M)-ből $x = y = 0$ adja, hogy $f\,[2f(0)] = 2f(0)$.
  Ezt felhasználva, az $x = 0$, $y = 2f(0)$, illetve $y = 0$, $x = 2f(0)$ helyettesítésekkel következik (M)-ből, hogy $f\,[4f(0)] = 5f(0)$, illetve $f\,[4f(0)] = 3f(0)$, s ez adja, hogy $f(0) = 0$.

- Megmutatjuk, hogy f páratlan.
  $f(0) = 0$ és az $x = 0$ helyettesítés (M)-ben adja, hogy

$$f\,[2f(y)] = y + f(y) \quad (y \in \mathbb{R}) . \tag{$\triangle$}$$

  Ez és az $x \to 2f(x)$ helyettesítés (M)-ben azt adja, hogy $x, y \in \mathbb{R}$-re

$$\begin{aligned} f\,[2f(x) + 2f(y)] &= f\,[2f(x)] + y + f(y) = \\ &= x + f(x) + y + f(y) . \end{aligned} \tag{$\triangle\triangle$}$$

  Ebből pedig az $y \to -x$ helyettesítéssel és a $b = f(x) + f(-x)$ jelöléssel

$$f(2b) = b \Leftrightarrow 2f(2b) = 2b$$

következik.

Az utóbbi egyenlőség, illetve az $y \to 2b$ helyettesítés $(\triangle)$-ban adja, hogy

$$f\left[2f(2b)\right] = f(2b)\ ,\quad f\left[2f(2b)\right] = 2b + f(2b)\ ,$$

így $0 = b = f(x) + f(-x)$ $(x \in \mathbb{R})$, azaz f páratlan.

- Most belátjuk, hogy f additív, azaz teljesíti (CA)-t.

  (M) az $x \to -2\left[f(x) + f(y)\right]$, $y \to x + y$ helyettesítéssel, felhasználva $(\triangle\triangle)$-et és f páratlanságát is, adja:

$$\begin{gathered} f\left\{2\left[f(x+y) - f(x) - f(y)\right]\right\} = \\ = f\left\{-2\left[f(x) + f(y)\right] + 2f(x+y)\right\} = \\ = f\left\{-2\left[f(x) + f(y)\right]\right\} + x + y + f(x+y) = \\ = -f\left\{2\left[f(x) + f(y)\right]\right\} + x + y + f(x+y) = \\ = -x - f(x) - y - f(y) + x + y + f(x+y) = \\ = f(x+y) - f(x) - f(y)\ (x, y \in \mathbb{R}). \end{gathered}$$

  Tehát $b(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$ mellett $f\left[2b(x,y)\right] = b(x,y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$, így az előbbiek miatt $0 = b(x,y) = = f(x+y) - f(x) - f(y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$, azaz f teljesíti (CA)-t.

- f folytonos és teljesíti (CA)-t, így a 4. feladat miatt $f(x) = cx$ $(x \in \mathbb{R})$, ahol $c \in \mathbb{R}$ konstans.

  Egyszerűen belátható, hogy csak $c = 1$ és $c = -\frac{1}{2}$ esetén kapunk megoldást, ezek $f(x) = x$ és $f(x) = -\frac{1}{2}x$ $(x \in \mathbb{R})$.

25. Feladat
Adjuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, amely $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ esetén teljesíti az

$$\left[f(x) + f(z)\right]\left[f(y) + f(t)\right] = f(xy - zt) + f(xt + yz) \qquad (\circ)$$

függvényegyenletet. (Nemzetközi Diákolimpiai feladat nyomán)

Megoldás
$(\circ)$ az $x = y = z = t = 0$ helyettesítéssel adja, hogy

$$4\,[f(0)]^2 = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0\ , \quad \text{vagy} \quad f(0) = \frac{1}{2}\ .$$

- Ha $f(0) = \frac{1}{2}$, úgy $(\circ)$-ből az $x = 0$, $y = t$ helyettesítéssel

$$\left[\frac{1}{2} + f(z)\right] 2f(t) = f(-zt) + f(zt) \quad (z, t \in \mathbb{R})\ ,$$

illetve ebből z és t felcserélésével

$$\left[\frac{1}{2} + f(t)\right] 2f(z) = f(-zt) + f(zt) \quad (z, t \in \mathbb{R})$$

következik. Ezek összehasonlítása pedig azonnal adja, hogy $f(z) = f(t)$ $(z, t \in \mathbb{R})$, azaz f konstans, amiből $f(0) = \frac{1}{2}$ miatt következik, hogy

$$f(t) = \frac{1}{2} \quad (t \in \mathbb{R})\ ,$$

s ez megoldása $(\circ)$-nek.

- Ha $f(0) = 0$, akkor $(\circ)$-be $x = t = 0$, $y = 1$-et helyettesítve

$$f(z)f(1) = f(z) \Leftrightarrow f(z)\,[f(1) - 1] = 0 \quad (z \in \mathbb{R})$$

következik.

  → Ha $f(1) \neq 1$, akkor $f(z) = 0$ $(z \in \mathbb{R})$, ami megoldása $(\circ)$-nek.

  → Ha $f(1) = 1$, akkor $(\circ)$-ból az $y = t = 1$ helyettesítéssel

$$[f(x) + f(z)]\,2 = f(x - z) + f(x + z) \quad (x, z \in \mathbb{R})$$

  adódik, azaz az 5. feladat

$$f(x + z) + f(x - z) = 2f(x) + 2f(z) \qquad (N)$$

  egyenlete, melynek folytonos megoldásai $f(x) = cx^2$ $(x \in \mathbb{R})$ alakúak a $c \in \mathbb{R}$ konstanssal.

  Most $f(1) = 1$, így $c = 1$ kell, hogy legyen. Az $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény valóban megoldása $(\circ)$-nek.

($\circ$) összes folytonos megoldását $x \in \mathbb{R}$-en az

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\ (x \in \mathbb{R}), f(x) = 0\ (x \in \mathbb{R}), f(x) = x^2 \qquad (OM)$$

függvények írják le.

Megjegyzés
Az első két megoldás meghatározásához nem volt szükség f folytonosságára. A harmadiknál igen. Megmutatható, hogy ha f teljesíti ($\circ$)-t, úgy az $f(1) = 1$ esetben f szigorúan monoton növekedő, $]0, +\infty[$-en és szigorúan monoton csökkenő $]-\infty, 0[$-n. Az 5. feladat és $f(1) = 1$ miatt, továbbá

$$f(r) = r^2 \quad (r \in \mathbb{Q})\ .$$

(Nem használtuk most sem f folytonosságát!) Igaz továbbá, hogy $\forall x \in \mathbb{R}$-hez $\exists(r_n)$ és (R_n) $(r_n, R_n \in \mathbb{Q})$ sorozat, hogy
$r_n < x < R_n$ és $r_n \to x$, $R_n \to x$.

Ha $x < 0$, úgy feltehető, hogy $r_n, R_n < 0$ és akkor – mivel f csökkenő $]-\infty, 0]$-n – kapjuk, hogy

$$r_n^2 = f(r_n) \geq f(x) \geq f(R_n) = R_n^2\ .$$

$r_n^2 \to x^2$, $R_n^2 \to x^2$ és a határérték és egyenlőtlenségek kapcsolatára vonatkozó megfelelő tétel (például a rendőr-tétel) miatt

$$f(x) = x^2 \quad x \in]-\infty, 0[\ .$$

Hasonlóan jön, hogy

$$f(x) = x^2 \quad x \in]0, +\infty[\ .$$

Ugyanakkor tudjuk, hogy $f(0) = 0$, tehát $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$.

Így csak az (OM)-beli függvények lehetnek ($\circ$) megoldásai akkor is, ha (az eredeti Diákolimpiai feladatnak megfelelően) nem teszszük fel f folytonosságát.

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyek teljesítik az
$$f(x) = \frac{1}{3} f\left(\frac{x}{2}\right) + x \quad (x \in \mathbb{R})$$
függvényegyenletet.

2. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, amely teljesíti az
$$f(3x) + \frac{1}{4} f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2} f(x) + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$
függvényegyenletet.

3. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény teljesíti az
$$f(x^2 + y^2) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
függvényegyenletet. $f(x) = ?$

4. Határozzuk meg azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, melyek teljesítik az
$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
függvényegyenletet.

5. Adjuk meg azokat az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, melyek teljesítik az
$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy + 1 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
függvényegyenletet.

6. Az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ folytonos függvény teljesíti az
$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^+)$$
függvényegyenletet. $f(x) = ?$

7. Határozzuk meg azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, melyek teljesítik az
$$\left[f\left(\frac{x + y}{2}\right)\right]^2 = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
függvényegyenletet.

8. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény teljesíti az
$$f\left(\sqrt[3]{x^3 + y^3}\right) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
függvényegyenletet. $f(x) = ?$

9. Adjuk meg azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, melyek teljesítik az
$$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
függvényegyenletet.

10. Határozzuk meg az
$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$
függvényegyenlet $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ folytonos megoldásait.

11. Határozzuk meg az
$$f(xy) = g(x) + h(y) \quad (x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$
függvényegyenlet $f, g, h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ folytonos megoldásait.

12. Határozzuk meg azon $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyek teljesítik az
$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^+) \qquad (CH)$$
Cauchy-féle hatvány egyenletet.

13. Határozzuk meg az
$$f(xy) = g(x)h(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^+) \qquad (PH)$$
Pexider hatványegyenlet $f, g, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ folytonos megoldásait.

14. Mutassuk meg, hogy azok az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, amelyekre $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ esetén
$$[f(x) + f(z)]\,[f(y) + f(t)] = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$
és $f(1) = 1$ teljesül monoton csökkenőek a $]-\infty, 0]$, monoton növekvőek a $[0, +\infty[$ intervallumon.

Irodalom

[1] Aczél, János, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart, 1961.

[2] Aczél, János, Lectures on functional equations and their applications (Mathematics in Science and Engineering, Vol. 19), Academic Press, New York – London, 1966.

[3] Aczél, J. – Dhombres, J., Functional equations in several variables (Encyclopaedia of Mathematics and its Applications, Vol. 31.), Cambridge University Press, Cambridge – New York – New Rochelle – Melbourne – Sydney, 1989.

[4] Am. Math. Monthly, P. 10 854, Solution, 2004.

[5] András Szilárd – Kovács Lajos, Függvényegyenletek (Feladatgyűjtemény a IX. és a X. osztály részére), Ábel Kiadó, Kolozsvár, 2000.

[6] Brodszkij, V. Sz – Szlipenko, A. K., Függvényegyenletek, Visa Skola, Kijev, 1983. (oroszul)

[7] Castillo, E. – Ruiz Cobo, R., Functional equations and modelling in science and engineering (Monographs and textbooks in applied mathematics, Vol. 161.), Marcel Dekker, Inc., New York – Basel – Hong Kong

[8] Daróczy, Zoltán, Gaussian iteration of mean values and the existence of $\sqrt{2}$, Teaching Mathematics and Computer Science, Vol. 1. no. 1, 2003, 35-42.

[9] Hajdú – Bihar Megyei matematika versenyek (HBMM)

[10] Kántor Sándorné – Kántor Sándor, Nemzetközi magyar matematika versenyek, Studium, Debrecen, 2003.

[11] Középiskolai Matematikai Lapok (KÖMAL)

[12] Róka Sándor, 2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex, 2000.