Lajkó Károly

Analízis I.

harmadik, javított kiadás

Debreceni Egyetem
Matematikai és Informatikai Intézet
2002

lajko@math.klte.hu

Amennyiben hibát talál a jegyzetben, kérjük jelezze a szerzőnek!

A jegyzet dvi, pdf és ps formátumban letölthető a következő címről:

http://riesz.math.klte.hu/~lajko/jegyzet.html

Ez a jegyzet $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX-ben készült

Szedés és tördelés: Kovács László

Tartalomjegyzék

Irodalom

Tankönyvek:

Rudin, W.: A matematikai analízis alapjai

Kósa András: Ismerkedés a matematikai analízissel

Császár Ákos: Valós analízis I.-II.

Jegyzetek:

Makai Imre: Bevezetés az analízisbe

Kántor Sándor: Analízis I. (Határérték)

Leindler L. – Schipp F.: Analízis I.-II.

Rimán János: Matematikai analízis I.

Példatárak:

Rimán János: Matematikai analízis feladatgyűjtemény

B. P. Gyemidovics: Matematikai analízis feladatgyűjtemény

Kéziratok:

Páles Zsolt: Analízis I. (előadást követő jegyzet)

Száz Árpád: Hatványozás és elemi függvények

I. Halmazok, relációk, függvények

1. Halmazelméleti alapfogalmak

A halmaz és a halmaz eleme fogalmát adottnak (matematikai absztrakciónak) tekintjük. A halmazokat általában nagybetűkkel ($A, B, C, \ldots; X, Y, Z, \ldots; A_1, A_2, \ldots$), elemeiket kisbetűkkel ($a, b, c, \ldots;\ x, y, z, \ldots;\ a_1, a_2, \ldots$) jelöljük.
Azt például, hogy a eleme az A halmaznak az $a \in A$, míg azt, hogy a nem eleme az A halmaznak az $a \notin A$ szimbólummal jelöljük.
Egy halmaz adott, ha minden dologról egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy eleme, vagy sem.
A halmazokat megadhatjuk az elemeik felsorolásával: $\{a, b, c, x, y, z, \alpha, \beta\}$, vagy valamilyen ismert halmaz elemeire való T tulajdonság (állítás) segítségével:

$$\{x \mid x\ T \text{ tulajdonságú}\}, \quad \{x \mid T(x)\}, \quad \{x \in A \mid T(x)\}.$$

1. Definíció. Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, üres halmaznak nevezzük, és a $\emptyset$ szimbólummal jelöljük.

2. Definíció. Az A és B halmazok egyenlők, ha elemeik ugyanazok, azaz $x \in A \iff x \in B$. Ezt $A = B$, tagadását $A \neq B$ módon jelöljük.

1. Megjegyzés. A 2. definíció adja, hogy csak egy üres halmaz létezik.

3. Definíció. Az A halmaz részhalmaza (része) a B halmaznak, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$ is teljesül (azaz $x \in A \implies x \in B$). Ennek jelölése: $A \subset B$, vagy $B \supset A$.

4. Definíció. Az A halmaz valódi része a B halmaznak, ha $A \subset B$, de $A \neq B$.

2. Megjegyzés. $A = B \iff A \subset B$ és $B \subset A$.

5. Definíció. Halmazrendszer (vagy halmazcsalád) alatt olyan nemüres halmazt értünk, amelynek elemei halmazok.

6. Definíció. Egy A halmaz összes részhalmazaiból álló halmazt az A hatványhalmazának nevezzük, és $P(A)$-val jelöljük.

7. Definíció. Ha $I \neq \emptyset$ egy (úgynevezett) indexhalmaz és bármely $i \in I$ esetén adott egy A_i halmaz, akkor az $\{A_i \mid i \in I\}$ halmazt I-vel indexelt halmazrendszernek nevezzük.

8. Definíció. Az A és B halmazok egyesítésén (unióján), közös részén (metszetén), illetve különbségén rendre az

$$A \cup B \doteq \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\},$$
$$A \cap B \doteq \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\},$$
$$A \backslash B \doteq \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$$

halmazokat értjük.
Egy $\mathcal{R}$ halmazrendszer egyesítésén, illetve közös részén az

$$\bigcup \mathcal{R} \doteq \{a \mid \exists\ A \in \mathcal{R},\ a \in A\}, \qquad \bigcap \mathcal{R} \doteq \{a \mid \forall\ A \in \mathcal{R}\text{-ra } a \in A\}$$

halmazokat értjük.
Ha $\mathcal{R} = \{A_i \mid i \in I\}$ egy indexelt halmazrendszer, akkor egyesítését, illetve közös részét az $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, illetve $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ szimbólumokkal jelöljük.

1. Tétel. *Ha A, B, C tetszőleges halmazok, úgy*

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A$$

(kommutativitás),

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(asszociativitás),

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(disztributivitás),

$$A \backslash B = A \backslash (A \cap B), \qquad (A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash B,$$
$$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C), \qquad A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C),$$
$$A \cup B = B \ \Leftrightarrow\ A \subset B, \quad A \cap B = B \ \Leftrightarrow\ A \supset B, \quad A \backslash B = \emptyset \ \Leftrightarrow\ A \subset B.$$

Bizonyítás. egyszerű (gyakorlaton).

9. Definíció. Az A és B halmazok diszjunktak, ha $A \cap B = \emptyset$. Ha egy $\mathcal{R}$ halmazrendszer bármely két különböző halmaza diszjunkt, akkor páronként diszjunktnak nevezzük.

10. Definíció. Ha X adott halmaz és $A \subset X$, akkor a

$$C_X A = (A^C = \bar{A} = CA) \doteq X \backslash A$$

halmazt az A X-re vonatkozó komplementerének nevezzük.

2. Tétel. *Ha $A, B \subset X$, akkor*

$$A \cup \overline{A} = X, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset, \quad \overline{\emptyset} = X, \quad \overline{X} = \emptyset \quad \overline{\overline{A}} = A,$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Bizonyítás. feladat (gyakorlaton).

2. Relációk (leképezések)

1. Definíció. Az a és b elemekből készített rendezett elempáron egy (a, b) szimbólumot értünk, amelyre igaz, hogy $(a, b) = (c, d) \iff a = c$ és $b = d$.

1. Megjegyzés. Az $(a, b) \doteq \{\{a\}, \{a, b\}\}$ definíció is lehetséges. Ekkor bizonyítható, hogy teljesül $(a, b) = (c, d) \iff a = c$ és $b = d$.

2. Definíció. Az A és B halmazok Descartes-szorzatán az

$$A \times B \doteq \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

halmazt értjük.

1. Tétel. *Ha A, B és C tetszőleges halmazok, akkor*

$$
\begin{aligned}
&a) \quad A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \text{ vagy } B = \emptyset\ ,\\
&b) \quad (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)\ ,\\
&c) \quad A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)\ ,\\
&d) \quad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)\ ,\\
&e) \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)\ ,\\
&f) \quad (A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)\ ,\\
&g) \quad A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)\ ,\\
&h) \quad B \subset C \implies A \times B \subset A \times C\ .
\end{aligned}
$$

2. Megjegyzés. $A \times B$ általában nem egyenlő $B \times A$.

3. Definíció. Az $A \times B$ halmaz egy F részhalmazát A és B közötti (binér) relációnak, vagy más szavakkal A-ból B-be való leképezésnek nevezzük.
Ha $A = B$, akkor azt mondjuk, hogy F reláció A-n.

3. Megjegyzés. Az $(a, b) \in F$ tartalmazást szokás aFb-vel is jelölni és így olvassuk: a az F relációban van b-vel (vagy F a-hoz b-t rendeli).

4. Definíció. A

$$D_F \doteq \{x \in A \mid \exists\, y \in B,\ (x, y) \in F\}\ , \quad R_F \doteq \{y \in B \mid \exists\, x \in A,\ (x, y) \in F\}$$

halmazokat az F reláció (leképezés) értelmezési (ős-) tartományának, illetve értékkészletének (képtartományának) nevezzük.

4. Megjegyzés. $D_F = A$, úgy A-nak B-be; ha $R_F = B$, úgy A-ból B-re; ha $D_F = A$ és $R_F = B$, úgy A-nak B-re való leképezéséről beszélünk.

5. Definíció. Ha $F \subset A \times B$ adott reláció és $C \subset A$, akkor az

$$F(C) \doteq \{y \in B \mid \exists\, x \in C,\ (x, y) \in F\}$$

halmazt a C halmaz F-re vonatkozó képének nevezzük.
Az egyelemű $\{x\} \subset A$ $(x \in A)$ halmaz képét jelölje $F(x)$, azaz ha $(x, y) \in F$, akkor az $y = F(x)$ jelölés is lehetséges. Ekkor $F(x)$-et F x-beli értékének is nevezzük. ($F(x)$ nem feltétlenül egyértelműen meghatározott!)

6. Definíció. Ha $F \subset A \times B$ adott reláció (leképezés), $C \subset D_F$, akkor

$$F|_C \doteq \{(x, y) \in F \mid x \in C\}$$

az F reláció (leképezés) C-re való leszűkítése.

7. Definíció. Az $F \subset A \times B$ reláció (leképezés) inverzén az

$$F^{-1} \doteq \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in F\}$$

halmazt értjük.

6. Megjegyzés. E definícióból könnyen következik, hogy

$$D_{F^{-1}} = R_F, \quad R_{F^{-1}} = D_F, \quad (F^{-1})^{-1} = F, \quad F^{-1}(B) = D_F.$$

8. Definíció. Legyenek A, B, C adott halmazok, $F \subset A \times B$ és $G \subset B \times C$ adott relációk. F és G kompozícióján (összetételén) a

$$G \circ F \doteq \{(x, z) \mid \exists\, y \in B,\ (x, y) \in F,\ (y, z) \in G\}$$

relációt értjük. (Nyilván $G \circ F$ A és C közötti reláció.)

2. Tétel. *A 8. definíció jelölései mellett $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$. Ha $H \subset C \times D$ egy harmadik reláció (D tetszőleges halmaz), akkor*

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F\ .$$

9. Definíció. Legyen adott az A halmaz. Az $R \subset A \times A$ relációt rendezési relációnak, vagy rendezésnek nevezzük az A halmazon, ha $\forall\ x, y, z \in A$ esetén

a) xRx (vagy $(x, x) \in R$) (reflexív),
b) ha xRy és yRx, akkor $x = y$ (antiszimmetrikus),
c) ha xRy és yRz, akkor xRz (tranzitív),
d) xRy vagy yRx teljesül (lineáris vagy teljes).

Ekkor az (A, R) párt, vagy az A halmazt rendezett halmaznak nevezzük. Ha csak a), b) és c) teljesül, akkor R-t parciális rendezésnek nevezzük. R-t általában $\leq$-vel jelöljük és pl. az $x \leq y$-t úgy olvassuk, hogy x kisebb vagy egyenlő, mint y.
Ha $x \leq y$, de $x \neq y$, akkor ezt úgy jelöljük, hogy $x < y$ (x kisebb, mint y). A $<$ reláció nem rendezés. Szokásos még $x \leq y$, illetve $x < y$ helyett az $y \geq x$, $y > x$ jelölést is használni.

10. Definíció. Legyen A egy rendezett halmaz. Egy $B \subset A$ részhalmazt felülről korlátosnak nevezünk, ha $\exists\ a \in A$, hogy $\forall\ b \in B$ esetén $b \leq a$. Az a-t a B halmaz felső korlátjának nevezzük. Hasonlóan definiálható az alulról korlátos halmaz, illetve az alsó korlát is. Egy halmazt korlátosnak nevezünk, ha alulról és felülről is korlátos.
Egy $\alpha \in A$ elemet a B halmaz pontos felső korlátjának nevezünk, ha

– α felső korlátja B-nek
– B $\forall\ \beta$ felső korlátjára $\alpha \leq \beta$ teljesül.

Ha létezik pontos felső korlátja B-nek, úgy azt $\sup B$-vel jelöljük (supremum B).
Hasonlóan értelmezhető a pontos alsó korlát is.

11. Definíció. Egy olyan rendezett halmazt, amelyben minden nemüres felülről korlátos részhalmaznak van pontos felső korlátja, teljesnek nevezzük.

12. Definíció. Legyen adott az A halmaz. Az $R \subset A \times A$ relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük A-n, ha $\forall\ x, y, z \in A$ esetén

a) xRx (reflexív),

b) ha xRy, akkor yRx (szimmetrikus),

c) ha xRy és yRz, akkor xRz (tranzitív).

R-t általában $\sim$-mal jelöljük és $x \sim y$ esetén azt mondjuk: x ekvivalens y-nal.

13. Definíció. Legyen H adott nemüres halmaz. Az $\mathcal{R}$ halmazrendszert H osztályozásának nevezzük, ha

- $\mathcal{R}$ elemei páronként diszjunktak,
- $\forall\ A \in \mathcal{R}$ esetén $A \neq \emptyset$ és $A \subset H$
- $\bigcup \mathcal{R} = H$.

3. Tétel. *Ha $\mathcal{R}$ osztályozása H-nak, úgy megadható H-n egy ekvivalencia reláció. Fordítva: ha R ekvivalencia reláció H-n, úgy definiálható H-nak egy osztályozása.*

Bizonyítás. gyakorlaton (feladat).

3. Függvények

1. Definíció. Legyenek A és B adott halmazok. Az $f \subset A \times B$ relációt függvénynek nevezzük, ha $(x, y) \in f$ és $(x, z) \in f$ esetén $y = z$ teljesül (azaz $\forall\ x \in A$ esetén legfeljebb egy olyan $y \in B$ létezik, amelyre $(x, y) \in f$).

1. Megjegyzés. Minden függvény reláció, így az értelmezési tartomány, értékkészlet, kép, leszűkítés definíciója megegyezik a 4., 5. és 6. definíciókkal az előző fejezetben és a jelölések is változatlanok.

2. Megjegyzés. A függvény definíciója így is megfogalmazható: $f \subset A \times B$ reláció függvény, ha $\forall\ x \in D_f$ esetén pontosan egy $y \in B$ létezik, hogy $(x, y) \in f$.

3. Megjegyzés. Ha f jelöli a függvényt, akkor $(x, y) \in f$ esetén $y = f(x)$ jelöli az x elem képét, $f : A \to B$ azt, hogy f A-t B-be képezi, míg $\{(x, f(x))\}$ az f gráfját jelenti.

4. Megjegyzés. A függvény megadásánál szokásosak az alábbi jelölések is:

- $y = f(x),\ x \in A\ (x \in D_f)$,
- $x \mapsto f(x),\ x \in A\ (x \in D_f)$,
- $f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$.

2. Definíció. Az $f \subset A \times B$ függvény invertálható, ha az f^{-1} reláció is függvény. Ekkor f^{-1}-et az f inverz függvényének (inverzének) nevezzük (az invertálható függvényt kölcsönösen egyértelmű, vagy egy-egyértelmű leképezésnek is nevezzük).

1. Tétel. *Az $f : A \to B$ függvény akkor és csak akkor invertálható, ha minden $x, y \in A$, $x \neq y$ esetén $f(x) \neq f(y)$ (vagy $\forall\ x, y \in A$ esetén $f(x) = f(y) \implies x = y$).*

Bizonyítás. gyakorlaton (feladat).

Az összetett függvény értelmezéséhez lényeges a következő:

2. Tétel. *Legyenek $f \subset A \times B$ és $g \subset B \times C$ függvények. Ekkor $g \circ f$ is függvény, és $\forall\ x \in D_{g \circ f}$-re $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Bizonyítás. gyakorlaton (feladat).

3. Definíció. Legyen adott az f és g függvény. A $g \circ f$ függvényt összetett függvénynek, az f-et belső, a g-t külső függvénynek nevezzük.

5. Megjegyzés. A definíció adja, hogy $D_{g \circ f} \subset D_f$, $D_{g \circ f} = D_f \iff$ ha $R_f \subset D_g$, $g \circ f = \emptyset \iff$ ha $R_f \cap D_g = \emptyset$.

4. Definíció. Az $f : A \to B$ függvény

a) injektív, ha $x, y \in A$, $x \neq y$ esetén $f(x) \neq f(y)$,
b) szürjektív, ha $f(A) = B$,
c) bijektív, ha injektív és szürjektív.

5. Definíció. Az A halmaz identikus függvényén az

$$\mathrm{id}_A : A \to A \ , \quad \mathrm{id}_A(x) = x$$

függvényt értjük.

6. Definíció. Az M és N halmazok ekvivalensek, ha $\exists\ f : M \to N$ (M-et N-re képező) invertálható függvény (bijekció).

7. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz. Egy $f : A \times A \to A$ függvényt műveletnek nevezünk A-ban.

1. feladatsor

1) Az 1.2. Megjegyzés ($A = B \iff A \subset B$ és $B \subset A$) bizonyítása.
2) Az 1.1. Tétel (13 állítás) bizonyítása.
3) Az 1.2. Tétel (7 állítás) bizonyítása.
4) Bizonyítsa be, hogy bármely A és B halmazra

   $$A \cup A = A\ , \qquad A \cap A = A\ , \qquad A \cup (A \cap B) = A\ , \qquad A \cap (A \cup B) = A\ .$$

5) Mutassa meg, hogy ha $\{A_i \mid i \in I\}$ egy X halmaz részhalmazaiból álló halmazrendszer, úgy

   $$C_X(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} C_X A_i\ , \qquad C_X(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} C_X A_i$$

   (De Morgan-féle azonosságok).
6) A 2.1. Megjegyzés bizonyítása.
7) A 2.1. Tétel (8 állítás) bizonyítása.
8) A 2.2. Megjegyzés bizonyítása.
9) A 2.6. Megjegyzés bizonyítása.
10) A 2.2. Tétel bizonyítása.
11) A 2.3. Tétel bizonyítása.
12) Bizonyítsa be, hogy egy A teljes rendezett halmaz $\forall$ nemüres, alulról korlátos $B \subset A$ halmazának létezik pontos alsó korlátja.
13) Legyen A rendezett halmaz, $B, C \subset A$ felülről korlátos halmazok. Mutassa meg, hogy $B \cup C$ is felülről korlátos. Ha létezik B és C pontos felső korlátja, akkor $B \cup C$-nek is létezik pontos felső korlátja.
14) A 3.1. Tétel bizonyítása.
15) A 3.2. Tétel bizonyítása.
16) A 3.5. Megjegyzés bizonyítása.
17) Bizonyítsa be, hogy ha $f : A \to B$ egy függvény, akkor

   $$f \circ id_A = f\ , \qquad id_B \circ f = f\ .$$

   Ha f invertálható, úgy

   $$f^{-1} \circ f = id_A\ , \qquad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad (y \in R_f),$$

   és ha $R_f = B$, akkor $f \circ f^{-1} = id_B$, f^{-1} invertálható és inverze f.

18) Legyen $f : A \to B$ függvény. Bizonyítsa be, hogy

$$id_A \subset f^{-1} \circ f \ , \qquad f \circ f^{-1} \subset id_B$$

$$C \subset A \implies C \subset f^{-1}(f(C)) \ , \qquad C \subset B \implies f^{-1}(f(C)) \subset C \ .$$

(Mikor van egyenlőség az utóbbi két esetben $\forall C \subset A$ ill. $C \subset B$ halmazra?)

19) Legyen $f : A \to B$ és $g : B \to C$ függvény. Igazolja, hogy ha f és g injektív (szürjektív, bijektív), akkor $g \circ f$ is az.

20) Legyen $f : A \to B$ és $C, D \subset A$. Bizonyítsa be, hogy

$$f(C \cup D) = f(C) \cup f(D) \ , \qquad f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D) \ ,$$
$$f(C) - f(D) \subset f(C - D) \ .$$

Ha $C, D \subset B$, akkor bizonyítsa be, hogy

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \ ,$$
$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \ ,$$
$$f^{-1}(C - D) = f^{-1}(C) - f^{-1}(D) \ .$$

21) Adjon példát relációra, függvényre, rendezési és ekvivalenciarelációra.

II. Számok

1. A valós számok axiómarendszere

Az $\mathbb{R}$ halmazt a valós számok halmazának nevezzük, ha teljesíti az alábbi axiómákat:

Testaxiómák:

Értelmezve van $\mathbb{R}$-ben két művelet, az

$f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x + y \doteq f_1(x, y)$ összeadás és az

$f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \cdot y \doteq f_2(x, y)$ szorzás,

amelyek kielégítik a következő úgynevezett testaxiómákat:

1) $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x \ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ (kommutativitás),
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ (asszociativitás),
3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \ \ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ (disztributivitás),
4) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$, hogy $x + 0 = x \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (létezik zérus, vagy nullelem),
5) $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén $\exists\ -x \in \mathbb{R}$, hogy $x + (-x) = 0$ (létezik additív inverz),
6) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$, hogy $1 \neq 0$ és $1 \cdot x = x \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (létezik egységelem),
7) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ esetén $\exists\, x^{-1} \in \mathbb{R}$, hogy $x \cdot x^{-1} = 1$ (létezik multiplikatív inverz).

Rendezési axiómák:

Értelmezve van az $\mathbb{R}$ testben egy $\leq \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ rendezési reláció (az I.2.9. definíció szerinti négy tulajdonsággal), melyekre teljesül még, hogy

(i) ha $x, y \in \mathbb{R}$ és $x \leq y$, akkor $x + z \leq y + z \ \forall\, z \in \mathbb{R}$,

(ii) ha $x, y \in \mathbb{R}$, $0 \leq x$ és $0 \leq y$, akkor $0 \leq x \cdot y$,

(az összeadás és a szorzás monotonitása). Ekkor $\mathbb{R}$-et rendezett testnek nevezzük.

Teljességi axióma:

Az $\mathbb{R}$ rendezett test (mint rendezett halmaz) teljes, azaz $\mathbb{R}$ bármely nemüres, felülről korlátos részhalmazának létezik pontos felső korlátja.

Összefoglalva:

Az $\mathbb{R}$ halmazt a valós számok halmazának nevezzük, ha $\mathbb{R}$ teljes rendezett test.

Megjegyzés. A halmazelmélet axiomatikus felépítésében megmutatható, hogy egyrészt létezik teljes rendezett test, másrészt lényegében egyértelműen meghatározott abban az értelemben, hogy bármely két R_1 és R_2 teljes rendezett test izomorf, azaz $\exists\, \varphi : R_1 \to R_2$ bijektív leképezés, mely művelet- és rendezéstartó:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y), \quad \varphi(x\cdot y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y), \quad x \le y \iff \varphi(x) \le \varphi(y) \ .$$

2. Kiegészítések a valós számfogalomhoz

a) A testaxiómák fontosabb következményei

A továbbiakban a szorzást jelentő pontot nem feltétlenül írjuk ki (ez általában nem zavaró), továbbá az összeadás és a szorzás asszociativitása lehetővé teszi, hogy $(x+y)+z$ és $x+(y+z)$ helyett $x+y+z$-t, míg $(xy)z$ és $x(yz)$ helyett xyz-t írjunk.

1. Tétel. *$\mathbb{R}$-ben (de általában minden testben) a zérus és az egységelem egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Ha pl. $\mathbb{R}$-ben 0 és $0'$ is zéruselem, akkor az 1. és 4. testaxióma miatt

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

tehát $0 = 0'$.
Hasonlóan látható be 1 egyértelműsége.

2. Tétel. *Ha $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén $x+y = x+z$, akkor $y = z$, ha még $x \neq 0$, akkor $xy = xz \implies y = z$ (egyszerűsítési szabály).*

Bizonyítás. A testaxiómák és az $x+y = x+z$ feltétel adja, hogy

$$\begin{aligned} y = 0 + y = (-x+x)+y = -x+(x+y) = -x+(x+z) = \\ = (-x+x)+z = 0+z = z \ , \end{aligned}$$

illetve

$$y = 1 \cdot y = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot (x \cdot z) = (x^{-1} \cdot x) \cdot z = 1 \cdot z = z \ ,$$

tehát $y = z$ mindkét esetben.

3. Tétel. *Bármely $\mathbb{R}$-beli elemnek pontosan egy additív inverze, és bármely $\mathbb{R}$-beli 0-tól különböző elemnek pontosan egy multiplikatív inverze van.*

Bizonyítás. Ha x-nek y és z additív, vagy $x \neq 0$-ra multiplikatív inverze, úgy $x+y = 0 = x+z$, illetve $xy = 1 = xz$ és az előbbi tétel (az egyszerűsítési szabály) adja, hogy $y = z$ mindkét esetben, tehát a tétel állítása igaz.

4. Tétel. *Legyen $x, y \in \mathbb{R}$, akkor pontosan egy $z_1 \in \mathbb{R}$ létezik, hogy $y + z_1 = x$; ha még $y \neq 0$, akkor pontosan egy $z_2 \in \mathbb{R}$ létezik, hogy $yz_2 = x$ (kivonási, illetve osztási feladat).*

Bizonyítás. Az állítás az $y + z_1 = x = y + z_1'$, illetve $yz_2 = x = yz_2'$ egyenlőségekből a 2. tétel segítségével adódik, hiszen $z_1 = z_1'$ és $z_2 = z_2'$ igaz.

Definíció. A 4. Tétel szerint egyértelműen létező z_1 illetve z_2 valós számokat (melyekre tehát $y + z_1 = x$ illetve $yz_2 = x$ teljesül) az x és y valós számok különbségének illetve hányadosának nevezzük és $x - y$-nal illetve $\dfrac{x}{y}$-nal jelöljük.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy $x-y = x+(-y)$ illetve $\dfrac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$, hiszen

$$y + (x + (-y)) = y + ((-y) + x) = (y + (-y)) + x = 0 + x = x \ ,$$

illetve

$$y \cdot (x \cdot y^{-1}) = y \cdot (y^{-1} \cdot x) = (y \cdot y^{-1}) \cdot x = 1 \cdot x = x$$

teljesül. Speciálisan $\dfrac{1}{y} = y^{-1}$, $\dfrac{x}{0}$-t nem értelmezzük.

5. Tétel. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ *esetén* $-(-x) = x$, $\forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x \ , \qquad \left(\frac{1}{\frac{1}{x}} = x\right).$$

Bizonyítás. Az 5. testaxiómában x helyére $-x$-et illetve a 7. testaxiómában x helyére x^{-1}-et írva kapjuk a megfelelő állításokat.

6. Tétel. *Legyen* $x, y \in \mathbb{R}$. $x \cdot y = 0 \iff x = 0$ *vagy* $y = 0$.

Bizonyítás.

a) Legyen $x = 0$ vagy $y = 0$, akkor a testaxiómák és a 2. tétel (egyszerűsítési szabály) miatt pl. $x = 0$ esetén

$$0y + 0 = 0y = (0 + 0)y = 0y + 0y \implies 0y = 0 \;\forall\; y \in \mathbb{R}\ .$$

Világos, hogy $x0 = 0$ is teljesül. Így $x = 0$ vagy $y = 0 \implies xy = 0$.

b) Legyen $0 \neq x \in \mathbb{R}$ és $0 \neq y \in \mathbb{R}$ és az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $xy = 0$, ekkor a testaxiómákat és a)-t felhasználva

$$0 = (xy)(y^{-1}x^{-1}) = ((xy)y^{-1})x^{-1} = (x(yy^{-1}))x^{-1} =$$
$$= (x \cdot 1)x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1\ ,$$

azaz $0 = 1$ következne, ami a 6. axióma miatt nem lehetséges. Így $xy \neq 0$.

b) Természetes, egész, racionális és irracionális számok (mint $\mathbb{R}$ részhalmazai)

1. Definíció. Az $\mathbb{R}$ azon $\mathbb{N}$ részhalmazát, melyre

(i) $1 \in \mathbb{N}$,

(ii) ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $n + 1 \in \mathbb{N}$,

(iii) $n \in \mathbb{N}$, úgy $n - 1 \in \mathbb{N} \iff n \neq 1$,

(iv) ha $M \subset \mathbb{N}$ olyan, hogy $1 \in M$ és $n \in M \implies n + 1 \in M$, akkor $M = \mathbb{N}$

teljesül, a természetes számok halmazának nevezzük.

Megjegyzések.

1. (iv)-t indukciós axiómának is nevezzük. Ez egyrészt azt biztosítja, hogy az $1 \in \mathbb{R}$ számból kiindulva (1 folytatólagos hozzáadásával) minden $\mathbb{N}$-beli elemet megkapunk, másrészt az úgynevezett teljes indukciós bizonyítások létjogosultságát is adja.
2. Eléggé nyilvánvaló, hogy $\mathbb{N} = \{1, 1+1, 1+1+1, \dots\}$. Továbbá $\mathbb{N}$ elemeit $2 = 1 + 1,\ 3 = 1 + 1 + 1\ , \dots$ módon is jelöljük.
3. Belátható, hogy ha $n, m \in \mathbb{N}$, akkor $m + n, mn \in \mathbb{N}$ is teljesül.
4. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $-n \notin N$.
5. Ha $n, m \in \mathbb{N}\ ,\ n \neq m \implies n - m \in \mathbb{N}$ vagy $m - n \in \mathbb{N}$.

2. Definíció. Egy $x \in \mathbb{R}$ számot egész számnak nevezünk, ha léteznek $n, m \in \mathbb{N}$, hogy $x = m - n$. A $\mathbb{Z} \doteq \{m - n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ halmazt pedig az egész számok halmazának nevezzük.

Megjegyzések.

1. Könnyen belátható, hogy $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{n \mid -n \in \mathbb{N}\}$, ahol az $\{n \mid -n \in \mathbb{N}\} \doteq \mathbb{N}^-$ halmazt a negatív egész számok halmazának nevezzük.
2. $\forall\, x, y \in \mathbb{Z} \implies x + y, x - y, xy \in \mathbb{Z}$.

3. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$, úgy definiáljuk

$$x^1 \doteq x, \qquad x^n \doteq x^{n-1}x \quad (n \in \mathbb{N},\ n \neq 1)$$

szerint az x természetes kitevőjű hatványait, továbbá

$$x^0 \doteq 1\ , \qquad x^{-n} \doteq \frac{1}{x^n} \quad (x \neq 0,\ n \in \mathbb{N})$$

szerint az x 0, illetve negatív egész kitevőjű hatványait.

4. Definíció. Egy $x \in \mathbb{R}$ számot racionálisnak nevezünk, ha $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, hogy $x = \dfrac{p}{q}$. Ellenkező esetben x-et irracionálisnak nevezzük. A

$$\mathbb{Q} \doteq \left\{ x \mid x \in \mathbb{R} \text{ és } \exists\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ \text{hogy } x = \frac{p}{q} \right\}$$

halmazt a racionális számok, míg az $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ halmazt az irracionális számok halmazának nevezzük.

Megjegyzések.

1. Nyilván adott x esetén p és q nem egyértelműen meghatározott.
2. Ha $x, y \in \mathbb{Q} \implies x + y, x - y, xy \in \mathbb{Q}$ és ha $y \neq 0$, akkor $\dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ is teljesül.
3. $\mathbb{Q}$ test.
4. Belátható, hogy $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

c) A rendezési axiómák fontosabb következményei

1. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ha $0 < x$, akkor x-et pozitívnak, ha $0 \leq x$, akkor nemnegatívnak, ha $x < 0$, akkor negatívnak; ha $x \leq 0$, akkor nempozitívnak nevezzük.
Az $\{x \mid x > 0\}$, $\{x \mid x \geq 0\}$, $\{x \mid x < 0\}$ és $\{x \mid x \leq 0\}$ halmazokat pedig $\mathbb{R}$-beli pozitív, nemnegatív, negatív, nempozitív számoknak nevezzük.

1. Tétel. *Ha $x, y, z, u, v \in \mathbb{R}$, akkor*

a) $x < y \implies x + z < y + z$;

b) $0 < x \implies -x < 0$; $x < 0 \implies 0 < -x$;

c) $0 < x \wedge 0 < y \implies 0 < xy$;

d) $0 < x^2 \vee x^2 = 0$; $0 < 1$;

e) $0 < x \wedge y < 0 \implies xy < 0$; $x < 0 \wedge y < 0 \implies 0 < xy$;

f) $0 < xy \wedge 0 < x \implies 0 < y$; $0 < \dfrac{1}{x}$;

g) $x \leq y \wedge z \leq u \implies x + z \leq y + u$;
$x < y \wedge z \leq u \implies x + z < y + u$;
$(0 \leq x \wedge 0 \leq y \implies 0 \leq x + y;\ 0 < x \wedge 0 \leq y \implies 0 < x + y)$;

h) $x < y \wedge 0 < z \implies xz < yz$; $x < y \wedge z < 0 \implies yz < xz$;

i) $0 < y < x \wedge 0 < z < v \implies yz < xv$;

j) $0 < x < y \wedge n \in \mathbb{N} \implies 0 < x^n < y^n$;

k) $0 < x < y \implies 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$;

l) $n \in \mathbb{N} \implies n \geq 1$;

m) $\forall\ k \in \mathbb{Z}$ *esetén* $\nexists\ l \in \mathbb{Z}$, *hogy* $k < l < k + 1$.

Bizonyítás.

a) $x < y \implies x \leq y \implies x + z \leq y + z$. Ha $x + z = y + z$ volna, úgy $x = y$ adódna, ami ellentmondás, így $x + z < y + z$.

b) a)-t felhasználva pl. $0 < x \implies 0 + (-x) < x + (-x) \implies -x < 0$.

c) $0 < x \wedge 0 < y \implies 0 \leq x \wedge 0 \leq y \implies 0 \leq xy$. Ha $0 = xy$, akkor $0 = x \vee 0 = y$, ami ellentmondás, így $0 < xy$.

d) Ha $x = 0 \implies x^2 = 0$; ha $0 < x$, akkor $0 \cdot 0 < x \cdot x$, azaz $0 < x^2$; $x < 0 \implies 0 < -x \implies 0 \cdot 0 < (-x) \cdot (-x) = x^2$, azaz $0 < x^2$. Ha $x = 1$, akkor $0 < 1^2 = 1$.

e) $0 < x \wedge y < 0 \implies 0 < x \wedge 0 < -y \implies 0 < -(xy) \implies xy < 0$; A másik állítás hasonlóan igazolható.

f) Ha $y \leq 0$ lenne, úgy $xy = 0 \vee xy < 0$ jönne, ami ellentmondás. Ha $y = \dfrac{1}{x}$, úgy $0 < x \cdot \dfrac{1}{x} \wedge 0 < x$ adja, hogy $0 < \dfrac{1}{x}$.

g) Ha $z = u$, akkor az (i) axióma, illetve az a) állítás adja a bizonyítandó állítást. Ha $z < u$, akkor $x + z < y + z \wedge y + z < y + u$ adja az állítást. (A speciális esetek ebből nyilvánvalóak.)

h) Ha $x < y$, akkor $0 = -x + x < -x + y$, így $0 < z$ miatt $0 < (-x + y)z = = -xz + yz \implies xz < (xz + (-xz)) + yz \implies xz < yz$. Az állítás másik része is hasonló, hiszen $z < 0 \iff 0 < -z$.

i) $y < x \wedge 0 < z \implies yz < xz$ és $z < v \wedge 0 < x \implies xz < xv$-ből következik, hogy $yz < xv$.

j) $n = 2$-re (az előző állítás miatt) $x^2 = x \cdot x < y \cdot y = y^2$, ha $n \in \mathbb{N}$-re $x^n < y^n$, úgy $x < y$ miatt pedig $x^{n+1} = x \cdot x^n < y \cdot y^n = y^{n+1}$, ami adja az állítást.

k) $0 < x < y \implies 0 < \dfrac{1}{x}$, $0 < \dfrac{1}{y}$. Tegyük fel, hogy $0 < \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{y}$, akkor ($0 < x < y$ miatt) $1 = x \cdot \dfrac{1}{x} < y \cdot \dfrac{1}{y} = 1$, ami ellentmondás, így $0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$ igaz.

l) Ha $n = 1$, akkor $1 \geq 1$ igaz. Tegyük fel, hogy $n = k$-ra $k \geq 1$, akkor $1 > 0$ miatt $k + 1 \geq 1$ is igaz, ami az indukciós axióma miatt adja az állítást.

m) Ha létezne $k, l \in \mathbb{Z}$, $k < l < k + 1$, akkor $l - k \in \mathbb{Z} \wedge 0 < l - k \implies \implies l - k \in \mathbb{N} \implies l - k \geq 1 \implies l \geq 1 + k$, ami ellentmondás.

2. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}$ abszolútértékén a

$$|x| \doteq \begin{cases} x \ , & 0 \leq x, \\ -x \ , & x < 0 \end{cases}$$

nemnegatív számot értjük.

2. Tétel. *Ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor*

$$\begin{array}{ll} a) & |-x| = |x| \ ; \\ b) & |xy| = |x||y| \ ; \\ c) & \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0) \ ; \\ d) & |x+y| \leq |x| + |y| \ ; \\ e) & ||x| - |y|| \leq |x-y| \ . \end{array}$$

Bizonyítás. a), b) és c) nyilvánvaló.

d) Az abszolútérték definíciója miatt

$$x \leq |x| \ , \quad y \leq |y| \ , \quad -x \leq |x| \ , \quad -y \leq |y| \ ,$$

így

$$x + y \leq |x| + |y| \ , \quad -x - y \leq |x| + |y| \ ,$$

amiből $|x+y| \leq |x| + |y|$.

e) A d) állítás miatt

$|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$, $|y| = |y-x+x| \leq |y-x| + |x| = |x-y| + |x|$,

így $-(|y| - |x|) \leq |x-y| \leq |y| - |x|$, ami adja az állítást.

3. Definíció. Ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor a $d(x,y) \doteq |x-y|$ számot az x és y távolságának nevezzük, továbbá azt mondjuk, hogy a $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény távolság (metrika) $\mathbb{R}$-ben.

3. Tétel. *Ha $x, y, z \in \mathbb{R}$, akkor*

$$\begin{array}{ll} 1) & d(x,y) \geq 0 \ , \ d(x,y) = 0 \iff x = y \ ; \\ 2) & d(x,y) = d(y,x) \quad (\textit{szimmetrikus}); \\ 3) & d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) \quad (\textit{háromszög egyenlőtlenség}). \end{array}$$

Bizonyítás. Az abszolútérték tulajdonságai alapján igen egyszerű.

4. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Az $]a,b[\doteq \{x \mid a < x < b\}$; $[a,b] \doteq \{x \mid a \leq x \leq b\}$; $]a,b] \doteq \{x \mid a < x \leq b\}$; $[a,b[\doteq \{x \mid a \leq x < b\}$ halmazokat nyílt, zárt, félig nyílt (zárt) intervallumoknak nevezzük $\mathbb{R}$-ben.

5. Definíció. Az $a \in \mathbb{R}$ valós szám r (> 0) sugarú nyílt gömbkörnyezetén a $K(a, r) \doteq \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, a) < r\}$ halmazt értjük.

d) A teljességi axióma fontosabb következményei

1. Tétel. *Az $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ (a természetes számok halmaza) felülről nem korlátos.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbb{N}$ felülről korlátos az $\mathbb{R}$ rendezett halmazban. Ekkor a teljességi axióma miatt $\exists\ \alpha = \sup \mathbb{N}$, úgy $\alpha - 1$ $(< \alpha)$ nem felső korlátja $\mathbb{N}$-nek, azaz $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy $\alpha - 1 < n$, amiből $\alpha < n + 1$ következik. Ugyanakkor $n + 1 \in \mathbb{N}$ miatt ez azt jelenti, hogy α nem felső korlátja $\mathbb{N}$-nek, ami ellentmondás.

2. Tétel. *Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik $l \in \mathbb{Z}$, hogy $l \leq x < l + 1$. l egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Legyen $B \subset \mathbb{Z}$ az a halmaz, melyre $\forall\ b \in B$ esetén $b \leq x$ (az x-nél nem nagyobb egész számok halmaza). B felülről korlátos, így a teljességi axióma miatt $\exists\ \sup B = l$ és $l \leq x$. Belátható, hogy l egész szám. Ha $l + 1 \leq x$ teljesülne, akkor $l + 1 \in B$ következne, ami ellentmond annak, hogy $l = \sup B$ (mivel $l < l + 1$), így $x < l + 1$ is teljesül.
Tegyük most fel, hogy $\exists\ l_1 < l_2$ $(l_1, l_2 \in \mathbb{Z})$ hogy $l_1 \leq x < l_1 + 1 \wedge l_2 \leq x <$ $< l_2 + 1$, akkor $l_1 < l_2 \leq x < l_1 + 1$következik. Utóbbi szerint az l_1 és $l_1 + 1$ egész között lenne egy l_2 egész szám, ami a c) rész 1. tételének m) állítása szerint lehetetlen.

3. Tétel (Archimedesi tulajdonság). $\forall\ x \in \mathbb{R}_+$ *és* $y \in \mathbb{R}$ *esetén*
$\exists\ n \in \mathbb{N}$, *hogy* $y < nx$.

Bizonyítás. Az 1. tétel miatt $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy $\dfrac{y}{x} < n$ (hiszen $\dfrac{y}{x}$ sem lehet felső korlátja $\mathbb{N}$-nek), ami adja, hogy $y < nx$.

1. Definíció. Legyen $I = \{[a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \mid i \in \mathbb{N}\}$ zárt intervallumok olyan rendszere, melyre $a_i \leq a_{i+1} \leq b_{i+1} \leq b_i\ \ \forall\ i \in \mathbb{N}$ (azaz $[a_{i+1}, b_{i+1}] \subset [a_i, b_i]$), akkor ezt egymásba skatulyázott zárt intervallum rendszernek nevezzük.

4. Tétel (Cantor-féle metszettétel). *Legyen* $I = \{[a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \mid i \in \mathbb{N}\}$ *egymásba skatulyázott zárt intervallumok rendszere. Ekkor*

$$\bigcap I = \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset \ .$$

Bizonyítás.
Az egymásba skatulyázottság adja, hogy $\forall\, i, j \in \mathbb{N}$-re $a_i \leq b_j$, így $\forall\, j \in \mathbb{N}$-re b_j az $A \doteq \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ halmaznak felső korlátja, melyre $\alpha = \sup A \leq b_j$ teljesül. Így α alsó korlátja a $B = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ halmaznak ezért $\alpha \leq \inf B = = \beta$.

Mivel $[\alpha, \beta] \subset [a_i, b_i]$ $\forall\ i \in \mathbb{N}$-re, ezért $\bigcap I = \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \supset [\alpha, \beta] \neq \emptyset$, ami adja az állítást.

2. Definíció. A $H \subset \mathbb{R}$ halmazt $\mathbb{R}$-ben mindenütt sűrűnek nevezzük, ha $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ esetén $\exists\ h \in H$, melyre $x < h < y$ teljesül.

5. Tétel. *A racionális számok halmaza sűrű* $\mathbb{R}$*-ben.*

Bizonyítás. Legyen $x, y \in \mathbb{R}$ tetszőleges, hogy $x < y$. Megmutatjuk, hogy

$$(*) \qquad \exists\ h \in \mathbb{Q}\ ,\ \text{hogy } x < h < y\ .$$

$x < y \implies y - x > 0$, így az archimedesi tulajdonság miatt $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy $n(y - x) > 1$, azaz $nx + 1 < ny$ teljesül. A 2. tétel miatt ezen n esetén az $nx \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\ l \in \mathbb{Z}$, hogy $l \leq nx < l + 1$.Ezt és az előbbi egyenlőtlenséget felhasználva $nx < l + 1 \leq nx + 1 < ny$ teljesül, melyből $n > 0$ miatt jön, hogy $x < \dfrac{l+1}{n} < y$, ami $\dfrac{l+1}{n} = h \in \mathbb{Q}$-val adja $(*)$-ot. Mindebből kapjuk, hogy $\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$-ben.

Megjegyzés. Belátható, hogy $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ (az irracionális számok halmaza) is sűrű $\mathbb{R}$-ben.

6. Tétel. *Bármely x nemnegatív valós szám és $n \in \mathbb{N}$ esetén pontosan egy olyan y nemnegatív valós szám létezik, melyre $y^n = x$.*

Bizonyítás. Ha $x = 0$, akkor az állítás nyilvánvaló. Legyen $0 < x \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $A \doteq \{t \mid 0 \leq t \in \mathbb{R} \wedge t^n \leq x\}$. Megmutatjuk, hogy A nemüres, felülről korlátos és a (teljességi axióma miatt létező) $y = \sup A$ (≥ 0) valós számra $y^n = x$ teljesül.

Mivel $t = 0 \in A$ (hiszen $0^n = 0 \leq x$ teljesül), így A nemüres. $x+1$ (≥ 1) felső korlátja A-nak, mert $\forall\ t \in A$-ra $(x+1)^n \geq x+1 > x \geq t^n$, amiből $t < x+1$ következik.
Most belátjuk, hogy a létező $y = \sup A$-ra $y^n < x$ és $y^n > x$ is ellentmondásra vezet.
Tegyük fel, hogy $y^n < x$. Ha $0 < a < b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, akkor a

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1})$$

egyenlőségből könnyen jön a

$$(\square) \qquad b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1}$$

egyenlőtlenség. Válasszunk olyan $0 < h < 1$ valós számot, hogy $h < \dfrac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}$, akkor $a = y$, $b = y + h$ választással $(\square)$-ból

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < hn(y+1)^{n-1} < x - y^n$$

következik, ami adja, hogy $(y+h)^n < x$, így $y + h \in A$. Ez ellentmondás, mert $y + h > y$ és $y = \sup A$.
Ha $x < y^n$, akkor azonos gondolatmenettel

$$0 < k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}} \leq \frac{y^n}{ny^{n-1}} = \frac{y}{n} \leq y$$

mellett

$$y^n - (y-k)^n < kny^{n-1} = y^n - x\ .$$

Tehát $x \leq (y-k)^n$. Így $y - k \leq t$ esetén $x < t^n$ és így $t \notin A$, ami azt jelenti, hogy $y - k$ $(< y)$ is felső korlátja A-nak, ez pedig $y = \sup A$ miatt ellentmondás.
Végül, ha $0 < z \in \mathbb{R}$ és $z \neq y$, akkor $z^n \neq y^n$, így y egyértelmű.

3. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$ nemnegatív és $n \in \mathbb{N}$. Azt (az előbbi tétel alapján egyértelműen létező) $y \in \mathbb{R}$ nemnegatív számot, melyre $y^n = x$ teljesül az x szám n-edik gyökének nevezzük, és rá az $\sqrt[n]{x}$, vagy $x^{\frac{1}{n}}$ jelölést használjuk ($\sqrt[2]{x}$ helyett $\sqrt{x}$-et írunk).

4. Definíció. Ha n páratlan természetes szám és $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$, akkor $\sqrt[n]{x} \doteq x^{\frac{1}{n}} \doteq -\sqrt[n]{-x}$.

5. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{Q}$ és $r = \dfrac{m}{n}$ (ahol $m \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{N}$). Ekkor x r-edik hatványa: $x^r \doteq x^{\frac{m}{n}} \doteq \sqrt[n]{x^m}$.

Megjegyzések.

1. A racionális kitevőjű hatvány értéke független az r előállításától.
2. A hatványozás azonosságai racionális kitevőjű hatványokra is igazolhatók.

e) A bővített valós számok halmaza

1. Definíció. Ha $S \subset \mathbb{R}$ felülről nem korlátos, akkor legyen $\sup S = +\infty$.
Ha $S \subset \mathbb{R}$ alulról nem korlátos, akkor legyen $\inf S = -\infty$.
Az $\mathbb{R}_b = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ halmazt a bővített valós számok halmazának nevezzük.

Megjegyzések.

1. Meg akarjuk őrizni $\mathbb{R}_b$-ben $\mathbb{R}$ eredeti rendezését, ezért legyen $-\infty < x < +\infty \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén.
2. Ekkor $+\infty$ felső korlátja $\mathbb{R}_b$ bármely részhalmazának és minden nemüres részhalmaznak van $\mathbb{R}_b$-ben pontos felső korlátja. Ilyen megjegyzés fűzhető az alsó korlátokhoz is.
3. $\mathbb{R}_b$ nem test.
4. Megállapodunk az alábbiakban:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \text{ esetén} \qquad x + (+\infty) = +\infty\ ;\ x - (+\infty) = -\infty\ ;$$
$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0\ ;$$
$$\forall\, 0 < x \in \mathbb{R} \text{ esetén} \qquad x \cdot (+\infty) = +\infty\ ;\ x \cdot (-\infty) = -\infty\ ;$$

továbbá

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty\ ;\ (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty\ ;\ (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty\ .$$

Nem értelmezzük ugyanakkor a következőket:

$$0 \cdot (+\infty)\ ;\ 0 \cdot (-\infty)\ ;\ (+\infty) - (+\infty)\ ;\ (-\infty) - (-\infty)\ .$$

f) Nevezetes egyenlőtlenségek

1. Tétel (Bernoulli-egyenlőtlenség). *Ha* $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ *és* $x \geq -1$, *akkor*

$$(1+x)^n \geq 1+nx \ .$$

Egyenlőség $\Longleftrightarrow$ *teljesül, ha* $n=1$ *vagy* $x=0$.

Bizonyítás. Teljes indukcióval.
$n=1$-re az állítás nyilván igaz. Ha n-re igaz, akkor $1+x \geq 0$ miatt

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x \ ,$$

így az állítás minden természetes számra igaz.

1. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \doteq a_1 \ , \text{ha} \quad n=1 \ , \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i \doteq \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + a_n \ , \text{ha} \quad n>1 \ ;$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \doteq a_1 \ , \text{ha} \quad n=1 \ , \qquad \text{és} \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i \doteq \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cdot a_n \ , \text{ha} \quad n>1 \ .$$

2. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$; $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, és

$$A_n \doteq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \doteq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \ ,$$

továbbá $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$G_n \doteq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \doteq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \ .$$

Az A_n és G_n számokat az $x_1, \ldots, x_n$ számok számtani (aritmetikai), illetve mértani (geometriai) közepének nevezzük.

2. Tétel (Cauchy). *Ha* $n \in \mathbb{N}$ *és* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ *akkor* $G_n \leq A_n$, *egyenlőség* $\Longleftrightarrow$ *teljesül, ha* $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Bizonyítás. Teljes indukcióval.
$n=1$ esetén az állítás nyilván igaz.

Tegyük fel, hogy $G_{n-1} \leq A_{n-1}$ és $= \Longleftrightarrow$, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1}$. Mivel

$$A_n = \frac{1}{n}[(n-1)A_{n-1} + a_n] = A_{n-1}\left[\frac{n-1}{n} + \frac{a_n}{n \cdot A_{n-1}}\right] =$$
$$= A_{n-1}\left[1 + \left(\frac{a_n}{n \cdot A_{n-1}} - \frac{1}{n}\right)\right]$$

és $\dfrac{a_n}{n \cdot A_{n-1}} - \dfrac{1}{n} > -1$ így a Bernoulli-egyenlőtlenség felhasználásával

$$(A_n)^n = (A_{n-1})^n\left[1 + \left(\frac{a_n}{n \cdot A_{n-1}} - \frac{1}{n}\right)\right]^n \geq (A_{n-1})^n\left(1 + \frac{a_n}{A_{n-1}} - 1\right) =$$
$$= (A_{n-1})^{n-1} \cdot a_n \geq (G_{n-1})^{n-1} \cdot a_n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = (G_n)^n\ ,$$

ami adja, hogy $G_n \leq A_n$ és egyenlőség $\Longleftrightarrow$ van, ha $\dfrac{a_n}{A_{n-1}} - 1 = 0$.
$a_1 = \cdots = a_{n-1}$-et felhasználva ez azt jelenti, hogy $a_n = a_1$ $(= a_2 = \cdots = = a_{n-1})$. Az indukciós axióma miatt az állítás igaz.

3. Tétel (Chauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség). *Legyenek $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, ekkor*

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)\ .$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \sum\limits_{i=1}^n (x_i t + y_i)^2$, akkor $f(t) \geq 0\ \forall\ t \in \mathbb{R}$ és

$$f(t) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)t^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)t + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

Ha $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 = 0$ (azaz $\forall\ x_i = 0$), akkor az állítás nyilván igaz.
Legyen $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 > 0$. Ha $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 = a$, $2\sum\limits_{i=1}^n x_i y_i = b$ és $\sum\limits_{i=1}^n y_i^2 = c$, akkor

$$f(t) = at^2 + bt + c = a\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

$f(t) \geq 0\ \forall\ t \in \mathbb{R}$ esetén $\Longleftrightarrow$ ha $b^2 - 4ac \leq 0$, ami az előbbi jelölések felhasználásával adja az állítást.

4. Tétel (Minkowski-egyenlőtlenség).
Legyenek $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, *ekkor*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \quad .$$

Bizonyítás. Feladat.

3. Komplex számok

1. Definíció. Tekintsük a $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazt, melyben az összeadás és a szorzás műveletét $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{C}$ esetén

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) \doteq (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \ ,$$
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) \doteq (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

szerint definiáljuk. A $\mathbb{C}$ elemeit komplex számoknak, $\mathbb{C}$-t a komplex számok halmazának nevezzük.

1. Tétel. $\mathbb{C}$ *test a fenti műveletekkel.*

Bizonyítás. A műveletek kommutatív és asszociatív tulajdonsága, és a szorzás összeadásra vonatkozó disztributivitása egyszerűen jön a műveletek definíciójából és a valós számok ilyen tulajdonságaiból. Könnyen belátható az is, hogy $(0, 0)$ zérus (nullelem), míg $(1, 0)$ egységelem. Az $(a, b) \in \mathbb{C}$ additív inverze $(-a, -b)$, $(a, b) \neq (0, 0)$ esetén a multiplikatív inverz pedig

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \ .$$

Megjegyzés. A $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\varphi(a) \doteq (a, 0)$ injektív megfeleltetéssel az $\mathbb{R}$ elemeit beágyazhatjuk $\mathbb{C}$-be, ekkor $a = (a, 0)$ $(a \in \mathbb{R})$ és $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2. Definíció. Az $i \doteq (0, 1)$ komplex számot képzetes egységnek nevezzük.

2. Tétel. $i^2 = -1$

Bizonyítás. $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1$.

3. Tétel. $\forall\ (a,b) \in \mathbb{C}$*-re* $(a,b) = a + b \cdot i$.

Bizonyítás. $(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + b \cdot i$.

3. Definíció. Ha $z = (a,b) = a + bi$, akkor

$$\mathrm{Re}(z) \doteq a\ , \quad \mathrm{Im}(z) \doteq b\ , \quad \overline{z} \doteq a - bi\ , \quad |z| \doteq \sqrt{a^2 + b^2}$$

a z valós, illetve képzetes részét, konjugáltját, illetve abszolút értékét jelenti. Továbbá, ha $z_1 = (a_1, b_1), z_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{C}$, akkor

$$d(z_1, z_2) \doteq |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

a z_1 és z_2 távolságát definiálja.
A z_0 komplex szám $r > 0$ sugarú nyílt gömb környezetének a

$$K(z_0, r) \doteq \{z \mid z \in \mathbb{C},\ d(z_0, z) < r\}$$

halmazt nevezzük.

4. Tétel. *Ha* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, *akkor*

a) $\quad \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}\ , \quad \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2}\ ;$

b) $\quad \overline{\overline{z}} = z\ , \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\ , \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}\ ;$

c) $\quad |\overline{z}| = |z|, \quad z\overline{z} = |z|^2, \quad |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$

Bizonyítás. A többség bizonyítása egyszerű számolás.
$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$, ha $z_1 = (a_1, b_1)\ ,\ z_2 = (a_2, b_2)$ azt jelenti, hogy

$$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \le \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}\ ,$$

ami igaz a Minkowski-egyenlőtlenség miatt $n = 2,\ x_1 = a_1,\ x_2 = b_1,$ $y_1 = a_2,\ y_2 = b_2$ választással.

4. Definíció. Az $I = I^1 \times I^2$ ($I^1, I^2 \subset \mathbb{R}$ intervallumok) halmazt $\mathbb{C}$-beli intervallumnak nevezzük. $I_n = I_n^1 \times I_n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) intervallumskatulyázás $\mathbb{C}$-ben, ha I_n^1 és I_n^2 azok $\mathbb{R}$-ben.

5. Tétel (Cantor). *Ha* $\{I_n\}$ *zárt intervallumok (ekkor* I_n^1 *és* I_n^2 *is zártak) egymásba skatulyázott rendszere, akkor*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \ne \emptyset\ .$$

5. Definíció. $\mathbb{C}_b \doteq \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$-t a bővített komplex számok halmazának nevezzük.

4. (Szám)halmazok számossága

1. Definíció. Az A és B halmazok egyenlő számosságúak, ha ekvivalensek, azaz $\exists\ f : A \to B$ invertálható függvény, hogy $B = f(A)$ (tehát $\exists\ f : A \to B$ bijekció). Az A halmaz számossága nagyobb, mint a B halmaz számossága, ha A és B nem egyenlő számosságú és $\exists\ C \subset A$, hogy C és B számossága megegyezik.

2. Definíció. Az A halmaz véges (számosságú), ha $A = \emptyset$ vagy $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy A ekvivalens az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazzal. Az A halmaz végtelen (számosságú), ha nem véges. Az A halmaz megszámlálhatóan végtelen (számosságú), ha ekvivalens a természetes számok halmazával. Az A halmaz megszámlálható, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

Megjegyzések.

1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ megszámlálhatóan végtelen, mert az
$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f((m, n)) = 2^{m-1}(2n - 1)$$
függvény bijekció.
2. Ha $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ olyan halmazrendszer, hogy Γ nemüres, megszámlálható, bármely A_γ megszámlálható, akkor az $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ is megszámlálható.

1. Tétel. *A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen.*

Bizonyítás. Ha $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re $A_n \doteq \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}\}$, úgy $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Q}$. Másrészt $\mathbb{Z}$ és így A_n is megszámlálhatóan végtelen és ekkor (az előbbi 2. megjegyzés miatt) $\mathbb{Q}$ is az.

2. Tétel. *A valós számok számossága nagyobb, mint* $\mathbb{N}$ *számossága.*

Bizonyítás. Feladat.

3. Definíció. A valós számok halmazát és a vele ekvivalens halmazokat kontinuum számosságú halmazoknak nevezzük.

Megjegyzések.

1. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nem megszámlálható (kontinuum számosságú).
2. $\mathbb{C}$ kontinuum számosságú.

2. feladatsor

1) Bizonyítsa be, hogy $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén

$$-(x+y) = (-x)+(-y)\ , \quad (-x)y = x(-y) = -(xy)\ , \quad (-x)(-y) = xy\ ;$$

Ha még teljesül hogy $x, y \neq 0$, úgy

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}\ , \quad -\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y}\ .$$

2) Bizonyítsa be, hogy $\forall\ x, y, u, v \in \mathbb{R}\ ;\ y, v \neq 0$ esetén

$$\frac{x}{y} + \frac{u}{v} = \frac{xv+uy}{yv}\ , \quad \frac{x}{y} - \frac{u}{v} = \frac{xv-uy}{yv}\ , \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v} = \frac{xu}{yv}\ .$$

3) Bizonyítsa be, hogy $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{v} \iff xv = yz$ (ha $x, y, z, v \in \mathbb{R}\ ;\ y, v \neq 0$).

4) Bizonyítsa be, hogy $n, m \in \mathbb{N} \implies n+m, nm \in \mathbb{N}$.

5) Bizonyítsa be, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $-n \notin \mathbb{N}$, továbbá $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m \implies n-m \in \mathbb{N}$ vagy $m-n \in \mathbb{N}$.

6) Bizonyítsa be, hogy:
   a) $x, y \in \mathbb{Z} \implies x+y, x-y, xy \in \mathbb{Z}$;
   b) $x, y \in \mathbb{Q} \implies x+y, x-y, xy \in \mathbb{Q}$ és $\dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, ha $y \neq 0$;
   c) $\mathbb{Q}$ test.

7) Bizonyítsa be, hogy $x, y \in \mathbb{R}$ és $n, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$(xy)^n = x^n y^n\ ; \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}\ ,\ \text{ha } y \neq 0\ ;$$

$$x^n x^m = x^{m+n}\ , \qquad (x^n)^m = x^{nm}\ .$$

(Hasonlóan $n, m \in \mathbb{Z}$-re is).

8) Bizonyítsa be, hogy ha

$$\binom{n}{k} \doteq \frac{n!}{k!(n-k)!}\ , \quad \text{úgy} \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

$(n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ k \leq n)$.

9) Igazolja, hogy $x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

teljesül (binomiális tétel).

10) Bizonyítsa be, hogy ha $r \in \mathbb{Q} \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor $r+x, r-x, rx, \dfrac{r}{x}$ (ha $r \neq 0$) irracionális.

11) Bizonyítsa be a II.2.c) 1. tételének a)-m) állításait.

12) Bizonyítsa be, hogy $x, y \in \mathbb{R}$ esetén:

a) $|xy| = |x||y|$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $(y \neq 0)$;

b) $|x| < y$ $(y > 0)$ $\iff$ $-y < x < y$.

13) Bizonyítsa be, hogy $d(x,y) \doteq |x-y|$ $(x, y \in \mathbb{R})$ teljesíti a

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$$

ún. háromszög egyenlőtlenséget.

14) Bizonyítsa be, hogy a nyílt gömbkörnyezet teljesíti az alábbi tulajdonságokat ($x \in \mathbb{R}$ tetszőleges):

a) $x \in K(x,r)$;

b) $r_1 \leq r_2 \implies K(x,r_1) \subseteq K(x,r_2)$;

c) ha $x_0 \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+ \wedge x \in K(x_0,r)$, akkor $\exists\ \varepsilon > 0$, hogy $K(x,\varepsilon) \subset K(x_0,r)$;

d) $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, $\exists\ r \in \mathbb{R}_+$, $K(x,r) \cap K(y,r) = \emptyset$.

15) Bizonyítsa be, hogy:

a) $\forall\ A \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmazra $\sup A$ egyértelmű;

b) $\forall\ A\ (\neq \emptyset) \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaznak α $\iff$ pontos felső korlátja, ha felső korlát és $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists x \in A$, hogy $x > \alpha - \varepsilon$;

c) $\forall\ A, B \subset \mathbb{R}$, $A \subset B$ halmazra $\sup A \leq \sup B$;

d) Ha $A \subset R$-re $-A = \{-x \mid x \in A\}$, akkor $\inf A = -\sup(-A)$, $\inf(-A) = -\sup A$;

e) Ha $A, B \subset \mathbb{R}$ és $A + B \doteq \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}$, $A \cdot B \doteq \{xy \mid x \in A,\ y \in B\}$, akkor

$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ (inf-re is!),

$\sup(A \cdot B) = (\sup A)(\sup B)$ (inf-re is!)

(ha $\exists$ a sup, ill. inf).

16) Bizonyítsa be a Minkowski-egyenlőtlenséget.

17) Határozza meg az alábbi halmazok supremumát, infimumát (maximumát, minimumát):

$$H_1 = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad H_2 =]0,1[\cup \{2\},$$

$$H_3 = \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad H_4 = \left\{ \frac{xy}{x+y} \mid 0 < x < y < 1 \right\}.$$

18) Mutassa meg, hogy

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, \infty[= \emptyset \ , \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset \ .$$

19) Igazolja, hogy $x, y \in \mathbb{R}_+$, $n, m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$-re

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}, \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}, \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}, \qquad \sqrt[n]{x^k} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^k$$

$$x, y \in \mathbb{R}_+, \ x \le y \iff \sqrt[n]{x} \le \sqrt[n]{y}.$$

20) Igazolja, hogy $x, y \in \mathbb{R}_+$; $r, s \in \mathbb{Q}$ esetén

$$(xy)^r = x^r y^r \ , \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r} \ , \qquad x^{r+s} = x^r x^s \ , \qquad (x^r)^s = x^{rs} \ .$$

21) Mutassa meg, hogy $\sqrt{2}$ irracionális.

22) Bizonyítsa be, hogy $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ test.

23) Bizonyítsa be a komplex abszolút érték tulajdonságait, és hogy

$$|\operatorname{Re}(z)| \le |z| \ , \qquad |\operatorname{Im}(z)| \le |z| \ , \qquad |z| \le |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \ .$$

24) Bizonyítsa be, hogy

$$A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad C = \underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{n\text{-szer}}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}$$

megszámlálhatók, a $]0,1[$ halmaz nem megszámlálható.

25) Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{R}$-ben bármely két nem elfajuló intervallum egyenlő számosságú.

III. Vektorterek, euklideszi terek, metrikus terek

1. Vektortér, euklideszi tér és metrikus tér fogalma

1. Definíció. Legyen adott egy V halmaz (elemeit vektoroknak nevezzük). Tegyük fel, hogy értelmezve van két művelet:

– a vektorok összeadása, melyet $x, y \in V$-re $x + y$,
– a skalárral való szorzás, melyet $x \in V \wedge \lambda \in \mathbb{R}$ $(\vee\mathbb{C})$ esetén λx jelöl.

V-t e két művelettel vektortérnek, (vagy lineáris térnek) nevezzük, ha $\forall\ x, y, z \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $(\vee\mathbb{C})$ esetén

1) $x + y = y + x$ (kommutativitás),
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (asszociativitás),
3) $\exists\ 0 \in V,\ x + 0 = x$ (nullelem létezése),
4) $\forall\ x \in V,\ \exists\ -x \in V,\ x + (-x) = 0$ (inverzelem létezése),
5) $1 \cdot x = x$,
6) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,
7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (disztributivitás).

2. Definíció. Ha V egy vektortér, akkor a $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ $(\vee\mathbb{C})$ függvényt skaláris, vagy belsőszorzatnak nevezzük, ha $\forall\ x, y, z \in V\ \wedge\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $(\vee\mathbb{C})$ esetén

1) $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$ $(\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ valós esetben),
2) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,
3) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$,
4) $\langle x, x\rangle \geq 0,\ \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

teljesül.

3. Definíció. Egy V vektorteret, rajta egy skaláris (vagy belső) szorzattal, belsőszorzattérnek, vagy (néha csak valós értékű skaláris szorzat esetén) euklideszi térnek nevezünk.

4. Definíció. Ha V belsőszorzattér, akkor az $x \in V$ vektor hosszán, vagy euklideszi normáján az $\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x\rangle}$ számot értjük.

1. Tétel. *Az euklideszi normára teljesül:*

1) $\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \iff x = 0, \qquad \forall\, x \in V$,

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\| \qquad \forall\, x \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}\ (\vee \mathbb{C})$,

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall\, x, y \in V$.

Bizonyítás. Gyakorlaton.

Megjegyzés. Minden az 1)-3) tulajdonságot teljesítő $\|\ .\ \| : V \to \mathbb{R}$ függvényt normának nevezünk V-n.

5. Definíció. Ha V belsőszorzattér (vagy euklideszi tér) akkor az $x, y \in V$ vektorok euklideszi távolságán a $d(x, y) \doteq \|x - y\|$ számot értjük és azt mondjuk, hogy a $d : V \times V \to \mathbb{R}$ függvény távolság, vagy metrika V-ben.

2. Tétel. *A V-beli euklideszi távolságra teljesül:*

1) $d(x, y) \geq 0\ ,\quad d(x, y) = 0 \iff x = y\ , \qquad \forall\, x, y \in V$,

2) $d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall\, x, y \in V$,

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \qquad \forall\, x, y, z \in V$.

Bizonyítás. A norma tulajdonságai alapján egyszerű, gyakorlaton.

6. Definíció. Legyen X egy nemüres halmaz. Ha értelmezve van egy $d : X \times X \to \mathbb{R}$ függvény az

1) $d(x, y) \geq 0\ ,\quad d(x, y) = 0 \iff x = y\ , \qquad \forall\, x, y \in X$,

2) $d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall\, x, y \in X$,

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \qquad \forall\, x, y, z \in X$

tulajdonságokkal, akkor azt mondjuk, hogy d metrika X-en és X-et metrikus térnek nevezzük. Jelölés: (X, d).

Megjegyzés. $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ a $d(x, y) \doteq |x - y|$, míg a V euklideszi tér a $d(x, y) \doteq \|x - y\|$ metrikával metrikus tér.

7. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér. Az $a \in X$ r (> 0) sugarú nyílt gömbkörnyezetén a $K(a, r) \doteq \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$ halmazt értjük.

8. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér. $H \subset X$ korlátos, ha $H = \emptyset$ vagy $H \neq \emptyset$ esetén $\exists\ r \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\ x, y \in H$-ra $d(x, y) \leq r$.
Ekkor a $\operatorname{diam} H \doteq \sup\{d(x, y) \mid x, y \in H\}$ számot H átmérőjének nevezzük.

Megjegyzés. Egyszerűen belátható, hogy $H \subset X$ $(H \neq \emptyset)$ pontosan akkor korlátos, ha $\exists\ a \in X \wedge \exists\ r \in \mathbb{R}$, hogy $d(x,a) < r\ \forall\ x \in H$ esetén.

2. Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér

1. Definíció. Legyen $\mathbb{R}^1 \doteq \mathbb{R}$, és ha $n \in \mathbb{N}$-re már $\mathbb{R}^n$ értelmezett, akkor $\mathbb{R}^{n+1} \doteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. $\mathbb{R}^n$ elemeit $(x_1, \ldots, x_n)$-nel jelöljük és rendezett valós szám n-eseknek nevezzük, ahol

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \iff x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n\ .$$

Ha $x \doteq (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor az x_i-ket az x koordinátáinak, $\mathbb{R}^n$ elemeit pontoknak, vagy vektoroknak is nevezzük.

Szokásos az $\mathbb{R}^n \doteq \overset{1}{\mathbb{R}} \times \cdots \times \overset{n}{\mathbb{R}}$ jelölés is és azt is mondjuk, az $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$ önmagával vett n-szeres Descartes-szorzata.

2. Definíció. Legyen adott az $\mathbb{R}^n$ halmaz és értelmezzük benne az összeadás és skalárral való szorzás műveletét

$$x + y \doteq (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \text{illetve} \quad \lambda x \doteq (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

szerint, ha $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n\ \wedge\ \lambda \in \mathbb{R}\ (\vee \mathbb{C})$.

1. Tétel. *$\mathbb{R}^n$ a most értelmezett két művelettel vektortér (vagy lineáris tér).*

Bizonyítás. A vektortér 1)-7) tulajdonságai egyszerűen ellenőrizhetők. A nullelem: $0 \doteq (\overset{1}{0}, \ldots, \overset{n}{0})$.

2. Tétel. *Ha $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, úgy*

$$\langle x, y \rangle \doteq x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

skaláris (vagy belső) szorzat $\mathbb{R}^n$-ben.

Bizonyítás. A belsőszorzat 1)-4) tulajdonságának ellenőrzésével.

3. Tétel. *Ha $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor az*

$$\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x \rangle} \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad \textit{illetve} \quad d(x,y) \doteq \|x - y\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

szerint definiált norma, illetve távolság (metrika) teljesíti a norma, illetve metrika tulajdonságait.

Bizonyítás. Egyszerű (feladat).

Megjegyzések.

1. A 2., 3. tételben definiált skaláris (belső) szorzattal, normával, illetve távolsággal (metrikával) $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér, euklideszi normával és metrikával. $(\mathbb{R}^n, d)$-t n-dimenziós euklideszi térnek is nevezik.
2. Ha $n = 1$, úgy a $d(x, y) \doteq |x - y|$ $(x, y \in \mathbb{R})$ távolsággal $(\mathbb{R}^1, d) = (\mathbb{R}, d)$ metrikus tér, hiszen d teljesíti a metrika 3 tulajdonságát.
3. Az $a \in \mathbb{R}^n$ pont (vektor) r sugarú nyílt gömbkörnyezete a
$$K(a, r) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < r\}$$
halmaz, ahol d az $\mathbb{R}^n$-beli euklideszi távolság.
4. A korlátosság és az átmérő fogalma $(\mathbb{R}^n, d)$-ben ugyanaz mint (X, d)-ben. Igaz továbbá, hogy $H \subset (\mathbb{R}^n, d) \iff$ korlátos, ha $\exists\ r \in \mathbb{R},\ H \subset K(0, r)$ (azaz $\|x\| < r\ \forall\ x \in H$).
5. $\|x\|_1 \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ és $\|x\|_\infty \doteq \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$ is norma $\mathbb{R}^n$-ben.

3. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ és metrikus tér topológiája

Az $(\mathbb{R}, d)$ és $(\mathbb{R}^n, d)$ konkrét és az (X, d) absztrakt metrikus terekben egy $a \in \mathbb{R}$ $(\vee\ \mathbb{R}^n \vee X)$ szám (vektor, pont vagy elem) $r > 0$ sugarú nyílt gömbkörnyezetén a $K(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \vee \mathbb{R}^n \vee X \mid d(x, a) < r\}$ halmazt értettük, ahol a

$$d(x, a) \doteq |x - a| \quad \mathbb{R}\text{-beli, a} \quad d(x, a) \doteq \|x - a\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} \quad \mathbb{R}^n\text{-beli,}$$

vagy pedig a 2.6. definícióban szereplő 1.-3. tulajdonságú $d(x, a)$ metrika szerepel. Ha szükséges a megkülönböztetés, akkor szokás a $d_\mathbb{R}$, $d_{\mathbb{R}^n}$, illetve d_X jelölés is az $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, illetve X-beli távolságra (metrikára).

1. Definíció. Legyen adott $E \subset (\mathbb{R}, d)$ $(\vee\ (\mathbb{R}^n, d) \vee (X, d))$ halmaz. Azt mondjuk, hogy

– $x \in E$ belső pontja E-nek, ha $\exists\ K(x,r)$, hogy $K(x,r) \subset E$;
– $x \in \mathbb{R}$ $(\vee\ \mathbb{R}^n \vee X)$ külső pontja E-nek, ha belső pontja CE-nek (azaz $\exists\ K(x,r),\ K(x,r) \cap E = \emptyset$);
– $x \in \mathbb{R}$ $(\vee\ \mathbb{R}^n \vee X)$ határpontja E-nek, ha nem belső és nem külső pontja (azaz $\forall\ K(x,r)$-re $K(x,r) \cap E \neq \emptyset\ \wedge\ K(x,r) \cap CE \neq \emptyset$).

A belső pontok halmazát E belsejének, a határpontok halmazát E határának nevezzük.

2. Definíció. Az $E \subset (\mathbb{R}, d)$ $(\vee(\mathbb{R}^n, d) \vee (X, d))$ halmazt nyíltnak nevezzük, ha minden pontja belső pont; zártnak nevezzük, ha CE nyílt.

1. Tétel. *Az $(\mathbb{R}, d)$ $(\vee\,(\mathbb{R}^n, d) \vee (X, d))$ metrikus terekben igazak a következők:*

1) $\mathbb{R}$ $(\vee\,\mathbb{R}^n \vee X) \wedge \emptyset$ *nyílt halmazok,*
2) nyílt halmazok egyesítése nyílt,
3) véges sok nyílt halmaz metszete nyílt,

illetve

4) $\mathbb{R}$ $(\vee\,\mathbb{R}^n \vee X) \wedge \emptyset$ *zárt halmazok,*
5) zárt halmazok metszete zárt,
6) véges sok zárt halmaz egyesítése zárt.

Bizonyítás.
– 1) és 4) a definíció alapján nyilvánvaló;
– 2) igaz, mert E_γ $(\gamma \in \Gamma)$ nyílt $\Longrightarrow\ \forall\ x \in \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ -ra $\exists\ \gamma_0$, $x \in E_{\gamma_0} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow\ \exists\ K(x,r) \subset E_{\gamma_0} \Longrightarrow K(x,r) \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma \Longrightarrow \bigcup_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma \text{ nyílt;}$$

– 3) is igaz, mert ha E_i $(i = 1, \ldots, n)$ nyílt, akkor $\forall\ x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow x \in E_i\ (i = 1, \ldots, n) \Longrightarrow \exists\ K(x, r_i) \subset E_i\ (i = 1, \ldots, n) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 0 < r < r_i\ (i = 1, \ldots, n)\text{-re } K(x,r) \subset E_i\ (i = 1, \ldots, n) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow K(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} E_i \Longrightarrow \forall\ x \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i \text{ belső pont} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} E_i \text{ nyílt;}$$

– 5) és 6) a

$$C\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} CE_\gamma \quad \wedge \quad C\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} CE_i$$

azonosságból jön a zártság definíciója illetve 2) és 3) teljesülése miatt.

Megjegyzés. A tétel 1)-3) állításainak axiómává tétele elvezet a topologikus tér fogalmához.

3. Definíció. Legyen adott $E \subset (\mathbb{R}, d)$ $(\vee(\mathbb{R}^n, d) \vee (X, d))$. Az $x_0 \in \mathbb{R}$ $(\vee\mathbb{R}^n \vee X)$ pontot az E halmaz torlódási pontjának nevezzük, ha $\forall\ K(x_0, r)$ $\mathbb{R}$ $(\vee\mathbb{R}^n \vee X)$-beli környezet tartalmaz x_0-tól különböző E-beli pontot, azaz $(K(x_0, r) \setminus \{x_0\}) \cap E \neq \emptyset$.
$x_0 \in E$ izolált pontja E-nek, ha nem torlódási pontja, azaz $\exists\ K(x_0, r)$, hogy $(K(x_0, r) \setminus \{x_0\}) \cap E = \emptyset$.
E torlódási pontjainak halmazát szokás E'-vel jelölni.

2. Tétel. *Az* $E \subset (\mathbb{R}, d)$ $(\vee\,(\mathbb{R}^n, d) \vee (X, d))$ $\iff$ *zárt, ha* $E' \subset E$ *(azaz tartalmazza minden torlódási pontját).*

Bizonyítás.

a) Ha E zárt $\Longrightarrow$ CE nyílt $\Longrightarrow$ $\forall\ x \in CE\ \exists\ K(x, r) \subset CE \Longrightarrow$
$\Longrightarrow\ \forall\ x \in CE$-re $x \notin E' \Longrightarrow E' \subset E$.

b) Ha $E' \subset E \Longrightarrow x \notin E \Longrightarrow x \notin E' \Longrightarrow \exists\ K(x, r),\ (K(x, r) \setminus \{x\}) \cap$
$\cap E = \emptyset$, illetve $x \notin E$ miatt $K(x, r) \cap E = \emptyset \Longrightarrow$
$\Longrightarrow\ \exists\ K(x, r) \subset CE\ \forall\ x \in CE \Longrightarrow CE$ nyílt $\Longrightarrow E$ zárt.

Megjegyzés. $\mathbb{R}_b$-ben a $+\infty$ és $-\infty$ környezetén az $]r, +\infty[$ és $]-\infty, r[$ $(r \in \mathbb{R})$ intervallumokat értjük. Így definiálható az is, hogy a $+\infty$ és $-\infty$ mikor torlódási pont.

3. Tétel (Bolzano-Weierstrass). $\forall\ S \subset \mathbb{R}$ $(\vee\mathbb{R}^n)$ *korlátos végtelen halmaznak létezik torlódási pontja.*

Bizonyítás.

a) Először az $S \subset \mathbb{R}$ esetet nézzük.
- S korlátos $\Longrightarrow \exists\ [a, b] \subset \mathbb{R},\ S \subset [a, b]$,
- Definiáljuk az I_n $(n \in \mathbb{N})$ zárt intervallumok egymásba skatulyázott rendszerét úgy, hogy

$$I_1 \doteq [a_1, b_1] \doteq \begin{cases} \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right] \ , & \text{ha } \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right] \cap S \quad \text{végtelen halmaz} \\ \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right] \ , & \text{ha } \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right] \cap S \quad \text{végtelen halmaz} \end{cases}$$

Ha $I_n = [a_n, b_n]$ halmaz adott, akkor legyen

$$I_{n+1} \doteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \doteq$$
$$\doteq \begin{cases} \left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right], & \text{ha } \left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right] \cap S \quad \text{végtelen} \\ \left[\dfrac{a_n+b_n}{2}, b_n\right], & \text{ha } \left[\dfrac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] \cap S \quad \text{végtelen} \end{cases}$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$-re $I_n \cap S$ végtelen és $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

– A Cantor-tétel miatt $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = [\alpha, \beta]$, továbbá

$$0 \le \beta - \alpha \le b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ami az archimedesi tulajdonság miatt csak $\alpha = \beta = x_0$ esetén lehetséges, továbbá $x_0 \in I_n$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$.

– $\forall\, K(x_0, r)$ esetén (az archimedesi tulajdonság miatt)

$$\exists\, n \in \mathbb{N},\ \frac{b-a}{r} < n \implies \exists\, n \in \mathbb{N},\ \frac{b-a}{n} < r \implies$$
$$\implies b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n} < r \implies$$

$\implies I_n \subset K(x_0, r) \implies$ (I_n konstrukciója miatt) $\forall\, K(x_0, r)$ végtelen sok S-beli elemet tartalmaz $\implies$ x_0 torlódási pontja S-nek.

b) Az $S \subset \mathbb{R}^n$ esetben a bizonyítás visszavezethető az $S \subset \mathbb{R}$ esetre, ha $\mathbb{R}^n$-beli úgynevezett téglaskatulyázást tekintünk (analóg módon).

Megjegyzés. A tétel metrikus térben általában nem igaz.

4. Definíció. Nyílt halmazok egy $\{o_\nu\}$ rendszere az $S \subset \mathbb{R}$ $(\vee\, \mathbb{R}^n \vee X)$ halmaznak egy nyílt lefedése, ha $S \subset \bigcup\limits_{\nu} o_\nu$.

5. Definíció. A $K \subset \mathbb{R}$ $(\vee\, \mathbb{R}^n \vee X)$ halmaz kompakt, ha minden nyílt lefedéséből kiválasztható véges sok halmaz, mely lefedi K-t.

4. Tétel.

*A) (**Heine-Borel**) Egy $K \subset \mathbb{R}$ $(\vee\, \mathbb{R}^n)$ halmaz $\iff$ kompakt, ha korlátos és zárt.*

B) Ha $K \subset (X, d)$ kompakt, akkor korlátos és zárt.

Bizonyítás.

A_1) Legyen $K \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt halmaz.

- Tegyük fel, hogy K nem kompakt, azaz $\exists\ \{o_\nu\}$ nyílt lefedése, melyből véges sok halmaz nem fedi le.
- K korlátos $\Longrightarrow\ \exists\ [a, b] \subset \mathbb{R},\ K \subset [a, b]$.
- Az $\{I_n\}$ zárt intervallumok egymásba skatulyázott rendszerét definiáljuk a B-W tételhez hasonlóan, hogy mindíg azt a fél intervallumot választjuk, melyre $K \cap I_n$ $(n \in \mathbb{N})$ nem fedhető le véges sok halmazzal $\{o_\nu\}$-ből.
- Ekkor $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = x_0$ és $\forall\ K(x_0, r)$-hez $\exists\ n \in \mathbb{N},\ I_n \subset K(x_0, r)$. Ugyanakkor $I_n \cap K(x_0, r)$ végtelen sok K-beli elemet tartalmaz, mert ha nem, úgy véges sok o_ν-vel is lefedhető lenne, így $K(x_0, r)$-ben is végtelen sok K-beli elem van, ami adja, hogy $x_0 \in K'$.
- K zárt $\Longrightarrow\ K' \subset K\ \Longrightarrow\ x_0 \in K$
- $\{o_\nu\}$ lefedőrendszer $\Longrightarrow\ \exists\ o_{\nu_0},\ x_0 \in o_{\nu_0}\ \Longrightarrow\ \exists\ K(x_0, r') \subset o_{\nu_0}\ \Longrightarrow$ (mint az előbb), hogy $\exists\ n',\ I_{n'} \subset K(x_0, r')\ \Longrightarrow\ I_{n'} \subset o_{\nu_0}$, ami ellentmondás, mert akkor az $I_{n'}$-ben lévő K-beli elemeket egyetlen o_{ν_0} lefedi.
- Így K kompakt.

A_2) Ha $K \subset (\mathbb{R}^n, d)$ korlátos és zárt, úgy a bizonyítás $\mathbb{R}^n$-beli téglaskatulyázással megy.

B) A tétel első állításának másik iránya és a tétel második állítása az, hogy ha $K \subset \mathbb{R}$ $(\vee\, \mathbb{R}^n \vee X)$ halmaz kompakt, akkor korlátos és zárt. Most ezt bizonyítjuk.

- K korlátos, mert ha $\forall\ x \in K$-ra tekintjük $K(x, 1)$-et, úgy $\{K(x, 1)\}$ nyílt lefedése K-nak és akkor (K kompaktsága miatt) $\exists\ K(x_1, 1), \ldots,$ $K(x_n, 1)$ nyílt környezetek, melyek lefedik K-t.
  Legyen $r = \sup\limits_{1 \le i,j \le n} \{d(x_i, x_j) + 2\}\ \Longrightarrow\ \forall\ x, y \in K\ \ \exists\ i, j$,
  $x \in K(x_i, 1)\ \wedge\ y \in K(x_j, 1)$ és így

$$d(x, y) \le d(x, x_i) + d(x_i, y) \le d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) <$$
$$< d(x_i, x_j) + 2 \le r$$

  azaz teljesül a korlátosság definíciója.

– K zárt is, ugyanis belátjuk, hogy CK nyílt.
Legyen $x \in CK \;\wedge\; y \in K$ tetszőleges, akkor

$$K\left(x, \frac{d(x,y)}{2}\right) \cap\; K\left(y, \frac{d(x,y)}{2}\right) = \emptyset$$

és $\left\{K\left(y, \frac{d(x,y)}{2}\right) \mid y \in K\right\}$ nyílt lefedése K-nak, mely kompakt, így

$$\exists\; K\left(y_1, \frac{d(x,y_1)}{2}\right), \dots, K\left(y_n, \frac{d(x,y_n)}{2}\right)\;,$$

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} K\left(y_i, \frac{d(x,y_i)}{2}\right) \;\wedge\; K\left(y_i, \frac{d(x,y_i)}{2}\right) \cap K\left(x, \frac{d(x,y_i)}{2}\right) = \emptyset$$

$$(i = 1, \dots, n) \implies r = \inf\left\{\frac{d(x,y_i)}{2}\right\} \text{ esetén}$$

$$K(x,r) \cap K\left(y_i, \frac{d(x,y_i)}{2}\right) = \emptyset \;(i = 1, \dots, n) \implies$$

$$\implies K(x,r) \cap \bigcup_{i=1}^{n} K\left(y_i, \frac{d(x,y_i)}{2}\right) = \emptyset \implies K(x,r) \cap K = \emptyset \implies$$

$\implies K(x,r) \subset CK \implies \forall\; x \in CK$ belső pontja CK-nak így CK nyílt.

6. Definíció. Az (X,d) metrikus tér összefüggő, ha nem létezik X-nek olyan nemüres $o_1,\; o_2$ nyílt részhalmaza, hogy $o_1 \cap o_2 = \emptyset$ és $o_1 \cup o_2 = X$. A H $(\neq \emptyset) \subset X$ összefüggő X-ben ha (H,d) összefüggő metrikus tér. (A d metrika $H \times H$-ra való leszűkítését is d-vel jelöljük, és (H,d) valóban metrikus tér.)

5. Tétel.

a) *Egy* $H \subset (\mathbb{R},d)$ *halmaz* $\iff$ *összefüggő, ha* $\forall\; x,y \in H$ *esetén* $[x,y] \subset H$.

b) $(\mathbb{R},d)$ *összefüggő halmazai:* $\emptyset$, $\{a\}$, $\mathbb{R}$ *véges intervallumai,* $]-\infty,a]$, $]-\infty,a[$, $[a,\infty[$, $]a,\infty[$ $(a \in \mathbb{R}$ *tetszőleges).*

c) $(\mathbb{R}^n,d)$ *összefüggő.*

Bizonyítás. Nem kell, de lásd Makai: 53., 54. oldal.

3. feladatsor

1) Bizonyítsa be, hogy az euklideszi normára teljesülnek az alábbiak:

$$\|x\| \geq 0 \ , \ \|x\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \ ; \qquad \|\lambda x\| \doteq |\lambda| \|x\| \ ;$$
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ ; \qquad (x, y \in V \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \ (\vee \mathbb{C})).$$

2) Bizonyítsa be, hogy az euklideszi távolság teljesíti, hogy

$$d(x,y) \geq 0 \ , \ d(x,y) = 0 \iff x = y \ ; \qquad d(x,y) = d(y,x) \ ;$$
$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \ ; \qquad (x, y, z \in V).$$

3) Bizonyítsa be, hogy $H \subset \mathbb{R}$ $(\vee \mathbb{R}^n \vee X)$ $\Longleftrightarrow$ korlátos, ha $\exists\, a \in \mathbb{R}$ $(\vee \mathbb{R}^n \vee X)$ és $r > 0$, hogy $H \subset K(a, r)$.

4) Legyen adott X halmaz és

$$d_0 : X \times X \to \mathbb{R} \ , \ d_0(x,y) = \begin{cases} 0 \ , & x = y \\ 1 \ , & x \neq y \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy (X, d_0) metrikus tér (d_0 a diszkrét metrika, (X, d_0) a diszkrét metrikus tér).

5) Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{R}^n$ a benne értelmezett összeadással és skalárral való szorzással vektortér.

6) Adottak az $x = (1, 5, 5)$, $y = (-2, 2, 3)$ $\mathbb{R}^3$-beli vektorok, határozza meg az $x + y$, $x - y$, $3x - \dfrac{1}{2}y$ vektorokat.

7) Bizonyítsa be, hogy ha $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, úgy

$$\langle x, y \rangle \doteq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

skaláris (vagy belső) szorzat $\mathbb{R}^n$-ben.

8) Bizonyítsa be, hogy ha $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, úgy

$$\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x \rangle} \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \ , \quad \text{illetve} \quad d(x,y) \doteq \|x, y\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

norma, illetve távolság (metrika) $\mathbb{R}^n$-ben.

9) Bizonyítsa be, hogy a 2. feladatsor 14. feladatának állításai igazak az $(\mathbb{R}^n, d)$, illetve (X, d) metrikus terekben is.

10) Bizonyítsa be, hogy

$$\|x\|_1 \doteq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{és} \quad \|x\|_\infty \doteq \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

norma $\mathbb{R}^n$-ben.

11) Bizonyítsa be, hogy $a, b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a < b$ esetén $]a, b[\ ,\ ]a, \infty[$ és $]-\infty, a[$ nyílt (és nem zárt); $[a, b]\ ,\ [a, \infty[\ ,\ ]-\infty, a]$ zárt és nem nyílt; $]a, b]\ ,\ [a, b[$ nem nyílt és nem zárt $\mathbb{R}$-ben.

12) Határozza meg az alábbi $\mathbb{R}$-beli halmazok belső, határ, külső, torlódási és izolált pontjainak halmazát:

$$H_1 \doteq]-1, 1] \ \cup \ \{3\} \cup]4, 5[\cup [7, 8] \ ; \qquad \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \ ; \qquad \mathbb{Q} \ ;$$

$$\mathbb{N} \ ; \qquad H_2 \doteq \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \ .$$

13) Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{Z}$ zárt és nem nyílt; $\mathbb{Q}$ nem nyílt és nem zárt $(\mathbb{R}, d)$-ben.

14) Adjon meg a valós számok halmazában végtelen sok olyan nyílt halmazt, melyek metszete nem nyílt, illetve végtelen sok olyan zárt halmazt, melyek egyesítése nem zárt (tegyük ezt $\mathbb{R}^2$-ben is).

15) Bizonyítsa be, hogy minden $H \subset \mathbb{R}$ véges halmaz kompakt.

16) Bizonyítsa be, hogy $H \doteq \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ kompakt.

17) Bizonyítsa be, hogy $]0, 1[\subset \mathbb{R}$ nem kompakt.

18) Legyen $H \subset \mathbb{R}$ adott. Bizonyítsa be, hogy $+\infty$, (illetve $-\infty$) torlódási pontja H-nak, ha H felülről (illetve alulról) nem korlátos.

19) Bizonyítsa be, hogy $(\mathbb{R}^n, d)$, illetve (X, d)-beli nyílt környezetek nyílt halmazok.

20) Legyen $A \doteq \{(x, y) \mid x, y \in (0, 1) \ ; \ x, y \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$. Határozza meg A torlódási pontjait, határpontjait. Vizsgálja meg, hogy A nyílt, vagy zárt halmaz-e?

21) Legyen (X, d) metrikus tér. Bizonyítsa be, hogy $x_0 \iff$ torlódási pontja a $H \subset X$ halmaznak, ha x_0 minden környezetében végtelen sok H-beli elem van.

22) Legyen (X, d) metrikus tér, $x_0 \in X$, $G, H \subset X$. Bizonyítsa be, hogy: $X\backslash x_0$ nyílt ; ha G nyílt és H zárt, akkor $G\backslash H$ nyílt ; ha G zárt és H nyílt, akkor $G\backslash H$ zárt.

23) Legyen (X, d) metrikus tér $H \subset X$. Bizonyítsa be, hogy H határa és H torlódási pontjainak halmaza zárt.

24) Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ és $H_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ a H elemeinek i-edik koordinátáiból álló halmaz. Bizonyítsa be, hogy $H \iff$ korlátos, ha $\forall\ H_i$ korlátos $(\mathbb{R}, d)$-ben.

25) Legyen $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_+$. Bizonyítsa be, hogy a $K(x, r)$ halmaz átmérője $2r$.

26) Bizonyítsa be, hogy egy metrikus tér minden véges részhalmaza kompakt.

27) Adjon meg olyan metrikus teret, melyben létezik olyan korlátos és zárt halmaz, amelyik nem kompakt.

28) Adjon meg olyan metrikus teret, melyben van olyan korlátos és végtelen halmaz, amelynek nincs torlódási pontja.

IV. Sorozatok

1. Alapfogalmak és kapcsolatuk

1. Definíció. Egy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ($\vee\, \mathbb{R}^n \vee (X, d)$) függvényt $\mathbb{R}$ ($\vee\, \mathbb{R}^n \vee (X, d)$)-beli sorozatnak nevezünk. A sorozat n-edik tagját $f(n)$, a_n, x_n (vagy más) jelöli. A sorozat elemeinek halmazára az $\{a_n\}$ vagy $\{x_n\}$ (vagy más) jelölést használunk. Magát a sorozatot az $\langle a_n \rangle$, vagy $\langle x_n \rangle$ (vagy más) szimbólummal jelöljük.

2. Definíció. (*korlátosság*) Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$ ($\vee\, \mathbb{R}^n \vee (X, d)$)-beli sorozat korlátos, ha $\{x_n\}$ korlátos. Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat alulról (felülről) korlátos, ha $\{x_n\}$ alulról (felülről) korlátos.

3. Definíció. (*monotonitás*) Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat monoton növekvő (csökkenő), ha $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$); szigorúan monoton növekvő (csökkenő) ha $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re $x_n < x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$) teljesül.

4. Definíció. (*konvergencia*) Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$ ($\vee\, \mathbb{R}^n \vee (X, d)$)-beli sorozat konvergens, ha $\exists\, x \in \mathbb{R}$ ($\vee\, \mathbb{R}^n \vee (X, d)$), hogy $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$-ra ($n \in \mathbb{N}$) $d(x, x_n) < \varepsilon$ teljesül. Az $x \in \mathbb{R}$ ($\vee\, \mathbb{R}^n \vee (X, d)$) számot (vektort, elemet) $\langle x_n \rangle$ határértékének nevezzük. Azt, hogy $\langle x_n \rangle$ konvergens és határértéke x, így jelöljük: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ vagy $x_n \to x$.

Megjegyzések.

1. Ha $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{R}^n$-beli sorozatról van szó, akkor a $d(x, x_n) = |x - x_n|$, illetve $d(x, x_n) = \|x - x_n\|$ távolság szerepel a definícióban.
2. A környezet fogalmát felhasználva a konvergencia ún. „környezetes” definícióját kapjuk: az $\langle x_n \rangle$ sorozat konvergens, ha $\exists\, x \in \mathbb{R}$ ($\vee\, \mathbb{R}^n \vee (X, d)$), hogy $\forall\, K(x, \varepsilon)$-hoz $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$-ra $x_n \in K(x, \varepsilon)$ teljesül.
3. A definíció alapján könnyen belátható, hogy az $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ sorozat konvergens és határértéke 0 (nullsorozat).
4. Egyszerűen belátható, hogy $x_n \to x \iff \forall\, K(x, \varepsilon)$-re $x_n \in K(x, \varepsilon)$ legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével.

5. Definíció. (*divergencia*) Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$ $(\vee\, \mathbb{R}^n \vee (X,d))$-beli sorozat divergens, ha nem konvergens, azaz ha $\forall\ x$ esetén $\exists\ \varepsilon > 0$ $(\vee K(x,\varepsilon))$, hogy $\forall\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$-re $\exists\ n \geq n(\varepsilon)$, hogy $d(x, x_n) \geq \varepsilon$ $(\vee\ x_n \notin K(x,\varepsilon))$.
Például $\langle (-1)^n \rangle$ divergens.

6. Definíció. Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat $+\infty$ (illetve $-\infty$)-hez konvergál, ha $\forall\ M \in \mathbb{R}$-hez $\exists\ n(M) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geq n(M)$-re $x_n > M$ (illetve $x_n < M$) teljesül.

Megjegyzések.

1. Megfogalmazható környezetes változat is a $+\infty$ (illetve $-\infty$) környezetének ismeretében.
2. Szokás a végtelenhez való konvergenciát is divergenciának nevezni, hiszen ekkor a határérték nem eleme $\mathbb{R}$-nek.
3. Ha $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{C}$-beli, akkor $x_n \to +\infty$, ha $\forall\ r > 0$-hoz $\exists\ n(r)$, $\forall\ n \geq n(r) \implies |x_n| > r$ $(x_n \in K(\infty, r))$.

1. Tétel (a határérték egyértelműsége). *Ha* $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$ $(\vee\, \mathbb{R}^n \vee (X,d))$-*beli konvergens sorozat, akkor egy határértéke van (azaz* $x_n \to a$ *és* $x_n \to b \implies a = b$*).*

Bizonyítás.
Tegyük fel, hogy $x_n \to a$ és $x_n \to b$ és $a \neq b$, akkor

$$K\left(a, \frac{d(a,b)}{2}\right) \cap K\left(b, \frac{d(a,b)}{2}\right) = \emptyset$$

és $\exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\forall\ n > n(\varepsilon)$-ra $x_n \in K\left(a, \frac{d(a,b)}{2}\right)$ és $x_n \in K\left(b, \frac{d(a,b)}{2}\right)$, ami lehetetlen $\implies a = b$.

Megjegyzés. A tétel akkor is igaz, ha $x_n \to +\infty$ (vagy $-\infty$).

2. Tétel (konvergencia és korlátosság). *Ha az* $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$ $(\vee\, \mathbb{R}^n \vee (X,d))$-*beli) sorozat konvergens, akkor korlátos.*

Bizonyítás.
Ha $x_n \to x$ és $\varepsilon > 0$ adott, akkor $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$-re $d(x, x_n) < \varepsilon$. Legyen $r > 2 \cdot \sup\{\varepsilon,\ d(x, x_1), \ldots, d(x, x_{n(\varepsilon)-1})\}$, akkor

$\forall\ n, m \in \mathbb{N}$-re

$$d(x_n, x_m) \leq d(x, x_n) + d(x, x_m) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r\ ,$$

így $\{x_n\}$ korlátos $\Longrightarrow$ $\langle x_n \rangle$ korlátos.

Megjegyzés. Egy sorozat korlátosságából általában nem következik a konvergenciája (pl. $\langle (-1)^n \rangle$).

3. Tétel (monotonitás és konvergencia). *Ha az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat monoton növekvő (illetve csökkenő) és felülről (illetve alulról) korlátos, akkor konvergens és $x_n \to \sup\{x_n\}$ (illetve $x_n \to \inf\{x_n\}$).*

Bizonyítás.
Legyen $\langle x_n \rangle$ (monoton növekvő és) felülről korlátos $\Longrightarrow$ $\exists\ x = \sup\{x_n\}$ $\Longrightarrow$ $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $x_{n(\varepsilon)} > x - \varepsilon$ $\Longrightarrow$ $x_{n(\varepsilon)} \in K(x, \varepsilon)$. A monoton növekedés miatt $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$ $\Longrightarrow$ $x_{n(\varepsilon)} \leq x_n < x$ $\Longrightarrow$
$x_n \in K(x, \varepsilon)$ $\Longrightarrow$ $x_n \to x$.
A másik eset ($\langle x_n \rangle$ monoton csökkenő és alulról korlátos) bizonyítása analóg módon történik.

4. Tétel. *Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat $\Longleftrightarrow$ konvergens és határértéke $x \in \mathbb{R}^k$, ha $x_n = (x_{1n}, \ldots, x_{kn})$ jelöléssel az $\langle x_{1n} \rangle, \ldots, \langle x_{kn} \rangle$ (úgynevezett koordináta) sorozatok konvergensek és az $x = (x_1, \ldots, x_k)$ jelöléssel $x_{in} \to x_i$ $(i = 1, \ldots, k)$.*

Bizonyítás.

a) Ha $x_n \to x$, akkor $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n(\varepsilon),\ \forall\ n \geq n(\varepsilon)\ \ (n \in \mathbb{N})\ \ \|x - x_n\|_{\mathbb{R}^k} < < \varepsilon \Longrightarrow |x_i - x_{in}| \leq \|x - x_n\|_{\mathbb{R}^k} < \varepsilon\ \ (i = 1, \ldots, k)$, azaz $x_{in} \to x_i$ $(i = 1, \ldots, k)$.

b) Ha $x_{in} \to x_i\ \ (i = 1, \ldots, k) \Longrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n_i(\varepsilon)\ \ (i = 1, \ldots, k)$,
$\forall\ n \geq n_i(\varepsilon)\ \ (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow |x_{in} - x_i| < \varepsilon\ \ (i = 1, \ldots, k)$.
Ha $x = (x_1, \ldots, x_k)$, akkor

$$n(\varepsilon) = \sup\left\{ n_i\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}\right)\ \mid i = 1, \ldots, k \right\}$$

választással $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ esetén

$$\|x - x_n\|_{\mathbb{R}^k} = \sqrt{(x_i - x_{in})^2 + \cdots + (x_k - x_{kn})^2} < \sqrt{k \cdot \frac{\varepsilon^2}{k}} = \varepsilon\ ,$$

azaz $x_n \to x$ teljesül.

Megjegyzés. A 4. tételből speciálisan következik, hogy a $\langle z_n \rangle = \langle x_n + iy_n \rangle$ $\mathbb{C}$-beli sorozat $\Longleftrightarrow$ konvergens, ha $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ konvergensek és ha $x_n \to x$, $y_n \to y$, úgy $z_n \to z = x + iy$.

2. Sorozatok és műveletek, illetve rendezés

Definíció. Ha $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{R}^n$-beli sorozatok, $\lambda \in \mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$) tetszőleges, akkor az

$$\langle x_n \rangle + \langle y_n \rangle \doteq \langle x_n + y_n \rangle \ ; \qquad \lambda \langle x_n \rangle \doteq \langle \lambda x_n \rangle$$

szerint definiált sorozatokat az adott sorozatok összegének illetve λ-szorosának nevezzük.
Ha $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$-beli sorozatok, akkor az

$$\langle x_n \rangle \cdot \langle y_n \rangle \doteq \langle x_n \cdot y_n \rangle \ ; \qquad \frac{\langle x_n \rangle}{\langle y_n \rangle} \doteq \left\langle \frac{x_n}{y_n} \right\rangle \quad (y_n \neq 0)$$

szerint definiált sorozatokat az adott sorozatok szorzatának, illetve hányadosának nevezzük.

1. Tétel. *Legyen $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ $\mathbb{R}^n$-beli sorozat, $\lambda \in \mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$) tetszőleges, hogy $x_n \to x$ és $y_n \to y$, akkor $\langle x_n \rangle + \langle y_n \rangle$ és $\lambda \langle x_n \rangle$ konvergensek és $x_n + y_n \to x + y$, $\lambda x_n \to \lambda x$.*

Bizonyítás.

a) Ha $x_n \to x$ és $y_n \to y$, úgy $\forall \varepsilon > 0$-ra $\frac{\varepsilon}{2}$-höz $\exists\, n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, $\forall\, n \geq n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ ($n \in \mathbb{N}$) esetén $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge d(y, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} \implies \forall\, n \geq n(\varepsilon) = n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$-re

$$d(x+y, x_n+y_n) = \|(x+y) - (x_n+y_n)\|_{\mathbb{R}^n} = \|(x-x_n) + (y-y_n)\|_{\mathbb{R}^n} \leq$$

$$\leq \|x - x_n\|_{\mathbb{R}^n} + \|y - y_n\|_{\mathbb{R}^n} = d(x, x_n) + d(y, y_n) < \varepsilon$$

azaz $x_n + y_n \to x + y$.

b) Ha $\lambda = 0 \implies \lambda \langle x_n \rangle = \langle \lambda x_n \rangle = \langle 0 \rangle$ konvergens és $\lambda x_n = 0 \to 0 \in \mathbb{R}^n$.
Ha $\lambda \neq 0$, akkor $\forall\, \varepsilon > 0$-ra $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$-hoz $\exists\, n\left(\frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right)$, $\forall\, n \geq n\left(\frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right)$

$(n \in \mathbb{N})$ esetén $d(x, x_n) < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} \implies \forall\, n \geq n(\varepsilon) = n\left(\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}\right)$-ra

$$d(\lambda x, \lambda x_n) = |\lambda| d(x, x_n) < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

azaz $\lambda x_n \to \lambda x$.

2. Tétel. *Ha $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ olyan $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$-beli sorozatok, hogy $x_n \to x$ és $y_n \to y$, akkor $\langle x_n \rangle \cdot \langle y_n \rangle$ és $y, y_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén $\dfrac{\langle x_n \rangle}{\langle y_n \rangle}$ is konvergens és $x_n \cdot y_n \to x \cdot y$, $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{x}{y}$.*

Bizonyítás.

a) $x_n \to x \implies \langle x_n \rangle$ korlátos $\implies \exists\, K \in \mathbb{R}$, $|x_n| < K$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ (az abszolútérték $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$-beli). Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor $x_n \to x$ és $y_n \to y$ miatt
$\dfrac{\varepsilon}{2K}$-hoz $\exists\, n_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2K}\right)$, $\forall\, n > n_1$ $(n \in \mathbb{N}) \implies d(y, y_n) < \dfrac{\varepsilon}{2K}$,
$\dfrac{\varepsilon}{2(|y|+1)}$-hez $\exists\, n_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2(|y|+1)}\right)$, $\forall\, n > n_2$ $(n \in \mathbb{N}) \implies d(x, x_n) <$
$< \dfrac{\varepsilon}{2(|y|+1)}$,
ezért $\forall\, n \geq \sup\{n_1, n_2\} \doteq n(\varepsilon)$-ra

$$\begin{aligned} d(xy, x_n y_n) &= |xy - x_n y_n| = |xy - x_n y + x_n y - x_n y_n| = \\ &= |y(x - x_n) + x_n(y - y_n)| \leq |y||x - x_n| + |x_n||y - y_n| < \\ &< (|y|+1)\frac{\varepsilon}{2(|y|+1)} + K\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon \ , \end{aligned}$$

azaz $x_n \cdot y_n \to x \cdot y$.

b) Először megmutatjuk, hogy $y_n \to y$ $(y_n,\ y \neq 0,\ n \in \mathbb{N})$ esetén $\dfrac{1}{y_n} \to \dfrac{1}{y}$.
Legyen $\varepsilon > 0$ adott.
$y_n \to y$ és $y \neq 0$ miatt $\exists\, n_1\left(\dfrac{|y|}{2}\right) \in \mathbb{N}$, $\forall\, n > n_1\left(\dfrac{|y|}{2}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén
$|y_n - y| < \dfrac{|y|}{2}$ és így $|y_n| > \dfrac{|y|}{2}$.
Ugyancsak $y_n \to y$ miatt $\dfrac{\varepsilon|y|^2}{2} > 0$-hoz $\exists\, n_2\left(\dfrac{\varepsilon|y|^2}{2}\right)$,

$\forall\ n > n_2\left(\dfrac{\varepsilon|y|^2}{2}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén $|y_n - y| < \dfrac{\varepsilon|y|^2}{2}$.

Ha $n(\varepsilon) = \sup\left\{n_1\left(\dfrac{|y|}{2}\right), n_2\left(\dfrac{\varepsilon|y|^2}{2}\right)\right\}$ és $n > n(\varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y - y_n|}{|y_n||y|} < \frac{2}{|y|^2} \cdot \frac{\varepsilon|y|^2}{2} = \varepsilon\ ,$$

azaz $\dfrac{1}{y_n} \to \dfrac{1}{y}$ teljesül.

Így $\dfrac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \dfrac{1}{y_n} \to x \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{x}{y}$ következik az előbbiek miatt.

3. Tétel. *Ha $\langle x_n\rangle$ korlátos, $\langle y_n\rangle$ pedig nullsorozat $\mathbb{R}$-ben vagy $\mathbb{C}$-ben, akkor $\langle x_n\rangle \cdot \langle y_n\rangle$ nullsorozat ($x_n \cdot y_n \to 0$).*

Bizonyítás.
$\langle x_n\rangle$ korlátossága miatt $\exists\ K \in \mathbb{R}$, $|x_n| < K$, így $|x_n y_n - 0| = |x_n||y_n| < K|y_n - 0|$ miatt felhasználva, hogy $y_n \to 0\ :\ \forall\ \varepsilon > 0$-ra $\dfrac{\varepsilon}{K}$-hoz $\exists\ n\left(\dfrac{\varepsilon}{K}\right)$, $\forall\ n > n\left(\dfrac{\varepsilon}{K}\right) = n(\varepsilon)$-ra $|x_n y_n| < K\dfrac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$, azaz $x_n y_n \to 0$.

4. Tétel. *Ha $\langle x_n\rangle$ olyan $\mathbb{R}$-beli sorozat, hogy*

a) $|x_n| \to +\infty$ *és* $x_n \neq 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, *akkor* $\dfrac{1}{x_n} \to 0$ *;*

b) $x_n \to 0$, $x_n \neq 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, *akkor* $\left|\dfrac{1}{x_n}\right| \to \infty$.

Bizonyítás.

a) Legyen $\varepsilon > 0$ adott, akkor $|x_n| \to +\infty$ miatt $\dfrac{1}{\varepsilon}$-hoz $\exists\ n\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$, $\forall\ n > n\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$-re $|x_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, így $n > n(\varepsilon) = n\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$-ra $\left|\dfrac{1}{x_n}\right| = \dfrac{1}{|x_n|} < \varepsilon$, azaz $\dfrac{1}{x_n} \to 0$.

b) Legyen $M > 0$ adott, akkor $x_n \to 0$, $(x_n \neq 0)$ miatt $\dfrac{1}{M} > 0$-hoz $\exists\ n\left(\dfrac{1}{M}\right)$, $\forall\ n \geq n\left(\dfrac{1}{M}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén $|x_n| < \dfrac{1}{M} \iff \left|\dfrac{1}{x_n}\right| = \dfrac{1}{|x_n|} > M\ \ \forall\ n \geq n(M) = n\left(\dfrac{1}{M}\right)$, azaz $\left|\dfrac{1}{x_n}\right| \to +\infty$.

5. Tétel. *Ha $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ olyan $\mathbb{R}$-beli sorozatok, hogy $x_n \to x$ és $y_n \to y$ és*

a) $x_n \le y_n$ (vagy $x_n < y_n$) $\forall\ n > N_0 \in \mathbb{N}$-re, akkor $x \le y$;
b) $x < y$, akkor $\exists\ N_0$, hogy $\forall\ n > N_0$-ra $x_n < y_n$.

Bizonyítás.

a) Tegyük fel, hogy $x > y$ és legyen $\varepsilon = \dfrac{|x-y|}{2} > 0$, akkor $\exists\ n_1(\varepsilon)$ és $n_2(\varepsilon)$, hogy $x_n \in K(x,\varepsilon)\quad \forall\ n \ge n_1(\varepsilon)\ \ \wedge\ \ y_n \in K(y,\varepsilon)\quad \forall\ n \ge n_2(\varepsilon)$, ami – $K(x,\varepsilon) \cap K(y,\varepsilon) = \emptyset$ miatt – adja, hogy $y_n < x_n\ \forall\ n > n(\varepsilon) =$ $= \sup\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$, ami ellentmondás, így csak $x \le y$ lehetséges.

b) $\varepsilon = \dfrac{|x-y|}{2} > 0$-ra $\exists\ n_1(\varepsilon)$ és $n_2(\varepsilon)$, hogy $x_n \in K(x,\varepsilon)$, ha $n \ge n_1(\varepsilon)$, $y_n \in K(y,\varepsilon)$, ha $n \ge n_2(\varepsilon)$ így $K(x,\varepsilon) \cap K(y,\varepsilon) = \emptyset \implies x_n < y_n$, ha $n > N_0 = \sup\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.

6. Tétel (rendőr-tétel). *Ha $\langle x_n \rangle$, $\langle y_n \rangle$, $\langle z_n \rangle$ olyan $\mathbb{R}$-beli sorozatok, hogy $x_n \to x$ és $y_n \to x$ és $x_n \le z_n \le y_n$, akkor $z_n \to x$.*

Bizonyítás. A feltételek miatt $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n_1(\varepsilon)$ és $n_2(\varepsilon)$, hogy $x_n \in K(x,\varepsilon)$, ha $n \ge n_1(\varepsilon)$ és $y_n \in K(x,\varepsilon)$, ha $n \ge n_2(\varepsilon) \implies x_n, y_n \in K(x,\varepsilon)$, ha $n \ge n(\varepsilon) = \sup\{n_1, n_2\} \implies z_n \in K(x,\varepsilon)$, ha $n \ge n(\varepsilon)$, azaz $z_n \to x$.

3. Részsorozatok

1. Definíció. Legyen $\langle a_n \rangle$ $\mathbb{R}$ $(\vee\,\mathbb{R}^n \vee (X,d))$-beli sorozat. Ha $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő és $b_n = a_{\varphi(n)}$, akkor $\langle b_n \rangle$-t az $\langle a_n \rangle$ részsorozatának nevezzük.

1. Tétel. *Ha az $\langle a_n \rangle$ konvergens és határértéke a akkor $\forall\ \langle b_n \rangle$ részsorozatára $b_n \to a$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha $b_n = a_{\varphi(n)}$, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő, akkor teljes indukcióval kapjuk, hogy $\varphi(n) \ge n$ $(n \in \mathbb{N})$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, akkor $a_n \to a$ miatt $\exists\ n(\varepsilon)$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$-re $a_n \in K(a,\varepsilon)$, így $\varphi(n) \ge n$ miatt $b_n \in K(a,\varepsilon)\ \forall\ n \ge n(\varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$, azaz $b_n \to a$.

Megjegyzés. A tétel megfordítása nem igaz, de ha egy sorozat két diszjunkt részsorozatra bontható, melyek határértéke ugyanaz, akkor az a sorozatnak is határértéke.

2. Tétel (Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel). *Ha az* $\langle a_n \rangle$ $\mathbb{R}$ $(\vee\, \mathbb{R}^n)$*-beli sorozat korlátos, akkor létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Ha $\langle a_n \rangle$ értékkészlete véges, akkor $\exists\ a \in \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{R}^n)$, hogy $a_n = a$ végtelen sok természetes számra, így az $A = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = a\}$ halmaz megszámlálhatóan végtelen, így $\exists\ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő sorozat, melynek értékkészlete A. Mivel $a_{\varphi(n)} = a\ \forall\ n \in \mathbb{N} \implies \langle a_{\varphi(n)} \rangle$ konvergens.
Ha $\{a_n\}$ végtelen halmaz, mely korlátos, akkor a B-W tétel miatt $\exists\ a \in \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{R}^n)$ torlódási pontja, így $\exists\ \varphi(1) \in \mathbb{N}$, hogy $a_{\varphi(1)} \in K(a, 1)$. Ha $\varphi(n)$-t meghatároztuk $n \in \mathbb{N}$-re, akkor $\exists\ \varphi(n+1) \in \mathbb{N}$, melyre $\varphi(n+1) >$ $> \varphi(n)$ és $a_{\varphi(n+1)} \in K\left(a, \dfrac{1}{n+1}\right)$. $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő és $b_n = a_{\varphi(n)} \in K\left(a, \dfrac{1}{n}\right)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, azaz $d(a, a_{\varphi(n)}) = d(a, b_n) < \dfrac{1}{n}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.
Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor ($\frac{1}{n} \to 0$ miatt) $\exists\ n(\varepsilon)$, $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$-re $\dfrac{1}{n} < \varepsilon \implies d(a, b_n) < \varepsilon \implies b_n \to a$.

2. Definíció. Legyen $\{A_\nu\}$ az $\langle a_n \rangle$ korlátos ($\mathbb{R}$-beli) sorozat konvergens részsorozatai határértékeinek halmaza. A $\sup\{A_\nu\}$ és $\inf\{A_\nu\}$ (létező) számokat az $\langle a_n \rangle$ felső illetve alsó határértékeinek vagy limes szuperiorjának illetve limes inferiorjának nevezzük. Jelölés: $\overline{\lim}\ a_n$, $\underline{\lim}\ a_n$ ($\limsup a_n$, $\liminf a_n$). Ha $\langle a_n \rangle$ felülről (vagy alulról) nem korlátos, akkor $\overline{\lim}\ a_n = +\infty$ (illetve $\underline{\lim}\ a_n = -\infty$).

Megjegyzések.

1. $\sup\{A_\nu\}, \inf\{A_\nu\} \in A_\nu$.
2. $\overline{\lim}\ a_n = \underline{\lim}\ a_n = a \implies a_n \to a$.

4. Cauchy-sorozatok

1. Definíció. Az $\langle a_n \rangle$ $\mathbb{R}$ $(\vee\, \mathbb{R}^n \vee (X, d))$-beli sorozatot Cauchy-sorozatnak nevezzük, ha $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ p, q \geq n(\varepsilon)$ $(p, q \in \mathbb{N})$ esetén $d(a_p, a_q) < \varepsilon$.

Tétel (Cauchy-féle konvergencia kritérium).
Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{R}^n$-beli sorozat $\Longleftrightarrow$ konvergens, ha Cauchy-sorozat. ((X,d)-ben általában csak az igaz, hogy minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat).

Bizonyítás.

a) Ha $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$ $(\vee\, \mathbb{R}^n \vee (X,d))$-beli konvergens sorozat, akkor $\exists\, x \in \mathbb{R}$ $(\vee\, \mathbb{R}^n \vee$ $\vee (X,d))$, $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\dfrac{\varepsilon}{2}$-re $\exists\, n\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, $\forall\, p,q \geq n\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$-re $d(x,x_p) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ és $d(x,x_q) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, így $\forall\, p,q \geq n(\varepsilon) = n\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$-re

$$d(x_p,x_q) \leq d(x,x_p) + d(x,x_q) < \varepsilon,$$

azaz Cauchy-sorozat.

b) Legyen $\langle x_n \rangle$ Cauchy-sorozat $\mathbb{R}$-ben vagy $\mathbb{R}^n$-ben.
- $\langle x_n \rangle$ korlátos, mert $\varepsilon = 1$-hez $\exists\, n(1)$, hogy $\forall\, p,q \geq n(1)$-re $d(x_p,x_q) <$ < 1. Legyen $q \geq n(1)$ rögzített, $p \geq n(1)$ tetszőleges, akkor

$$d(0,x_p) \leq d(0,x_q) + d(x_p,x_q) < d(0,x_q) + 1\ ,$$

  így, ha $r > \sup\{d(0,x_1),\dots,d(0,x_{n(1)-1}), d(0,x_q)+1\}$, akkor $d(0,x_n) < r$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
- $\langle x_n \rangle$ korlátos, így $\exists \langle x_{\varphi(n)} \rangle$ konvergens részsorozata (lásd a B-W-féle kiválasztási tétel).
- Legyen $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{\varphi(n)}$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor $\dfrac{\varepsilon}{2}$-höz $\exists\, n_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$, hogy $\varphi(n) \geq n_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén $\|x_{\varphi(n)} - x\|_{\mathbb{R}^n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
  Másrészt $\langle x_n \rangle$ Cauchy-sorozat, így $\exists\, n_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, $\forall\, p,q \geq n_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$-re $d(x_p,x_q) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ezért $\forall\, n \geq n(\varepsilon) = \sup\{n_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right), n_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\}$-re

$$\varphi(n) \geq n \quad \text{és} \quad d(x_n,x) \leq d(x_n,x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)},x) < \varepsilon$$

  azaz $x_n \to x$.

2. Definíció. Az (X,d) metrikus teret teljesnek nevezzük, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens.

Megjegyzés. $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^n$ teljes metrikus terek.

5. Nevezetes sorozatok

1. Tétel. *Legyen* $a \in \mathbb{R}$, $\langle a_n \rangle = \langle a^n \rangle$. *Ekkor*

1) $|a| < 1$ *esetén* $a^n \to 0$ *;*

2) $|a| > 1$ *esetén* $\langle a^n \rangle$ *divergens,* $a > 1$*-re* $a^n \to +\infty$ *;*

3) $a = 1$ *esetén* $a^n \to 1$, $a = -1$ *esetén* $\langle a^n \rangle$ *divergens.*

Bizonyítás.

3) Nyilvánvaló.

2) Ha $a > 1$, akkor a Cauchy-egyenlőtlenség miatt

$$\sqrt[n]{(a-1)n \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \leq \frac{(a-1)n + n - 1}{n} = \frac{na - 1}{n} < a \ ,$$

így $(a-1)n < a^n$. Ebből jön, hogy $\forall M$-re, ha $n \geq n(M) > \dfrac{M}{a-1} \implies$ $\implies a^n > (a-1)n > M$, azaz $a^n \to +\infty$.

Ha $a < -1$, akkor az $\langle a^n \rangle$ sorozat $\langle a^{2n} \rangle$ és $\langle a^{2n+1} \rangle$ részsorozatai két különböző értékhez tartanak, így $\langle a^n \rangle$ nem konvergens.

1) Ha $|a| < 1 \implies \dfrac{1}{|a|} > 1 \implies$

$$\left| \left(\frac{1}{a} \right)^n \right| = \left(\frac{1}{|a|} \right)^n \to +\infty \quad \implies \quad \frac{1}{\left(\frac{1}{a} \right)^n} = a^n \to 0$$

(lásd 2.4. tétel).

2. Tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}$ *rögzített, akkor* $n^k \to +\infty$, $\sqrt[k]{n} \to +\infty$ *és* $n^p \to +\infty$, *ha* $p = \dfrac{k}{l}$ $(k, l \in \mathbb{N})$.

Bizonyítás.

– Az $\langle n^k \rangle$ sorozat esetén $n^k > n$, és $\forall$ M-re $\exists$ $n(M) \in \mathbb{N}$, hogy $n(M) > M$, így $\forall$ $n \geq n(M)$-re $n^k > n \geq n(M) > M \implies n^k \to +\infty$ (az archimedesi tulajdonság miatt).

– a $\langle \sqrt[k]{n} \rangle$ sorozat esetén $\forall$ M-re M^k-hoz $\exists$ $n(M^k)$, hogy $\forall$ $n \geq n(M^k)$ $n > M^k \iff \sqrt[k]{n} > M \implies \sqrt[k]{n} \to +\infty$.

— az $\langle n^p \rangle$ eset bizonyítása hasonló.

3. Tétel. *Legyen* $a \in \mathbb{R}_+$, *akkor* $\sqrt[n]{a} \to 1$.

Bizonyítás. A Cauchy-egyenlőtlenség miatt, ha $a \geq 1$,

$$1 \leq \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \leq \frac{a+n-1}{n} = 1 + \frac{a-1}{n} \ ,$$

ami $1 + \dfrac{a-1}{n} \to 1$ és a rendőr-tétel miatt adja, hogy $\sqrt[n]{a} \to 1$.
Ha $0 < a < 1$, akkor $\dfrac{1}{a} > 1$ és így $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} \to 1$ adja, hogy $\sqrt[n]{a} \to 1$.

4. Tétel. $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Bizonyítás.

$$1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \leq \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}},$$

ami $1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{\sqrt{n}} \to 1$ és a rendőr-tétel miatt adja, hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$.

5. Tétel. *Ha* $a \in \mathbb{R},\ a > 1$, *akkor* $a_n = \dfrac{a^n}{n!} \to 0$.

Bizonyítás. Ha $n \geq a^2$, akkor

$$0 < a_{2n} = \frac{a^{2n}}{(2n)!} = \frac{(a^2)^n}{2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1) \cdot n!} =$$
$$= \frac{a^2}{2n} \cdot \frac{a^2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{a^2}{n+1} \cdot \frac{1}{n!} < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n}$$

és a rendőr-tétel adja, hogy $a_{2n} \to 0$.
Másrészt

$$0 < a_{2n+1} = \frac{a}{2n+1}\frac{a^{2n}}{2n!} = \frac{a}{2n+1}a_{2n}$$

és a rendőr-tétel miatt $a_{2n+1} \to 0$ is igaz, így $a_n = \dfrac{a^n}{n!} \to 0$ teljesül.

6. Tétel. $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

Bizonyítás.

– $\sqrt[n]{n!}$ monoton növekvő, mert

$$\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{(n+1)!} \quad\Longleftrightarrow\quad n! < \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^n = (n+1)^n\ ,$$

ami igaz.

– $\sqrt[n]{n!}$ felülről nem korlátos, mert ha létezne $K \in \mathbb{R}$, hogy $\sqrt[n]{n!} < K$ $(\forall\ n \in \mathbb{N}) \iff n! < K^n\ (\forall\ n \in \mathbb{N}) \iff 1 < \dfrac{K^n}{n!}$ ami ellentmond annak, hogy $\dfrac{K^n}{n!} \to 0$.

– $\sqrt[n]{n!}$ monoton növekedése, és hogy felülről nem korlátos adja, hogy $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$, mert $\forall\ M\ \exists\ n(M) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geq n(M)$-re $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n(M)]{[n(M)]!} > M$.

7. Tétel. *Ha $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, akkor $\dfrac{n^k}{a^n} \to 0\ \forall\ k \in \mathbb{N}$ rögzített számra.*

Bizonyítás. Az első tétel 2. részében beláttuk, hogy $\forall\ a > 1$-re $a^n > n(a-1)$ igaz $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re, így – mivel $a > 1$-re $\sqrt[k+1]{a} > 1$ is teljesül –, az is igaz, hogy $(\sqrt[k+1]{a})^n > n\,(\sqrt[k+1]{a} - 1)$, ami ekvivalens az

$$(0 <)\ \frac{n^k}{a^n} < \frac{n}{(\sqrt[k+1]{a} - 1)^{k+1}}$$

egyenlőtlenséggel, így a rendőr-tétel miatt jön az állítás.

8. Tétel. *Az $\left\langle \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \right\rangle$ sorozat konvergens. (Határértékét e-vel jelöljük.)*

Bizonyítás.

– Az $\langle a_n \rangle \doteq \left\langle \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \right\rangle$ és $\langle b_n \rangle \doteq \left\langle \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \right\rangle$ sorozatokra $a_n < b_n\ (n \in \mathbb{N})$ teljesül, mert $1 < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ és $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n > 0$ adja, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (\forall\ n \in \mathbb{N})$$

– $\langle a_n \rangle$ monoton növekvő, mert a Cauchy-egyenlőtlenség miatt

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1+n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \qquad (\forall\ n \in \mathbb{N})\ ,$$

ami ekvivalens az

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \qquad (\forall\ n \in \mathbb{N})$$

egyenlőtlenséggel, ami adja, hogy $a_n < a_{n+1}$ $(\forall\ n \in \mathbb{N})$.

– $\langle b_n \rangle$ monoton csökkenő, mert

$$\sqrt[n+2]{1 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} < \frac{1+(n+1)\left(\dfrac{n}{n+1}\right)}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \qquad (\forall\ n \in \mathbb{N})\ ,$$

ami ekvivalens az

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \iff$$

$$\iff b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = b_{n+1}\ .$$

– Így $a_n < b_1 = 4$ $(\forall\ n \in \mathbb{N})$, azaz $\langle a_n \rangle$ monoton növekvő és felülről korlátos, így konvergens.

4. feladatsor

1) Vizsgálja meg az alábbi sorozatok korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját:

$$\left\langle \frac{n}{n+1} \right\rangle; \qquad \left\langle \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right\rangle; \qquad \left\langle \frac{1}{n!} \right\rangle; \qquad \left\langle \frac{2n}{n^2+1} \right\rangle;$$

$$\langle (-1)^n 0.999^n \rangle; \qquad \langle (-1)^n n \rangle; \qquad \left\langle \frac{1}{\sqrt{n}} \right\rangle.$$

2) Bizonyítsa be, hogy ha $x_n \to +\infty$, akkor alulról korlátos, de felülről nem.

3) Legyen $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ olyan, hogy $x_n = y_n$ véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével és $x_n \to x$ $(x \in \mathbb{R}_b)$. Bizonyítsa be, hogy $y_n \to x$ is teljesül.

4) Igazolja, hogy $\langle x_n \rangle$ akkor és csak akkor korlátos (vagy konvergens), ha az $\langle x_{2n} \rangle$ és $\langle x_{2n-1} \rangle$ részsorozatai korlátosak (vagy konvergensek és határértékük egyenlő).

5) Adjon meg olyan sorozatot mely monoton, de nem konvergens.

6) Ha $x_n \to x$, $x_n \geq 0$ akkor igazolja, hogy $\sqrt[k]{x_n} \to \sqrt[k]{x}$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$ rögzített számra.

7) Igaz-e, ha $x_n + y_n \to a$, akkor $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ is konvergensek; illetve, ha $x_n \cdot y_n \to a$, akkor $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ is konvergensek.

8) Igazolja, hogy egy $\langle z_n \rangle$ komplex számsorozatra $z_n \to \infty \iff |z_n| \to +\infty$.

9) Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$\left\langle \frac{100n}{n^2+1} \right\rangle; \qquad \langle \sqrt{n+2} - \sqrt{n} \rangle; \qquad \left\langle \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} \right\rangle;$$

$$\left\langle \frac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}} \right\rangle; \qquad \left\langle \frac{2^n+3^{n+1}}{2^{n+1}+3^n} \right\rangle; \qquad \left\langle \left(\frac{n+1}{3n+2}, \frac{1}{n^2+1} \right) \right\rangle.$$

10) Melyek Cauchy-sorozatok az alábbiak közül:

$$\left\langle \frac{1}{2n} \right\rangle; \qquad \left\langle (-1)^n + \frac{1}{n} \right\rangle; \qquad \left\langle \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right\rangle; \qquad \left\langle \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right\rangle;$$

$$\left\langle 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \right\rangle; \qquad \left\langle 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \right\rangle.$$

11) Vizsgálja meg az alábbi sorozatok konvergenciáját:

$$\langle n^p \rangle \quad (p \in \mathbb{Q}_+); \qquad \left\langle 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} \right\rangle.$$

12) Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$\left\langle \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right\rangle;$$

$$\left\langle \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} \right\rangle;$$

$$\left\langle \left(0.9 + \frac{1}{n}\right)^n \right\rangle; \qquad \left\langle \left(1.1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\rangle; \qquad \left\langle \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \right\rangle;$$

$$\left\langle \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \right\rangle; \qquad \left\langle \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \right\rangle; \qquad \left\langle \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \right\rangle;$$

$$\left\langle \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \right\rangle; \qquad \left\langle \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \right\rangle; \qquad \left\langle \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n+1} \right\rangle;$$

$$\left\langle \left(\frac{3n-2}{3n+5}\right)^{n-4} \right\rangle; \qquad \left\langle \left(\frac{5n-3}{5n+3}\right)^{-n-2} \right\rangle.$$

V. Sorok

1. Alapfogalmak és alaptételek

1. Definíció. Ha adott egy $\langle a_n \rangle$ $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$-beli sorozat, akkor azt az $\langle S_n \rangle$ sorozatot, melynél $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ végtelen sornak nevezzük és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (vagy $\sum a_n$)-nel jelöljük. S_n-t a sor n-edik részletösszegének, a_n-t a sor n-edik tagjának nevezzük. Ha adott még az $a_0 \in \mathbb{R}$ $(\vee \mathbb{C})$ szám is, úgy azt az $\langle S_n \rangle$ sorozatot, melynél $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ is végtelen sornak nevezzük és rá a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jelölést használjuk.

2. Definíció. A $\sum a_n$ sort konvergensnek mondjuk, ha $\langle S_n \rangle$ konvergens és a $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ számot a sor összegének nevezzük.
Ezen összeget jelölheti a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(\vee \sum a_n \vee \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n)$ szimbólum is.
A $\sum a_n$ sor divergens, ha nem konvergens.

Például:

1) Legyen $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ úgynevezett mértani (vagy geometriai) sor konvergens és összege $\dfrac{1}{1-q}$.

2) A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ úgynevezett harmonikus sor divergens.

Megjegyzés. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciája éppen azt jelenti, hogy $\exists\, S \in \mathbb{R}$ $(\vee \mathbb{C})$, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, n(\varepsilon)$, hogy $\forall n \geq n(\varepsilon)$ esetén $|S_n - S| < \varepsilon$.

1. Tétel (Cauchy-féle konvergencia kritérium sorokra). *A $\sum a_n$ sor $\Longleftrightarrow$ konvergens, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n, m \in \mathbb{N},\ n > m \geq n(\varepsilon)$ esetén*

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon \ .$$

Bizonyítás. A $\sum a_n$ sor $\iff$ konvergens (definíció szerint), ha $\langle S_n \rangle$ konvergens, ami (a sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritérium miatt) $\iff$ igaz, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n, m \geq n(\varepsilon)$ $(n > m)$ esetén

$$|S_n - S_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon \ ,$$

amit bizonyítani kellet.

1. Következmény. *A $\sum a_n$ sor $\iff$ konvergens, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\forall\ m \geq n(\varepsilon)$ és $p \in \mathbb{N}$ esetén*

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+p}| < \varepsilon \ .$$

Bizonyítás. Mint az előbb, csak $n = m + p > m \geq n(\varepsilon)$ választással.

2. Következmény (a sor konvergenciájának szükséges feltétele). *Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $a_n \to 0$.*

Bizonyítás. Ha az 1. tételben $m = n-1 < n$, úgy azt kapjuk, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén $|a_n| < \varepsilon$, ami azt jelenti hogy $a_n \to 0$.

Például:

1) A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ sornál $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, de nem konvergens.

2) A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ sor konvergens, ha $p > 1$, divergens, ha $p \leq 1$.

3. Definíció. A $\sum a_n$ abszolút konvergens, ha $\sum |a_n|$ konvergens. A $\sum a_n$ feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

2. Tétel. *Egy abszolút konvergens sor konvergens is.*

Bizonyítás. A $\sum |a_n|$ konvergenciája miatt $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ m, n \in \mathbb{N},\ n > m \geq n(\varepsilon)$-re

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \right| < \varepsilon \quad \text{és így} \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \right| < \varepsilon \ ,$$

ami az 1. tétel miatt adja $\sum a_n$ konvergenciáját.

3. Tétel. *Ha* $\sum a_n$ *és* $\sum b_n$ *konvergens sorok és* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *tetszőlegesek, akkor a* $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ *sor is konvergens és összege* $\lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Bizonyítás. $\sum\limits_{k=1}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ miatt a $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ sor n-edik részletösszege a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok n-edik részletösszegének a λ, μ számokkal képzett lineáris kombinációja, így a sorozatok műveleti tulajdonságai miatt jön az állítás.

2. Konvergenciakritériumok

1. Tétel (nemnegatív tagú sorokra). *Legyen* $\sum a_n$ *valós és nemnegatív tagokból álló sor.* $\sum a_n \iff$ *konvergens, ha részletösszegeinek* $\langle S_n \rangle$ *sorozata korlátos.*

Bizonyítás.

a) $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N} \implies \langle S_n \rangle$ monoton növekvő és ha még korlátos is, akkor konvergens, így $\sum a_n$ konvergens.

b) Ha $\sum a_n$ konvergens $\implies \langle S_n \rangle$ konvergens $\implies \langle S_n \rangle$ korlátos.

2. Tétel (összehasonlító kritérium).
Legyen $\sum a_n$ *egy komplex sor és* $\sum b_n$ *egy valós nemnegatív tagú sor.*

a) *Ha* $|a_n| \leq b_n \ \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ *esetén és* $\sum b_n$ *konvergens, akkor a* $\sum a_n$ *abszolút konvergens (majoráns kritérium).*

b) *Ha* $|a_n| \geq b_n \ \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ *esetén és* $\sum b_n$ *divergens, akkor a* $\sum a_n$ *nem abszolút konvergens (minoráns kritérium).*

Bizonyítás.

a) $\sum b_n$ konvergenciája miatt $\forall \ \varepsilon > 0$-hoz $\exists \ n(\varepsilon) \geq n_0$, hogy $\forall \ n, m \geq n(\varepsilon)$ $(n > m)$ esetén

$$|b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_n| < \varepsilon \ ,$$

így

$$||a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n|| = |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n| \leq$$
$$\leq b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_n = |b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_n| < \varepsilon$$

is igaz $\implies$ (a Cauchy-kritérium miatt) $\sum a_n$ abszolút konvergens.

b) Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens lenne, akkor az a) rész miatt $\sum b_n$ is konvergens lenne, ami ellentmondás, így $\sum a_n$ nem abszolút konvergens.

3. Tétel (Leibniz-féle kritérium). *Legyen* $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *és az* $\langle a_n \rangle$ *sorozat monoton csökkenően tartson a 0-hoz, akkor a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *(úgynevezett jelváltó, vagy alternáló) sor konvergens.*

Bizonyítás.
A feltételek miatt az $\langle S_n \rangle$ részletösszeg sorozatra:

$$S_{2n} = S_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} \geq S_{2n-2}\ ,\ S_{2n} =$$
$$= a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1\ ,$$

így $\langle S_{2n} \rangle$ monoton növekvő és felülről korlátos $\Longrightarrow$ konvergens.
Másrészt $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$, azaz $\langle S_{2n+1} \rangle$ konvergens és határértéke megegyezik az $\langle S_{2n} \rangle$ hatáértékével, így $\{S_n\} = \{S_{2n}\} \cup \{S_{2n+1}\}$ miatt kapjuk $\langle S_n \rangle$ és így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ sor konvergenciáját.

Például: a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n}$ úgynevezett Leibniz-féle sor konvergens.

4. Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium). *Legyen* $\sum a_n$ *egy komplex sor.*

a) Ha $\exists\ 0 < q < 1$ *és* $n_0 \in \mathbb{N}$, *hogy* $\forall\ n \geq n_0$*-ra* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ *akkor* $\sum a_n$ *abszolút konvergens.*

b) Ha $\forall\ n \geq n_0$*-ra* $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, *akkor* $\sum a_n$ *divergens.*

Bizonyítás.

a) Ha $\forall n \geq n_0$-ra $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, akkor $|a_n| \leq q^n$ $(n \geq n_0)$, így a $\sum b_n = |a_1| + \ldots + |a_{n_0-1}| + \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} q^n$ sorra, mely $|q| < 1$ miatt konvergens, teljesül, hogy $|a_n| \leq b_n$ $\Longrightarrow$ (az összehasonlító kritérium miatt) $\sum a_n$ abszolút konvergens.

b) Ha $\forall n \geq n_0$-ra $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ $\Longleftrightarrow$ $|a_n| \geq 1$ $\Longrightarrow$ $\langle a_n \rangle$ nem tart a 0-hoz $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ nem konvergens.

Következmény (a Cauchy-féle gyökkritérium átfogalmazása). *Legyen $\sum a_n$ egy komplex sor.*

a) Ha $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = A < 1$, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

b) Ha $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = A > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens.

Bizonyítás.

a) $q = \dfrac{A+1}{2} < 1$-re $\exists\ n_0$, $\forall\ n \geq n_0$-ra $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \implies \sum a_n$ abszolút konvergens.

b) $\exists \left\langle \sqrt[\varphi(n)]{|a_{\varphi(n)}|} \right\rangle$ részsorozat, melyre $\sqrt[\varphi(n)]{|a_{\varphi(n)}|} \to A > 1 \implies \exists\ n_0$, $\forall\ n \geq n_0$-ra $\sqrt[\varphi(n)]{|a_{\varphi(n)}|} > 1 \iff |a_{\varphi(n)}| \geq 1 \implies |a_{\varphi(n)}|$ nem tart 0-hoz $\implies a_{\varphi(n)}$ nem tart 0-hoz $\implies a_n$ nem tart a 0-hoz $\implies \sum a_n$ divergens.

5. Tétel (D'Alembert-féle hányadoskritérium). *Legyen $\sum a_n$ egy komplex sor, melyre $a_n \neq 0$.*

a) Ha $\exists\ 0 < q < 1$ és $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geq n_0$-ra $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \implies$ $\sum a_n$ abszolút konvergens.

b) Ha $\forall\ n \geq n_0$-ra $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \implies \sum a_n$ sor divergens.

Bizonyítás.

a) Ha $n \geq n_0$-ra $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \implies \forall\ m \in \mathbb{N}$-re $|a_{n_0+m}| \leq |a_{n_0}| q^m \implies$
$\implies \sum b_n = \sum\limits_{k=1}^{n_0} |a_k| + \sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty} |a_{n_0}| q^{k-n_0}$ sor konvergens és $|a_n| \leq b_n \implies$ (az összehasonlító kritérium miatt) $\sum a_n$ abszolút konvergens.

b) Ha $n \geq n_0$-ra $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \implies |a_{n+1}| \geq |a_n| \implies |a_n| \geq |a_{n_0}|$ $(\forall\ n \geq n_0) \implies |a_n|$ nem tart 0-hoz $\implies a_n$ nem tart 0-hoz $\implies \sum a_n$ divergens.

Következmény (a D'Alembert-féle hányadoskritérium átfogalmazása). *Ha $\sum a_n$ egy komplex sor, melyre $a_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor*

a) Ha $\overline{\lim} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \implies \sum a_n$ abszolút konvergens;

$$b) \quad \textit{Ha } \underline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \implies \sum a_n \textit{ divergens.}$$

Bizonyítás. Hasonlóan, mint az előző következménynél.

Megjegyzések.

1. A $\sum \frac{1}{n}$ és $\sum \frac{1}{n^2}$ sorknál nem alkalmazhatók a 4. és 5. tételek.
2. A Cauchy-féle gyökkritérium erősebb, mint a D'Alembert-féle hányadoskritérium, azaz ha a konvergencia vagy divergencia az utóbbival eldönthető, akkor az előbbivel is, de megadható olyan sor, melynek konvergenciája a Cauchy-féle gyökkritériummal eldönthető, de a D'Alembert-féle hányadoskritériummal nem. Például:

$$\sum a_n \ , \quad \text{ha} \quad a_n = \begin{cases} 5^{-n} \ , & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 2^{-n} \ , & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

6. Tétel (Cauchy-féle kondenzációs tétel). *Legyen* $\sum a_n$ *egy valós, monoton csökkenő és nemnegatív tagú sor.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \iff$ *konvergens, ha* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *konvergens.*

Bizonyítás. Ha $\langle S_n \rangle$, $\langle s_n \rangle$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \wedge \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ sorok részletösszegsorozatai és $m, n \in \mathbb{N}$, akkor

$$n < 2^{m+1} \implies S_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^m} + \ldots + a_{2^{m+1}-1}) \leq$$
$$\leq a_1 + \ldots + 2^m a_{2^m} = s_m$$

$$n \geq 2^m \implies S_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{m-1}+1} + \ldots + a_{2^m}) \geq$$
$$\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{m-1} a_{2^m} = \frac{1}{2} s_m$$

Így $\langle S_n \rangle$ és $\langle s_n \rangle$ egyszerre korlátos, vagy sem. Másrészt mindkét sorozat monoton növekedő, ezért egyszerre konvergensek, vagy sem.

3. Műveletek sorokkal

1. Definíció. Legyen $\sum a_n$ komplex sor $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ invertálható leképzése $\mathbb{N}$-nek $\mathbb{N}$-re, $b_n = a_{\varphi(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor a $\sum b_n = \sum a_{\varphi(n)}$ sort a $\sum a_n$ átrendezett sorának nevezzük.

1. Tétel. *Egy abszolút konvergens sor bármely átrendezett sora is konvergens és összege az eredeti sor összege.*

Bizonyítás. $\sum a_n$ abszolút konvergens, így $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$-hoz $\exists\ n_0 = n\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, hogy $\forall n > m > n_0$ természetes számokra

$$|a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha φ és b_n az 1. definíció szerinti, és $S_n = a_1 + \ldots + a_n,\ s_n = b_1 + \ldots + b_n$, továbbá $n(\varepsilon) = \sup\{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n_0)\}$, akkor $\forall\ n > n(\varepsilon)$-ra $|S_n - s_n| < \varepsilon$, amiből jön, hogy $S_n - s_n \to 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

2. Tétel (Riemann-féle átrendezési tétel). *Ha $\sum a_n$ egy valós feltételesen konvergens sor, $s, S \in \mathbb{R}_b,\ s \leq S$, akkor a $\sum a_n$ sornak létezik olyan $\sum b_n$ átrendezett sora, melyre az $S_n = b_1 + \ldots + b_n,\ (n \in \mathbb{N})$ jelöléssel $\underline{\lim}\ S_n = s$ és $\overline{\lim}\ S_n = S$.*

Bizonyítás. Lásd Rudin (85-86. oldal).

2. Definíció.
Legyen adott a $\sum a_n$ sor. Ha $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő, $b_1 = a_1 + \ldots + a_{\varphi(1)}, \ldots, b_n = a_{\varphi(n-1)+1} + \ldots + a_{\varphi(n)},\ (n > 1)$, akkor a $\sum b_n$ sort a $\sum a_n$ sor zárójelezett (csoportosított) sorának nevezzük.

3. Tétel. *Egy konvergens sor tetszőlegesen zárójelezhető a konvergencia és az összeg megváltozása nélkül.*

Bizonyítás. Jelölje S_n a $\sum a_n$, σ_n a $\sum b_n$ zárójelezett sor n-edik részletösszegét. Nyilván $\sigma_n = S_{\varphi(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$, azaz $\langle \sigma_n \rangle$ részsorozata $\langle S_n \rangle$ -nek, így $\langle S_n \rangle$ konvergenciája adja $\langle \sigma_n \rangle$ konvergenciáját, míg a $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ egyenlőség az összegek azonosságát.

Megjegyzés. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ sor divergens, de van olyan zárójelezése, mely konvergens.

3. Definíció. $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok szorzatának nevezünk minden olyan sort, melynek tagjai $a_i b_j$ alakúak és minden ilyen szorzat pontosan egyszer fordul elő tagként.

Megjegyzés. A különböző szorzatok egymásból csoportosításokkal és átrendezésekkel kaphatók. Értelmezünk két speciális szorzatot.

4. Definíció. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ sorok téglányszorzata az a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ sor, melyben

$$c_n = (a_0 + \ldots + a_{n-1})b_n + a_n(b_0 + \ldots + b_{n-1}) + a_n b_n \ .$$

4. Tétel. *Ha a $\sum c_n$ a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok téglányszorzata, akkor*

$$\sum c_n = \left(\sum a_n\right) \cdot \left(\sum b_n\right) \ .$$

Bizonyítás. Ha S_n^c, S_n^a és S_n^b a $\sum c_n$, $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok n-edik részletösszegei, úgy $S_n^c = S_n^a \cdot S_n^b$, ami adja az állítást.

5. Definíció. A $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok Cauchy-szorzata az a $\sum c_n$ sor, melyben

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 \ .$$

5. Tétel (Mertens). *Ha a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens sorok egyike abszolút konvergens, akkor Cauchy-szorzatuk konvergens és összege: $(\sum a_n) \cdot (\sum b_n)$.*

Bizonyítás. Legyen $s_n = a_0 + \ldots + a_n$, $S_n = b_0 + \ldots + b_n$, $\sigma_n = c_0 + \ldots + c_n$, $a = \sum a_n$, $b = \sum b_n$, $A = \sum |a_n|$ (feltéve, hogy a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens) és $d_n = S_n - b$ ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor $\forall$ n-re

$$\sigma_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \ldots + (a_0 b_n + \ldots + a_n b_0) =$$
$$= a_0 S_n + a_1 S_{n-1} + \ldots + a_n S_0 = a_0(b + d_n) + \ldots + a_n(b + d_0) =$$
$$= b s_n + a_0 d_n + \ldots + a_n d_0 \ .$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} b s_n = ab$, így elég megmutatni, hogy az $\langle e_n \rangle$ sorozat, melyre $e_n = a_0 d_n + \ldots + a_n d_0$ ($n \in \mathbb{N}$), nullsorozat.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy $A \neq 0$ (ellenkező esetben $a_n = 0$ $\forall$ n-re, így igaz az állítás). $d_n \to 0$, így $\dfrac{\varepsilon}{A}$-hoz $\exists$ $n\left(\dfrac{\varepsilon}{A}\right)$, hogy $\forall$ $n \geq n\left(\dfrac{\varepsilon}{A}\right)$-ra $|d_n| < \dfrac{\varepsilon}{A}$. Ha $n(\varepsilon) = n\left(\dfrac{\varepsilon}{A}\right)$, akkor $\forall$ $n \geq n(\varepsilon)$-ra

$$|e_n| \leq |d_0 a_n + \ldots + d_{n(\varepsilon)} a_{n-n(\varepsilon)}| + |d_{n(\varepsilon)+1} a_{n-n(\varepsilon)-1} + \ldots + d_n a_0| \leq$$

$$\leq |d_0 a_n + \ldots + d_{n(\varepsilon)} a_{n-n(\varepsilon)}| + \varepsilon \ .$$

Ebből $\overline{\lim}|e_n| \leq \varepsilon$ következik, és így $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 0$.

4. Tizedes törtek

Tétel. *Legyen $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Ekkor $\forall$ $x \in]0,1[$ valós számhoz egy és csak egy olyan $\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \to A$ sorozat létezik, hogy $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{10^n}$, és nem létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $a_m < 9$ és $a_k = 9$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $k > m$ esetén.*

Bizonyítás. Felhasználjuk, hogy $\forall$ $x \in \mathbb{R}$-hez egyértelműen létezik $l \in \mathbb{Z}$, hogy $l \leq x < l + 1$ (lásd II.2.d) 2. tétel). Ha $x \in]0, 10[$, akkor nyilván $l \in A$. Legyen $x \in]0, 1[$, ekkor $10x \in]0, 10[$, így létezik $a_1 \in A$, hogy

$$a_1 \leq 10x < a_1 + 1 \iff \frac{a_1}{10} \leq x < \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} \quad \text{illetve} \quad \iff 0 \leq 10x - a_1 < 1$$

amiből a második lépésben jön, hogy $100x - 10a_1 \in [0, 10[$-hez létezik $a_2 \in A$, hogy

$$a_2 \leq 100x - 10a_1 < a_2 + 1 \iff \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq x < \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2} \ ,$$

$$\text{illetve} \qquad 0 \leq 100x - 10a_1 - a_2 < 1$$

is teljesül. Az eljárást folytatva, ha a_{n-1}-et meghatároztuk, akkor $10^n x - 10^{n-1} a_1 - \ldots - 10a_{n-1} \in [0, 10[$-hez $\exists$ $a_n \in A$, hogy

$$a_n \leq 10^n x - 10^{n-1} a_1 - \ldots - 10a_{n-1} < a_n + 1 \iff$$

$$\iff s_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \leq x <$$

$$< \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} = s_n + \frac{1}{10^n} \ ,$$

ami adja, hogy $0 \leq x - s_n < \dfrac{1}{10^n}$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}) \implies s_n \to x \implies \exists \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{10^n} =$ $= x$.

Definíció. A tételben szereplő $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{10^n}$ sor összegét

$$0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

módon is jelöljük és $x \in]0,1[$ tizedestört-alakjának nevezzük.
Ha $\exists\ k \in \mathbb{N}$, hogy $a_k \neq 0$ és $a_n = 0\ \forall\ n > k$ természetes számra, akkor véges tizedes törtről beszélünk és

$$0, a_1 a_2 \ldots a_k$$

módon jelöljük.
Ha léteznek olyan $k, l \in \mathbb{N}$ számok, hogy $a_{k+n} = a_{k+l+n}$ $(n = 0, 1 \ldots)$, akkor szakaszos tizedes törtről beszélünk és azt

$$0, a_1 \ldots a_{k-1} \overline{a_k \ldots a_{k+l-1}}$$

módon is jelöljük.

Megjegyzések.

1. Vizsgálható egy $x \in]0,1[$ szám úgynevezett a-adikus (például diadikus) tört előállítása is, ekkor $A = \{0, 1, \ldots, a-1\}$ $(a \in \mathbb{N})$.
2. Belátható, hogy $x \iff$ racionális, ha szakaszos tizedestört.
3. Ha $y \in \mathbb{R}$, akkor $\exists\ x \in]0,1[$ és $l \in \mathbb{Z}$, hogy $y = l + x$. Ekkor y előállítása $y = l, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ módon jelölhető.

5. feladatsor

1) Számítsa ki az alábbi sorok összegét:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 100\cdot(0.9)^n \ ; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n} \ ; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{5^n}\right) \ ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \ ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) \ ; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \ .$$

2) Bizonyítsa be, hogy az alábbi sorok divergensek:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}); \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.2}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \ .$$

3) Vizsgálja meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek (divergensek):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+10}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \quad (p>0,\ p\in\mathbb{Q});$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n+3} \ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1} \ ; \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n-1}} \ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{n!} \ ;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n} \ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3} \ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2} \ ; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{10} \quad (|a_n|<10) \ .$$

4) Vizsgálja meg, hogy az alábbi sorok divergensek, feltételesen konvergensek, vagy abszolút konvergensek-e?

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n^2} \ ; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{3^n} \ ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}} \ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[n]{3}} \ .$$

5) Írja fel két egész szám hányadosaként az alábbi végtelen szakaszos tizedestörteket:

$$0.\overline{3} \ ; \qquad 0.\overline{25} \ ; \qquad 20.7\overline{25} \ ; \qquad 0.2\overline{321} \ .$$

6) Bizonyítsa be, hogy egy konvergens és egy divergens sor összege divergens.

7) Bizonyítsa be, hogy ha $\sum a_n$ nemnegatív tagú, konvergens sor, akkor $\sum a_n^2$ is konvergens. Igaz-e a megfordítás?

8) Bizonyítsa be, hogy ha $\sum a_n^2$ és $\sum b_n^2$ konvergensek, akkor

$$\sum |a_n b_n| \ , \qquad \sum (a_n + b_n)^2 \quad \text{és} \quad \sum \frac{|a_n|}{n}$$

konvergensek.

9) Bizonyítsa be, hogy ha $\sum a_n$ nemnegatív tagú, konvergens sor, akkor $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ is konvergens.

10) Legyenek $\sum a_n$ és $\sum b_n$ adott sorok és $S_n = a_1 + \ldots + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$. Bizonyítsa be, hogy ha $\langle S_n \rangle$ korlátos és $\langle b_n \rangle$ monoton csökkenő nullsorozat, akkor $\sum a_n b_n$ konvergens (Dirichlet-kritérium).

11) Bizonyítsa be, hogy ha $\sum a_n$ valós konvergens számsor és a $\langle b_n \rangle$ sorozat monoton és korlátos, akkor $\sum a_n b_n$ konvergens (Abel-kritérium).

12) Belátható, hogy az alábbi állítások igazak a $\sum a_n$ pozitív tagú sorra:

   a) Ha $\exists \ q > 1 \wedge n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall \ n \geq n_0 \quad n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq q$, akkor $\sum a_n$ konvergens (Raabe-kritérium);

   b) Ha $\exists \ q > 1 \wedge n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall \ n \geq n_0 \quad n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \geq q$, akkor $\sum a_n$ konvergens (Bolyai Farkas kritériuma);

   Bizonyítsa be, hogy a) és b) ekvivalensek.

VI. Függvények folytonossága

1. Alapfogalmak

1. Definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}$, $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$, típusú függvényeket rendre valós, valós értékű, komplex, illetve metrikus teret metrikus térbe képező függvénynek nevezzük.

2. Definíció. Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvény korlátos, ha $f(E)$ korlátos.
Az $f : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}$ függvény alulról (felülről) korlátos, ha $f(E)$ alulról (felülről) korlátos.
A $\sup f(E)$, $\inf f(E)$ számokat az f pontos felső, illetve pontos alsó korlátjának (supremumának, illetve infimumának) nevezzük E-n.

3. Definíció. Ha az $f : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}$ függvény esetén létezik $x_1, x_2 \in E$, hogy

$$\sup f(E) = f(x_1), \quad \inf f(E) = f(x_2) ,$$

akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik abszolút maximuma, illetve minimuma E-n.
Az $f : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in E$-ben helyi (lokális) maximuma, illetve minimuma van, ha létezik $K(x_0, \delta)$, hogy $x \in K(x_0, \delta) \cap E$-re $f(x) \leq f(x_0)$, illetve $f(x) \geq f(x_0)$ teljesül.

4. Definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény monoton növekvő (csökkenő), ha $\forall\ x_1, x_2 \in E,\ x_1 < x_2$-re $f(x_1) \leq f(x_2)$, (illetve $f(x_1) \geq f(x_2)$) teljesül (szigorú monotonitásnál $f(x_1) < f(x_2)$, illetve $f(x_1) > f(x_2)$).
Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $x_0 \in E$-n növekvően (csökkenően) halad át, ha létezik $K(x_0, \delta)$, hogy $\forall\ x < x_0,\ x \in K(x_0, \delta) \cap E$ esetén

$$f(x) \leq f(x_0)\ (f(x) \geq f(x_0))$$

és $x > x_0,\ x \in K(x_0, \delta) \cap E$-re

$$f(x) \geq f(x_0)\ (f(x) \leq f(x_0))$$

teljesül.

2. Folytonosság fogalma

1. Definíció. Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvény az $x_0 \in E$ pontban folytonos, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\, x \in E,\ d_X(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$ esetén $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvény folytonos az $A \subseteq E$ halmazon, ha A minden pontjában folytonos.

Megjegyzések.

1. Speciálisan az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vagy $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény az $x_0 \in E$ pontban folytonos, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\, x \in E$, $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
   Vagy az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény az $x_0 \in E$ pontban folytonos, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\, x \in E,\ \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon)$ esetén $\|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$.
2. Megfogalmazható az úgynevezett környezetes változat is:
   Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvény az $x_0 \in E$ pontban folytonos, ha $\forall\, K_Y(f(x_0), \varepsilon)$-hoz $\exists\, K_X(x_0, \delta(\varepsilon))$, hogy $\forall\, x \in E,\ x \in K_X(x_0, \delta(\varepsilon)) \implies f(x) \in K_Y(f(x_0), \varepsilon)$.
3. A folytonosság pontbeli (lokális) tulajdonság, amely globálissá tehető.
4. Egy $f : \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vagy (X, d)) függvény (sorozat) folytonos $\mathbb{N}$-en.
5. Az $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény folytonos, de az
   $$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0\,, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$
   (úgynevezett Dirichlet-féle) függvény sehol sem folytonos.

1. Tétel (átviteli elv). *Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvény akkor, és csak akkor folytonos az $x_0 \in E$ pontban, ha minden x_0-hoz konvergáló E-beli $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén az $\langle f(x_n) \rangle$ (Y, d_Y)-beli sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Bizonyítás.

a) Legyen f folytonos $x_0 \in E$-ben $\implies$ $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\, x \in E \cap K_X(x_0, \delta(\varepsilon)) \implies f(x) \in K_Y(f(x_0), \varepsilon)$. Legyen $\langle x_n \rangle$ olyan, hogy $x_n \in E,\ x_n \to x_0 \implies \delta(\varepsilon)$-hoz $\exists\, n(\delta(\varepsilon)) = n(\varepsilon)$, $\forall\, n \geq n(\delta(\varepsilon))$-ra $x_n \in K_X(x_0, \delta(\varepsilon)) \cap E$ és így $f(x_n) \in K_Y(f(x_0), \varepsilon)$, azaz $f(x_n) \to f(x_0)$.

b) Tegyük fel, hogy $\forall\ x_n \to x_0$ $(x_n \in E)$ esetén $f(x_n) \to f(x_0)$. Feltesszük, hogy f nem folytonos $x_0 \in E$-ben $\Longrightarrow\ \exists\ \varepsilon > 0,\ \forall\ \delta(\varepsilon) > 0$-ra, így $\delta(\varepsilon) = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$-re is $\exists\ x_n \in E$, hogy

$$d(x_0, x_n) < \frac{1}{n}\ , \quad \text{de} \quad d(f(x_0), f(x_n)) \geq \varepsilon \implies d(x_0, x_n) \to 0\ ,$$

azaz $x_n \to x_0$, de $f(x_n)$ nem tart $f(x_0)$-hoz, ami ellentmondás $\Longrightarrow$ f folytonos x_0-ban.

Megjegyzés. A folytonosság itt megadott ekvivalens megfogalmazását sorozatos vagy Heine-féle definíciójának nevezik.

2. Tétel. *Az $f : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}^m$ $(f = (f_1, \ldots, f_m),\ f_i : E \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m))$ függvény $\Longleftrightarrow$ folytonos az $x_0 \in E$-ben ha az f_i függvények mindegyike folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás. Az átviteli elv és a sorozatoknál kimondott tétel segítségével nyilvánvaló.

2. Definíció. Az $f : E \subset \mathbb{R} \to (Y, d)$ függvény balról (jobbról) folytonos az $x_0 \in E$ pontban, ha az f $]-\infty, x_0] \cap E$-re (illetve $[x_0, +\infty[\cap E$-re) való leszűkítése folytonos x_0-ban.

Megjegyzések.

1. A definíció adja, hogy $f \iff$ balról (illetve jobbról) folytonos x_0-ban, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall x \in E$, $x_0 - \delta(\varepsilon) < x \leq x_0$ (illetve $x_0 \leq x < x_0 + \delta(\varepsilon)$) esetén $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.
2. Megfogalmazható a sorozatos változat is.

3. Tétel. *Az $f : E \subset \mathbb{R} \to (Y, d)$ függvény $\Longleftrightarrow$ folytonos az x_0-ban, ha ott jobbról és balról is folytonos.*

Bizonyítás.

a) Ha f folytonos $x_0 \in E$-ben, úgy nyilvánvalóan jobbról és balról is folytonos.

b) Ha f jobbról és balról folytonos $x_0 \in E$-ben $\Longrightarrow$ $\varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta_1(\varepsilon)$ és $\delta_2(\varepsilon)$, hogy

$$x \in E,\ x_0 \leq x < x_0 + \delta_1(\varepsilon) \implies d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon\ ,$$

$$x \in E,\ x_0 - \delta_2(\varepsilon) < x \le x_0 \implies d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon \ .$$

Így ha $\delta(\varepsilon) = \inf\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$, akkor $x \in K(x_0, \delta(\varepsilon)) \cap E$ esetén

$$d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon \ ,$$

azaz f folytonos $x_0 \in E$-ben.

4. Tétel (jeltartás). *Ha az $f : E \subset (X, d) \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $x_0 \in E$-ben és $f(x_0) \neq 0$, akkor $\exists\ K(x_0, \delta) \subset (X, d)$, hogy $\forall\ x \in K(x_0, \delta) \cap E$, akkor* $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f(x)$.

Bizonyítás. A folytonosság miatt $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(x_0)|$-hoz $\exists\ K(x_0, \delta)$, $\forall\ x \in K(x_0, \delta) \cap E \implies f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$ azaz $|f(x)| > \frac{1}{2}|f(x_0)| \implies$ $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f(x)$, ha $x \in K(x_0, \delta) \cap E$.

3. Definíció. Az $f : E \subset (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvény egyenletesen folytonos az $E_1 \subset E$ halmazon, ha $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall\, x, y \in E_1,\ d_X(x, y) < \delta(\varepsilon)$ esetén $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

3. Folytonosság és műveletek

1. Tétel. *Ha az $f, g : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}^n$ függvények folytonosak az $x_0 \in E$-ben, akkor az $f + g$ és λf $(\lambda \in \mathbb{R} \vee \mathbb{C})$ is folytonosak x_0-ban.*

Bizonyítás. Az átviteli elv szerint f, g akkor, és csak akkor folytonosak x_0-ban, ha $\forall\ x_n \to x_0\ (x_n \in E) \implies f(x_n) \to f(x_0),\ g(x_n) \to g(x_0) \implies$ (a sorozatokról tanultak szerint)

$$f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0)$$

$\implies$ (ismét használva az átviteli elvet) $f + g$ folytonos x_0-ban.
A másik állítás hasonlóan bizonyítható.

2. Tétel. *Ha az $f, g : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{C})$ függvények folytonosak az $x_0 \in E$-ben, akkor az $f \cdot g$ és $g(x) \neq 0$ $(x \in E)$ esetén $\frac{f}{g}$ is folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás. Mint az előbb.

3. Tétel (az összetett függvény folytonossága). *Legyenek* (X, d_X), $(Y, d_Y), (Z, d_Z)$ *metrikus terek;* $f : E \subseteq X \to Y$, $g : f(E) \subseteq Y \to Z$ *adott függvények. Ha* f *folytonos az* $x_0 \in E$ *pontban,* g *folytonos az* $y_0 = f(x_0)$*-ban, akkor a* $h = g \circ f$ *függvény folytonos az* x_0*-ban.*

Bizonyítás. g folytonossága miatt: $\forall\, K_Z(g(y_0), \varepsilon)$-hoz $\exists\, K_Y(y_0, \delta_1(\varepsilon))$, hogy
$\forall\, y \in K_Y(y_0, \delta_1(\varepsilon)) \cap f(E) \implies g(y) \in K_Z(g(y_0), \varepsilon)$;
f folytonossága miatt: $K_Y(y_0 = f(x_0), \delta_1(\varepsilon))$-hoz $\exists\, K_X(x_0, \delta(\varepsilon))$, hogy
$\forall\, x \in K_X(x_0, \delta(\varepsilon)) \cap E \implies f(x) = y \in K_Y(y_0, \delta_1(\varepsilon))$, így
$g(f(x)) \in K_Z(g(f(x_0)), \varepsilon)$, azaz $g \circ f$ függvény folytonos az x_0-ban.

4. Folytonosság és topologikus fogalmak

1. Tétel (a folytonosság topologikus megfelelője).
Az $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ *függvény akkor, és csak akkor folytonos* X*-en, ha* $\forall\, B \subset (Y, d_Y)$ *nyílt halmazra* $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ *nyílt* (X, d_X)*-ben.*

Bizonyítás.

a) Legyen f folytonos X-en, $B \subset (Y, d_Y)$ tetszőleges nyílt halmaz és $x_0 \in f^{-1}(B) \implies f(x_0) = y \in B \implies$ (B nyíltsága miatt) $\exists\, K_Y(y, \varepsilon) \subset B$, melyhez ($f$ x_0-beli folytonossága miatt) $\exists\, K_X(x_0, \delta(\varepsilon))$, hogy $\forall\, x \in K_X(x_0, \delta(\varepsilon))$-ra $f(x) \in K_Y(y, \varepsilon) \subset B \implies K_X(x_0, \delta(\varepsilon)) \subset f^{-1}(B) \implies \forall\, x_0 \in f^{-1}(B)$ belső pont $f^{-1}(B)$-ben, így $f^{-1}(B)$ nyílt (X, d_X)-ben.

b) Teljesüljön, hogy $\forall\, B \subset (Y, d_Y)$ nyílt halmazra $f^{-1}(B)$ nyílt (X, d_X)-ben. Legyen $x_0 \in X$ tetszőleges és $K_Y(f(x_0), \varepsilon)$ ugyancsak tetszőleges (nyílt) környezet, akkor $f^{-1}(K_Y(f(x_0), \varepsilon)) \subset X$ nyílt, melyben x_0 belső pont $\implies \exists\, K_X(x_0, \delta(\varepsilon)) \subset f^{-1}(K_Y(f(x_0), \varepsilon)) \implies \forall\, x \in K_X(x_0, \delta(\varepsilon))$-ra $f(x) \in K_Y(f(x_0), \varepsilon)$, tehát f folytonos.

2. Tétel (kompaktság és folytonosság). *Legyen* $E \subset (X, d_X)$ *kompakt halmaz,* $f : E \to (Y, d_Y)$ *folytonos függvény* E*-n, akkor* $f(E)$ *kompakt* (Y, d_Y)*-ban. (Röviden: kompakt halmaz folytonos képe kompakt.)*

Bizonyítás. Legyen $\{o_v\}$ tetszőleges nyílt lefedése $f(E)$-nek $\implies$ $f^{-1}(o_v)$ halmazok nyíltak, és $\{f^{-1}(o_v)\}$ nyílt lefedése E-nek, mely kompakt, így léteznek az $f^{-1}(o_1), \dots, f^{-1}(o_n)$ nyílt halmazok, hogy $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(o_i) \implies$ $f\left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(o_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} o_i$ lefedi $f(E)$-t, tehát $f(E)$ kompakt.

Következmények:

1. Ha $Y = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{R}^n \implies f(E)$ korlátos és zárt.
2. Ha $Y = \mathbb{R}$, akkor f felveszi E-n az abszolút minimumát és maximumát (mert $\sup f(E)$ és $\inf f(E)$ is eleme $f(E)$-nek, ha $f(E)$ zárt és természetesen korlátos).

Megjegyzés. A 2. következmény közvetlenül is bizonyítható:
Legyen $\inf f(E) = m$ és tegyük fel, hogy $\forall\, x \in E$-re $f(x) > m$ (azaz nem létezik $x_1 \in E$, hogy $f(x_1) = m) \implies \dfrac{1}{f(x) - m}$ folytonos E-n $\implies$ korlátos, azaz $\exists\, K$, hogy $\dfrac{1}{f(x) - m} < K \implies f(x) > m + \dfrac{1}{K}$, ami ellentmondás.

3. Tétel (kompaktság és egyenletes folytonosság) (Heine).
Legyen $E \subset (X, d_X)$ kompakt halmaz, $f : E \to (Y, d_Y)$ folytonos függvény E-n, akkor f egyenletesen folytonos E-n. (Röviden: kompakt halmazon folytonos függvény egyenletesen folytonos.)

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

- f folytonos E-n $\implies \forall\, y \in E$-re $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$-hoz $\exists\, \delta_y(\varepsilon)$, hogy $\forall\, x \in E$ $d_X(x, y) < \dfrac{1}{2}\delta_y(\varepsilon) \implies d_Y(f(x), f(y)) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
- $\left\{K_X\left(y, \dfrac{\delta_y}{2}\right) \mid y \in E\right\}$ nyílt lefedése E-nek $\implies$ $\exists \left\{K_X\left(y_i, \dfrac{\delta_{y_i}}{2}\right) \mid i = 1, \dots, n\right\}$ véges lefedése is E-nek.
- Ha $\delta(\varepsilon) = \inf\limits_{1 \le i \le n} \left\{\dfrac{\delta_{y_i}}{2}\right\} \implies \forall\, x_1, x_2 \in E,\ d_X(x_1, x_2) < \delta(\varepsilon)$ esetén: egyrészt $\exists\, K_X\left(y_i, \dfrac{\delta_{y_i}}{2}\right)$, hogy $x_1 \in K_X\left(y_i, \dfrac{\delta_{y_i}}{2}\right)$, és így

$$d_X(y_i, x_2) \le d_X(y_i, x_1) + d_X(x_1, x_2) < \frac{1}{2}\delta_{y_i} + \delta(\varepsilon) \le \delta_{y_i}$$

másrészt pedig (az y_i-beli folytonosságot felhasználva)

$$d_Y(f(x_1), f(y_i)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és} \quad d_Y(f(x_2), f(y_i)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq d_Y(f(x_1), f(y_i)) + d_Y(f(x_2), f(y_i)) < \varepsilon \ ,$$

azaz f egyenletesen folytonos E-n.

4. Tétel (összefüggőség és folytonosság).
Legyen $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ folytonos függvény, $E \subseteq X$ összefüggő, akkor $f(E)$ is az.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f(E)$ nem összefüggő (Y, d_Y)-ban, akkor $\exists\ o_1, o_2 \subset f(E)$ nem üres nyílt halmazok $(f(E), d_Y)$-ban, hogy $o_1 \cap o_2 = \emptyset$ és $o_1 \cup o_2 = f(E)$. Ekkor f folytonossága miatt $f^{-1}(o_1)$ és $f^{-1}(o_2)$ nyílt halmazok (X, d_X)-ben és $f^{-1}(o_1) \cap f^{-1}(o_2) = \emptyset$, mert $x \in f^{-1}(o_1), f^{-1}(o_2)$ esetén $f(x) \in o_1, o_2$ lenne, ami lehetetlen. Ugyanekkor $o_1, o_2 \neq \emptyset$ miatt $f^{-1}(o_1), f^{-1}(o_2) \neq \emptyset$ és $f^{-1}(o_1) \cup f^{-1}(o_2) = E$, mert $o_1 \cup o_2 = f(E)$ adja, hogy $f^{-1}(o_1 \cup o_2) = f^{-1}(o_1) \cup f^{-1}(o_2) = f^{-1}(f(E)) = E$.
Mindez azt jelentené, hogy E nem összefüggő, ami ellentmond a feltételnek, így az állítás igaz.

5. Tétel (Bolzano). *Legyen $E \subseteq (X, d)$ összefüggő, $f : E \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha $c, d \in f(E)$, $c < d$, akkor $(c, d) \subset f(E)$ (azaz f két érték között minden közbenső értéket felvesz).*

Bizonyítás. A 4. tétel miatt $f(E) \subset \mathbb{R}$ összefüggő, ami (egy korábbi tétel miatt) adja, hogy $\forall\ c, d \in f(E),\ c < d$ esetén $(c, d) \subset f(E)$.

6. feladatsor

1) Vizsgálja az alábbi függvények korlátosságát:

$$
\begin{array}{lll}
f_1 :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_1(x) = ax + b & (a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0)\ ; \\
f_2 :\ [0, +\infty[\to \mathbb{R}, & f_2(x) = 5 - x^2\ ; & \\
f_3 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, & f_3(x) = \dfrac{1}{x}\ ; & \\
f_4 :]1, +100[\to \mathbb{R}, & f_4(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}\ ; & \\
f_5 :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_5(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\ ; & \\
f_6 :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_6(x) = \dfrac{x}{1+x^2}\ . &
\end{array}
$$

2) Vizsgálja az alábbi függvények szélsőértékeit vagy supremumát (infimumát):

$$
\begin{array}{lll}
f_1 :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_1(x) = ax^2 + bx + c & (a, b, c \in \mathbb{R})\ ; \\
f_2 :]0, 1] \to \mathbb{R}, & f_2(x) = x^2 + 2x + 3\ ; & \\
f_3 :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_3(x) = x^2 - 4x + 6\ ; & \\
f_4 :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_4(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}\ . &
\end{array}
$$

3) Vizsgálja az alábbi függvények monotonitását:

$$
\begin{array}{lll}
f_1 :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_1(x) = ax + b & (a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0)\ ; \\
f_2 :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_2(x) = ax^2 + bx + c & (a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)\ ; \\
f_3 :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_3(x) = x^n & (n \in \mathbb{N})\ ; \\
f_4 :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_4(x) = x^2 + 2x + 3\ ; & \\
f_5 :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_5(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}\ . &
\end{array}
$$

4) Vizsgálja az alábbi függvények folytonosságát:

$$
\begin{array}{lll}
f_1:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}, & f_1(x)=c & (c\in\mathbb{R})\ ; \\
f_2:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}, & f_2(x)=x^p & (p\in\mathbb{Q})\ ; \\
f_3:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}, & f_3(x)=|x|\ ; & \\
f_4:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}, & f_4(x)=x^2+2x-3\ ; & \\
f_5:\ [-2,3[\to\mathbb{R}, & f_5(x)=|x^2-4|\ ; & \\
f_6:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}, & f_6(x)=[x] & \text{(egészrész függvény)}\ ; \\
f_7:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}, & f_7(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}\ . &
\end{array}
$$

5) Bizonyítsa be, hogy a racionális függvények értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak.

VII. Függvények határértéke

1. Alapfogalmak és tételek

Kérdés: Hogyan „viselkednek” a következő függvények a megadott pont, vagy pontok környezetében?

$$
\begin{array}{lll}
f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_1(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}, & x_0 = 0, 1,\ +\infty,\ -\infty\ ; \\
f_2 :]0,1[\to \mathbb{R}, & f_2(x) = x^2\ , & x_0 = 0, 1\ ; \\
f_3 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, & f_3(x) = \dfrac{1}{x}\ , & x_0 = 0, 2,\ +\infty\ ; \\
f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_4(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, & x_0 = 0\ .
\end{array}
$$

Megállapítások:

1) x_0 minden esetben torlódási pontja az értelmezési tartománynak (de nem mindig eleme).
2) $\exists\ A \in \mathbb{R}\ (\vee \mathbb{R}_b)$, hogy $x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to A$. (kivétel f_4, ekkor $x_n \to 0$ ($x_n > 0$ vagy $x_n < 0$) esetén $f_4(x_n) \to 1$ vagy $f_4(x_n) \to 0$).
3) A nem feltétlenül egyenlő $f(x_0)$ (esetleg nem is létezik).

1. Definíció. Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvénynek az $x_0 \in E'$ pontban $\exists$ határértéke, ha $\exists\ A \in Y$, hogy $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$,

$$\forall\ x \in E,\ 0 < d_X(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \quad \implies \quad d_Y(f(x), A) < \varepsilon\ .$$

A-t az f függvény x_0-beli határértékének nevezzük, és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ vagy $f(x) \to A$, ha $x \to x_0$ jelöléseket használjuk.

Megjegyzések.

1. Speciálisan pl. az $f : E \subseteq \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{C}) \to \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{C})$ függvénynek az $x_0 \in E'$ pontban $\exists$ határértéke, ha $\exists\ A \in \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{C})$, hogy $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$,

$$\forall\ x \in E,\ 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \implies \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

($f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvénynél $\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}$ és $\|f(x) - A\|_{\mathbb{R}^m}$ írható).

2. Megfogalmazható a környezetes változat is:
   Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvénynek az $x_0 \in E'$ pontban $\exists$ határértéke, ha $\exists\ A \in Y$, hogy $\forall\ K_Y(A, \varepsilon)$-hoz $\exists\ K_X(x_0, \delta(\varepsilon))$,
   $\forall\ x \in K_X(x_0, \delta(\varepsilon)) \backslash \{x_0\},\ x \in E$ esetén $f(x) \in K_Y(A, \varepsilon)$.
3. A határérték létezése pontbeli tulajdonság.
4. Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvénynek az $x_0 \in (X, d_X)$-ben nem létezik határértéke, ha $x_0 \notin\ E'$, vagy $x_0 \in E'$ és $\forall\ A \in Y,\ \exists \varepsilon > 0$,
   $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$ esetén $\exists\ x \in E,\ x \in K_X(x_0, \delta(\varepsilon)) \backslash \{x_0\},\ f(x) \notin\ K_Y(A, \varepsilon)$.
5. A határérték (ha létezik) egyértelműen meghatározott (ez indirekt bizonyítással – hasonlóan, mint a sorozatoknál – egyszerűen belátható).
6. A kérdésben megadott függvényeknél most már vizsgálható a határérték létezése az adott x_0-ban.

2. Definíció. Legyen $f : E \subseteq \mathbb{R} \to (Y, d)$ adott függvény és az x_0 torlódási pontja $[x_0, +\infty[\cap E\ (\vee\,]-\infty, x_0] \cap E))$-nek. Az f függvénynek az x_0-ban $\exists$ jobb- (vagy bal-) oldali határértéke, ha
$\exists\ A \in Y,\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall\ x \in E,\ x_0 < x < x_0 + \delta(\varepsilon)$ (vagy $x_0 - \delta(\varepsilon) < x < x_0) \Longrightarrow d_Y(f(x), A) < \varepsilon$.
A-t f jobb (illetve bal) oldali határértékének nevezzük x_0-ban, és a

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = A = f(x_0 + 0) \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \to x_0-0} f(x) = A = f(x_0 - 0)$$

jelölést használjuk.

Megjegyzések.

1. A definíció a leszűkítés fogalmának használatával is megfogalmazható (hasonlóan a folytonossághoz).
2. A környezetes átfogalmazás is megadható.
3. Könnyen belátható a következő:
   Legyen $f : E \subseteq \mathbb{R} \to (Y, d)$ adott függvény és az x_0 torlódási pontja $[x_0, +\infty[\cap E \wedge]-\infty, x_0] \cap E$-nek. Az f függvénynek x_0-ban akkor, és csak akkor létezik határértéke, ha létezik $f(x_0 - 0)$ és $f(x_0 + 0)$ és $f(x_0 - 0) =$ $= f(x_0 + 0) = A$ (f határértéke x_0-ban).

3. Definíció. Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to \mathbb{R}$ függvények $x_0 \in E'$-ben a határértéke $+\infty$ (vagy $-\infty$), ha $\forall\ K$-hoz $\exists\ \delta(K) > 0,\ \forall\ x \in E,\ 0 <$ $< d(x, x_0) < \delta(K)$ esetén $f(x) > K$ (vagy $f(x) < K$).

Megjegyzések.

1. A definíció környezetekkel is megfogalmazható.
2. A $+\infty$ (vagy $-\infty$) egyoldali határértékként is megfogalmazható.
3. Vizsgálható a „kérdés" az f_3 függvényre $x \to 0$ esetén.

4. Definíció. Legyen $E \subseteq \mathbb{R}$ felülről (alulról) nem korlátos halmaz, $f : E \to (Y, d)$ adott függvény. Az f függvénynek $+\infty$ (vagy $-\infty$)-ben létezik határértéke, ha $\exists\ A \in Y$, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M \in \mathbb{R}$, $\forall\ x \in E \wedge x > M$ $(\vee x < M)$ esetén $d(f(x), A) < \varepsilon$. Ekkor A-t $f\ +\infty$ (vagy $-\infty$)-beli határértékének nevezzük, és rá a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ jelölést használjuk.

Megjegyzések.

1. A definíció környezetes alakban is megfogalmazható.
2. Ha $E = \mathbb{N}$, akkor ez egy (Y, d)-beli sorozat határértékének a definíciója.
3. Ha speciálisan egy $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt tekintünk, akkor megfogalmazható az is, hogy f határértéke $+\infty$ (vagy $-\infty$)-ben $+\infty$ (vagy $-\infty$), (végtelenben vett végtelen határérték).
4. A kiinduló kérdés f_1 függvényét vizsgálhatjuk $x \to -\infty$ vagy $x \to +\infty$ esetén.
5. Az 1., 3. és 4. definíciók egységesen is megfogalmazhatók.

1. Tétel (átviteli elv). *Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvénynek az $x_0 \in E'$ pontban akkor, és csak akkor $\exists$ határértéke, ha $\forall$ x_0-hoz konvergáló $\langle x_n \rangle : \mathbb{N} \to E \backslash \{x_0\}$ sorozat esetén $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.*

Bizonyítás. Úgy, mint a folytonosságnál, csak az ottani $K_Y(f(x_0), \varepsilon)$ helyett $K_Y(A, \varepsilon)$-t és az x_0-beli folytonosság helyett x_0-beli határértéket kell mondani.

Megjegyzések.

1. Elég csak $\langle f(x_n) \rangle$ konvergenciáját feltenni $\forall\ x_n \to x_0$ $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$ esetén, ebből már jön, hogy $\exists\ A$, hogy mindig $f(x_n) \to A$ teljesül.
2. Megfogalmazható (és bizonyítható) az átviteli elv a 2., 3. és 4. definíciók eseteire is.

2. Tétel. *Az $f : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}^n$ $(f = (f_1, \ldots, f_n),\ f_i : E \to \mathbb{R})$ függvénynek, akkor és csak akkor létezik határértéke az $x_0 \in E'$-ben, ha az f_i függvényeknek létezik határértéke x_0-ban.*

Bizonyítás.
Az átviteli elv és az $\mathbb{R}^n$-beli sorozatokra vonatkozó tételek alapján.

2. Határérték és műveletek illetve egyenlőtlenségek

1. Tétel. *Legyenek $f, g : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{C})$ adott függvények, hogy az $x_0 \in E'$-ben $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ és $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, akkor*

a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda A$, $\quad (\lambda \in \mathbb{R} \vee \mathbb{C})$;

c) $\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$;

d) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, *ha* $g \neq 0,\ B \neq 0$.

Bizonyítás. Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján.

Megjegyzés. a) és b) $\mathbb{R}^n$-beli értékű függvényrekre is megfogalmazható és bizonyítható.

2. Tétel. *Ha $f : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in E'$, akkor ha*

a) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0 \quad (f \neq 0)$;

b) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{|f(x)|} = +\infty \quad (f \neq 0)$;

Bizonyítás. Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján.

3. Tétel. *Legyenek $f, g, h : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}$ adott függvények és $x_0 \in E'$, akkor, ha*

a) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \ \wedge\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$ *és* $\exists\, K(x_0, \delta),\ f(x) \leq g(x)$

$\forall\, x \in [K(x_0,\delta)\backslash\{x_0\}] \cap E \implies A \le B$;

b) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ *és* $A < B \implies \exists\, K(x_0,\delta)$,

$f(x) < g(x)\ \forall\, x \in [K(x_0,\delta)\backslash\{x_0\}] \cap E$;

c) $\exists\, K(x_0,\delta),\ f(x) \le h(x) \le g(x)\ \forall\, x \in [K(x_0,\delta)\backslash\{x_0\}] \cap E$

és $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \implies \exists \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

Bizonyítás. Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján.

Megjegyzések.

1. A tétel megfogalmazható $+\infty$ (illetve $-\infty$)-ben vett határértékre is.
2. Ha a b) részben $g = 0$ vagy $f = 0$, akkor a jeltartási-tétel adódik ($\exists\, K(x_0,\delta),\ f(x) < 0$ vagy $f(x) > 0\ \forall\, x \in [K(x_0,\delta)\backslash\{x_0\}] \cap E$).

4. Tétel (az összetett függvény határértéke). *Legyenek adottak az* (X,d_X), (Y,d_Y) *és* (Z,d_Z) *metrikus terek,* $x_0 \in X'$ *és* $y_0 \in Y'$, *továbbá* $f : X\backslash\{x_0\} \to Y\backslash\{y_0\}$, $g : Y\backslash\{y_0\} \to Z$ *függvények, hogy*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \wedge \lim_{y\to y_0} g(y) = A \quad\implies\quad \exists \lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = A\ .$$

Bizonyítás. Mint a folytonosságra vonatkozó megfelelő tételnél, csak $K(g(f(x_0)),\varepsilon)$ helyett $K(A,\varepsilon)$ és $K(f(x_0),\delta_1(\varepsilon))$ helyett $K(y_0,\delta_1(\varepsilon))$, míg a folytonoság helyett a határérték létezése használandó.

3. A határérték és a folytonosság kapcsolata

Tétel. *Legyen* $f : E \subset (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ *adott függvény és* $x_0 \in X$, $x_0 \in X'$. $f \iff$ *folytonos* x_0*-ban, ha* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Bizonyítás.

a) Ha f folytonos x_0-ban, akkor a definíció adja, hogy $\exists\, A = f(x_0)$ határértéke x_0-ban.

b) Ha $\exists\, A = f(x_0)$ határérték, akkor a definíció miatt $\forall\, K_Y(f(x_0),\varepsilon)$-hoz $\exists\, K_X(x_0,\delta(\varepsilon)),\ \forall\, x \in E,\ x \in K_X(x_0,\delta(\varepsilon))\backslash\{x_0\} \implies$ $f(x) \in K_Y(f(x_0),\varepsilon)$; de $f(x_0) \in K_Y(f(x_0),\varepsilon)$, így $\forall x \in K_X(x_0,\delta(\varepsilon))$ és $x \in E$ esetén $f(x) \in K_Y(f(x_0),\varepsilon)$, azaz f folytonos x_0-ban.

Definíció. Ha az $f : E \subset (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvény nem folytonos az $x_0 \in E$ pontban, akkor azt mondjuk, hogy x_0 f-nek szakadási helye, vagy hogy f-nek x_0-ban szakadása van.
Ha $f : E \subset \mathbb{R} \to (Y, d_Y)$ adott függvény és $x_0 \in E^0$ (x_0 belső pont E-ben), és x_0 szakadási helye f-nek, továbbá $\exists \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) \wedge \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$, akkor azt mondjuk, f-nek x_0-ban elsőfajú szakadása van. Ha még $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, akkor azt mondjuk, hogy a szakadás megszüntethető.
Ha f-nek x_0-ban szakadása van és az nem elsőfajú, akkor azt másodfajú szakadásnak nevezzük.

4. Monoton függvények

1. Tétel (monotonitás és invertálhatóság). *Ha az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton E-n, akkor invertálható és f^{-1} ugyanolyan értelemben szigorúan monoton $f(E)$-n.*

Bizonyítás. f^{-1} is függvény, mert ha nem, úgy $\exists\ x_1 \neq x_2$, hogy $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1} \implies (x_1, y), (x_2, y) \in f \implies f(x_1) = f(x_2)$, ellentétben f szigorú monotonitásával.
Legyen például f szigorúan monoton növekvő és $y_1, y_2 \in f(E)$-re $y_1 < y_2$, akkor egyrészt $\exists\ x_1, x_2 \in E$, hogy $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$. Másrészt, ha feltesszük, hogy $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, akkor

$$f^{-1}(f(x_1)) = x_1 \geq x_2 = f^{-1}(f(x_2))$$

következne, ami azt adná (f szigorú monotonitása miatt), hogy $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$, ami ellentmondás, így $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, azaz f^{-1} szigorúan monoton növekvő.

Megjegyzés. A tétel megfordítása nem igaz általában. De igaz a következő:

2. Tétel. *Ha az $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ függvény invertálható és folytonos $\langle a, b \rangle$-n, akkor szigorúan monoton $\langle a, b \rangle$-n.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f nem szigorúan monoton. f invertálható $\implies$ nem létezik $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$, $x_1 \neq x_2$, hogy $f(x_1) = f(x_2)$. Így, ha f nem szigorúan monoton $\exists\ x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 < x_2 < x_3$ és

$$f(x_1) < f(x_2)\ \wedge\ f(x_2) > f(x_3) \quad \text{vagy} \quad f(x_1) > f(x_2)\ \wedge\ f(x_2) < f(x_2)$$

$\Longrightarrow$ (Bolzano-tétel) $\exists\ x_0 \in (x_1, x_2) \wedge x_0' \in (x_2, x_3)$, hogy
$f(x_0) = f(x_0') = \lambda$, ami ellentmond f invertálhatóságának $\Longrightarrow$ f szigorúan monoton.

3. Tétel. *Ha az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény monoton növekvő, akkor $\forall\ x_0 \in \langle a, b\rangle$ esetén:*

$$\exists \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \sup_{x\in\langle a,x_0)} f(x) \qquad (x_0 \neq a)\ ,$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \inf_{x\in(x_0,b\rangle} f(x) \qquad (x_0 \neq b)\ .$$

Bizonyítás.
$\forall\ x_0 \in \langle a, b\rangle \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0), \text{ha}\ x \in \langle a, x_0) \Longrightarrow \exists\ A = \sup\limits_{x\in\langle a,x_0)} f(x) \Longrightarrow$
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_{x_0}(\varepsilon) < x_0 - a,\ f(x_0 - \delta_{x_0}) > A - \varepsilon \Longrightarrow$ (f monotonitása miatt)
$\forall\ 0 < k < \delta_{x_0} |f(x_0 - k) - A| = A - f(x_0 - k) \leq A - f(x_0 - \delta_{x_0}) < \varepsilon \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A.$
A jobboldali határértékre hasonló a bizonyítás.

Megjegyzés. Csökkenő függvényre hasonló állítás igaz.

Következmények:

1. Ha az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény monoton, akkor f az $x_0 \in (a, b)$ pontban $\Longleftrightarrow$ nem folytonos, ha $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$. (Azaz f-nek ugrása van x_0-ban.)
2. Ha az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény monoton $\langle a, b\rangle$-n, akkor szakadási helyeinek halmaza megszámlálható. (Ha például f monoton növekvő és x_0 szakadási hely $\Longrightarrow\ ]f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)[\cap f(\langle a, b\rangle) = \emptyset$.
   Ha $I_{x_0} =]f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)[$, valamint x_{01} és x_{02} szakadási hely $\Longrightarrow\ I_{x_{01}} \cap I_{x_{02}} = \emptyset$.
   Legyen $r_{x_0} \in \mathbb{Q} \wedge r_{x_0} \in I_{x_0} \Longrightarrow$ a $\varphi(x_0) = r_{x_0}$ szerint definiált függvény invertálható és φ R_φ értékkészletére $R_\varphi \subset Q$, így R_φ és így az x_0 pontok halmaza legfeljebb megszámlálható.)
3. Ha az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és szigorúan monoton, akkor f^{-1} folytonos.

7. feladatsor

1) Vizsgálja az alábbi függvények határértékét az adott x_0 pontban:

$f_1 :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_1(x) = \begin{cases} x+2 & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}, \qquad x_0 = 0 \ ;$

$f_2 :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_2(x) = \operatorname{sign} x \ , \qquad x_0 = 0 \ ;$

$f_3 :\ \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f_3(x) = \dfrac{1}{x} \ , \qquad x_0 = 0 \vee x_0 = \infty \ ;$

$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_4(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2} \ , \qquad +\infty \vee -\infty\text{-ben;}$

$f_5 :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_5(x) = x^n (n \in \mathbb{N}), \qquad +\infty \vee -\infty\text{-ben;}$

$f_6 :\ \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f_6(x) = x^{-n} (n \in \mathbb{N}), \qquad +\infty \vee -\infty\text{-ben;}$

$f_7 :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f_7(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}, \qquad x_0 = (0,0) \ ;$

$f_8 :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f_8(x,y) = x + \dfrac{1}{\operatorname{sign} y} \ \wedge \ f(x,0) = 0 \ , \qquad x_0 = (0,0) \ ;$

2) Számítsa ki az alábbi határértékeket:

$$\lim_{x\to\infty}(3x^5 - x^2 + 2x + 6) \ ; \qquad \lim_{x\to-\infty}(-2x^4 + 3x^3 - 1) \ ;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3 - 3x + 6}{x^2 + 2x - 3} \ ; \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - 3x^2 + 2}{4x^3 + 3x + 6} \ ;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2 - x + 2}{2x^3 + x^2 + x} \ ; \qquad \lim_{x\to 2}\frac{3x^2 + x - 1}{2x + 1} \ ;$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 - 4x^2 + 3}{x^2 - 2x + 1} \ ; \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2 - 4}{x - 2} \ ;$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \ ; \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^m - 1}{x^n - 1} \ , \ (m, n \in \mathbb{N});$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+1} - 1}{x} \ ; \qquad \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 + 1} - x) \ .$$

3) Vizsgálja az alábbi függvények szakadási helyeit és azok típusait:

$$
\begin{array}{ll}
f_1 : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_1(x) = (\operatorname{sign} x)^2 \ ; \\
f_2 : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_2(x) = [x] + [-x] \ ; \\
f_3 : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_3(x) = x - [x] \ ; \\
f_4 : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases} \ .
\end{array}
$$

VIII. Függvénysorozatok, függvénysorok, elemi függvények

1. Függvénysorozatok és függvénysorok konvergenciája

1. Definíció. Legyenek adottak az $f_n : E \subset (X, d) \to \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{C})$ $(n \in N)$ függvények. Az $\langle f_n \rangle$ sorozatot függvénysorozatnak, míg ha

$$S_n = f_1 + ... + f_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $\langle S_n \rangle$-t függvénysornak nevezzük. Az utóbbi esetben a
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, vagy $\sum f_n$ jelöléseket használjuk.
Ha még adott az $f_0 : E \subset (X, d) \to \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{C})$ függvény is, úgy azt az $\langle S_n \rangle$ függvénysorozatot, melynél $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ is függvénysornak nevezzük és rá a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ vagy $\sum f_n$ jelöléseket használjuk.

2. Definíció. Az $\langle f_n \rangle$ függvénysorozat az $x \in E$-ben konvergens, ha az $\langle f_n(x) \rangle$ számsorozat konvergens. Az $\langle f_n \rangle$ függvénysorozat pontonként konvergens az $E_1 \subset E$ halmazon, ha az $\langle f_n(x) \rangle$ számsorozat $\forall\ x \in E_1$ esetén konvergens. Ekkor az

$$f(x) \doteq \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ (x \in E_1)$$

szerint értelmezett függvényt az $\langle f_n \rangle$ függvénysorozat határfüggvényének nevezzük és azt mondjuk, hogy az $\langle f_n \rangle$ pontonként konvergál E_1-en az f függvényhez. E_1-et a függvénysorozat konvergencia tartományának is nevezzük.
A $\sum f_n$ függvénysor az $x \in E$-ben konvergens, illetve az $E_1 \subset E$ halmazon pontonként konvergens, ha az $\langle S_n(x) \rangle$ számsorozat $x \in E$, illetve $\forall\ x \in E_1$ esetén konvergens. Ekkor az

$$f(x) \doteq \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{n=0\vee 1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in E_1)$$

szerint értelmezett függvényt a $\sum f_n$ függvénysor összegfüggvényének nevezzük és azt mondjuk, hogy $\sum f_n$ pontonként konvergál E_1-en az f függvényhez. E_1-et a függvénysor konvergencia tartományának nevezzük.

Például a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ függvénysor konvergens, ha $|x| < 1$ $(x \in \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{C}))$ és összege az $f : K(0,1) \to \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{C})$, $\ f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ függvény.

Megjegyzés. A $\sum f_n$ függvénysor pontonkénti konvergenciája egy $E_1 \subseteq E$ halmazon azt jelenti, hogy $\forall\ x \in E_1$-re $\exists\ f(x) \in \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{C})$, $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon, x)$, hogy $\forall\ n \geq n(\varepsilon, x)$ esetén $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. (Ekkor $f : E_1 \to \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{C})$ nyilván az összegfüggvény E_1-en.) Látható, hogy az $n(\varepsilon, x)$ küszöbszám függ x-től is (a konvergencia „nem egyenletes").

3. Definíció. Az $\langle f_n \rangle$ függvénysorozat (vagy a $\sum f_n$ függvénysor) egyenletesen konvergál az $E_1 \subseteq E$ halmazon az $f : E_1 \to \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{C})$ függvényhez, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (illetve $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$) $\forall\ x \in E_1$-re. Ilyenkor $\langle f_n \rangle$-t (illetve $\sum f_n$-t) egyenletesen konvergensnek nevezzük E_1-en.

1. Tétel (Cauchy-féle konvergencia kritérium egyenletes konvergenciára). *Legyen $\langle f_n \rangle$ $(f_n : E \subset (X,d) \to \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{C}))$ függvények egy sorozata (illetve $\sum f_n$ függvények egy sora), $E_1 \subseteq E$ nemüres halmaz. Az $\langle f_n \rangle$ függvénysorozat (illetve $\sum f_n$ függvénysor) $\Longleftrightarrow$ egyenletesen konvergens E_1-en, ha $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\forall\ n, m \geq n(\varepsilon)$ $(n > m)$ esetén $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, (illetve $|S_n(x) - S_m(x)| = \left| \sum\limits_{k=m+1}^{n} f_n(x) \right| < \varepsilon$) $\forall\ x \in E_1$.*

Bizonyítás.

A) Függvénysorozatokra.

a) Legyen $\langle f_n \rangle$ egyenletesen konvergens E_1-en. Ekkor $\exists\ f : E_1 \to \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{C})$ függvény, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon)$, $\forall\ n, m \geq n(\varepsilon)$ esetén

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{és} \qquad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall\ x \in E_1$ esetén. Így

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\ x \in E_1\ ,$$

tehát $\langle f_n \rangle$ a tételben jelzett tulajdonságú.

b) Legyen $\langle f_n \rangle$ olyan, hogy $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\forall\ n, m \geq n(\varepsilon)$ $(n > m)$ esetén

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad (\forall\ x \in E_1).$$

Ez azt jelenti, hogy az $\langle f_n(x)\rangle$ számsorozat $\forall\ x \in E_1$ esetén Cauchy-sorozat, így konvergál egy $f(x) \in \mathbb{R}\ (\vee\,\mathbb{C})$ számhoz. Ezzel értelmezünk egy $f : E_1 \to \mathbb{R}\ (\vee\,\mathbb{C})$ függvényt, melyhez $\langle f_n\rangle$ pontonként konvergál E_1-en. A konvergencia egyenletes is, mert $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\forall\ n, m \geq n(\varepsilon)$ $(n > m)$ esetén

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad (\forall\ x \in E_1),$$

ami $m \to \infty$ határátmenettel adja, hogy

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (\forall\ x \in E_1)$$

$\forall\ n \geq n(\varepsilon)$.

B) Függvénysorokra. Alkalmazzuk az A)-részt az $\langle S_n\rangle$ függvénysorozatra.

2. Tétel (Weierstrass elegendő feltétele függvénysorok egyenletes konvergenciájára). *Legyenek adottak az $f_n : E \subset (X, d) \to \mathbb{R}\ (\vee\,\mathbb{C})$ $(n \in \mathbb{N})$ függvények. Legyen továbbá $\sum a_n$ egy olyan nemnegatív tagú konvergens számsor, hogy $|f_n(x)| \leq a_n$ $(\forall\ x \in E,\ n \in \mathbb{N})$. Ekkor a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens E-n.*

Bizonyítás. A két Cauchy-kritérium alapján.
A $\sum a_n$ konvergenciája miatt $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\forall\ n, m \geq n(\varepsilon)$ $(n > m)$ $\Longrightarrow$

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon$$

ha $x \in E \implies \sum f_n$ egyenletesen konvergens.

3. Tétel (az összegfüggvény folytonosságának elegendő feltétele). *Legyenek $f_n : E \subset (X, d) \to \mathbb{R}\ (\vee\,\mathbb{C})$ $(n \in \mathbb{N})$ folytonos függvények, hogy a $\sum f_n$ egyenletesen konvergál E-n az $f : E \subset (X, d) \to \mathbb{R}\ (\vee\,\mathbb{C})$ függvényhez, akkor f folytonos E-n. (Röviden: folytonos függvények egyenletesen konvergens sorának összegfüggvénye folytonos.)*

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in E$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges.
$\sum f_n$ egyenletesen konvergens $\Longrightarrow$ $\dfrac{\varepsilon}{3} > 0$-hoz $\exists\ n\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$, $\forall\ n \geq n\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$, és

$x \in E$-re $|S_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Az $S_n : E \to \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ függvény $\forall\, n \geq n\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$ rögzített értékre folytonos x_0-ban
$\Longrightarrow\ \exists\, \delta\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right),\ \forall\, x \in E,\ |x - x_0| < \delta\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$-ra $|S_n(x) - S_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Most $\forall\, \varepsilon > 0$-ra legyen $\delta(\varepsilon) = \delta\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$, akkor $\forall\, x \in E,\ |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$-ra

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon\ ,$$

ami adja f folyotnosságát $\forall\, x_0$-ban, azaz E-n.

2. Hatványsorok

1. Definíció. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ $(a_n, x, x_0 \in \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{C}))$ függvénysort x_0 középpontú hatványsornak nevezzük.

1. Tétel (Cauchy-Hadamard). *Legyen adott a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *valós vagy komplex hatványsor és*

$$\varrho \doteq \begin{cases} 0\ , & ha\ \ \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty\ , \\ +\infty\ , & ha\ \ \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0\ , \\ \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} & egyébként \end{cases} .$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *abszolút konvergens, ha* $|x - x_0| < \varrho$, *divergens, ha* $|x - x_0| > \varrho$.

Bizonyítás.
Ha $|x - x_0| < \varrho$, akkor $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$ (hiszen $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Longrightarrow \varrho = 0$ és akkor $|x - x_0| < \varrho$ nem lehetséges), továbbá

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0|\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 < 1\ , & \text{ha}\ \ \varrho = +\infty \\ \dfrac{|x - x_0|}{\varrho} < 1\ , & \text{egyébként}\ , \end{cases}$$

ami a sorokra vonatkozó Cauchy-féle gyökkritérium miatt adja a hatványsor abszolút konvergenciáját.
Ha $|x - x_0| > \varrho$, akkor $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} > 0$ (hiszen $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Longrightarrow \varrho = +\infty$

és akkor $|x-x_0|>\varrho$ nem lehetséges), továbá

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|}=|x-x_0|\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=\begin{cases} +\infty>1\ , & \text{ha } \varrho=+\infty \\ \dfrac{|x-x_0|}{\varrho}>1\ , & \text{egyébként}\ , \end{cases}$$

ami a sorokra vonatkozó Cauchy-féle gyökkritérium miatt adja a hatványsor divergenciáját.

2. Definíció. A Cauchy-Hadamard tételben definiált ϱ-t a hatványsor konvergencia sugarának nevezzük.

Megjegyzések.

1. $\varrho=0$ esetén a hatványsor csak x_0-ban, míg $\varrho=+\infty$ esetén $\forall\, x\in\mathbb{R}\ (\vee\,\mathbb{C})$ esetén konvergens.
2. Ha $0<\varrho<+\infty$, akkor a $K(x_0,\varrho)$ nyílt környezet része a hatványsor konvergencia tartományának.

2. Tétel. *Legyen ϱ_0 a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergencia sugara. Ha $0<\varrho<\varrho_0$, akkor a hatványsor egyenletesen konvergens $K(x_0,\varrho)$-n, az összegfüggvénye pedig folytonos $K(x_0,\varrho_0)$-on.*

Bizonyítás.

a) Ha $x\in K(x_0,\varrho)$, akkor $|a_n(x-x_0)^n|\le|a_n|\varrho^n$. De $\sum|a_n|\varrho^n$ konvergens számsor (hiszen a Cauchy-Hadamard tétele miatt a $\sum|a_n|x^n$ hatványsor konvergencia sugara is ϱ_0 és $\varrho<\varrho_0$), így a Weierstrass-feltétel miatt kapjuk az egyenletes konvergenciáját $K(x_0,\varrho)$-n.

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ tehát egyenletesen konvergens $\forall\ K(x_0,\varrho)$ $(0<\varrho<\varrho_0)$ körlapon, az $f_n(x)=a_n(x-x_0)^n$ $(x\in\mathbb{R}\ (\vee\,\mathbb{C}))$ függvények folytonosak $K(x_0,\varrho)$-n, így az előző paragrafus 3. tétele miatt az összegfüggvény folytonos $\forall\ K(x_0,\varrho)\subset K(x_0,\varrho_0)$ körlapon, és így $K(x_0,\varrho_0)$-on is.

Következmény. *A*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ ,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ ,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ ,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

hatványsorok konvergencia sugara $\varrho = +\infty$, összegfüggvényük folytonos $\mathbb{R}$ $(\vee\, \mathbb{C})$-n.

Bizonyítás.
Mivel $\sqrt[n]{n!} \to +\infty \ \wedge \ \sqrt[n]{(2n)!} \to +\infty \ \wedge \ \sqrt[n]{(2n+1)!} \to +\infty$ is igaz, kapjuk, hogy $\varrho = +\infty$ minden esetben. Ezután a folytonosság $\mathbb{R}$ $(\vee\, \mathbb{C})$-n jön a 2. tételből.

3. Elemi függvények

1. Definíció. Az előbbi következményben szereplő hatványsorok konvergensek $\mathbb{R}$ $(\vee\, \mathbb{C})$-n, ezért $\forall\ x \in \mathbb{R}$ $(\vee\, \mathbb{C})$-re az

$$\exp(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ , \qquad \cos(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ ,$$

$$\sin(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ , \qquad \mathrm{ch}(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ ,$$

$$\mathrm{sh}(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

szerint értelmezett függvényeket rendre valós (vagy komplex) exponenciális, cosinus, sinus, cosinus hiperbolicus, sinus hiperbolicus függvényeknek nevezzük és exp, cos, sin, ch, sh módon jelöljük. (Valamennyien folytonosak $\mathbb{R}$ $(\vee\, \mathbb{C})$-n.)

1. Tétel. $\forall\ x \in \mathbb{R}$ $(\vee\, \mathbb{C})$ *esetén*

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}\ , \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}\ ,$$

$$\exp(x) = \mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x)\ , \qquad \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}\ ,$$

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}\ , \qquad \mathrm{sh}(ix) = i\sin(x)\ ,$$

$$\mathrm{ch}(ix) = \cos(x)\ , \qquad \exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$$

teljesül.

Bizonyítás. A sorok műveleti tulajdonságai alapján valamennyi egyszerű számolás.

2. Tétel. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{C})$ *esetén*

a) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$;

b) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$;
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$;

c) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$;
$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$

(addiciós tételek).

Továbbá:

d) $\exp(x)\exp(-x) = 1$; $\cos(-x) = \cos(x)$; $\sin(-x) = -\sin(x)$;
$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x)$; $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x)$; $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$;
$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}\ (\vee\, \mathbb{C})$.

Bizonyítás.

a) $\exp(x)$ és $\exp(y)$ két abszolút konvergens sor összege, így Mertens tétele szerint Cauchy-szorzatuk egyenlő szorzatukkal, ezért

$$\exp(x)\cdot\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!}x^k y^{n-k}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} \doteq \exp(x+y)\ .$$

b) és c) azonnal jön az a) rész és az 1. tétel felhasználásával.

d) egyszerű számolás.

3. Tétel. *Az* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényre igazak:*

a) $\exp(x) \neq 0\ (x \in \mathbb{R})$;

b) $\exp(x) \geq 1\ (x \geq 0)\ \wedge\ 0 < \exp(x) < 1\ (x < 0)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\exp(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$;

d) *szigorúan monoton növekvő;*

e) $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ \quad (R_{\exp} = \mathbb{R}_+)$;

f) $\forall\, r \in \mathbb{Q}$ *esetén* $\exp(r) = e^r$.

Bizonyítás.

a) $1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x)\exp(-x)$ adja az állítást.

b) $\exp(x) \geq 1$, ha $x \geq 0$ jön a definícióból. Ha $x < 0 \implies -x > 0 \implies \exp(-x) > 1 \implies \exp(x) = [\exp(-x)]^{-1} < 1$, de $\exp(x) < 0$ nem lehetséges, mert akkor a folytonosság miatt $\exists\ x_0$, hogy $\exp(x_0) = 0$, ami lehetetlen a) miatt.

c) $\exp(x) > x \implies \lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty$,

míg $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \exp(-x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\exp(x)} = 0$;

d) ha $x_1 < x_2 \implies x_2 - x_1 > 0 \implies \exp(x_2 - x_1) > 1 \implies \exp(x_2) =$ $= \exp((x_2 - x_1) + x_1) = \exp(x_2 - x_1)\exp(x_1) > \exp(x_1)$, ami adja az állítást;

e) c)-ből és az exp függvény folytonosságából jön az állítás;

f) $\exp(1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = e \implies \forall\ p \in \mathbb{N}$-re $\exp(p) = \exp(1 + \ldots + 1) =$ $= \exp(1)\ldots\exp(1) = e^p$.

Ha $-p \in \mathbb{N} \vee p = 0 \implies \exp(p) = \dfrac{1}{\exp(-p)} = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{-p}} \\ 1 = e^0 \end{cases}$

Ha $p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \implies e^p = \exp\left(\dfrac{p}{q} + \ldots + \dfrac{p}{q}\right) = \left[\exp\left(\dfrac{p}{q}\right)\right]^q \implies$ $e^{\frac{p}{q}} = \exp\left(\dfrac{p}{q}\right)$.

2. Definíció. A szigorúan monoton és folytonos $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény inverzét valós természetes alapú logaritmus függvénynek nevezzük és az ln (vagy log) szimbólummal jelöljük.

4. Tétel. *Az* ln *függvényre teljesül:*

a) $D_{\ln} = \mathbb{R}_+,\ R_{\ln} = \ln(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$;
b) folytonos és szigorúan monoton;
c) $\ln(1) = 0,\ \ln(x) < 0\ (0 < x < 1),\ \ln(x) > 0\ (x > 1)$;
d) $\exp(\ln(x)) = x\ (x \in \mathbb{R}_+),\ \ln(\exp(x)) = x\ (x \in \mathbb{R})$;
e) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)\ (x, y \in \mathbb{R}_+)$.

Bizonyítás. A definícióból, a monoton függvényeknél tanultakból és az exp függvény tulajdonságaiból egyszerűen jönnek az állítások (gyakorlat).

3. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}_+$ adott, akkor az

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) \doteq \exp(x \ln a)$$

szerint definiált függvényt a-alapú valós exponenciális függvénynek nevezzük.

5. Tétel. *Az* $\exp_a$ *függvényre teljesülnek:*

a) $\exp_e = \exp$;

b) $D_{\exp_a} = \mathbb{R},\ R_{\exp_a} = \mathbb{R}_+\ (a \neq 1)$;

c) $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$,
$\exp_a(-x) = [\exp_a(x)]^{-1} \quad (x \in \mathbb{R})$;

d) *szigorúan monoton növekvő (csökkenő), ha* $a > 1$ $(0 < a < 1)$;

e) *folytonos;*

f) $\exp_a(r) = a^r\ (r \in \mathbb{Q})$.

Bizonyítás. A definíció, az exp és ln függvények tulajdonságai alapján egyszerű (gyakorlat).

4. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}_+$ és $x \in \mathbb{R}$. Az a x-edik hatványa:

$$a^x \doteq \exp_a(x) (= \exp(x \ln a)) \ .$$

5. Definíció. Legyen $1 \neq a \in \mathbb{R}_+$. Az $\exp_a^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ függvényt a-alapú valós logaritmus függvénynek nevezzük és a $\log_a$ szimbólummal jelöljük.

6. Tétel. *A* $\log_a$ *függvényre teljesülnek:*

a) $\log_e = \ln, \quad \log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}\ (x \in \mathbb{R}_+,\ 1 \neq a \in \mathbb{R}_+)$;

b) $D_{\log_a} = \mathbb{R}_+, \quad R_{\log_a} = \mathbb{R}, \quad \log_a(a) = 1, \quad \log_a(1) = 0$;

c) *szigorúan monoton növekvő (csökkenő), ha* $a > 1$ $(0 < a < 1)$.

d) $\exp_a[\log_a(x)] = x\ (x \in \mathbb{R}_+) \quad \log_a[\exp_a(x)] = x\ (x \in \mathbb{R})$;

e) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)\ (x, y \in \mathbb{R}_+)$;

f) $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}\ (x \in \mathbb{R}_+,\ 1 \neq a, b \in \mathbb{R}_+)$;

g) $\log_a(x^r) = r\log_a(x)\ (1 \neq a,\ x \in \mathbb{R}_+,\ r \in \mathbb{Q})$.

6. Definíció. Legyen $\mu \in \mathbb{R}$ adott, az

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^\mu \doteq \exp(\mu \ln(x))$$

függvényt μ-kitevőjű valós hatványfüggvénynek nevezzük. (Ha $\mu \in \mathbb{R}_+$, akkor $f(0) = 0$-val $f : \mathbb{R}_+ \cup 0 \to \mathbb{R}$.)

7. Tétel. *Az* $f(x) = x^\mu \doteq \exp(\mu \ln(x))$*-re teljesülnek:*

a) *folytonos függvény;*

b) $R_f = \mathbb{R}_+$, *ha* $\mu \neq 0$; $R_f = \{1\}$, *ha* $\mu = 0$;

c) *szigorúan monoton növekvő (csökkenő), ha* $\mu > 0$ *(illetve* $\mu < 0$*);*

d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \ \wedge \ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ *ha* $\mu > 0$,
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty \ \wedge \ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ *ha* $\mu < 0$;

e) $x^\mu x^\nu = x^{\mu+\nu}, \quad \dfrac{x^\mu}{x^\nu} = x^{\mu-\nu}, \quad (xy)^\mu = x^\mu y^\mu,$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^\mu = \frac{x^\mu}{y^\mu}, \quad (x^\mu)^\nu = x^{\mu\nu} \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+,\ \mu, \nu \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítás. A definíció és a korábbi tételek alapján egyszerű (gyakorlat).

8. feladatsor

1) Legyen $E \subset (X,d)$, $f_n : E \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ és tegyük fel, hogy $\langle f_n \rangle$ pontonként konvergál az $f : E \to \mathbb{R}$ függvényhez. Bizonyítsa be, hogy $\langle f_n \rangle \iff$ egyenletesen konvergens, ha az

$$\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_b, \quad a_n \doteq \sup_{x \in E} \{|f_n(x) - f(x)|\}$$

sorozat nullsorozat.

2) Legyen $E \subset (X,d)$, $f_n, g_n : E \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Bizonyítsa be, hogy ha $\langle f_n \rangle$ és $\langle g_n \rangle$ egyenletesen konvergens, akkor $\langle f_n + g_n \rangle$ is az.

3) Legyen $E \subset (X,d)$, $f_n : E \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Bizonyítsa be, hogy ha $\forall\ f_n$ korlátos, és $\langle f_n \rangle$ egyenletesen konvergens E-n, akkor $\exists\ K$, hogy $|f_n(x)| < K\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ és $x \in E$ (azaz $\langle f_n \rangle$ egyenletesen korlátos).

4) Legyen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Határozza meg $\langle f_n \rangle$ konvergenciatartományát. Bizonyítsa be, hogy $\langle f_n \rangle$ nem egyenletesen konvergens a $[0,1]$-en.

5) Határozza meg az alábbi függvénysorozatok konvergencitartományát:

a) $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$;

b) $f_n : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n} \quad (n \in \mathbb{N})$;

c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

6) Bizonyítsa be, hogy az alábbi függvénysorozatok egyenletesen konvergensek:

a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{x+n} \quad (n \in \mathbb{N})$;

b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad (n \in \mathbb{N})$;

c) $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

7) Legyen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Bizonyítsa be, hogy a $\sum f_n$ konvergens, de nem egyenletesen konvergens.

8) Bizonyítsa be, hogy a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens, ha

a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$;

b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{2nx}{1 + n^5 x^n} \quad (n \in \mathbb{N})$;

c) $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x + n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

9) Határozza meg a $\sum f_n$ függvénysor konvergenciatartományát, ha

a) $f_n : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x)^n} \quad (n \in \mathbb{N})$;

b) $f_n : \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{n}{n+1} \dfrac{x^n}{(2x+1)^n} \quad (n \in \mathbb{N})$;

c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \left(\dfrac{x(n+x)}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$;

10) Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n \ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n \ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n \ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n \ ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}, \quad (a, b \in \mathbb{R}_+).$$

11) Bizonyítsuk be az elemi függvények 1-7. tételben negfogalmazott tulajdonságait.