Lajkó Károly

Analízis III.

Debreceni Egyetem
Matematikai és Informatikai Intézet
2001

lajko@math.klte.hu

Amennyiben hibát talál a jegyzetben, kérjük jelezze a szerzőnek!

Ez a jegyzet $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX-ben készült

Szedés és tördelés: Kovács László

TARTALOMJEGYZÉK

I. A TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

1. A fontosabb lineáris algebrai előismeretek

Az Analízis I. tárgy III. (Vektorterek, euklideszi terek, metrikus terek című) fejezetében definiáltuk a vektorteret, a skaláris szorzatot, vektorok euklideszi normáját, vektorok euklideszi távolságát, illetve ezekhez kapcsolódva, speciálisan az $\mathbb{R}^n$ euklideszi teret, melynél az

$$\mathbb{R}^n = \overset{1}{\mathbb{R}} \times \cdots \times \overset{n}{\mathbb{R}}$$

halmazból indultunk ki és az

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)\ \in \mathbb{R}^n$$

vektorok összegét: $\quad x + y \doteq (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$

$\lambda \in \mathbb{R}$ számmal való szorzatát: $\quad \lambda x \doteq (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$

szerint értelmeztük, és megmutattuk, hogy $\mathbb{R}^n$ vektortér e két műveletre nézve.
$\mathbb{R}^n$ n-dimenziós, melyben az

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,\ e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

vektorok bázist, az úgynevezett standard-bázist alkotnak.
Definiáltuk az $\mathbb{R}^n$-beli vektorok

belső szorzatát: $\quad \langle x, y \rangle \doteq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$

normáját: $\quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$

euklideszi távolságát: $\quad d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$

és a hozzájuk kapcsolódó legfontosabb tulajdonságokat is áttekintettük.

A mátrix fogalma is ismert.
Ha az A mátrix n sort és m oszlopot tartalmaz, akkor $n \times m$-es mátrixnak nevezzük, melyben jelölje a_{ij} az i-edik sor j-edik elemét (i a sor-, j az oszlopindex).
Ha $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ $n \times m$-es mátrixok, akkor összegük az a C $n \times m$-es mátrix, melyre

$$C \doteq A + B \doteq (a_{ij} + b_{ij}) = (c_{ij}).$$

Az $A = (a_{ij})$ $n \times m$-es mátrix $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral való szorzata a

$$\lambda A \doteq (\lambda a_{ij})$$

$n \times m$-es mátrix.
Az $n \times m$-es mátrixok e két műveletre nézve vektorteret alkotnak.
Az $A = (a_{ik})$ $n \times m$-es és a $B = (b_{kj})$ $m \times p$-s mátrixok szorzata az a C $n \times p$ típusú mátrix, melyben

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj},$$

azaz

$$A \cdot B \doteq C \doteq (c_{ij}) \doteq \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right).$$

A mátrixszorzás fontosabb tulajdonságai:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C,$$
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \qquad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C,$$
$$(\lambda A) \cdot B = \lambda (A \cdot B) = A \cdot (\lambda B),$$

(általában: $A \cdot B \neq B \cdot A$).
Az $1 \times n$ típusú mátrixot sormátrixnak, míg az $n \times 1$ típusút oszlopmátrixnak nevezzük. Az

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1 \ \ldots \ x_n)$$

és

$$(x_1, \ldots, x_n) \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

kölcsönösen egyértelmű megfeleltetések lineáris izomorfiát adnak $\mathbb{R}^n$ valamint az $1 \times n$, illetve $n \times 1$ típusú mátrixok vektorterei között. A következőkben $\mathbb{R}^n$ elemeit, ha mást nem mondunk, oszlopmátrixokkal reprezentáljuk.

Ugyancsak ismert a lineáris leképezés (transzformáció) fogalma is:
Az $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezést (transzformációt) lineárisnak nevezzük, ha

$$\begin{aligned} A(x+y) &= A(x) + A(y), \qquad && \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \\ A(\lambda x) &= \lambda A(x), && \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

teljesül.
Az $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezések összességét szokás $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$-mel jelölni.

Legyen A $m \times n$-es mátrix, úgy az

$$A(x) \doteq A \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

szerint értelmezett leképezés (transzformáció) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú lineáris leképezés (transzformáció).
Másrészt ismeretes, hogy bármely $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés

$$A(x) = A \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ A\ m \times n\text{-es mátrix})$$

alakba írható.
Így bármely $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés azonosítható egy A $m \times n$-es mátrixszal.
Ha $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, akkor az

$$\|A\| \doteq \sup_{\|x\| \le 1} \{\|Ax\|\}$$

számot az A lineáris leképezés normájának nevezzük.
A norma fontosabb tulajdonságai:

$$\begin{aligned} &\|Ax\| \le \|A\|\ \|x\|; && \|A\| < +\infty; \\ &\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|; && \|\lambda A\| = |\lambda|\ \|A\|; \\ &\|BA\| \le \|B\|\ \|A\| && (A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),\ B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)). \end{aligned}$$

2. A differenciálhatóság

A továbbiakban olyan $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvényekkel foglalkozunk, ahol D nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben és $f = (f_1, \ldots, f_m)$, ahol $f_1, \ldots, f_m$ az f

komponens függvényei. $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^m$ elemeit is oszlopmátrixokkal reprezentáljuk (ha mást nem mondunk).

1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, ha létezik egy $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés, hogy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}} = 0 \ . \tag{1}$$

Ekkor $f'(x_0) \doteq A$ az f függvény x_0-beli differenciálhányadosa, míg

$$df(x_0, x - x_0) \doteq f'(x_0)(x - x_0)$$

az f x_0-beli első differenciálja.

Megjegyzés: Ha $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény, úgy $f'(x) = A = (a_1 \ \dots \ a_n)$ $1 \times n$-es sormátrix, míg az első differenciál a

$$d\,f(x_0, x - x_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - x_{0i})$$

szám.

1. Tétel. *Ha az 1. definícióban* (1) *az $A = A_1$ és $A = A_2$ esetén is teljesül, úgy $A_1 = A_2$ (azaz a differenciálhányados egyértelműen meghatározott).*

Bizonyítás.

$$0 \le \frac{\|(A_1 - A_2)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = \frac{\|A_1(x - x_0) - A_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} =$$

$$= \frac{\|A_1(x - x_0) - [f(x) - f(x_0)] + [f(x) - f(x_0)] - A_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \le$$

$$\le \frac{\|f(x) - f(x_0) - A_1(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \frac{\|f(x) - f(x_0) - A_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}$$

és (1) miatt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|(A_1 - A_2)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

teljesül. Utóbbiból $x - x_0 = th$ esetén, ahol $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ rögzített, $0 \neq t \in \mathbb{R}$

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{\|(A_1 - A_2)th\|}{\|th\|} = \frac{\|(A_1 - A_2)h\|}{\|h\|}$$

következik, ami adja, hogy $(A_1 - A_2)h = 0$, így például $h = e_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ választással kapjuk, hogy $A_1 - A_2 = 0$, azaz $A_1 = A_2$.

2. Tétel. *Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény $\Longleftrightarrow$ differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, ha*

a) *létezik $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés és $\omega : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, hogy*

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x) \tag{2}$$

és $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\omega(x)}{\|x - x_0\|} = 0.$

vagy

b) *létezik $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés és $\omega : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, hogy*

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x)\|x - x_0\| \tag{3}$$

és $\lim\limits_{x \to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0.$

Bizonyítás.

A) Rendezés és abszolútérték képzése után (2) és (3) is adja (1) teljesülését.

B) (1)-ből a határérték definíciója és tulajdonságai miatt kapjuk a) és b) és így (2) és (3) teljesülését.

3. Tétel. *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, akkor ott folytonos is.*

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy

$$\lim_{x \to x_0} \|f(x) - f(x_0)\| = 0. \tag{$*$}$$

Az előző tétel b) része adja, hogy létezik $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés, és $\omega : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$ és

$$\|f(x) - f(x_0)\| = \big\|A(x - x_0) + \omega(x)\|x - x_0\|\big\| \leq$$
$$\leq \|A(x - x_0)\| + \|\omega(x)\|\,\|x - x_0\| \leq \|A\|\,\|x - x_0\| + \|\omega(x)\|\,\|x - x_0\|.$$

A kapott egyenlőtlenségből $x \to x_0$ határátmenettel kapjuk $(*)$-ot.

Megjegyzés: A tétel megfordítása általában nem igaz. Például az

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban, de nem differenciálható.

4. Tétel. *Az $f = (f_1, \dots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény $\Longleftrightarrow$ differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, ha az f_i $(i = 1, \dots, m)$ függvények differenciálhatók x_0-ban, továbbá $f'(x_0)_i = f_i'(x_0)$.*

Bizonyítás. Ismeretes, hogy $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ esetén

$$\max_{1 \le i \le m} |y_i| \le \|y\| \le \sqrt{m} \max_{1 \le i \le m} |y_i| \ ,$$

így

$$\frac{\max\limits_{1\le i\le m} \left| f_i(x) - f_i(x_0) - [A(x-x_0)]_i \right|}{\|x - x_0\|} \le \frac{\left\| f(x) - f(x_0) - A(x-x_0) \right\|}{\|x - x_0\|} \le$$

$$\le \frac{\sqrt{m} \max\limits_{1\le i\le m} \left| f_i(x) - f_i(x_0) - [A(x-x_0)]_i \right|}{\|x - x_0\|}$$

teljesül, ami adja a tétel állításait (egyrészt $x \to x_0$ határátmenettel, másrészt $f_i'(x_0) = A_i = f'(x_0)_i$ miatt).

3. Iránymenti és parciális derivált

1. Definíció. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$ és $e \in \mathbb{R}^n$ $(\|e\| = 1)$ adott. A

$$D_e f(x_0) \doteq \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

értéket, ha létezik, az f függvény x_0-beli e iránymenti differenciálhányadosának nevezzük.

1. Tétel. *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, akkor $\forall$ $e \in \mathbb{R}^n$ iránymenti deriváltja létezik és*

$$D_e f(x_0) = f'(x_0) \cdot e \ .$$

Bizonyítás. Az előző paragrafus 2. tételének b) részét $x = x_0 + te$, $A = f'(x_0)$ mellet használva

$$\frac{f(x_0+te)-f(x_0)}{t} = \frac{1}{t}[f'(x_0)(x_0+te-x_0)+\omega(x_0+te)|t|] =$$
$$= f'(x_0)\cdot e + \omega(x_0+te)\frac{|t|}{t}$$

következik ($|t| < \delta$ esetén – alkalmas δ mellett), ami $t \to 0$ határátmenettel adja az állítást.

Megjegyzés: A tétel megfordítása általában nem igaz.

2. Definíció. Ha $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x_0 \in D$ és $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$, akkor a

$$D_i f_j(x_0) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) \doteq D_{e_i} f_j(x_0)$$

$(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m)$ számokat, ha léteznek az f j-edik komponensfüggvénye i-edik változója szerinti parciális deriváltjainak nevezzük x_0-ban.

Megjegyzés: Ha $\varphi_j(t) \doteq f_j(x_{01}, \ldots, x_{0i-1}, t, x_{0i+1}, \ldots, x_{0n})$ $(|t| < \delta)$, akkor

$$D_i f_j(x_0) = \varphi_j'(x_{0i}) \ .$$

2. Tétel. *Ha az $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény az $x_0 \in D$ pontban differenciálható, akkor $\forall$ $D_i f_j$ parciális derivált létezik és*

$$f'(x_0) = (D_i f_j(x_0))_{m\times n}$$

Bizonyítás.
Az előző paragrafus 4. tétele adja, hogy bármelyik f_j differenciálható x_0-ban és akkor az előző tétel szerint $\forall$ e-re, így $\forall$ e_i-re is $\exists$ $D_{e_i} f_j(x_0) \doteq D_i f_j(x_0)$. Továbbá:

$$f'(x_0) = (f_j'(x_0))_{m\times 1} \quad \text{és} \quad [f_j'(x_0)]_i \doteq f_j'(x_0)\cdot e_i = D_{e_i} f_j(x_0) \doteq D_i f_j(x_0)$$

miatt kapjuk $f'(x_0)$ előállítását is.

3. Tétel. *Ha az* $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény bármely parciális deriváltja létezik az* $x_0 \in D$ *egy* $K(x_0, \delta)$ *környezetében és folytonosak* x_0*-ban, akkor* f *differenciálható* x_0*-ban.*

Bizonyítás.

– Ha $x \in K(x_0, \delta)$, akkor nyilván a

$$c_0 = x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n}), \ldots, c_i = (x_1, \ldots, x_i, x_{0i+1}, \ldots, x_{0n}), \ldots$$
$$\ldots, c_n = x = (x_1, \ldots, x_n)$$

pontok is $K(x_0, \delta)$-ban vannak és a

$$[c_{i-1}, c_i] = \{S_i(t) \mid S_i(t) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{0i+1}, \ldots, x_{0n}),\ t \in [x_{0i}, x_i]\}$$

szakaszok is $K(x_0, \delta)$-ban fekszenek.

– Bármely rögzített j-re ($j = 1, \ldots, m$) a

$$\varphi_{ji} \doteq f_j|_{[c_{i-1}, c_i]}, \quad \varphi_{ji}(t) \doteq f_j(S_i(t)), \quad t \in [x_{0i}, x_i],\ (i = 1, \ldots, n)$$

egyváltozós függvények folytonosak $[x_{0i}, x_i]$-n és differenciálhatók (x_{0i}, x_i)-ben, továbbá

$$\varphi'_{ji}(t) = D_i f_j(S_i(t)) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Így a Lagrange-tétel miatt $\exists\ t_{ji} \in (x_{0i}, x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$

$$\varphi_{ji}(x_i) - \varphi_{ji}(x_{0i}) = \varphi'_{ji}(t_{ji})(x_i - x_{0i}) =$$
$$= D_i f_j(S_i(t_{ji}))(x_i - x_{0i}) = D_i f_j(\xi_{ji}(x))(x_i - x_{0i})\ .$$

– Ezeket felhasználva bármely rögzített j-re:

$$f_j(x) - f_j(x_0) = \sum_{i=1}^{n} [f_j(c_i) - f_j(c_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} [f_j(S_i(x_i)) - f_j(S_i(x_{0i}))] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [\varphi_{ji}(x_i) - \varphi_{ji}(x_{0i})] = \sum_{i=1}^{n} D_i f_j(\xi_{ji}(x))(x_i - x_{0i}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} D_i f_j(x_0)(x_i - x_{0i}) + \frac{\sum_{i=1}^{n} [D_i f_j(\xi_{ji}(x)) - D_i f_j(x_0)](x_i - x_{0i})}{\|x - x_0\|} \|x - x_0\|$$

– Ebből

$$A_j(x-x_0) \doteq \sum_{i=1}^{n} D_i f_j(x_0)(x_i - x_{0i}) \ ,$$

$$\omega_j(x) \doteq \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} [D_i f_j(\xi_{ji}(x)) - D_i f_j(x_0)](x_i - x_{0i})}{\|x-x_0\|} \ , & x \neq x_0 \\ 0 \ , & x = x_0 \end{cases}$$

választással egyrészt

$$f_j(x) - f_j(x_0) = A_j(x-x_0) + \omega_j(x)\|x-x_0\| \ , \qquad x \in K(x_0,\delta)$$

másrészt a $D_i f_j$ függvények x_0-beli folytonossága és

$$\left| \frac{x_i - x_{0i}}{\|x-x_0\|} \right| \leq 1$$

miatt

$$\lim_{x\to x_0} \omega_j(x) = \omega_j(x_0) = 0$$

következik, ami $\forall\ j = 1,\dots,m$-re f_j differenciálhatóságát jelenti az x_0 pontban.

– Végül az előző paragrafus 4. tétele adja az $f = (f_1,\dots,f_m)$ függvény differenciálhatóságát az x_0 pontban, amit bizonyítani kellett.

A 2. és 3. tétel felhasználásával egyszerűen bizonyítható a következő:

4. Tétel. *Ha* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *adott függvény, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

a) $\forall\ D_i f_j$ $(i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m)$ *létezik és folytonos D-n.*
b) f *differenciálható D-n és* $f' : D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ *folytonos D-n.*

Bizonyítás.

– Tegyük fel, hogy a) teljesül, akkor a 3. tétel miatt f differenciálható $\forall\ x_0 \in D$-ben, továbbá $\forall\ x_0 \in D$ és $\forall\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m$ esetén

$$f_j'(x_0) = (D_1 f_j(x_0)\ \dots\ D_n f_j(x_0)) \ ,$$

ami a $D_i f_j$-k x_0-beli folytonossága miatt adja f_j' x_0-beli, míg

$$f' = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_m' \end{pmatrix}$$

az f' x_0-beli folytonosságát.

– Tegyük fel, hogy b) teljesül. Akkor egyrészt a 2. tétel miatt

$$\exists\ D_i f_j(x) = \langle f'(x) \cdot e_i, u_j \rangle \qquad (\forall\ x \in D,\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m)$$

teljesül, ahol $\{e_1, \dots, e_n\}$ $\mathbb{R}^n$ $\{u_1, \dots, u_m\}$ $\mathbb{R}^m$ standard bázisai.
Így $\forall\ x, x_0 \in D$ esetén

$$|D_i f_j(x) - D_i f_j(x_0)| \leq \|f'(x) - f'(x_0)\| \qquad (\forall\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m)$$

ami f' folytonossága miatt adja $D_i f_j$ folytonosságát $\forall\ x_0 \in D$ és $i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m$ esetén.

Az egyváltozós függvények differenciálhatóságának fogalma és az előbbi tétel alapján természetes a következő:

3. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény folytonosan differenciálható D-n, ha

a) f differenciálható és f' folytonos D-n,

vagy

b) $\forall\ D_i f_j$ létezik és folytonos D-n

teljesül.

4. Differenciálási szabályok

1. Tétel. *Ha az $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\lambda : D \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók $x_0 \in D$-ben, akkor az $f + g$, λf, $\dfrac{f}{\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$ függvények is* *differenciálhatók és*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$
$$(\lambda f)'(x_0) = f(x_0)\lambda'(x_0) + \lambda(x_0)f'(x_0),$$
$$\left(\frac{f}{\lambda}\right)'(x_0) = \frac{\lambda(x_0)f'(x_0) - f(x_0)\lambda'(x_0)}{\lambda^2(x_0)}$$

teljesül.

Bizonyítás. A definíció alapján például az első esetben az

$$\frac{\big\|(f+g)(x) - (f+g)(x_0) - (f'(x_0)+g'(x_0))(x-x_0)\big\|}{\|x-x_0\|} \leq$$
$$\leq \frac{\big\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)\big\|}{\|x-x_0\|} + \frac{\big\|g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x-x_0)\big\|}{\|x-x_0\|}$$

egyenlőtlenségből, $x \to x_0$ határátmenettel jön az állítás.

2. Tétel (az összetett függvény differenciálhatósága).
Ha $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : E \subset f(D) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ olyan, hogy f differenciálható $x_0 \in D$-ben és g differenciálható $f(x_0)$-ban, akkor az $F = g \circ f : D \to \mathbb{R}^k$ függvény differenciálható x_0-ban és

(ÖD) $$F'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)\ .$$

(D és E nyílt halmazok és (ÖD)*-ben mátrixok szorzása szerepel.)*

Bizonyítás.
– f x_0-beli és g $y_0 = f(x_0)$-beli differenciálhatósága miatt ($A = f'(x_0)$, $B = g'(y_0)$ mellet) $\exists\ \varepsilon(h),\ \eta(\ell)$, hogy

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \lim_{\ell \to 0} \eta(\ell) = 0$$

és

$$\big\|f(x_0+h) - f(x_0) - Ah\big\| = \varepsilon(h)\|h\|\ ,$$

illetve

$$\big\|g(y_0+\ell) - g(y_0) - B\ell\big\| = \eta(\ell)\|\ell\|$$

teljesül minden olyan $h \in \mathbb{R}^n$, $\ell \in \mathbb{R}^m$ esetén, amikor $f(x_0+h)$ és $g(y_0+\ell)$ értelmezett.
– Legyen h adott és $\ell = f(x_0+h) - f(x_0)$, akkor

$(*)$ $$\|\ell\| = \big\|f(x_0+h) - f(x_0) - Ah + Ah\big\| \leq (\varepsilon(h) + \|A\|)\,\|h\|$$

és

$$\begin{aligned}\big\|F(x_0+h)-F(x_0)-BAh\big\| &= \big\|g(f(x_0+h))-g(f(x_0))-BAh\big\| = \\ &= \big\|g(y_0+\ell)-g(y_0)-BAh\big\| = \\ &= \big\|g(y_0+\ell)-g(y_0)-B\ell+B\ell-BAh\big\| \le \\ &\le \big\|g(y_0+\ell)-g(y_0)-B\ell\big\|+\big\|B(\ell-Ah)\big\| = \\ &= \eta(\ell)\|\ell\|+\big\|B\big(f(x_0+h)-f(x_0)-Ah\big)\big\| \le \\ &\le \eta(\ell)\big(\varepsilon(h)+\|A\|\big)\,\|h\|+\|B\|\varepsilon(h)\|h\|\end{aligned}$$

következik. Így $h \neq 0$ esetén

$$\frac{\big\|F(x_0+h)-F(x_0)-BAh\big\|}{\|h\|} \le \eta(\ell)(\varepsilon(h)+\|A\|)+\|B\|\varepsilon(h)\ .$$

Ebből $h \to 0$ esetén (felhasználva, hogy $(*)$ miatt $\ell \to 0$, és akkor $\varepsilon(h) \to 0,\ \eta(\ell) \to 0$ is teljesül)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\big\|F(x_0+h)-F(x_0)-BAh\big\|}{\|h\|} = 0\ ,$$

ami adja $F = g \circ f$ differenciálhatóságát és (ÖD) fennállását is.

Megjegyzések:

1) Ha $k = 1$, akkor (ÖD) alakja

$$F'(x_0) = (D_1F(x_0)\ \ldots\ D_nF(x_0)) =$$

$$= \Big(D_1g\big(f(x_0)\big)\ \ldots\ D_mg\big(f(x_0)\big)\Big)\begin{pmatrix} D_1f_1(x_0) & \ldots & D_nf_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1f_m(x_0) & \ldots & D_nf_m(x_0)\end{pmatrix}$$

és akkor például

$$D_jF(x_0) = \sum_{k=1}^{m} D_kg\big(f(x_0)\big)\cdot D_jf_k(x_0)\ .$$

2) Ha $k = 1,\ n = 1$, akkor $F(t) = g(f_1(t),\ldots,f_m(t))$,

$$F'(x_0) = \frac{\partial F}{\partial t}(x_0) = \sum_{j=1}^{m} D_jg\big(f(x_0)\big)f_j'(x_0)\ .$$

3. Tétel. *Legyen* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$, $f(x_0) = y_0$. *Tegyük fel, hogy* g *az* y_0 *egy környezetét* $\mathbb{R}^n$*-be képező függvény, hogy* $g(y_0) = x_0$ *és* $g(f(x)) = \mathrm{id}(x)\ \forall\ x \in K(x_0, \delta)$. *Ha* f *differenciálható* x_0*-ban és* g *differenciálható* y_0*-ban, akkor*

$$g'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$$

(Itt $(f'(x_0))^{-1}$ *az* $f'(x_0)$ *mátrix inverzét jelöli.)*

Bizonyítás. Az $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény deriváltja az

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$n \times n$-es identikus mátrix, így

$$g(f(x)) = \mathrm{id}(x) \quad (x \in K(x_0, \delta)) \quad \text{és (ÖD)}$$

miatt

$$g'(y_0) f'(x_0) = I_n \ ,$$

ami adja, hogy $g'(y_0)$ az $f'(x_0)$ mátrix inverze.

Megjegyzés: Ha egy f differenciálható függvénynek létezik differenciálható inverze, akkor szükségképpen $f'(x)$ nem szinguláris mátrix.

5. Középértéktételek és következményeik

A következőkben az egyváltozós függvényekre ismert Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával mondunk ki, illetve bizonyítunk be hasonló típusú tételeket.

1. Tétel. *Ha az* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható a* D *(nyílt) halmazon és* D *tartalmazza az* x_0 *és* $x_0 + h$ *végpontú* $[x_0, x_0 + h]$*-val jelölt szakaszt, akkor létezik* $c = x_0 + t_0 h$ $(0 < t_0 < 1)$ *pont ezen a szakaszon, hogy*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c) \cdot h \ .$$

Bizonyítás. A
$$\varPhi(t) \doteq f(x_0 + th) \qquad (t \in [0,1])$$
szerint definiált függvény az összetett függvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel miatt differenciálható és
$$\varPhi'(t) = f'(x_0 + th) \cdot h \qquad (t \in [0,1])$$
Továbbá $\varPhi$ teljesíti az egyváltozós Lagrange-tétel feltételeit a $[0,1]$ intervallumon, így $\exists\ t_0 \in (0,1)$ (és így $c = x_0 + t_0 h$), hogy
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \varPhi(1) - \varPhi(0) = \varPhi'(t_0) \cdot 1 = f'(c) \cdot h\ .$$

2. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és konvex halmaz (azaz $\forall\ x_1, x_2 \in D \implies [x_1, x_2] \subset D$). Ha $f : D \to \mathbb{R}$ differenciálható D-n és $\exists\ M \in \mathbb{R}$, hogy $\|f'(x)\| \le M$ $(\forall\ x \in D)$, akkor*
$$|f(x) - f(y)| \le M\|x - y\| \qquad (\forall\ x, y \in D)$$
teljesül.

Bizonyítás. Legyen $x, y \in D$ (konvex) $\implies$ $[x, y] \subset D$, így az 1. tétel miatt ($x = x_0$ és $y = x_0 + h$ mellett) $\exists\ c \in (x, y)$, hogy
$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)\ ,$$
melyből
$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)(x - y)| \le \|f'(c)\|\,\|x - y\| \le M\|x - y\|$$
következik tetszőleges $x, y \in D$ esetén, amit bizonyítani kellett.

Következmény: Ha a 2. tétel feltételei mellett még $f'(x) = 0$ $(x \in D)$ is teljesül, akkor $f(x) = c$ $(x \in D)$.

3. Tétel. *Ha az $f : K(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $\forall\ D_i f$ $(i = 1, \ldots, n)$ parciális deriváltja létezik, akkor $\forall\ h \in \mathbb{R}^n$, $0 < \|h\| < \delta$ esetén léteznek $c_1, \ldots, c_n \in K(x_0, \delta)$ vektorok, hogy*
$$(*) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(c_i) h_i \qquad (h = (h_1, \ldots, h_n)).$$

Bizonyítás. A 3. fejezet 3. tétele bizonyításának első részét ismételve $f_j = f$, $x = x_0 + h$, $x_i - x_{0i} = h_i$ választással kapjuk, hogy $\exists\ c_i = \xi_i(x)$ vektorok $K(x_0, \delta)$-ban, hogy $(*)$ teljesül.

Következmény. *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $\forall\ D_i f$ parciális deriváltja létezik és korlátos valamely $K(x_0, \delta) \subset D$ környezetben, akkor f folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás. A 3. tétel miatt $(*)$ teljesül, melyből

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| = \left|\sum_{i=1}^{n} D_i f(c_i) h_i\right| \le M \sum_{i=1}^{n} |h_i| \qquad \big(\|h\| < \delta\big)$$

következik (ha $|D_i f(c_i)| \le M\ \forall\ i = 1, \dots, n$).
Ebből pedig, felhasználva, hogy $h \to 0$-ból $h_i \to 0$ is következik ($\forall\ i$-re) kapjuk, hogy

$$\lim_{h \to 0} |f(x_0+h) - f(x_0)| = 0\ ,$$

ami adja, hogy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

és így (mivel x_0 torlódási pontja és pontja is D-nek) f folytonos x_0-ban.

Megjegyzés: A következmény igaz $f = (f_1, \dots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvényekre is, ha $\forall\ D_i f_j$ létezik és korlátos valamely $K(x_0, \delta) \subset D$-ben. Ekkor $\forall\ f_j$ folytonossága teljesül x_0-ban (a következmény miatt). Ugyanakkor az f_j-k x_0-beli folytonossága adja az $f = (f_1, \dots, f_m)$ függvény folytonosságát is x_0-ban.

6. Magasabbrendű deriváltak, Young és Taylor tétele

1. Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $x_0 \in D$-ben, ha

- $\exists\ \delta > 0$, hogy f differenciálható $K(x_0, \delta) \subset D$-n,
- a $D_i f$ $(i = 1, \dots, n)$ függvények differenciálhatók x_0-ban.

Ekkor (a korábbiak szerint) léteznek a $D_j(D_i f)$ $(i, j = 1, \dots, n)$ parciális deriváltak x_0-ban és a

$$D_j(D_i f)(x_0)\Big(= D_j D_i f(x_0) = D_{ij} f(x_0) = = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = f_{x_i x_j}(x_0)\Big)$$

számokat az f függvény x_0-beli másodrendű, i-edik és j-edik változó szerinti parciális deriváltjainak nevezzük.

Ha $D_1 \subseteq D$ jelöli azon x-ek halmazát, ahol $\exists\ D_j D_i f(x)$, akkor $D_j D_i f : D_1 \to \mathbb{R}$ az f i-edik és j-edik változó szerinti másodrendű parciális derivált függvénye D_1-en.

Megjegyzések:

1) Definiálhatók a magasabbrendű parciális deriváltak is:
Ha adott $i_1, \ldots, i_{r-1}$-re $\exists\ D_{i_1} \ldots D_{i_{r-1}} f$ $(= D_{i_1 \ldots i_{r-1}} f)$ $K(x_0, \delta)$-n, akkor

$$D_{i_1 \ldots i_r} f(x_0) \doteq D_{i_r}(D_{i_1 \ldots i_{r-1}} f)(x_0)$$

az f függvény $i_1, \ldots, i_r$ változók szerinti r-edrendű parciális deriváltja x_0-ban. Ha $i_1 = i_2 = \cdots = i_r = k$, úgy

$$D_k^r f \doteq D_k \ldots D_k f$$

a k-adik változó szerinti r-edrendű „tiszta” parciális deriváltat jelöli.

2) Mivel $f' = (D_1 f, \ldots, D_n f)$, így a kétszeri differenciálhatóság fogalma ekvivalens a következővel:

- $\exists\ \delta > 0$, hogy f differenciálható $K(x_0, \delta)$-n,
- f' differenciálható x_0-ban.

$f''(x_0) \doteq (f')'(x_0)$-t f x_0-beli második deriváltjának nevezzük.

2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény kétszer differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, ha az $f_1, \ldots, f_m$ függvények kétszer differenciálhatók x_0-ban és

$$f''(x_0) = (f_1''(x_0), \ldots, f_m''(x_0)).$$

3. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény r-szer $(r \geq 2)$ differenciálható x_0-ban, ha

- $\exists\ \delta > 0$, hogy f $r-1$-szer differenciálható $K(x_0, \delta)$-n,
- a $D_{i_1} \ldots D_{i_{r-1}} f$ $(1 \leq i_1, \ldots, i_{r-1} \leq n)$ $r-1$-edrendű parciális derivált függvények differenciálhatók x_0-ban.

Ez ekvivalens azzal, hogy $\exists\ f^{(r-1)}$ x_0 egy környezetében és ez differenciálható x_0-ban.

4. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény kétszer folytonosan differenciálható $x_0 \in D$-ben, ha a $D_1 f, \ldots, D_n f$ függvények differenciálhatók az x_0 valamely $K(x_0, \delta) \subset D$ környezetében és a

$$(D_i f)' = (D_1 D_i f \ \ldots \ D_n D_i f) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

függvények folytonosak x_0-ban.
Ez pontosan azt jelenti, hogy f differenciálható $K(x_0, \delta)$-ban és f' differenciálható és deriváltja folytonos x_0-ban.
(Hasonlóan definiálható a függvény r-szer folytonos differenciálhatósága is.)

„Gyakran" igaz adott függvényre, hogy $D_k D_j f = D_j D_k f$, vagyis az úgynevezett vegyes parciálisok megegyeznek, de van ellenpélda is.
Most egy elegendő feltételt adunk a vegyes parciálisok egyenlőségére.

1. Tétel (Young). *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az $a \in D$ pontban kétszer differenciálható, akkor*

$$D_k D_j f(a) = D_j D_k f(a)$$

$\forall\ 1 \leq k, j \leq n$ esetén.

Bizonyítás. A tételben szereplő parciális deriváltakat úgy számítjuk, hogy a változók x_k és x_j kivételével állandók, így elegendő csak $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvényt tekinteni, mely kétszer differenciálható az $a = (x_0, y_0)$ pontban, és megmutatni, hogy

$$D_1 D_2 f(x_0, y_0) = D_2 D_1 f(x_0, y_0).$$

Tekintsük a D nyíltsága miatt létező

$$[x_0, x_0 + h] \times [y_0, y_0 + h] \subset D \qquad (\sqrt{2}|h| < \delta,\ K(a, \delta) \subset D)$$

négyzetet, és legyen

$$\Delta(h) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0)\ .$$

Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = D_1 D_2 f(x_0, y_0) \quad \wedge \quad \lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = D_2 D_1 f(x_0, y_0)$$

is teljesül, ami adja az állítást.
Legyen

$$F(x) \doteq f(x, y_0 + h) - f(x, y_0), \qquad x \in [x_0, x_0 + h],$$

akkor egyrészt

$$\Delta(h) = F(x_0 + h) - F(x_0)$$

másrészt, mivel f differenciálható (x_0, y_0) egy környezetében, ha h „elég kicsi”, akkor F differenciálható $[x_0, x_0 + h]$-n és

$$F'(x) = D_1 f(x, y_0 + h) - D_1 f(x, y_0) \ .$$

Alkalmazva F-re $[x_0, x_0 + h]$-n az egyváltozós Lagrange-tételt, kapjuk, hogy $\exists\ \xi = (x_0 + \vartheta h) \in (x_0, x_0 + h)$

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0 + \vartheta h)h = \\ &= [D_1 f(x_0 + \vartheta h, y_0 + h) - D_1 f(x_0 + \vartheta h, y_0)]h \end{aligned}$$

Ebből pedig, felhasználva $D_1 f$ (x_0, y_0)-beli differenciálhatóságát

$$\begin{aligned} \Delta(h) = [D_1 f(x_0, y_0) + D_1 D_1 f(x_0, y_0)\vartheta h + D_2 D_1 f(x_0, y_0)h + \omega_1 - \\ - D_1 f(x_0, y_0) - D_1 D_1 f(x_0, y_0)\vartheta h - D_2 D_1 f(x_0, y_0) \cdot 0 - \omega_2]h = \\ = D_2 D_1 f(x_0, y_0)h^2 + (\omega_1 - \omega_2)h \end{aligned}$$

ahol

$$\lim_{h \to 0} \frac{\omega_1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\omega_2}{h} = 0$$

így

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = D_2 D_1 f(x_0, y_0) + \lim_{h \to 0} \frac{\omega_1 - \omega_2}{h} = D_2 D_1 f(x_0, y_0) \ .$$

A másik egyenlőség, ugyanezen gondolatmenettel jön a

$$G(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y), \qquad \Delta(h) = G(y_0 + h) - G(y_0)$$

kiindulással (előbb az egyváltozós Lagrange-tételt használva G-re az $[y_0, y_0 + h]$ intervallumon „elég kicsi” h-ra, majd $D_2 f$ (x_0, y_0)-beli differenciálhatóságát).

Megjegyzés: A tétel általánosítható $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$-ben r-szer differenciálható függvényekre, ekkor

$$D_{i_1 \ldots i_r} f(x_0) = D_{j_1 \ldots j_r} f(x_0)$$

$\forall\ (i_1, \ldots, i_r)\ \wedge\ (j_1, \ldots, j_r)$ r-tagú, természetes számokból álló sorozatra, melyek egymásból átrendezéssel keletkeznek $(1 \leq i_k, j_s \leq n)$.

5. Definíció. Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$-ben differenciálható függvény x_0-beli, az $x - x_0$ megváltozáshoz tartozó első differenciálján a

$$df(x_0, x - x_0) \doteq f'(x_0)(x - x_0) \qquad (x - x_0 \in D)$$

függvényt értjük. Ha $h \doteq x - x_0$, úgy

$$df(x_0, h) \doteq f'(x_0)h$$

az x_0-beli, h megváltozáshoz tartozó első differenciálja f-nek. Ez minden olyan x-re értelmezhető, ahol $\exists\ f'(x)$, ekkor

$$df(x, h) = f'(x)h$$

f x-beli, h-hoz tartozó első differenciálja.

Ha $m = 1$, $x - x_0 = h = (h_1, \dots, h_n)$, akkor f x-beli, h-hoz tartozó első differenciálja

$$df(x, h) \doteq \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x)h_i$$

alakú, ha $\exists\ f'(x) = (f_{x_1}(x) \ \dots \ f_{x_n}(x))$.

6. Definíció. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ olyan, hogy $\exists\ f^{(r)}(x_0)$ (f r-szer differenciálható x_0-ban). Ekkor $d^1 f(x, h) \doteq df(x, h)$ f x-beli, h-hoz tartozó első differenciálja. Ha $d^{r-1} f(x, h)$ az f x-beli, h-hoz tartozó $(r - 1)$-edik differenciálja értelmezett valamely $K(x_0, \delta)$-n, akkor f x_0-beli, h-hoz tartozó r-edik differenciálján a rögzített h mellett x függvényeként tekintett $d^{r-1} f$ függvény első differenciálját értjük x_0-ban, azaz

$$d^r f(x_0, h) \doteq \sum_{i=1}^{n} (d^{r-1} f)_{x_i}(x_0)h_i \ .$$

2. Tétel. *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ r-szer differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, akkor*

$$d^r f(x_0, h) = \sum_{i_1, \dots, i_r = 1}^{n} f_{x_{i_1} \dots x_{i_r}}(x_0)h_{i_1} \dots h_{i_r}$$

(ami r-edrendű forma az $f_{x_{i_1} \dots x_{i_r}}(x_0)$ együtthatókkal).

Bizonyítás. $r = 1$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy x_0 egy környezetében

$$d^{r-1} f(x, h) = \sum_{i_1, \dots, i_{r-1} = 1}^{n} f_{x_{i_1} \dots x_{i_{r-1}}}(x)h_{i_1} \dots h_{i_{r-1}} \ ,$$

ekkor

$$d^r f(x_0,h) \doteq \sum_{i=1}^{n} (d^{r-1}f)_{x_i}(x_0,h)h_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{i_1,\dots,i_{r-1}=1}^{n} f_{x_{i_1}\dots x_{i_{r-1}}x_i}(x_0)h_{i_1}\dots h_{i_{r-1}} \right) h_i =$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_r=1}^{n} f_{x_{i_1}\dots x_{i_r}}(x_0)h_{i_1}\dots h_{i_r}$$

következik, ami adja indukcióval az állítást.

Hasonlóan bizonyítható a következő:

3. Tétel. *Ha $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ r-szer differenciálható D-n, akkor az $F(t) = f(x+th)$ függvény minden olyan $t \in \mathbb{R}$-re, amelyre $x+th \in D$, r-szer differenciálható és*

$$F^{(r)}(t) = d^r f(x+th,h).$$

Bizonyítás. $r = 1$-re

$$F'(t) = f'(x+th)\cdot h = d^1 f(x+th,h).$$

Tegyük fel, hogy $(r-1)$-re igaz az állítás, akkor

$$F^{(r)}(t) = (F^{(r-1)})'(t) = \frac{d(d^{(r-1)}f(x+th,h))}{dt} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{i_1,\dots,i_{r-1}=1}^{n} f_{x_{i_1}\dots x_{i_{r-1}},x_i}(x+th)h_{i_1}\dots h_{i_{r-1}} \right) h_i = d^r f(x+th,h).$$

4. Tétel (Taylor-formula). *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in D$ és f $(r+1)$-szer differenciálható az $[x, x+h] \subset D$ szakaszon, akkor $\exists\ \theta \in (0,1)$, hogy*

$$\text{(TF)} \quad f(x+h) = f(x) + \frac{df(x,h)}{1!} + \dots + \frac{d^r f(x,h)}{r!} + \frac{d^{r+1}f(x+\theta h,h)}{(r+1)!}$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$F : [0,1] \to \mathbb{R}\ , \qquad F(t) = f(x+th)$$

függvényt. F a f $(r+1)$-szeri differenciálhatósága miatt $(r+1)$-szer differenciálható és az előbbi tétel miatt

$$(*) \qquad F^{(i)}(t) = d^i f(x+th,h) \qquad (i = 1,\dots,r+1)$$

$\forall\ t \in [0,1]$-re.

Így F teljesíti az egyváltozós Taylor-tétel feltételeit, ezért $t_0 = 0 \wedge t = 1$ esetén $\exists\ \theta \in (0,1)$, hogy

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}1 + \cdots + \frac{F^{(r)}(0)}{r!}1^r + \frac{F^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!}1^{r+1}\ ,$$

ami $(*)$ miatt adja a (TF)-et.

7. Paraméteres integrál differenciálhatósága

Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum és $f : D \times [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor bármely rögzített $x \in D$ esetén a $t \to f(x,t)$ $(t \in [a,b])$ függvény folytonos, így Riemann-integrálható. A

$$\varphi(x) \doteq \int_a^b f(x,t)dt \qquad (x \in D)$$

szerint értelmezett $\varphi : D \to \mathbb{R}$ függvényt az f függvény paraméteres integráljának nevezzük.

Fontos az alábbi:

Tétel.

a) *Az $f : D \times [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény $\varphi : D \to \mathbb{R}$ paraméteres integrálja is folytonos függvény.*

b) *Ha a $D \times [a,b]$ halmazon léteznek a $D_i f$ $(i = 1, \ldots, n)$ parciális deriváltak és folytonosak, akkor φ folytonosan differenciálható D-n és*

$$(*) \qquad D_i\varphi(x) = \int_a^b D_i f(x,t)dt \qquad (i = 1, \ldots, n;\ x \in D).$$

Bizonyítás.

a) Legyen $x_0 \in D$ tetszőleges és $K(x_0, r)$ olyan környzete x_0-nak, hogy lezártja $\overline{K(x_0, r)} \subset D$ (ilyen nyilván létezik). Az f függvény egyenletesen folytonos a $\overline{K(x_0,r)} \times [a,b]$ kompakt halmazon, azaz

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0,\ \ \forall\, u,v \in \overline{K(x_0,r)} \times [a,b]\ \wedge\ \|u-v\| < \delta \implies$$
$$\implies |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\ .$$

Így, ha $0 < \delta \le r$, akkor

$$\forall\, t \in [a,b]\ \wedge\ x \in K(x_0,\delta) \implies |f(x,t) - f(x_0,t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\ ,$$

következésképpen $\forall\, x \in K(x_0,\delta)$ esetén

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \left|\int_a^b f(x,t) - f(x_0,t)dt\right| \le \int_a^b |f(x,t) - f(x_0,t)|dt < \varepsilon$$

ami adja φ folytonosságát x_0-ban. Így φ folytonos függvény.

b) $(*)$ teljesüléséhez, $D_i\varphi$ definíciója miatt azt kell belátni, hogy

$$(\circ)\qquad \lim_{s\to 0}\left[\frac{\varphi(x+se_i) - \varphi(x)}{s} - \int_a^b D_i f(x,t)dt\right] =$$
$$= \lim_{s\to 0}\left[\int_a^b \left(\frac{1}{s}(f(x+se_i,t) - f(x,t)) - D_i f(x,t)\right) dt\right] = 0\ .$$

A

$$g(z) \doteq f(x+ze_i,t) \qquad (z \in [0,s])$$

függvényre alkalmazva az egyváltozós Lagrange-tételt kapjuk, hogy $\exists\, \theta \in (0,1)$, hogy

$$\frac{1}{s}[g(s) - g(0)] = \frac{1}{s}(f(x+se_i,t) - f(x,t)) = D_i f(x+\theta s e_i,t).$$

$D_i f$ folytonossága miatt

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0,\ \ \forall\, s \in \mathbb{R},\ |s| < \delta \implies$$
$$\implies |D_i f(x+\theta s e_i,t) - D_i f(x,t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

és így

$$\left|\int_a^b (D_i f(x+\theta s e_i,t) - D_i f(x,t))dt\right| < \varepsilon\ ,$$

ami adja ($\circ$)-t.
$D_i\varphi$ folytonossága ($*$) miatt a tétel a) részéből adódik.

8. Lokális szélsőérték

Ismeretes a következő: akkor mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ pontban lokális maximuma (minimuma) van, ha $\exists\ \delta > 0$, hogy

$$\forall\ x \in K(x_0, \delta) \implies f(x) \le f(x_0)\ (f(x) \ge f(x_0)).$$

Az egyváltozós esethez hasonlóan igaz a következő:

1. Tétel (a lokális szélsőérték 1. szükséges feltétele).
Ha $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ (nyílt), f differenciálható x_0-ban és f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$.

Bizonyítás. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $\exists K(x_0, \delta) \subset D$, hogy

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0)) \qquad \forall\ x \in K(x_0, \delta),$$

így ha e ($\|e\| = 1$) tetszőleges $\mathbb{R}^n$-ben és $|t| < \delta$, akkor

$$f(x_0 + te) - f(x_0) \le 0\ (\ge 0),$$

így f x_0-beli differenciálhatósága miatt a 3.1. tétel adja, hogy

$$f'(x_0)e = D_e f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} \begin{cases} \le 0\ (\ge 0), & \text{ha } t \to 0+0 \\ \ge 0\ (\le 0), & \text{ha } t \to 0-0\ , \end{cases}$$

ami csak úgy lehetséges, ha $f'(x_0)e = 0$, melyből e tetszőleges volta miatt jön, hogy $f'(x_0) = 0$.

2. Tétel (a lokális szélsőérték 2. szükséges feltétele).
Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek lokális szélsőértéke van $x_0 \in D$-ben és $\exists\ f_{x_i}(x_0)$, akkor $f_{x_i}(x_0) = 0$.

Bizonyítás. Ha f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van, úgy a

$$\varphi(t) = f(x_{01}, \ldots, x_{0i-1}, t, x_{0i+1}, \ldots, x_{0n})$$

függvénynek is $t = x_{0i}$-ben, így $f_{x_i}(x_0) = \varphi'(x_{0i}) = 0$.

A 6. fejezet 2. tétele $r = 2$ esetén adja, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény x_0-beli $h = (h_1, \dots, h_n)$-hez tartozó 2. differenciálja, ha $\exists\ f''(x_0)$

$$d^2 f(x_0, h) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0) h_i h_j \ ,$$

ahol a Young-tétel miatt $f_{x_i x_j}(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)$ is teljesül. A második differenciál tehát ekkor a h_i-k kvadratikus formája. Lineáris algebrából ismert, hogy egy

$$q(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $q > 0\ \forall\ h = (h_1, \dots, h_n) \neq (0, \dots, 0)$,
- negatív definit, ha $q < 0\ \forall\ h = (h_1, \dots, h_n) \neq (0, \dots, 0)$,
- indefinit, ha felvesz pozitív és negatív értékeket is.

Továbbá – Sylvester tétele szerint – egy kvadratikus forma $\iff$ pozitív, illetve negatív definit, ha a

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \dots\ , \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

úgynevezett bal felső sarokdeterminánsok pozitívak, illetve váltakozva negatívak és pozitívak.

Ezen fogalmak, a Taylor-tétel és a differenciálhatóság definíciója alapján bizonyítható a következő:

3. Tétel (a lokális szélsőérték elegendő feltétele).
Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, továbbá $f'(x_0) = 0$ és $d^2 f(x_0, h)$ pozitív (negatív) definit, akkor x_0-ban f-nek szigorú lokális minimuma (maximuma) van.

Bizonyítás. Elegendő a minimum esetét bizonyítani (hiszen a maximumnál csak $-f$ minimumát kell tekinteni). A szigorú lokális minimum definíciója szerint azt kell belátni, hogy

$$\exists\ K(x_0, \delta),\ f(x_0 + h) - f(x_0) > 0\ (0 < \|h\| < \delta).$$

$\exists\ f''(x_0) \implies \exists\ K(x_0, \delta_1) \subset D$, hogy f differenciálható $K(x_0, \delta_1)$-en, így az $[x_0, x_0 + h]$ szakaszon is, ha $\|h\| < \delta_1$. Alkalmazható tehát f-re a

Taylor-tétel az $[x_0, x_0 + h]$ szakaszon $r = 0$ mellett, így $\exists\ \theta \in (0,1)$, hogy $\|h\| < \delta_1$ $(h = (h_1, \ldots, h_n))$ esetén

$$\text{(T)} \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0 + \theta h, h) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_0 + \theta h)h_i$$

teljesül. Ha δ_1 olyan kicsi, hogy $f''(x_0)$ létezése miatt differenciálható f_{x_i} $(i = 1, \ldots, n)$-re (a 2. fejezet 2. tétele szerint)

$$f_{x_i}(x_0 + \theta h) = f_{x_i}(x_0) + (f_{x_i})'(x_0)\theta h + \omega_i(h)\|h\| =$$
$$= (f_{x_i})'(x_0)\theta h + \omega_i(h)\|h\| = \theta \sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0)h_j + \omega_i(h)\|h\| \ ,$$

ha $\|h\| < \delta_1$ (ahol felhasználtuk azt is, hogy $f'(x_0) = 0$, illetve $f_{x_i}(x_0) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$), és $\lim\limits_{h \to 0} \omega_i(h) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ is teljesül.

$f_{x_i}(x_0 + \theta h)$ $(i = 1, \ldots, n)$ előbbi alakját (T)-be helyettesítve:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \theta \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0)h_i h_j + \sum_{i=1}^{n} \omega_i(h)\|h\|h_i =$$
$$= \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0) \frac{h_i}{\|h\|} \frac{h_j}{\|h\|} + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} \omega_i(h) \frac{h_i}{\|h\|} \right] \theta \|h\|^2 =$$
$$= \left[d^2 f(x_0, u) + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} \omega_i(h)u_i \right] \theta \|h\|^2$$

ahol

$$u = (u_1, \ldots, u_n) \doteq \left(\frac{h_1}{\|h\|}, \ldots, \frac{h_n}{\|h\|} \right)$$

és így $\|u\| = 1$ és $u_i \leq 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ is teljesül.

A fenti egyenlőség jobboldalán:

– A $d^2 f(x_0, u)$ egyrészt az $\|u\| = 1$ által definiált egységgömbön értelmezett, folytonos függvénye u-nak és a tétel feltételei miatt $d^2 f(x_0, u) > 0$ teljesül. Az egységgömb kompakt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, így $d^2 f(x_0, u)$ felveszi $m > 0$ minimumát, azaz $d^2 f(x_0, u) \geq m > 0$;

– $\lim\limits_{h\to 0} \omega_i(h) = 0 \ \wedge \ |u_i| \le 1 \ (i = 1, \dots, n)$ miatt

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(h)u_i = 0 \implies \exists\, K(x_0,\delta) \subset K(x_0,\delta_1),$$
$$\left|\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(h)u_i\right| < \frac{m}{2} \quad (\|h\| < \delta)$$

E két tényt felhasználva kapjuk, hogy

$$f(x_0+h) - f(x_0) \ge \left(m - \frac{m}{2}\right)\theta\|h\|^2 = \frac{m}{2}\theta\|h\|^2 > 0 \quad (\|h\| < \delta,\ h \ne 0),$$

amit bizonyítani kellett.

Megjegyzések:

1) A tétel feltételei mellett $\Delta_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$ esetén szigorú lokális minimuma, $(-1)^i\Delta_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$ esetén szigorú lokális maximuma van f-nek x_0-ban.

2) Ha $d^2 f$ indefinit, akkor az előbbi bizonyítás mutatja, hogy f-nek nincs szélsőértéke x_0-ban (az adott feltételek mellett).

9. Inverzfüggvény-tételek

A 4. fejezet 3. tétele után megjegyeztük, hogy egy differenciálható $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (D nyílt) függvény differenciálható inverzének létezéséhez szükséges, hogy $f'(x)$ mátrixa nem szinguláris, ami a lineáris algebrából tanultak szerint azt is adja, hogy $\det f'(x) \ne 0$.

Megmutatjuk, hogy folytonosan differenciálható függvények esetén a feltétel – legalábbis lokálisan – elégséges is.

1. Definíció. Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezést (függvényt) regulárisnak nevezzük, ha folytonosan differenciálható és

$$\det f'(x) = \begin{vmatrix} D_1 f_1(x) & \dots & D_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n(x) & \dots & D_n f_n(x) \end{vmatrix} \ne 0 \qquad (x \in D)\ .$$

2. Definíció. Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezést (függvényt) lokálisan invertálhatónak nevezzük D-n, ha $\forall\ x_0 \in D$ esetén $\exists\ K(x_0, r) \subset D$, hogy $f|_{K(x_0,r)}$ (f leszűkítése $K(x_0, r)$-re) invertálható függvény.

1. Tétel (a lokális invertálhatóság elegendő feltétele).
Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ reguláris leképezés (függvény), akkor lokálisan invertálható D-n

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in D$ tetszőleges.
Azt kell megmutatni, hogy $\exists\ K(x_0, r) \subset D$, hogy a $f|_{K(x_0,r)}$ függvény invertálható. Ez teljesül, ha $\forall\ x, x + h \in K(x_0, r)$ esetén $f(x + h) = f(x)$ adja, hogy $h = 0$ (lásd Analízis I., I/3. fejezet, 1. tétel).
Tekintsük a

$$K : D^n \subset \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R} \qquad K(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} D_1 f_1(y_1) & \dots & D_n f_1(y_1) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n(y_n) & \dots & D_n f_n(y_n) \end{vmatrix}$$

függvényt, mely nyilván a determináns elemeinek polinomja, így (a $D_i f_j$ függvények folytonossága miatt) folytonos az $(x_0, \dots, x_0) \in D^n$ helyen, továbbá $K(x_0, \dots, x_0) = \det f'(x_0) \neq 0$, ami (a jeltartási tétel miatt) adja, hogy $\exists\ K(x_0, r) \subset D$, hogy

$$K(y_1, \dots, y_n) \neq 0, \qquad \forall\ y_1, \dots, y_n \in K(x_0, r).$$

Ha $x, x + h \in K(x_0, r) \subset D$ tetszőlegesek, akkor $f = (f_1, \dots, f_n)$ differenciálhatósága miatt $\forall\ f_j : D \to \mathbb{R}$ komponens függvény teljesíti az 5. fejezet 1. tételének (az 1. középértéktétel) feltételeit, így $\exists\ c_j \in (x, x+h) \subset K(x_0, r)$, hogy

$$f_j(x + h) - f_j(x) = \sum_{i=1}^{n} D_i f_j(c_j) h_i \qquad (j = 1, \dots, n)$$

teljesül.
Ha $f(x + h) = f(x)$ akkor az utóbbi egyenlőségek adják a

$$\sum_{i=1}^{n} D_i f_j(c_j) h_j = 0 \qquad (j = 1, \dots, n)$$

homogén lineáris egyenletrendszert $h_1, \dots, h_n$-re, melyek determinánsa $K(c_1, \dots, c_n) \neq 0$, így $h_1 = \dots = h_n = 0 \implies h = 0$.

2. Tétel (az inverz függvény folytonossága). *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény (D nyílt) reguláris és kölcsönösen egyértelmű D-n, akkor*

a) *$f(D)$ nyílt $\mathbb{R}^n$-ben;*

b) *az f függvény $g : f(D) \to D$ inverz függvénye folytonos.*

Bizonyítás.

a) Azt kell belátni, hogy $\forall\, y_0 \in f(D)$ esetén $\exists\, K(y_0, \delta) \subset f(D)$ ($\forall\, y_0 \in f(D)$ belső pont). D nyíltsága miatt $\exists\, Q \subset D$ zárt téglalap, hogy $x_0 = f^{-1}(y_0) \in Q^\circ$ (Q° a Q belseje).
A Q halmaz $\operatorname{Bd} Q$-val jelölt határa kompakt $\mathbb{R}^n$-ben, így f folytonossága miatt $f(\operatorname{Bd} Q)$ is kompakt $\mathbb{R}^n$-ben.
f kölcsönösen egyértelmű D-n, így $f(\operatorname{Bd} Q) \cap y_0 = \varnothing$, ezért $f(\operatorname{Bd} Q)$ zártsága miatt $\exists\, \delta > 0$, hogy $K(y_0, 2\delta) \cap f(\operatorname{Bd} Q) = \varnothing$.
Meg kell mutatni, hogy $\forall\, y \in K(y_0, \delta)$-hoz $\exists\, x^* \in Q$, hogy $y = f(x^*)$ (mert akkor $K(y_0, \delta) \subset f(D)$ is igaz).
Adott $y \in K(y_0, \delta)$-ra legyen

$$\Phi(x) \doteq \|f(x) - y\|^2 \doteq \sum_{k=1}^{n} (f_k(x) - y_k)^2$$

Φ folytonosan differenciálható, valós értékű függvény, így létezik minimuma a Q kompakt halmazon. Vegye fel ezt az $x^* \in Q$-ban. Megmutatjuk, hogy $f(x^*) = y$.
Ha $y \in K(y_0, \delta)$, akkor $\Phi(x_0) = \|f(x_0) - y\|^2 = \|y - y_0\|^2 < \delta^2$, így $\min\limits_{Q} \Phi < \delta^2$.
Másrészt $\forall\, x \in \operatorname{Bd} Q$-ra $f(x) \notin K(y_0, 2\delta)$, így $\Phi(x) = \|f(x) - y\|^2 \geq \delta^2$, így Φ minimumát Q^0-ban veszi fel. Ekkor Φ-nek x^*-ban lokális minimuma van, ezért $\Phi'(x^*) = 0$.
Φ definíciójából

$$D_j \Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} 2(f_k(x) - y_k) D_j f_k(x) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

következik, így

$$\Phi'(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} 2(f_k(x) - y_k) D_1 f_k(x) \dots \sum_{k=1}^{n} 2(f_k(x) - y_k) D_n f_k(x)\right) =$$

$$= 2((f_1(x) - y_1) \dots (f_n(x) - y_n)) \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & \dots & D_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n(x) & \dots & D_n f_n(x) \end{pmatrix} =$$

$$= 2((f_1(x) - y_1) \dots (f_n(x) - y_n)) f'(x).$$

A $\Phi'(x^*) = 0$ egyenlet tehát a

$$2((f_1(x^*) - y_1) \dots (f_n(x^*) - y_n)) f'(x^*) = 0$$

mátrix egyenletet jelenti. A feltételek miatt $f'(x^*)$ nem szinguláris, így $f(x^*) - y = 0$, azaz $f(x^*) = y$.

b) $g \doteq f^{-1} : f(D) \to D$ folytonos, ha $\forall\ U \subset D$ nyílt halmazra $V = g^{-1}(U)$ nyílt $f(D)$-ben. De $V = g^{-1}(U) = (f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$, így az a) részt az $U \subset D$ nyílt $\mathbb{R}^n$-beli halmazra alkalmazva $\Longrightarrow$ $V = f(U) \subset f(D)$ nyílt $\mathbb{R}^n$-ben és így $f(D)$-ben.

3. Tétel (az inverz függvény regularitása). *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény (D nyílt) reguláris és kölcsönösen egyértelmű D-n, akkor a $g : f(D) \to D$ inverz függvénye reguláris.*

Bizonyítás.

– Először azt mutatjuk meg, hogy a $g = (g_1, \dots, g_n)$ függvény differenciálható $\forall\ y_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n}) \in f(D)$ pontban.
  Legyen $x_0 = g(y_0) \in D$. $f = (f_1, \dots, f_n)$ differenciálható x_0-ban $\Longrightarrow$ $\forall\ f_i$ komponens függvénye is, így $\exists\ \omega_i : D \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\omega_i(x)}{\|x - x_0\|} = 0$ és

$$(*) \qquad f_i(x) - f_i(x_0) = \sum_{j=1}^{n} D_j f_i(x_0)(x_j - x_{0j}) + \omega_i(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[D_j f_i(x_0) + \frac{\omega_i(x)(x_j - x_{0j})}{\|x - x_0\|^2} \right] (x_j - x_{0j}) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}^*(x)(x_j - x_{0j}),$$

ahol az

$$f_{ij}^*(x) \doteq \begin{cases} D_j f_i(x_0) + \dfrac{\omega_i(x)(x_j - x_{0j})}{\|x - x_0\|^2}, & (x \neq x_0) \\ D_j f_i(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

szerint definiált függvény folytonos x_0-ban (ahogy ez könnyen látható). Ha $y = (y_1, \ldots, y_n) \in f(D)$ tetszőleges, akkor $(*)$-ból az $x = g(y)$ helyettesítéssel $((y_1, \ldots, y_n) = y = f(g(y)) = (f_1(g(y)), \ldots, f_n(g(y))))$ az

$$y_i - y_{0i} = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}^*(g(y))[g_j(y) - g_j(y_0)] \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

egyenletrendszer adódik a $g_j(y) - g_j(y_0)$ $(j = 1, \ldots, n)$ ismeretlenekre, melynek determinánsa:

$$M(y) = \det\Big(f_{ij}^*(g(y))\Big)_{n \times n}.$$

A g függvény y_0-beli és az f_{ij}^* függvények x_0-beli folytonossága miatt (a determináns definíciója alapján) az M függvény folytonos y_0-ban és

$$f_{ij}^*(g(y_0)) = f_{ij}^*(x_0) = D_j f_i(x_0)$$

miatt

$$M(y_0) = \det f'(x_0) \neq 0$$

(utóbbi f regularitása miatt). Így $\exists\, K(y_0, r)$, hogy $M(y) \neq 0$, ha $y \in K(y_0, r)$, ezért (a Cramer-szabály miatt)

$$g_j(y) - g_j(y_0) = \frac{M_j(y)}{M(y)} \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

ahol $M_j(y)$ az $M(y)$ determinánsból úgy keletkezik, hogy j-edik oszlopát kicseréljük az

$$\begin{pmatrix} y_1 - y_{01} \\ \vdots \\ y_n - y_{0n} \end{pmatrix}$$

oszlopra, a többi változatlan marad. Fejtsük ki $M_j(y)$-t ezen oszlop szerint, úgy

$$(\diamond) \qquad g_j(y) - g_j(y_0) = \sum_{i=0}^{n} g_{ij}^*(y)(y_i - y_{0i}) \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

ahol $g^*_{ij}(y)$ az $M(y)$ egyik aldeterminánsának és $M(y)$-nak a hányadosa, így folytonos függvénye y-nak y_0-ban.
($\diamond$) az

$$\omega_j(y) \doteq \sum_{i=0}^{n} \left[g^*_{ij}(y) - g^*_{ij}(y_0)\right](y_i - y_{0i})$$

választással a

$$g_j(y) - g_j(y_0) = \sum_{i=1}^{n} g^*_{ij}(y_0)(y_i - y_{0i}) + \omega_j(y) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

alakba írható, ahol

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\omega_j(y)}{\|y - y_0\|} = \sum_{i=1}^{n} \lim_{y \to y_0} \left[(g^*_{ij}(y) - g^*_{ij}(y_0)) \frac{y_i - y_{0i}}{\|y - y_0\|}\right] = 0 \ ,$$

ami adja $\forall\ g_j$ és így a $g = (g_1, \ldots, g_n)$ függvény y_0-beli differenciálhatóságát.

– Most belátjuk, hogy g folytonosan differenciálható. Korábban beláttuk, hogy ha f-nek létezik g differenciálható inverze, akkor $\forall\ y \in f(D)$-re

$$g'(y) = \left[f'(g(y))\right]^{-1},$$

így a g' függvény három függvény összetétele:

$$f(D) \xrightarrow{g} D \xrightarrow{f'} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \xrightarrow{\mathcal{I}} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

ahol $\mathcal{I}$ minden nem szinguláris mátrixhoz az inverzét rendeli.
f' a feltétel szerint, g az előző tétel miatt, $\mathcal{I}$ pedig azért folytonos, mert ha A egy $n \times n$-es, nem szinguláris mátrix, úgy $A^{-1} = \left(b_{ij}\right)_{n \times n}$, ahol

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{j+i} \det A_{ji}}{\det A},$$

így az $[f'(x)]^{-1}$ mátrix elemei folytonos függvények ($\det f'(x) \neq 0$ és f' folytonos differenciálhatósága miatt). Mindez adja g' folytonosságát.

– $\det g'(y) \neq 0$ ($\forall\ y \in f(D)$) abból következik, hogy f' nem szinguláris, így inverze sem, azaz g' sem.

Az előző három tétel eredményeinek összefoglalása a következő:

4. Tétel (inverzfüggvény-tétel). *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény a D nyílt halmazon reguláris, akkor lokálisan invertálható és a lokális inverzek regulárisak, azaz $\forall\ x_0 \in D$ esetén $\exists\ U$ és V nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, hogy*

$x_0 \in U \subset D$, $f(U) = V$, továbbá f kölcsönösen egyértelmű U-n, a $g = f^{-1}$ függvény folytonosan differenciálható V-n, és $\det g' \neq 0$ V-n.

Bizonyítás.
Az 1. tétel adja f lokális invertálhatóságát D-n, így $\forall\, x_0 \in D$ esetén létezik $K(x_0, \delta) = U \subset D$ nyílt halmaz, hogy f kölcsönösen egyértelmű U-n. A 2. tétel miatt az $f(U) = V$ halmaz nyílt $\mathbb{R}^n$-ben, míg 3. tétel miatt a $g = f^{-1}$ lokális inverz reguláris V-n.

Megjegyzések:

1) Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény lokális invertálhatóságát úgy is fogalmazhatjuk, hogy az $y = f(x)$ egyenlet, illetve az

$$y = (y_1, \ldots, y_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)) = f(x)$$

miatt adódó

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

egyenletrendszer megoldható $x_1, \ldots, x_n$-re az $y_1, \ldots, y_n$ függvényében (ha $\forall\, x_0 \in D$-re x és y az x_0 és $y_0 = f(x_0)$ elég kis környezetében vannak).

2) Az 1-4. tételek bizonyítása mutatja, hogy igazak a következő tételek is:

1.* Tétel. *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény olyan, hogy $\exists\, x_0 \in D$, hogy $\det f'(x_0) \neq 0$ (azaz $f'(x_0)$ nem szinguláris), akkor $\exists\, K(x_0, r)$, hogy f invertálható $K(x_0, r)$-en.*

4.* Tétel. *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény olyan, hogy $\exists\, x_0 \in D$, hogy $\det f'(x_0) \neq 0$ (azaz $f'(x_0)$ nem szinguláris), akkor $\exists\, U = K(x_0, \delta)$ hogy f kölcsönösen egyértelmű módon képezi le U-t egy $V \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazra (azaz invertálható U-n) és az inverz függvénye folytonosan differenciálható V-n.*

10. Implicit függvények.

Definíció. Legyenek $D_1 \subset \mathbb{R}^k$ és $D_2 \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazok és

$$f = (f_1, \dots, f_n) : D = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$$

adott függvény (függvényrendszer).
A $g = (g_1, \dots, g_n) : D_1 \to \mathbb{R}^n$ függvényt (függvényrendszert) az

(1) $$f(x, y) = 0 \qquad (x = (x_1, \dots, x_k),\ y = (y_1, \dots, y_n))$$

egyenlet (illetve az

(1') $$f_i(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) = 0 \qquad (i = 1, \dots, n)$$

egyenletrendszer) megoldásának nevezzük, ha

(2) $$f(x, g(x)) = 0 \qquad (x \in D_1)$$

teljesül. Ekkor a $g = (g_1, \dots, g_n)$ függvényt (függvényrendszert) az (1) egyenlet által adott implicit függvénynek (függvényrendszernek) szokás nevezni.
(Ha $k = n = 1$, úgy az f és a g függvény $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, illetve $g : D_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú.)

Fontos kérdések:

- Mikor létezik implicit függvény?
- Mit mondhatunk (alkalmas feltételek mellett) az implicit függvény differenciálhatóságáról?

Jelölések:
– Ha $f = (f_1, \dots, f_n) : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ differenciálható, úgy

$$f' \doteq \frac{\partial f}{\partial x} \doteq \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}.$$

– Ha $f : D \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$ ($D = D_1 \times D_2$ nyílt), akkor

$$f' \doteq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad (x = (x_1, \dots, x_k),\ y = (y_1, \dots, y_n)).$$

Megjegyzés: Az implicit függvény meghatározásánál egy n egyenletből álló $k + n$ ismeretlenes egyenletrendszert oldunk meg úgy, hogy az utolsó n ismeretlent fejezzük ki az első k-val (az egyszerűség kedvéért).

1. Tétel. *Legyen* $f : D = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$ *(D_1 és D_2 nyílt) differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy létezik az (1) egyenlet által adott (2)-t teljesítő* $g : D_1 \to \mathbb{R}^n$ *differenciálható implicit függvény. Akkor*

$$\text{(ID1)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x) = 0,$$

illetve ha a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ $n \times n$*-es mátrix nem szinguláris az* $(x, g(x))$ *pontban, akkor*

$$\text{(ID2)} \qquad g'(x) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))$$

teljesül.

Bizonyítás. Ha létezik differenciálható g, úgy legyen

$$h, H : D_1 \to \mathbb{R}^{k+n}, \qquad h(x) \doteq (x, g(x)), \qquad H(x) \doteq f(h(x)) = f(x, g(x)),$$

akkor egyrészt $H(x) = 0$ $(x \in D_1)$ másrészt (az összetett függvény differenciálási szabálya miatt):

$$0 = H'(x) = f'(h(x)) \cdot h'(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(h(x)) \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(h(x))\right] \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ g'(x) \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x)$$

azaz (ID1) teljesül. Ha pedig $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))$ nem szinguláris, úgy (ID1)-et $\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right]^{-1}$ -gyel balról szorozva, rendezés után kapjuk (ID2)-t is.

2. Tétel (implicitfüggvény-tétel). *Legyen* $f : D \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$ *olyan folytonosan differenciálható függvény, hogy* $\exists\ (a, b) \in D$, $\det \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ *(azaz* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ *nem szinguláris). Akkor* $\exists\ K(a, r) \subset \mathbb{R}^k$ *és egy egyértelműen meghatározott, folytonos* $g : K(a, r) \to \mathbb{R}^n$ *függvény, hogy* $g(a) = b$ *és* $f(x, g(x)) = 0$ $(x \in K(a, r))$ *(azaz az (1) által meghatározott, (2)-t teljesítő implicit függvény* $K(a, r)$*-en). Továbbá* g *folytonosan differenciálható.*

Bizonyítás. Az adott feltételek mellett legyen

$$F : D \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^{k+n}, \qquad F(x, y) \doteq (x, f(x, y)),$$

akkor egyrészt

$$F' = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

másrészt (ahogy ez könnyen ellenőrízhető) $\det F' = \det \dfrac{\partial f}{\partial y}$, így

$$\det F'(a,b) = \det \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$$

(azaz $F'(a,b)$ nem szinguláris), végül

$$F(a,b) = (a, f(a,b)) = (a,0)$$

is teljesül.
F folytonosan differenciálható D-n, így az előbbiek miatt teljesíti az előző paragrafus 4. tételének feltételeit, így $\exists\ U = K((a,b),\delta) \subset \mathbb{R}^{k+n}$ nyílt környezet, hogy

- az F függvény $U = K((a,b),\delta)$-t kölcsönösen egyértelműen képezi le egy $V \subset \mathbb{R}^{k+n}$ nyílt, az $(a,0)$ pontot tartalmazó halmazba,
- az F függvény $G : V \to U$ inverz függvénye folytonosan differenciálható.

Ekkor F definíciója miatt $(x,y) = G(x, f(x,y))$, ami adja, hogy G az első k változót változatlanul hagyja (ahogy F is), ezért $\exists\ h : V \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény, hogy

$$G(x,z) = (x, h(x,z)) \qquad (x \in \mathbb{R}^k,\ y \in \mathbb{R}^n).$$

Megmutatjuk, hogy $\exists\ K(a,r) \subset \mathbb{R}^k$, hogy a

$$g(x) \doteq h(x,0) \qquad (x \in K(a,r))$$

függvény a keresett implicit függvény.
Legyen $K(a,r) \subset \mathbb{R}^k$ olyan, hogy $K(a,r) \times [(0,\ldots,0)] \subset V$ (ez létezik V nyíltsága és $(a,0) \in V$ miatt).
Ha $x \in K(a,r)$, úgy $(x,0) \in V \implies G(x,0) = (x, h(x,0))$ és így (mivel G az F inverze)

$$(x,0) = F(x, h(x,0)) = (x, f(x, h(x,0))),$$

ami adja, hogy

$$0 = f(x, h(x,0)) = f(x, g(x)) \qquad (x \in K(a,r))$$

és
$$(a,b) = G(a,0) = (a,h(a,0)) = (a,g(a))$$
miatt $g(a) = b$ teljesül. Továbbá – definíciója miatt – g folytonosan differenciálható.
Végül g egyértelműsége abból jön, hogy ha g_1 és g_2 is implicit függvény, akkor $f(x,g_1(x)) = f(x,g_2(x))$ teljesül, ami F definíciója miatt adja, hogy
$$F(x,g_1(x)) = (x,f(x,g_1(x))) = (x,f(x,g_2(x))) = F(x,g_2(x))$$
melyből F invertálhatósága miatt
$$g_1(x) = g_2(x) \qquad (x \in K(a,r))$$
következik, azaz hogy $g_1 = g_2$.

11. Feltételes szélsőérték

Definíció. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R},\ h = (h_1,\dots,h_n) : D \to \mathbb{R}^n$. Az f függvénynek az $x_0 \in D$ (D nyílt) pontban a
$$h(x) = 0 \qquad (h_1(x) = \cdots = h_n(x) = 0)$$
feltétel mellett feltételes lokális szélsőértéke van, ha

– $h(x_0) = 0 \quad (h_1(x_0) = \cdots = h_n(x_0) = 0)$

és

– $\exists\ \delta > 0,\ \forall\ x \in K(x_0,\delta)\ \wedge\ h(x) = 0 \quad f(x) \le f(x_0)\ (f(x) \ge f(x_0))$

teljesül.

Tétel (a feltételes lokális szélsőérték szükséges feltétele). *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R},\ h = (h_1,\dots,h_n) : D \to \mathbb{R}^n$. Ha az f függvénynek az $x_0 \in D$ (D nyílt) pontban a $h(x) = 0$ feltétel mellett feltételes lokális szélsőértéke van, továbbá f és h folytonosan differenciálhatók az x_0 egy környezetében, akkor*

– *vagy a $\Big(D_j h_i(x_0)\Big)_{n\times(k+n)}$ mátrix minden n-edrendű aldeterminánsa zérus*

– *vagy $\exists\ \lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,\dots,n)$ számok, hogy a*
$$F : D \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i(x)$$

függvény minden parciális deriváltja zérus x_0-ban, azaz

$$D_jF(x_0) = 0 \qquad (j = 1, \dots, k+n).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a

$$\Big(D_jh_i(x_0)\Big)_{n\times(k+n)}$$

mátrixnak létezik egy n-edrendű nem zérus aldeterminánsa.
Feltehetjük, hogy az, amelyet az utolsó n oszlopból alkothatunk. A h függvény teljesíti az implicitfüggvény-tétel feltételeit, így a $h(x) = 0$ egyenletrendszer megoldható az utolsó n változójára, azaz
$\exists\ K(x_{01}, \dots, x_{0k}, \delta) \doteq K(\overline{x}_0, \delta) \subset \mathbb{R}^k$ és $g = (g_1, \dots, g_n) : K(\overline{x}_0, \delta) \to \mathbb{R}^n$ függvény, hogy

$$h(x_1, \dots, x_k, g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_n(x_1, \dots, x_k)) = 0 \qquad ((x_1, \dots, x_k) = \overline{x} \in K(\overline{x}_0, \delta)) \tag{1}$$

és folytonosan differenciálható.
Legyen $G : K(\overline{x}_0, \delta) \to \mathbb{R},\ G(\overline{x}) \doteq f(\overline{x}, g_1(\overline{x}), \dots, g_n(\overline{x}))$, akkor G differenciálható és az $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^k$ pontban közönséges szélsőértéke van, így

$$D_jG(\overline{x}_0) = D_jf(x_0) + \sum_{r=1}^{n} D_{k+r}f(x_0)\cdot D_jg_r(\overline{x}_0) = 0 \qquad (j = 1, \dots, k) \tag{2}$$

Másrész (1)-ből kapjuk, hogy

$$D_jh_i(x_0) + \sum_{r=1}^{n} D_{k+r}h_i(x_0)\cdot D_jg_r(\overline{x}_0) = 0 \qquad (i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, k),$$

illetve itt rögzített j mellett az i-edik egyenletet $\lambda_i \in \mathbb{R}$-rel szorozva és összegezve

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_iD_jh_i(x_0) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{r=1}^{n} D_{k+r}h_i(x_0)\cdot D_jg_r(\overline{x}_0) = 0 \qquad (j = 1, \dots, k) \tag{3}$$

Ezután (2)-t és (3)-at rögzített j mellett összeadva

$$\begin{aligned} &D_jf(x_0) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_iD_jh_i(x_0) + \\ &\quad + \sum_{r=1}^{n} D_jg_r(\overline{x}_0)\left[D_{k+r}f(x_0) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_iD_{k+r}h_i(x_0)\right] = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

adódik $j = 1, \dots, k$ esetén.

Válasszuk $\lambda_1, \dots, \lambda_n$-t úgy, hogy

$$D_{k+r}f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_{k+r}h_i(x_0) = 0 \qquad (r = 1, \dots, n) \tag{5}$$

legyen. Ez lehetséges, mert (5) egy inhomogén lineáris egyenletrendszer $\lambda_1, \dots, \lambda_n$-re, melynek determinánsa $\det(D_{k+r}h_i)_{n\times m} \neq 0$ a feltevés szerint, így létezik megoldása. Ezen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valós számokkal (4)-ből

$$D_j f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_j h_i(x_0) = 0 \qquad (j = 1, \dots, k)$$

következik, ami – (5)-tel együtt – adja, hogy a

$$F = f + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i$$

függvény minden parciális deriváltja zérus x_0-ban, és ezt kellett bizonyítani.

Megjegyzés. A tétel szerint a lehetséges feltételes szélsőérték helyek meghatározásához a

$$\begin{cases} D_j f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_j h_i(x) = 0 & j = 1, \dots, k+n \\ h_i(x) = 0 & i = 1, \dots, n \end{cases}$$

$k+2n$ egyenletből álló $k+2n$ ismeretlenes $(x_1, \dots, x_{k+n}, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ egyenletrendszert kell megoldani.

1. Feladatsor

1) Számítsa ki az alábbi függvények parciális deriváltjait:

$$f_1(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2);$$

$$f_2(x,y) = \log(x^2 + y^2) \qquad (x^2 + y^2 \neq 0);$$

$$f_3(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad ((x,y) \in D = ?);$$

$$f_4(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} \qquad ((x,y) \in D = ?);$$

$$f_5(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (x^2 + y^2 \neq 0);$$

$$f_6(x,y) = x \cdot \sin(x+y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2);$$

$$f_7(x,y) = \frac{\cos x^2}{y} \qquad (y \neq 0);$$

$$f_8(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (x^2 + y^2 + z^2 \neq 0);$$

$$f_9(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z \qquad (x,y,z > 0);$$

$$f_{10}(x,y,z) = x^{y^z} \qquad (x,y,z > 0);$$

$$f_{11}(x,y,z) = x^{\frac{y}{x}} \qquad (x,y,z > 0).$$

2) Bizonyítsa be, hogy az

$$f(0,0) = 0, \quad f(x,y) = (x^2+y^2) \cdot \sin\frac{1}{x^2+y^2} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

szerint értelmezett függvény a $(0,0)$ pontban parciálisan differenciálható, illetve differenciálható.

3) Számítsa ki az $f(x,y) = x^2 + y^2 \ \ ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény $e = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ iránymenti deriváltját.

4) Milyen e irányhoz létezik az $f(x,y) = \sqrt[3]{xy} \ \ ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ függvénynek a $(0,0)$-ban iránymenti deriváltja?

5) Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = x_1x_2$, számítsa ki f iránymenti deriváltját az $a = (a_1,a_2)$ pontban az $e = (1,0)$ vektor szerint.

6) Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = B \cdot x + b$, ahol B egy $m \times n$-es mátrix és $b \in \mathbb{R}^m$. Bizonyítsa be, hogy f differenciálható és $f'(x) = B$.

7) Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y \neq (0,0)) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Bizonyítsa be, hogy f-nek $(0,0)$-ban létezik bármely iránymenti deriváltja, de nem differenciálható.

8) Milyen e-re létezik $Def(0,0)$? Létezik-e $D_1 f(0,0)$ és $D_2 f(0,0)$? Differenciálható-e f $(0,0)$-ban? Folytonos-e f $(0,0)$-ban? Ha:

– $f(0,0) = 0, \quad f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0);$

– $f(0,0) = 0, \quad f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2+(y-x)^2}, \quad (x,y) \neq (0,0);$

– $f(0,0) = 0, \quad f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0);$

– $f(x,y) = |xy|^{\frac{1}{2}}$.

9) Mely pontban differenciálható az

$$f(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2} \qquad ((x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3)$$

függvény?

10) Bizonyítsa be, hogy az $f(x,y) = |xy|$ függvény differenciálható $(0,0)$-ban, de nem folytonosan differenciálható $(0,0)$ bármely környezetében.

11) Bizonyítsa be, hogy ha $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan, hogy bármely $D_j f$ létezik és x_0 egy környezetében korlátos, akkor f folytonos x_0-ban.

12) Létezik-e $D_{xy} f(0,0)$ ha

$$f(0,0) = 0, \qquad f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0) .$$

13) Bizonyítsa be, hogy $D_{xy} f = D_{yx} f$, ha f-et a következő képletek valamelyike értelmezi:

$$f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2 \ ; \qquad f(x,y) = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}} .$$

14) Bizonyítsa be, hogy ha

$$f(0,0) = 0, \qquad f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0) ,$$

akkor $D_{xy} f(0,0) \neq D_{yx} f(0,0)$.

15) Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

   a) számítsa ki f'-t és $\det f'$-t,

   b) számítsa ki az $S = [1, 2] \times [0, \pi]$ képét f-re.

16) Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$

   a) számítsa ki f'-t és $\det f'$-t,

   b) határozza meg az $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2,\ x \geq 0, y \geq 0\}$ halmaz képét f-re. (Útmutatás: vezessük be az $x = ar \cos t,\ y = ar \sin t$ transzformációt.)

17) Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$

   a) számítsa ki f'-t és $\det f'$-t,

   b) határozza meg az $S = [0, 1] \times [0, \pi]$ halmaz képét f-re.

18) Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(\varrho, \varphi, \theta) = (\varrho \cos \theta \sin \varphi, \varrho \sin \theta \sin \varphi, \varrho \cos \varphi)$

   a) számítsa ki f'-t és $\det f'$-t,

   b) határozza meg az $S = [1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ halmaz képét f-re.

19) Legyen $D = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 1 + x_1 + x_2 + x_3 \neq 0\}$,

$$f : D \to \mathbb{R}^3 \quad f(x) = \frac{x}{1 + x_1 + x_2 + x_3} .$$

   Bizonyítsa be, hogy $\det f' = \dfrac{1}{(1 + x_1 + x_2 + x_3)^4}$.

20) Legyen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ rögzített, $f : K(x_0, 1) \to \mathbb{R}^n,\ f(x) = \dfrac{2x}{1 - |x|^2}$. Számítsa ki $f'(x)$-et.

21) Írja fel az alábbi függvényekre vonatkozó Taylor-formulát (adott a pontban, adott $r \in \mathbb{N}$ rendig):

   – $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2} \quad ((x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \quad a = (1, 1),\ r = 2;$

   – $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 \quad ((x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3)$
   $a = (1, 1, 1),\ r = 4.$

22) Írja fel $x - 1$ és $y - 2$ polinomjaként az

$$x^3 + 3x^2y^2 + 2xy^2 + y^3 \quad \text{illetve} \quad x^2y^2 - 2xy^3 + 3x^2y$$

   polinomokat.

23) Számítsa ki $1.02^{100.01}$ közelítő értékét.

24) Írja fel a Taylor-formulát a $(0,\dots,0)$ pontban az

$$f(x_1,\dots,x_n)=\exp(x_1+\dots+x_n)\qquad((x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n)$$

függvényre.

25) Vizsgálja a lokális szélsőértéket az alábbi függvényekre:

$$\begin{array}{ll}
f(x,y)=x^2+xy+y^2-3ax-3by\ , & (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ a,b\in\mathbb{R}\ ;\\
f(x,y)=x^3+y^3-3axy\ , & (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ a>0\ ;\\
f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2\ , & (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\ ;\\
f(x_1,x_2)=x_1^3-3x_1x_2^2\ , & (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\ ;\\
f(x_1,x_2)=|x_1|+|x_2|\ , & (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\ ;\\
f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3\ , & (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\ ;\\
f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)\ , & 0\le x,y\le\dfrac{\pi}{2};\\
f(x,y)=\cos x\cos y\cos(x+y)\ , & 0\le x,y\le\pi\ ;\\
f(x_1,\dots,x_n)=\dfrac{(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)^{\frac{1}{n+1}}}{1+x_1+\dots+x_n}\ , & x_1,\dots,x_n\ge 0.
\end{array}$$

26) Legyen $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, hogy

$$f(0,0,0)=(1,2)\qquad\text{és}\qquad f'(0,0,0)=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Legyen $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ \ g(x,y)=(x+2y+1,3xy)$.
Határozza meg $(g\circ f)'(0,0,0)$-t.

27) Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$,

$$f(x_1,x_2)=(e^{2x_1+x_2},3x_2-\cos x_1,x_1^2+x_2+2),$$
$$g(y_1,y_2,y_3)=(3y_1+2y_2+y_3^2,y_1^2-y_3+1).$$

a) Ha $F(x)=g(f(x))$, úgy határozza meg $F'(0)$-t.

b) Ha $G(y)=f(g(y))$, úgy határozza meg $G'(0)$-t.

28) Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(r,\varphi)=(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$.
Bizonyítsa be, hogy ha $D=(0,1)\times(0,b)\subset\mathbb{R}^2$, akkor f' nem szinguláris D-n, de $f\iff$ kölcsönösen egyértelmű D-n, ha $b<2\pi$.

29) Bizonyítsa be, hogy az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

függvény kölcsönösen egyértelmű a $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ halmazon. Határozza meg $f(D)$-t és $(f^{-1})'(0,1)$-et.

30) Bizonyítsa be, hogy az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

függvény kölcsönösen egyértelmű a $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 2\pi\}$ halmazon. Határozza meg $f(D)$-t és $(f^{-1})'(0,1)$-et.

31) Határozza meg a feladatsor 19. feladatában szereplő f függvény inverzét.

32) Határozza meg a feladatsor 20. feladatában szereplő f függvény inverzét.

33) Legyen

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad & g(x,y) &= (2ye^{2x}, xe^y), \\ f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad & f(x,y) &= (3x - y^2, 2x + y, xy + y^3). \end{aligned}$$

Bizonyítsa be, hogy létezik $K((0,1), r) \subset \mathbb{R}^2$, melyet g kölcsönösen egyértelműen képez le a $(2,0)$ egy környezetébe.
Határozza meg $(f \circ g^{-1})'(2,0)$-t.

34) Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2 - 5$.
   a) Az $(a,b) = (1,2)$ pont teljesíti az $f(x,y) = 0$ egyenletet, $D_1 f(1,2) \neq 0$, $D_2 f(1,2) \neq 0$, így az egyenlet lokálisan megoldható bármelyik változóra (a másik függvényében). Keressen olyan $y = g(x)$ megoldást, mely egyértelmű és olyat, mely nem egyértelmű az $x = 1$ egy környezetében.
   b) A $(\sqrt{5}, 0)$ pont is teljesíti az $f(x,y) = 0$ egyenletet. Létezik-e a $\sqrt{5}$-nek egy környezete, melyre az $f(x,y) = 0$ egyenlet megoldható y-ra x függvényében?

35) Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^3$, akkor $f(0,0) = 0$. Létezik-e a 0-nak olyan környezete, melyen $f(x,y) = 0$ megoldható y-ra x függvényében? Differenciálható-e a kapott függvény $x = 0$-ban?

36) Vizsgálja az $y^2 - x^4 = 0$ egyenlet megoldhatóságát a $(0,0)$ és $(1,1)$ pont környezetében.

37) Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható,

$$f(3,-1,2) = 0, \qquad f'(3,-1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bizonyítsa be, hogy létezik $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható függvény (B nyílt), hogy

$$f(x, g_1(x), g_2(x)) = 0 \quad (x \in B) \quad \text{és} \quad g(3) = (-1, 2).$$

Határozza meg $g'(3)$-at.

38) Megoldható-e az

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2x_3 &= 0 \\ 3x_1^3 - x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer x_2-re és x_3-ra az x_1 függvényében az $x_1 = 1$ pont egy környezetében?

39) Igazolja, hogy a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4^2 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldható az

a) $x_1,\ x_2,\ x_4$ ismeretlenekre x_3 függvényében,

b) $x_1,\ x_3,\ x_4$ ismeretlenekre x_2 függvényében,

c) $x_2,\ x_3,\ x_4$ ismeretlenekre x_1 függvényében,

de nem oldható meg az $x_1,\ x_2,\ x_3$ ismeretlenekre x_4 függvényében.

40) Keresse meg f szélsőértékhelyeit a $h = 0$ feltételre, ha

a) $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$, $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$;

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + 2x_3$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2$;

c) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$;

d) $f(x, y) = x^m + y^m$, $h(x, y) = x + y - 2a \ \ (a > 0, m > 1)$;

e) $f(x,y,z) = xyz$, $\quad h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$;

f) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $\quad h_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$;

$\quad h_2(x,y,z) = x + 2y + 3z$;

g) $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i}$, $\quad h(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \quad (x_i > 0)$;

h) $f(x_1,\dots,x_n) = x_1^2 \cdot \ldots \cdot x_n^2$, $\quad h(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 \quad (x_i > 0)$.

41) Határozza meg az $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ ellipszisen azokat a pontokat, melyek maximális, illetve minimális távolságra vannak a (0,0) ponttól.

42) Határozza meg a

$$\Gamma_1 = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 - x_2^2 = 3\} \qquad \text{és} \qquad \Gamma_2 = \{(x_1,x_2) \mid x_2 = 2x_1\}$$

görbék távolságát.

43) Határozza meg az alábbi függvények maximumát és minimumát:

a) $f(x,y) = x^4 - y^4$, $\quad (x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$;

b) $f(x,y) = (x+3)^2 + y^2$, $\quad (x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

44) Határozza meg az $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ gömbfelület azon pontjait, amelyek a legnagyobb, illetve legkisebb távolságra vannak az (1,5,-10), (1,2,2), illetve a (-2,1,0) ponttól.

II. RIEMANN-INTEGRÁL $\mathbb{R}^n$-BEN

1. Riemann-integrál téglán

a) Riemann-integrál fogalma téglán

A Riemann-integrál fogalma (és ebből eredően tulajdonságai is) az $\mathbb{R}^n$ tégláin (intervallumain) szoros analógiát mutat az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ típusú függvényekre felépített Riemann-integrállal.

A továbbiakban legyen $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ egy tégla, vagy n-dimenziós intervallum (ahol az $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ intervallumokat Q komponens-intervallumainak nevezzük), míg $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.

1. Definíció. A $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ tégla mértékén (térfogatán) a

$$V(Q) \doteq (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

valós számot értjük. (Speciálisan ez $n = 1$-re egy valós intervallum hossza, $n = 2$-re egy téglalap területe.)

2. Definíció. Ha $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ adott tégla, úgy a $P = P_1 \times \cdots \times P_n$ halmazt Q egy felosztásának nevezzük, ha $\forall\, j = 1, \ldots, n$-re P_j az $[a_j, b_j]$ intervallum egy (korábban már definiált) felosztása, azaz

$$P_j = \{x_{ji} \mid a_j = x_{j0} < x_{j1} < \cdots < x_{jk_j} = b_j\} \ .$$

Ha $\forall$ j-re $I_{ji} = [x_{ji-1}, x_{ji}]$ $(i = 1, \ldots, k_j)$ jelöli az $[a_j, b_j]$ komponens-intervallum P_j által meghatározott részintervallumait, akkor a $T_{i_1 \ldots i_n} = I_{1i_1} \times \cdots \times I_{ni_n}$ téglákat (ahol $i_1 = 1, \ldots, k_1;\ \ldots\ ; i_n = 1, \ldots, k_n$) a Q tégla P felosztás által meghatározott résztégláinak (részintervallumainak), míg a

$$\|P\| = \sup_{i_1, \ldots, i_n} \{\operatorname{diam} T_{i_1 \ldots i_n}\}$$

számot (ahol $\operatorname{diam} T_{i_1 \ldots i_n}$ a $T_{i_1 \ldots i_n}$ tégla átmérője) a P felosztás finomságának nevezzük.

3. Definíció. Legyen P^1 és P^2 Q két felosztása. P^2 finomítása (továbbosztása) P^1-nek, ha $P^1 \subset P^2$. A $P = P^1 \cup P^2$ halmazt a P^1 és P^2 felosztások egyesítésének (illetve $P^1 \subset P^1 \cup P^2$ és $P^2 \subset P^1 \cup P^2$ miatt közös finomításának) nevezzük.

4. Definíció. $\langle P^k \rangle$ normális felosztássorozata Q-nak, ha $\lim\limits_{k\to\infty} \|P^k\| = 0$ teljesül.

Megjegyzések:

1) Ha $P = P_1 \times \cdots \times P_n \implies \|P\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \|P_k\|^2, \quad \|P_k\| \leq \|P\|$.

2) Ha $\langle P^k \rangle = \langle P_1^k \times \cdots \times P_n^k \rangle$, úgy $\langle P^k \rangle \iff$ normális, ha $\langle P_i^k \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ normális.

3) $P^1 \subset P^2 \iff P_i^1 \subset P_i^2$ $(i = 1, \ldots, n)$.

4) $Q = \bigcup\limits_{i_1,\ldots,i_n} T_{i_1\ldots i_n}$.

5. Definíció. Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, P a Q egy felosztása és $T_{i_1\ldots i_n}$ e felosztás résztéglái, továbbá

$$m_{i_1\ldots i_n} \doteq \inf_{x\in T_{i_1\ldots i_n}} \{f(x)\} \qquad M_{i_1\ldots i_n} \doteq \sup_{x\in T_{i_1\ldots i_n}} \{f(x)\}$$

(ezek f korlátossága miatt léteznek).
A

$$s(f,P) \doteq \sum m_{i_1\ldots i_n} V(T_{i_1\ldots i_n})\ , \qquad S(f,P) \doteq \sum M_{i_1\ldots i_n} V(T_{i_1\ldots i_n})\ ,$$
$$\mathcal{O}(f,P) \doteq S(f,P) - s(f,P) = \sum (M_{i_1\ldots i_n} - m_{i_1\ldots i_n}) V(T_{i_1\ldots i_n})$$

számokat az f függvény P felosztáshoz tartozó alsó, felső, illetve oszcillációs összegeinek, míg tetszőleges $t_{i_1\ldots i_n} \in T_{i_1\ldots i_n}$ pontokra a

$$\sigma(f,P) \doteq \sum f(t_{i_1\ldots i_n}) V(T_{i_1\ldots i_n})$$

számot az f függvény P felosztáshoz és $t_{i_1\ldots i_n}$ pontokhoz tartozó integrálközelítő összegének nevezzük, ahol az összegzés kiterjed a Q tégla P által meghatározott összes résztéglájára.

1. Tétel. *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

a) *$\forall$ P és $\forall$ $\sigma(f,P)$-re: $s(f,P) \leq \sigma(f,P) \leq S(f,P)$;*
b) *$\forall$ $P^1 \subset P^2$-re: $s(f,P^1) \leq s(f,P^2), \quad S(f,P^1) \geq S(f,P^2)$;*
c) *$\forall$ P^1, P^2-re: $s(f,P^1) \leq S(f,P^2)$.*

Bizonyítás. Ld. Analízis II. II/2. fejezet, 1. tétel, annyi módosítással, hogy a b) résznél $\forall$ $T_{i_1\ldots i_n}$ téglával kell dolgozni.

6. Definíció. Legyen $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az

$$\underline{I} \doteq \underline{\int_Q} f \doteq \sup_P\{s(f,P)\} \qquad \bar{I} \doteq \bar{\int_Q} f \doteq \inf_P\{S(f,P)\}$$

(létező) számokat az f függvény Q feletti alsó, illetve felső Darboux-integráljának nevezzük.

2. Tétel. *Legyen $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

$$\underline{I}, \bar{I} \in \mathbb{R} \quad \textit{és} \quad \underline{I} \leq \bar{I}, \quad 0 \leq \bar{I} - \underline{I} < \mathcal{O}(f,P).$$

Bizonyítás. Ld. Analízis II. II/2. fejezet, 2. tétel és következménye.

Példák:

1) Ha $f(x) = k \ (x \in Q) \implies \underline{I} = \bar{I}$.

2) Ha

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in Q \wedge x \ \forall \text{ koordinátája racionális.} \\ 0 & , \ x \in Q \text{ egyébként,} \end{cases}$$

akkor $\underline{I} \neq \bar{I}$.

7. Definíció. Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann-integrálható Q-n, ha $\underline{I} = \bar{I}$ és ezt a közös értéket az f függvény Q tégla feletti Riemann-integráljának nevezzük, és rá az I, $\int\limits_Q f$, vagy $\int\limits_Q f(x)dx$ jelöléseket használjuk.

Megjegyzések:

1) Az előző 1. példa függvénye Riemann-integrálható.

2) Létezik nem Riemann-integrálható függvény (a 2. példa függvénye).

b) A Darboux-tétel és következményei

Darboux-tétel. *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ ($Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla) korlátos függvény, akkor $\forall \ \varepsilon > 0$-hoz $\exists \ \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $Q \ \forall \ P$ felosztására, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$,*

$$S(f,P) - \bar{I} < \varepsilon \qquad \textit{és} \qquad \underline{I} - s(f,P) < \varepsilon$$

teljesül.

A Darboux-tétel következménye. *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

a) *Q $\forall\langle P^k\rangle$ normális felosztássorozatára*

$$\exists \quad \lim_{k\to\infty} s(f,P^k) = \underline{I}\ , \quad \lim_{k\to\infty} S(f,P^k) = \bar{I}\ , \quad \lim_{k\to\infty} \mathcal{O}(f,P^k) = \bar{I} - \underline{I}\ ;$$

b) *Q $\forall\langle P^k\rangle$ normális felosztássorozatára $\exists$ $\langle\sigma^1(f,P^k)\rangle$ és $\langle\sigma^2(f,P^k)\rangle$ integrálközelítő összegsorozatok, hogy*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma^1(f,P^k) = \underline{I}\ , \qquad \lim_{k\to\infty} \sigma^2(f,P^k) = \bar{I}\ .$$

Bizonyítás. A jelölések megfelelő módosításával, mint valósban.

c) A Riemann-integrálhatóság kritériumai és elegendő feltételei

1. Tétel. *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható Q-n, ha $\exists\, I \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall$ olyan P felosztására Q-nak, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$, $|\sigma(f,P) - I| < \varepsilon$ teljesül $\forall\ \sigma(f,P)$-re.*

Bizonyítás. Megegyezik a valós esettel, megfelelő jelölések mellett, de $\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ helyett $\dfrac{\varepsilon}{3V(Q)}$-t kell használni.

Adható a Darboux-tételt nem használó bizonyítás is:

a) Legyen $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, azaz $\underline{I} = \bar{I} = I$ és $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor $\underline{I}$ és $\bar{I}$ definíciója miatt $\exists\ P^0$ felosztása Q-nak, hogy

$$S(f,P^0) - \bar{I} < \varepsilon \qquad \text{és} \qquad \underline{I} - s(f,P^0) < \varepsilon$$

teljesül. Ha $\|P^0\| = \delta(\varepsilon)$, úgy $\|P\| \le \delta(\varepsilon)$ esetén $\underline{I} = \bar{I} = I$ és

$$s(f,P^0) \le s(f,P) \le \sigma(f,P) \le S(f,P) \le S(f,P^0),$$

illetve az előbbi egyenlőtlenségek miatt kapjuk, hogy

$$|\sigma(f,P) - I| < \varepsilon \qquad (\forall\ \sigma(f,P)\text{-re}).$$

b) A megfordítás bizonyításához legyen $\varepsilon > 0$ adott.

– $\exists\ \underline{I} \implies \dfrac{\varepsilon}{3}$-hoz $\exists\ P^0$ felosztása Q-nak, hogy

$$(1) \qquad \underline{I} - s(f,P^0) < \frac{\varepsilon}{3}$$

teljesül.

– A feltétel miatt $\exists\ I$, hogy $\dfrac{\varepsilon}{3}$-hoz $\exists\ \delta\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$, hogy $\forall\ P'$-re, melyre $\|P'\| < \delta\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$

$$(2) \qquad |\sigma(f,P') - I| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Legyen $P = P^0 \cup P'$, úgy $\|P\| \le \|P'\|$ és $\|P\| \le \|P^0\|$ miatt (1) és (2)-ből

$$(3) \qquad \underline{I} - s(f,P) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{és} \qquad |\sigma(f,P) - I| < \frac{\varepsilon}{3}$$

következik.

– $\dfrac{\varepsilon}{3V(Q)}$-hoz ($m_{i_1\dots i_n}$ definíciója miatt) $\exists\ t_{i_1\dots i_n} \in T_{i_1\dots i_n}$ (ezek a Q P felosztásához tartozó résztéglái), hogy

$$f(t_{i_1\dots i_n}) - m_{i_1\dots i_n} < \frac{\varepsilon}{3V(Q)} \ ,$$

amiből összegzés után kapjuk, hogy

$$(4) \qquad \begin{aligned} \sigma(f,P) - s(f,P) &= \sum (f(t_{i_1\dots i_n}) - m_{i_1\dots i_n}) V(T_{i_1\dots i_n}) < \\ &< \frac{\varepsilon}{3V(Q)} \sum V(T_{i_1\dots i_n}) = \frac{\varepsilon}{3}\ . \end{aligned}$$

(3) és (4) felhasználásával:

$$|I - \underline{I}| \le |I - \sigma(f,P)| + |\sigma(f,P) - s(f,P)| + |s(f,P) - \underline{I}| < \varepsilon$$

következik, ha $\|P\| < \delta(\varepsilon) = \delta\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$.

Hasonlóan jön, hogy $|I - \bar{I}| < \varepsilon$, melyekből $|\bar{I} - \underline{I}| < \varepsilon$ és így (ε teszőleges volta miatt) $\underline{I} = \bar{I}$ adódik, azaz f Riemann-integrálható Q-n.

2. Tétel. *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható Q-n, ha $\forall\ \langle P^k \rangle$ normális felosztássorozathoz tartozó $\forall\ \langle \sigma(f,P^k) \rangle$ integrálközelítő összegsorozat konvergens.*

Bizonyítás. Mint valósban (ld. Analízis II., II/3. fejezet, 2. tétel).

3. Tétel (Riemann-kritérium). *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható Q-n, ha $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ P$ felosztása Q-nak, hogy*

$$\mathcal{O}(f, P) = S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon\ .$$

Bizonyítás. Mint valósban, de az a) részben elkerülhető a Darboux-tétel, a következők miatt:
Ha f Riemann-integrálható, úgy $\underline{I} = \bar{I} = I$. Ekkor $\exists\ P$ felosztása Q-nak, hogy

$$I - s(f, P) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{és} \qquad S(f, P) - I < \frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

ami adja, hogy

$$\mathcal{O}(f, P) = S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon\ ,$$

amit bizonyítani kellett.
A b) részben eleve nem használjuk a Darboux-tételt.

Következmények:

1) Legyen $f(x) = k$ $(x \in Q)$, akkor $\exists \int\limits_Q k = kV(Q) = k \sum V(T_{i_1 \ldots i_n})$, ahol az összegzés az összes P által meghatározott résztéglára megy.

2) Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla és $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ a Q-t lefedő téglák véges kollekciója. Akkor

$$V(Q) \leq \sum_{i=1}^{n} V(Q_i)$$

4. Tétel. *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható Q-n, ha Q $\forall\ \langle P^k \rangle$ normális felosztássorozata esetén $\langle \mathcal{O}(f, P^k) \rangle$ nullsorozat.*

Bizonyítás. Mint valósban.

5. Tétel. *$f : Q \to \mathbb{R}$ folytonos függvény Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Mint valósban, csak $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ helyett $\dfrac{\varepsilon}{V(Q)}$-t használunk.

Definíció. Az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazt Lebesgue szerint nullmértékűnek nevezzük $\mathbb{R}^n$-ben, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-ra $\exists$ megszámlálható sok $Q_1, \ldots, Q_n, \ldots$ tégla, hogy

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} V(Q_n) < \varepsilon.$$

6. Tétel (Lebesgue-kritérium). *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha egy Lebesgue szerint nullmértékű $\mathbb{R}^n$-beli halmaztól eltekintve folytonos.*

Bizonyítás. Nem kell.

Megjegyzések:

1) Ha $B \subset A$ és A nullmértékű, úgy B is az.

2) Ha $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_i$ és az A_i-k nullmértékűek, úgy A is.

3) $A \subset \mathbb{R}^n \iff$ nullmértékű $\mathbb{R}^n$-ben, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-ra $\exists$ A-nak $Q_1^0, \ldots, Q_n^0, \ldots$ nyílt lefedése, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V(Q_n) < \varepsilon$.

4) Ha $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, úgy $\operatorname{Bd} Q$ nullmértékű.

5) Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ egy megszámlálhatóan végetelen halmaztól eltekintve folytonos, akkor Riemann-integrálható.

6) Ha $f = 0$ egy nullmértékű halmaztól eltekintve, akkor $\int\limits_Q f = 0$.

7) Ha $f \geq 0$ és $\int\limits_Q f = 0$, akkor $f = 0$ egy nullmértékű halmaztól eltekintve.

7. Tétel. *Ha az $f : Q_1 \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható és $Q_2 \subset Q_1$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ is tégla, úgy $f\big|_{Q_2}$ Riemann-integrálható Q_2-n.*

Bizonyítás. Lásd Analízis II., II/4. fejezet 7. tétel ($[a, b] \wedge [c, d]$ helyett $Q_1 \wedge Q_2$-t használva).

8. Tétel (az integrál additivitása téglára). *Legyenek* $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^n$ *olyan téglák, hogy nincs közös belső pontjuk és* $Q = Q_1 \cup Q_2$ *is tégla (azaz van közös lapjuk). Ha az* $f : Q \to \mathbb{R}$ *korlátos függvény Riemann-integrálható* Q_1*-en és* Q_2*-n, akkor* Q*-n is és*

$$\int_Q f = \int_{Q_1} f + \int_{Q_2} f.$$

Bizonyítás. Ld. Analízis II., II/4. fejezet, 8. tétel (azzal a kiegészítéssel, hogy olyan $P^1 \wedge P^2$ felosztásai is léteznek $Q_1 \wedge Q_2$-nek, hogy $P = P^1 \cup P^2$ felosztása Q-nak, továbbá a normális felosztássorozatok is ilyenek legyenek).

Megjegyzés: A tételből következik, hogy ha egy Q téglát közös belső pont nélküli $Q_1, \ldots, Q_k$ résztéglákra bontunk, hogy $Q = \bigcup\limits_{i=1}^{k} Q_i$ és az $f : Q \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható $\forall\, Q_k$-n, akkor Riemann-integrálható Q-n is és

$$\int_Q f = \sum_{i=1}^{k} \int_{Q_i} f \;.$$

Utóbbi igaz alsó, illetve felső Darboux-integrálokra is.

d) A Riemann-integrál műveleti tulajdonságai, egyenlőtlenségek, középértéktételek

1. Tétel. *Ha az* $f, g : Q \to \mathbb{R}$ *korlátos függvények Riemann-integrálhatók,* $p, q \in \mathbb{R}$ *tetszőleges konstansok, akkor a* $(p \cdot f + q \cdot g) : Q \to \mathbb{R}$ *függvény is Riemann-integrálható és*

$$\int_Q (p \cdot f + q \cdot g) = p \cdot \int_Q f + q \cdot \int_Q g$$

Bizonyítás. Mint valósban (ld. Analízis II., II/6. fejezet, 1. tétel).

2. Tétel. *Ha* $f : Q \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálható, akkor* f^2 *is, továbbá ha* $\exists\, c > 0$*, hogy* $|f(x)| \geq c \quad \forall\, x \in Q$*, akkor* $\dfrac{1}{f}$ *is Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. A jelölések megfelelő módosításával, mint valósban (ld. Analízis II., II/6. fejezet, 2. tétel).

3. Tétel. *Ha az* $f, g : Q \to \mathbb{R}$ *függvények Riemann-integrálhatók, akkor* $f \cdot g$ *is, továbbá ha* $\exists\, c > 0$*, hogy* $|g(x)| > c\ \forall\, x \in Q$*-ra, úgy* $\dfrac{f}{g}$ *is Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Mint valósban (ld. Analízis II., II/6. fejezet, 3. tétel).

4. Tétel. *Ha* $f : Q \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálható függvény, akkor* $|f|$ *is Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. A jelölések megfelelő módosításával, mint valósban (ld. Analízis II., II/6. fejezet, 4. tétel).

5. Tétel. *Ha* $f, g : Q \to \mathbb{R}$ *korlátos függvények és* $f \le g$*, akkor*

$$\underline{\int}_Q f \le \underline{\int}_Q g \ \wedge\ \overline{\int}_Q f \le \overline{\int}_Q g\ .$$

Ha továbbá f, g *Riemann-integrálhatók, akkor* $\int\limits_Q f \le \int\limits_Q g$.

Bizonyítás. Mint valósban (ld. Analízis II., II/7. fejezet, 1. tétel).

6. Tétel. *Legyen* $f : Q \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálható, akkor*

$$\left|\int\limits_Q f\right| \le \int\limits_Q |f|\ .$$

Bizonyítás. Mint valósban (ld. Analízis II., II/7. fejezet, 2. tétel).

7. Tétel (középértéktétel). *Legyenek* $f, g : Q \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálhatók, továbbá*

$$m \le f(x) \le M\ , \quad 0 \le g(x) \qquad (x \in Q),$$

akkor

$$m\int\limits_Q g \le \int\limits_Q f \cdot g \le M\int\limits_Q g\ .$$

Bizonyítás. Mint valósban (ld. Analízis II., II/7. fejezet, 3. tétel).

Következmények:

1. *Legyen* $f : Q \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálható,* $m \le f \le M$*, akkor*

$$m \le \frac{1}{V(Q)} \int\limits_Q f \le M \ .$$

Bizonyítás. A 7. tételből $g \equiv 1$ választással, $\int\limits_Q 1 = V(Q)$ miatt jön az állítás.

2. *Ha* $f : Q \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény, akkor* $\exists\ c \in Q$*, hogy*

$$f(c) = \frac{1}{V(Q)} \int\limits_Q f \ .$$

Bizonyítás. Mint valósban (ld. Analízis II., II/7. fejezet, 3. tétel, 2. következmény).

e) Az integrál kiszámítása (a Fubini-tétel)

Cél: Az n-dimenziós tégla feletti integrál kiszámításának visszavezetése alacsonyabb dimenziójú integrálokra, az úgynevezett ismétléses (szukcesszív) integrálással.

Tétel (Fubini). *Legyen* $Q \doteq A \times B \subset \mathbb{R}^n$*, ahol* $A \subset \mathbb{R}^k,\ B \subset \mathbb{R}^m$ *téglák. Legyen* $f : Q \to \mathbb{R}$ *korlátos függvény, melyet* $f(x,y)$ *alakban írunk, ha* $x \in A\ \wedge\ y \in B$*.* $\forall\ x \in A$ *esetén tekintsük az*

$$\underline{I}(x) \doteq \underline{\int}_{y \in B} f(x,y) \qquad \text{és} \qquad \bar{I}(x) \doteq \bar{\int}_{y \in B} f(x,y)$$

alsó és felső integrálokat.
Ha $\exists \int\limits_Q f$*, akkor az* $\underline{I}, \bar{I} : A \to \mathbb{R}$ *függvények Riemann-integrálhatók és*

$$\int\limits_Q f = \int\limits_{x \in A} \left[\underline{\int}_{y \in B} f(x,y) \right] = \int\limits_{x \in A} \left[\bar{\int}_{y \in B} f(x,y) \right] .$$

Bizonyítás.
– Q egy tetszőleges P felosztására $P = P_A \times P_B$ (ahol P_A az A, míg P_B a B tégla egy felosztása).
  A továbbiakban (a jelölés egyszerűsítéséért):
  – t_A jelöli az A tégla P_A által meghatározott (általános) résztégláját,

- t_B jelöli a B tégla P_B által meghatározott (általános) résztégláját,
- $t_A \times t_B$ pedig Q tégla P által meghatározott (általános) résztéglája lesz.

– A bizonyítás kulcsa annak a belátása, hogy

(1) $$s(f,P) \le s(\underline{I}, P_A) \qquad \wedge \qquad S(f,P) \ge S(\bar{I}, P_A).$$

Tetszőleges $t_A \times t_B$ résztéglára és $x_0 \in t_A$-ra

$$m^f_{t_A \times t_B} \le f(x_0, y) \quad (\forall\ y \in t_B) \implies m^f_{t_A \times t_B} \le m^{f(x_0,y)}_{t_A \times t_B}.$$

Az utóbbi egyenlőtlenséget $V(t_B)$-vel szorozva és összegezve az összes t_B résztéglára, kapjuk $\forall\ x_0 \in t_A$-ra

$$\sum_{t_B} m^f_{t_A \times t_B} V(t_B) \le s(f(x_0,y), P_B) \le \underline{\int}_{y \in B} f(x_0,y) = \underline{I}(x_0)$$

Ebből pedig $\forall\ t_A$-ra

$$\sum_{t_B} m^f_{t_A \times t_B} V(t_B) \le m^{\underline{I}}_{t_A}$$

következik, melyből $V(t_A)$-val szorozva, összegezve és felhasználva, hogy $V(t_A)V(t_B) = V(t_A \times t_B)$, kapjuk, hogy $s(f,P) \le s(\underline{I}, P_A)$.
(1) másik egyenlőtlensége hasonlóan bizonyítható.

– Az $\underline{I} \le \bar{I}$ egyenlőtlenség miatt nyilván teljesül:

(2) $$s(\underline{I}, P_A) \le s(\bar{I}, P_A) \qquad \text{és} \qquad S(\underline{I}, P_A) \le S(\bar{I}, P_A)\ .$$

– (1), (2) és a közelítőösszegek tulajdonságai miatt:

(3) $$s(f,P) \le s(\underline{I}, P_A) \begin{matrix} \le S(\underline{I}, P_A) \le \\ \\ \le s(\bar{I}, P_A) \le \end{matrix} S(\bar{I}, P_A) \le S(f,P)\ .$$

– f Riemann-integrálható, így a Riemann-kritérium miatt $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\exists\ P = P_A \times P_B$ felosztása Q-nak, hogy $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$ így

$$S(\underline{I}, P_A) - s(\underline{I}, P_A) < \varepsilon \qquad \text{és} \qquad S(\bar{I}, P_A) - s(\bar{I}, P_A) < \varepsilon$$

is teljesül, azaz (a Riemann-kritérium miatt) $\underline{I}$ és $\bar{I}$ Riemann-integrálhatók.

– $$s(\underline{I}, P_A) \le \int_A \underline{I} \le S(\underline{I}, P_A) \qquad \text{és} \qquad s(\bar{I}, P_A) \le \int_A \bar{I} \le S(\bar{I}, P_A)$$

miatt végül $\int_A \underline{I}$, $\int_A \bar{I}$ és $\int_Q f$ is (3) két széle közé esik, így ε tetszőleges volta miatt kapjuk a bizonyítandó egyenlőségeket.

Megjegyzés: A tétel a másik sorrendben való integrálásra is kimondható és ugyanígy bizonyítható.

A Fubini-tétel következményei:

1) Legyen $Q = A \times B$ ($A \subset \mathbb{R}^k,\ B \subset \mathbb{R}^m$ téglák), $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.
Ha $\exists \int\limits_Q f$ és $\forall\ x \in A$-ra $\exists \int\limits_{y \in B} f(x,y)$, vagy $\forall\ y \in B$-re $\exists \int\limits_{x \in A} f(x,y)$, akkor

$$\int\limits_Q f = \int\limits_{x \in A} \left[\int\limits_{y \in B} f(x,y) \right] \qquad \text{vagy} \qquad \int\limits_Q f = \int\limits_{y \in B} \left[\int\limits_{x \in A} f(x,y) \right].$$

teljesül.

2) Ha $A = [a,b] \subset \mathbb{R},\ B = [c,d] \subset \mathbb{R},\ f : Q = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, hogy

$$\exists \quad \int\limits_Q f \doteq \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\ dxdy$$

és

$$\forall\ x \in [a,b] \quad \exists \quad \int\limits_c^d f(x,y)\ dy$$

vagy

$$\forall\ y \in [c,d] \quad \exists \quad \int\limits_a^b f(x,y)\ dx$$

akkor

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\ dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)\ dy \right]\ dx$$

vagy

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\ dxdy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)\ dx \right]\ dy$$

teljesül, azaz a kettős integrál kétszeres ismételt (valós Riemann) integrállal számítható.

3) Legyen $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f : Q \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor

$$\int\limits_Q f = \int\limits_{a_1}^{b_1} \left(\int\limits_{a_2}^{b_2} \cdots \left(\int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_n \right) \cdots \right) dx_1$$

2) Riemann-integrál korlátos $\mathbb{R}^n$-beli halmazon

Definíció. Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, $f : S \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, továbbá $f_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$f_S(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in S \\ 0 & , x \in CS \; . \end{cases}$$

Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ olyan tégla, hogy $S \subset Q$.
Az f függvényt Riemann-integrálhatónak mondjuk S felett, ha $\exists \int\limits_Q f_S$ és az

$$\int\limits_S f \doteq \int\limits_Q f_S$$

számot az f függvény S feletti Riemann-integráljának nevezzük.

Megjegyzés: *Az itt definiált integrál független Q megválasztásától.*

Bizonyítás. Teljesüljön először, hogy $S \subset Q_1 \subset Q_2$.

- Legyen $E \subset Q_1^0$ azon pontok halmaza, ahol f_S nem folytonos, akkor $f_S\big|_{Q_1}$ és $f_S\big|_{Q_2}$ az E halmaz és $\mathrm{Bd}\, Q_1$ bizonyos pontjaiban nem folytonos. Mivel $\mathrm{Bd}\, Q_1$ Lebesgue-szerint nullmértékű, így $\int\limits_{Q_1} f_S$ és $\int\limits_{Q_2} f_S$ létezése azzal ekvivalens, hogy E Lebesgue-szerint nullmértékű. A két integrál tehát egyszerre létezik, vagy sem.
- Ha mindkét integrál létezik, akkor – mivel Q_1 végpontjai a Q_2 téglát véges sok Q_i résztéglára bontják, melyek között ott van Q_1 is – kapjuk, hogy

  $$\int\limits_{Q_2} f_S = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{Q_i} f_S = \int\limits_{Q_1} f_S \; , \quad \text{mert} \quad \int\limits_{Q_i} f_S = 0 \;\; (i = 2, \ldots, k) \; ,$$

  hiszen a Q_i tégláknak csak a nullmértékű határán lehet f_S nem 0.

Ha Q_1 és Q_2 tetszőleges, hogy $S \subset Q_1 \wedge S \subset Q_2$, akkor $\exists\, Q_3$, hogy $Q_1, Q_2 \subset Q_3$, így az előbbi gondolatmenet adja az állítást.

Lemma. *Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$, $f, g : S \to \mathbb{R}$, továbbá $F, G : S \to \mathbb{R}$ olyan, hogy*

$$F(x) = \max\{f(x), g(x)\} \qquad \textit{és} \qquad G(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

a) *Ha f és g folytonos x_0-ban, akkor F és G is.*
b) *Ha f és g Riemann-integrálható S-en, akkor F és G is.*

Bizonyítás.

a) Legyen f és g folytonos x_0-ban.

– Ha $f(x_0) = g(x_0) = r$, akkor $F(x_0) = G(x_0) = r$. Ekkor $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\exists\ \delta(\varepsilon)$, hogy $\forall\ x \in S$, $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén

$$|f(x) - r| < \varepsilon \qquad \wedge \qquad |g(x) - r| < \varepsilon \ ,$$

így

$$|F(x) - F(x_0)| =$$

$$= |\max\{f(x), g(x)\} - r| = \begin{cases} |f(x) - r| < \varepsilon & , \ f(x) > g(x) \\ |g(x) - r| < \varepsilon & , \ f(x) \le g(x) \end{cases}$$

illetve

$$|G(x) - G(x_0)| =$$

$$= |\min\{f(x), g(x)\} - r| = \begin{cases} |f(x) - r| < \varepsilon & , \ f(x) < g(x) \\ |g(x) - r| < \varepsilon & , \ f(x) \ge g(x) \end{cases}$$

teljesül $\forall\ x \in S$, $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén, ami éppen F és G x_0-beli folytonosságát jelenti.

– Ha $f(x_0) > g(x_0)\ \vee\ f(x_0) < g(x_0)$, akkor $f - g$ folytonossága miatt $\exists\ K(x_0, \delta)$, hogy

$$f(x) - g(x) > 0\ \vee\ f(x) - g(x) < 0 \qquad \forall\ x \in K(x_0, \delta) \cap S$$

Ebből jön, hogy $F(x) = f(x)$ és $G(x) = g(x)$ vagy

$$F(x) = g(x) \quad \wedge \quad G(x) = f(x) \qquad (x \in K(x_0, \delta) \cap S)$$

$\Longrightarrow$ az állítás.

b) Tegyük fel, hogy f és g Riemann-integrálható S-en. Legyen Q olyan tégla, hogy $S \subset Q$, akkor $\exists \int\limits_Q f_S$ és $\int\limits_Q g_S$, így f_S és g_S folytonos Q-n egy Lebesgue-szerint nullmértékű halmaz, D illetve E kivételével.
Mivel nyilvánvaló, hogy

$$F_S(x) = \max\{f_S(x), g_S(x)\} \qquad \text{és} \qquad G_S(x) = \min\{f_S(x), g_S(x)\}$$

teljesül, így az előbbiek miatt F_S és G_S folytonos Q-n a $D \cup E$ nullmértékű halmaz kivételével. Másrészt F_S és G_S korlátos is (f_S és g_S korlátossága miatt), így F_S és G_S Riemann-integrálható.

Tétel (az integrál tulajdonságai). *Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, $f, g : S \to \mathbb{R}$ korlátos függvények.*

a) *Ha f és g Riemann-integrálható S felett, akkor $\lambda f + \mu g$ is, és*

$$\int_S (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_S f + \mu \int_S g \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

b) *Ha f és g Riemann-integrálható S felett és $f(x) \le g(x)$ $(x \in S)$ $\Longrightarrow$ $\int_S f \le \int_S g$.*

c) *Ha f Riemann-integrálható S felett, akkor $|f|$ is Riemann-integrálható és $\left|\int_S f\right| \le \int_S |f|$.*

d) *Legyen $T \subset S$. Ha $f \ge 0$ S-en és Riemann-integrálható T-n és S-en, akkor $\int_T f \le \int_S f$.*

e) *Ha f Riemann-integrálható az S_1 és S_2 felett, akkor Riemann-integrálható $S_1 \cup S_2$ és $S_1 \cap S_2$ felett is és*

$$\int_{S_1 \cup S_2} f = \int_{S_1} f + \int_{S_2} f - \int_{S_1 \cap S_2} f$$

Bizonyítás.

a) Mivel $(\lambda f + \mu g)_S = \lambda f_S + \mu g_S$, így a 1/d, 1. tétel és a definíció miatt

$$\int_S (\lambda f + \mu g) \doteq \int_Q (\lambda f + \mu g)_S = \int_Q (\lambda f_S + \mu g_S) =$$
$$= \lambda \int_Q f_S + \mu \int_Q g_S \doteq \lambda \int_S f + \mu \int_S g.$$

b) $f_S \le g_S$ és az 1/d, 5. tétel miatt

$$\int_S f \doteq \int_Q f_S \le \int_Q g_S \doteq \int_S g$$

c) $|f|$ Riemann-integrálhatósága az $|f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\}$ egyenlőség miatt a lemmából jön, az egyenlőtlenség pedig a $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ egyenlőtlenségből és b)-ből adódik.

d) Ha $f \ge 0$ és $T \subset S$, akkor $f_T \le f_S$ és akkor b) adja az állítást

e) Legyen $S = S_1 \cup S_2$ és $T = S_1 \cap S_2$ és tegyük föl először, hogy $f \ge 0$. Legyen továbbá Q olyan tégla, hogy $S \subset Q$. Ekkor

$$f_S(x) = \max\{f_{S_1}(x), f_{S_2}(x)\} \qquad \text{és} \qquad f_T(x) = \min\{f_{S_1}(x), f_{S_2}(x)\}$$

és f_{S_1} és f_{S_2} Q feletti Riemann-integrálhatóságából, a lemma miatt f_S és f_T integrálhatók Q-n, így f integrálható S és T felett.
Általában legyen

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \qquad \text{és} \qquad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

ekkor f és 0 S_1 és S_2 feletti Riemann-integrálhatósága, a lemma miatt, adja f_+ és f_- Riemann-integrálhatóságát, de $f_+ \geq 0$ és $f_- \geq 0$, így f_+ és f_- Riemann-integrálható S és T felett.
Ekkor $f = f_+ - f_-$ és a) adja f Riemann-integrálhatóságát $S = S_1 \cup S_2$ és $T = S_1 \cap S_2$ felett.
Az egyenlőség bizonyítása az

$$f_S(x) = f_{S_1}(x) + f_{S_2}(x) - f_T(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

egyenlőségből, a)-t felhasználva jön.

Következmények:

1. *Ha $S \subset \mathbb{R}^n$, $f_i : S \to \mathbb{R}$, $(i = 1, \ldots, k)$ korlátos függvények, melyek Riemann-integrálhatók S felett, akkor $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$ $(\lambda_i \in \mathbb{R})$ is Riemann-integrálható és*

$$\int\limits_S \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int\limits_S f_i \ .$$

2. *Legyenek $S_i \subset \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \ldots, k)$ korlátos halmazok, továbbá $f : \bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható $\forall$ S_i-n, akkor f Riemann-integrálható az $S = \bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i$ halmazon. Ha még az is igaz, hogy $\forall$ $i \neq j$-re $S_i \cap S_j$ Lebesgue szerint nullmértékű $\mathbb{R}^n$-ben, akkor*

$$\int\limits_S f = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{S_i} f \ .$$

Bizonyítás. Ha $k = 2$, akkor az állítás jön e)-ből, mert a feltétel miatt $\int\limits_{S_1 \cap S_2} f = 0$ is igaz.
Általában pedig teljes indukcióval bizonyítunk.

Megjegyzések: Bizonyítás nélkül közöljük az alábbiakat:

1) Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, $f : S \to \mathbb{R}$ korlátos és folytonos függvény. Továbbá E azon $x_0 \in \operatorname{Bd} S$-ek halmaza, melyekre $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ nem teljesül. Ha E Lebesgue szerint nullmértékű, akkor f integrálható S-en.

2) Legyen S és f 1)-beli tulajdonságú és $A = S^0$ (S belseje). Ha f integrálható S-en, akkor A-n is és $\int\limits_S f = \int\limits_A f$.

3. Jordan-mérhető halmazok $\mathbb{R}^n$-ben

1. Definíció. Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Ha az $f(x) = 1$ ($x \in \mathbb{R}^n$) konstans függvény Riemann-integrálható S-en, akkor azt mondjuk, hogy S Jordan-mérhető $\mathbb{R}^n$-ben és az

$$m_J(S) \doteq \int\limits_S 1$$

számot S Jordan-mértékének nevezzük.

Megjegyzések:

1) Ha $S = Q \subset \mathbb{R}^n$ egy tégla, akkor

$$m_J(Q) \doteq \int\limits_Q 1 = V(Q) \ ,$$

azaz egy Q tégla Jordan-mértéke éppen a korábban definiált térfogata.

2) A Jordan-mérhetőség és Jordan-mérték fogalmát szemléletesebbé teszi a következő gondolatmenet:

– $m_J(S) \doteq \int\limits_S 1 \doteq \int\limits_Q 1_S$, ahol $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla és $S \subset Q$. Így S mérhetősége azzal ekvivalens, hogy

$$\underline{\int}_Q 1_S = \overline{\int}_Q 1_S \ ,$$

azaz az

$$1_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad 1_S(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in S \\ 0 & , \ x \in CS \end{cases}$$

függvény (S karakterisztikus függvénye) alsó és felső Darboux-integrálja megegyezik, továbbá S Jordan-mértéke ez a közös érték.

– $\underline{\int}_Q 1_S \doteq \sup_P\{s(1_S,P)\}$ és $\bar{\int}_Q 1_S \doteq \inf_P\{S(1_S,P)\}$

ahol P a Q tégla egy tetszőleges felosztása.

– Ugyanakkor

$$s(1_S,P) = \sum\nolimits_* V(T_{i_1\dots i_n}) \doteq j(S,P),$$

illetve

$$S(1_S,P) = \sum\nolimits^* V(T_{i_1\dots i_n}) \doteq J(S,P),$$

ahol $\sum_*$ és $\sum^*$ olyan $i_1 \dots i_n$-ekre való összegzést jelent, hogy

$$\forall\ x \in T_{i_1\dots i_n} \implies x \in S^0 \text{ (belső pont } S\text{-ben)},$$

illetve

$$T_{i_1\dots i_n} \cap (S \cup \operatorname{Bd} S) \neq 0$$

teljesül.

Így $j(S,P)$ és $J(S,P)$ az S halmazt, adott felosztás esetén belülről, illetve kívülről közelítő (egymáshoz csatlakozó és közös belső pont nélküli) téglák térfogatainak összegei.

Nyilván igaz, hogy: $0 \leq j(S,P) \leq J(S,P) \leq m(Q)$ (a s és S megfelelő tulajdonságai miatt).

– A korábbiak miatt

$$\underline{\int}_Q 1_S \doteq \sup_P\{s(1_S,P)\} \doteq \sup\{j(S,P)\} \doteq m_{*J}(S),$$

illetve

$$\bar{\int}_Q 1_S \doteq \inf_P\{S(1_S,P)\} \doteq \inf\{J(S,P)\} \doteq m^*_J(S)$$

is teljesül, ahol az $m_{*J}(S)$ és $m^*_J(S)$ számokat az S halmaz belső és külső Jordan-mértékeinek szokás nevezni.

Továbbá $0 \leq m_{*J}(S) \leq m^*_J(S) \leq m(Q)$ és $m_{*J}(S)$ és $m^*_J(S)$ értéke nem függ a Q tégla megválasztásától.

– Mindezek alapján úgy is fogalmazhatunk, hogy egy $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz akkor és csak akkor Jordan-mérhető, ha

$$m_{*J}(S) = m^*_J(S) \doteq m_J(S)$$

és ezt az $m_J(S)$ számot az S halmaz Jordan-mértékének nevezzük.

3) Ha Q^0 a $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla belseje, akkor Q^0 Jordan-mérhető és $m_j(Q^0) = m_J(Q)$

Bizonyítás. Ha $Q = [a_1, a_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ és $\forall$ (elég kicsi) $\varepsilon > 0$-ra

$$Q_\varepsilon = [a_1 + \varepsilon, b_1 - \varepsilon] \times \cdots \times [a_n + \varepsilon, b_n - \varepsilon] \ ,$$

akkor

$$Q_\varepsilon \subset Q^0 \subset Q$$

teljesül, ami a korábbiak (az 1. megjegyzés, a Jordan-mérték definíciója, az integrál tulajdonságai) miatt adja, hogy

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i - 2\varepsilon) = m_J(Q_\varepsilon) = \int\limits_{Q_\varepsilon} 1_{Q_\varepsilon} \leq \underline{\int}_{Q_\varepsilon} 1_{Q_\varepsilon} \leq \underline{\int}_{Q^0} 1_{Q^0} \leq$$

$$\leq \bar{\int}_{Q^0} 1_{Q^0} \leq \bar{\int}_{Q} 1_Q = \int\limits_{Q} 1_Q = m_J(Q).$$

Ebből pedig $\varepsilon \to 0$ határátmenettel jön, hogy

$$m_J(Q^0) = \underline{\int}_{Q^0} 1_{Q^0} = \bar{\int}_{Q^0} 1_{Q^0} = m_J(Q)$$

amit bizonyítani kellett.

1. Tétel. *Az $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmazra $m_J(S) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\exists$ véges sok S-et lefedő zárt tégla (vagy zárt kocka), hogy Jordan-mértékük összege kisebb, mint ε.*

Bizonyítás. Feladat.

2. Tétel. *Az $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz akkor és csak akkor Jordan-mérhető ha $m_J(\operatorname{Bd} S) = 0$.*

Bizonyítás.
– Először megmutatjuk, hogy

(1) $$m_J^*(\operatorname{Bd} S) = m_J^*(S) - m_{*J}(S)$$

teljesül.
Ha $S \subset Q$ (tégla), akkor $\operatorname{Bd} S \subset Q$, továbbá ha P egy tetszőleges felosztása Q-nak, akkor

$$J(\operatorname{Bd} S, P) = J(S, P) - j(S, P) \ ,$$

melyből előbb (a belső és külső Jordan-mérték definíciója miatt)

$$J(\operatorname{Bd} S, P) \geq m_J^*(S) - m_{*J}(S) \ ,$$

majd

$$(2) \qquad m_J^*(\mathrm{Bd}\, S) \geq m_J^*(S) - m_{*J}(S)$$

következik.
Ugyanakkor $m_J^*(S)$ és $m_{*J}(S)$ definíciója miatt az is igaz, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ P^1$ és P^2 felosztása Q-nak, hogy

$$J(S, P^1) < m_J^*(S) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad j(S, P^2) > m_{*J}(S) - \frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

amiből $P \doteq P^1 \cup P^2$ esetén

$$m_J^*(\mathrm{Bd}\, S) \leq J(\mathrm{Bd}\, S, P) = J(S, P) - j(S, P) \leq$$
$$\leq J(S, P^1) - j(S, P^2) < m_J^*(S) - m_{*S}(S) + \varepsilon$$

következik, ami adja a

$$(3) \qquad m_J^*(\mathrm{Bd}\, S) \leq m_J^*(S) - m_{*J}(S)$$

egyenlőtlenséget, (2) és (3) pedig (1)-et.

– Ha S Jordan-mérhető, úgy

$$0 = m_J^*(S) - m_{*J}(S) = m_J^*(\mathrm{Bd}\, S) \geq m_{*J}(\mathrm{Bd}\, S) \geq 0$$

adja, hogy $\exists\ m_J(\mathrm{Bd}\, S) = 0$.

– Ha $m_J(\mathrm{Bd}\, S) = 0$, akkor

$$0 = m_J^*(\mathrm{Bd}\, S) = m_J^*(S) - m_{*J}(S)$$

adja S Jordan-mérhetőségét.

3. Tétel. *Az $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz $\Longleftrightarrow$ Jordan-mérhető, ha határa Lebesgue szerint nullmértékű.*

Bizonyítás. Az

$$1_S = \begin{cases} 1 & , \ x \in S \\ 0 & , \ x \in CS \end{cases}$$

függvény az S halmaz belsejében és külsejében is folytonos (hisz ott konstans), így $\mathrm{Bd}\, S$-en kívül folytonos.

– Ha $\mathrm{Bd}\, S$ nullmértékű, akkor (a Lebesgue-kritérium miatt) 1_S Riemann-integrálható $\forall\ Q$ $(S \subset Q)$ tégla felett, így

$$\exists \int_S 1 \doteq \int_Q 1_S\ ,$$

azaz S mérhető.

– Ha S mérhető, akkor (ugyancsak a Lebesgue-kritérium miatt) $\mathrm{Bd}\, S$ nullmértékű.

4. Tétel.

a) *Ha S Jordan-mérhető, akkor $m_J(S) \geq 0$.*

b) *Ha S_1 és S_2 Jordan-mérhető, $S_1 \subset S_2$, akkor $m_J(S_1) \leq m_J(S_2)$.*

c) *Ha S_1 és S_2 Jordan-mérhető, akkor $S_1 \cup S_2$ és $S_1 \cap S_2$ is az, továbbá*

$$m_J(S_1 \cup S_2) = m_J(S_1) + m_J(S_2) - m_J(S_1 \cap S_2)$$

teljesül.

Bizonyítás. A Jordan-mérték definíciója és az integrál előző fejezetbeli b), d), e) tulajdonsága adja az állítást.

Következmény: Ha S_1 és S_2 Jordan-mérhető, közös belső pont nélküli halmazok, akkor $m_J(S_1 \cap S_2) = 0$, így

$$m_J(S_1 \cup S_2) = m_J(S_1) + m_J(S_2) \ ,$$

melyből teljes indukcióval a Jordan-mérték véges additivitása, azaz

$$m_J\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i\right) = \sum_{i=1}^{k} m_J(S_i)$$

is következik, ha S_i-k ($i = 1, \ldots, k$) páronként közös belső pont nélküli halmazok.

Megjegyzések:

1) Bizonyítható, hogy a Jordan-mérték transzláció (eltolás) -invariáns, azaz egy S Jordan-mérhető halmaz S^* eltoltjára igaz, hogy $\exists\ m_J(S^*) = m_J(S)$.

2) A Jordan-mérték tehát egy nemnegatív, végesen additív, mozgásinvariáns mérték, melynél az egységkocka mértéke egy.

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nemnegatív, Riemann-integrálható függvény Riemann-integráljának geometriai (mértékelméleti) tartalmára mutat a következő:

5. Tétel. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nemnegatív, Riemann-integrálható függvény, akkor az*

$$S \doteq \{(x, y) \mid x \in [a, b],\ y \in [0, f(x)]\} \subset \mathbb{R}^2$$

halmaz Jordan-mérhető és

$$m_J(S) = \int_a^b f(x)dx$$

(a Riemann-integrál megadja a görbe alatti halmaz Jordan-mértékét).

Bizonyítás.

– f Riemann-integrálható $\Longrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0$ -hoz $\exists\ P_1 = \{x_0, \dots, x_n\}$ felosztása $[a, b]$-nek, hogy

$$(1) \qquad I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, P_1) \le S(f, P_1) < I + \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

– Ha $0 \le f(x) < K$, akkor $P_2 = \{0, m_1, \dots, m_n, M_1, \dots, M_n, K\}$ egy felosztása $[0, K]$-nak, (ahol m_i, M_i a szokásosak).

– Ekkor $P = P_1 \times P_2$ egy felosztása $[a, b] \times [0, K]$-nak, melynek a tételben definiált S része, és

$$(2) \qquad S(f, P_1) = J(S, P) \qquad \text{és} \qquad s(f, P_1) \ge j(S, P)$$

nyilvánvalóan teljesül.

– $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz ($m_J^*$, m_{*J} definíciója miatt) $\exists\ P'$ felosztása $[a, b] \times [0, K]$-nak, hogy

$$(3) \qquad J(S, P') - m_J^*(S) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{és} \qquad j(S, P') \ge m_{*J}(S) - \frac{\varepsilon}{2}$$

– Ha $P^* = P \cup P'$, hogy $P^* = P_1^* \times P_2^*$, akkor P^* finomítása P-nek és P'-nek, illetve P_1^* is P_1-nek.

Ekkor

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(1) miatt:} & S(f, P_1^*) - I < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \text{(2) és (3) miatt:} & S(f, P_1^*) - m_J^*(S) < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \ |I - m_J^*(S)| < \varepsilon\ ,$$

illetve

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(1) miatt:} & I - s(f, P_1^*) < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \text{(2) és (3) miatt:} & m_{*J}(S) - s(f, P_1^*) < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \ |I - m_{*J}(S)| < \varepsilon\ .$$

– Utóbbiak adják, hogy $m_{*J}(S) = m_J^*(S) = I$, amit bizonyítani kellett.

Következmények:

1. *A tétel feltételei mellett az f gráfja, a $\mathcal{G}r\, f$ halmaz Jordan-mérhető és Jordan-mértéke 0.*

Bizonyítás. S mérhető $\Longrightarrow$ $\operatorname{Bd} S$ Jordan-mérhető és $m_J \operatorname{Bd} S = 0$, de $\mathcal{G}r\, f \subset \operatorname{Bd} S \Longrightarrow$ az állítás.

2. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény $[a, b]$-n, akkor $\mathcal{G}r\, f$ Jordan-mérhető és $m_J \mathcal{G}r\, f = 0$.*

Bizonyítás. Ha f folytonos $\Longrightarrow$ Riemann-integrálható, így ha $f \geq 0$ az 1. következmény adja az állítást. (Bizonyítsa be, hogy akkor is, ha $f \geq 0$ nem teljesül!)

6. Tétel (a Riemann-integrálhatóság elegendő feltétele).
Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető. Ha az $f : S \to \mathbb{R}$ függvény korlátos és egy Jordan szerint nullmértékű $A \subset S$ halmaztól eltekintve folytonos, akkor f Riemann-integrálható S-en.

Bizonyítás. f_S folytonos a $C\bar{S}$ és $S^0 \backslash A$ halmazokon, így f_S nem folytonossági helyei a $D \subset A \cup \operatorname{Bd} S$ halmazban vannak, mely Jordan-szerint nullmértékű, így Lebesgue-szerint is, ami adja, hogy f_S Riemann-integrálható $\forall\ Q$ téglán, amire $S \subset Q$, azaz f Riemann-integrálható S-en.

2. Definíció. Legyen $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt és mérhető halmaz, $\Phi, \Psi : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, hogy $\Phi(x) \leq \Psi(x)$ $(x \in K)$. Az

$$S = \{(x, t) \mid x \in K,\ \Phi(x) \leq t \leq \Psi(x)\}$$

halmazt egyszerű tartománynak nevezzük $\mathbb{R}^n$-ben.

Bizonyítható a következő:

7. Tétel. *Az $S \subset \mathbb{R}^n$ egyszerű tartomány kompakt és Jordan-mérhető $\mathbb{R}^n$-ben.*

8. Tétel (a Fubini tétel egyszerű tartományra). *Legyen S egyszerű tartomány, $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f integrálható S-en és*

(F)
$$\int_S f = \int_{x \in K} \left[\int_{t=\Phi(x)}^{t=\Psi(x)} f(x, t) \right].$$

Bizonyítás.
– $\Phi \wedge \Psi$ folytonossága és K kompaktsága miatt $\exists\ M \in \mathbb{R} \wedge Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ tégla, hogy $S \subset Q \times [-M, M]$.

– f folytonossága és S mérhetősége adja Riemann-integrálhatóságát.
– Ha adott $x_0 \in Q$, akkor $f_S(x_0,t) \equiv 0$ (ha $x_0 \notin K$), vagy folytonos legfeljebb két $\mathbb{R}$-beli pont kivételével.
Így a Fubini-tétel adja, hogy

$$(*) \qquad \int\limits_S f = \int\limits_{Q\times[-M,M]} f_S = \int\limits_{x\in Q} \int\limits_{t=-M}^{t=M} f_S(x,t).$$

Mivel pedig $\int\limits_{t=-M}^{t=M} f_S(x,t) = 0$, ha $x \notin K$, így $(*)$ adja,hogy

$$(**) \qquad \int\limits_S f = \int\limits_{x\in K} \int\limits_{t=-M}^{t=M} f_S(x,t).$$

Végül pedig

$$f_S(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & , \ t \in [\Phi(x), \Psi(x)] \\ 0 & , \ \text{egyébként} \end{cases}$$

és $(**)$ adja (F)-et.

9. Tétel. *Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $g : G \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény. Ha $E \subset G$ Jordan-mérhető és kompakt halmaz, akkor $g(\operatorname{Bd} E)$ Jordan-mérhető és (n-dimenziós) Jordan-mértéke 0.*

Bizonyítás.
– E Jordan-mérhető, így $\operatorname{Bd} E$ is és $m_J(\operatorname{Bd} E) = 0$. Másrészt $\operatorname{Bd} E$ zártsága és E kompaktsága miatt $\operatorname{Bd} E \subset E$, ezért ($\operatorname{Bd} E$ korlátossága miatt) kapjuk, hogy $\operatorname{Bd} E$ kompakt halmaz.
– $m_J(\operatorname{Bd} E) = 0$ (az 1. tétel miatt) adja, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\dfrac{\varepsilon}{(M\sqrt{n})^n}$-hez $\exists\, Q_1, \ldots, Q_r \subset \mathbb{R}^n$ zárt kockák, melyek lefedik $\operatorname{Bd} E$-t és

$$\sum_{i=1}^{r} m_J(Q_i) < \frac{\varepsilon}{(M\sqrt{n})^n} \ ,$$

ahol egyrészt feltehető, hogy $\forall\, Q_i$ G-ben van (hiszen $\operatorname{Bd} E$ kompakt, CG zárt és $\operatorname{Bd} E \cap CG = \emptyset$, így $\operatorname{Bd} E$ és CG távolsága pozitív), másrészt $H = \bigcup\limits_{i=1}^{r} Q_i$ kompaktsága és g' folytonossága miatt g' korlátos H-n; legyen

$$M = \sup_{x\in H} \|g'(x)\| \qquad (\text{így } \|g'(x)\| \le M \ \forall\, x \in H).$$

– Az előbbiek és a feltételek miatt g $\forall$ Q_i-n teljesíti a 2. középértéktétel feltételeit, így

$$\|g(x) - g(y)\| \le M\|x - y\| \qquad (\forall\ x, y \in Q_i,\ i = 1, \dots, r).$$

Ez az egyenlőtlenség adja, hogy ha a Q_i kocka oldala ℓ_i, akkor

$$\operatorname{diam} g(Q_i) = \sup_{x,y \in Q_i} \|g(x) - g(y)\| \le M \sup_{x,y \in Q_i} \|x - y\| = \\ = M \operatorname{diam} Q_i = M\sqrt{n}\ell_i\ ,$$

ami adja, hogy $g(Q_i)$ elemei befoglalhatók egy $M\sqrt{n}\ell_i$ átmérőjű zárt gömbbe, illetve akkor egy ilyen oldalú Q_i^* zárt kockába is.

– Így

$$g(\operatorname{Bd} E) \subset g\left(\bigcup_{i=1}^{r} Q_i\right) = \bigcup_{i=1}^{r} g(Q_i) \subset \bigcup_{i=1}^{r} Q_i^*$$

miatt $g(\operatorname{Bd} E)$ lefedhető az r számú Q_i^* zárt téglával, melyek össz Jordan-mértékére

$$\sum_{i=1}^{r} m_J Q_i^* = \sum_{i=1}^{r} V(Q_i^*) = \sum_{i=1}^{r} (M\sqrt{n})^n \ell_i^n = (M\sqrt{n})^n \sum_{i=1}^{r} m_J(Q_i) < \varepsilon$$

teljesül, ami adja, hogy $m_J(g(\operatorname{Bd} E)) = 0$, amit bizonyítani kellett.

Következmény. *Ha a tétel feltételei mellett még az is igaz, hogy* $\det g'(x) \neq 0$ *(g reguláris) és g kölcsönösen egyértelmű (injektív) G-n, akkor $g(E)$ mérhető.*

Bizonyítás. Az inverz függvényekre vonatkozó 2. tétel miatt g az E^0 nyílt halmaz (E belseje) pontjait $g(E)$ belső pontjaiba viszi át ($g(E^0) \subset (g(E))^0$), így $\operatorname{Bd} g(E) \subset g(\operatorname{Bd} E)$ és $m_J(g \operatorname{Bd} E) = 0$ adja, hogy $\operatorname{Bd} g(E)$ mérhető és $m_J(\operatorname{Bd} g(E)) = 0$, ezért $g(E)$ mérhető.

4. Integráltranszformáció

Az egyváltozós függvények Riemann-integráljánál ismert a helyettesítéses integrálás tétele:

Legyen $g : [a, b] \to [c, d]$ folytonosan differenciálható függvény, hogy $c = g(a),\ d = g(b),\ f : [c, d] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor

$$(1) \qquad \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

Ha g szigorúan monoton $[a, b]$-n (azaz a fentieken túl az is teljesül, hogy $g'(x) \neq 0,\ x \in [a, b]$), úgy $a = g^{-1}(c)$ és $b = g^{-1}(d)$ (ha g növekvő), vagy $a = g^{-1}(d)$ és $b = g^{-1}(c)$ (ha g csökkenő) teljesül. Így (1) írható a

$$\int_c^d f(x)dx = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(t))g'(t)dt\ ,$$

vagy

$$f(x)dx = -\int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(t))g'(t)dt$$

alakba, ami együttesen a

$$\int_c^d f(x)dx = \int_a^b f(g(t))|g'(t)|dt$$

alakba írható (és ekkor g lehet növekvő vagy csökkenő is).

Cél: A tétel általánosítása, amikor f n-változós valós értékű függvény, g pedig $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ típusú transzformáció, elég jó tulajdonságokkal.

Kérdés:

a) milyen g függvényt kell helyettesíteni a „régi” változó helyére, azaz milyen g transzformációval vezessünk be új változókat,
b) az intervallumok helyett milyen részhalmazait tekinthetjük $\mathbb{R}^n$-nek,
c) s végül, hogy $f(g(x))$-et, $|g'(x)|$ helyett, mivel kell szorozni?

A korábbiaknál sokkal nehezebb és hosszadalmasabb az előbbi „kívánalmaknak” megfelelő következő általánosítás bizonyítása.

Tétel (integráltranszformáció).
Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $g : G \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható, hogy $\det g'(x) \neq 0$ ($\forall\ x \in G$) (azaz reguláris leképezés) és kölcsönösen egyértelmű leképezés. Ha $E \subset G$ összefüggő, mérhető és kompakt halmaz, míg $f : g(E) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, akkor az $(f \circ g)|\det g'|$ függvény Riemann-integrálható az E halmazon és

$$\text{(I–T)} \qquad \int_E (f \circ g)|\det g'| = \int_{g(E)} f \ .$$

Megjegyzések:

1) (I–T) írható a

$$\int_{g(E)} f(x)dx = \int_E f(g(t))|\det g'(t)|dt$$

alakba (ahol $x = (x_1, \dots, x_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n)$), vagy $A = g(E)$ mellett (ahol az előző paragrafus 9. tétele és annak következménye miatt $A = g(E)$ mérhető, kompakt és összefüggő is)

$$\int_A f(x)dx = \int_{g^{-1}(A)} f(g(t))|\det g'(t)|dt \ .$$

2) A tétel akkor is igaz, ha csak f Riemann-integrálhatóságát tesszük fel. Illetve e mellett csak E kompaktságát és mérhetőségét követeljük meg.

3) Igaz az integráltranszformáció tételének következő alakja is:
Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $g : G \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható G-n, E olyan Jordan-mérhető halmaz, hogy $E \subset \bar{E} \subset G$ és $g|_{E^0}$ injektív. Ha $f : g(E) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor $\exists \int_E (f \circ g)|\det g'|$ és

$$\text{(I–T)} \qquad \int_E (f \circ g)|\det g'| = \int_{g(E)} f$$

teljesül.

4) Ha $f = 1$ (és g-re az eredeti, vagy a módosított feltételek teljesülnek), akkor

$$m_J g(E) = \int_E |\det g'| \ .$$

5) Utóbbiak adják a Jordan-mérték transzláció (illetve mozgás) invarianciáját.

6) A tétel adja, hogy ha $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, $\det g' \neq 0$ és $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt és mérhető halmaz, akkor $g(E)$ szintén kompakt és mérhető, továbbá

$$m_J g(E) = |\det g'| m_J E \ .$$

7) Az integráltranszformáció (ahogy valósban is) az adott integrál kiszámításának egy eszköze (módszere), melynek révén esetleg „jobb" függvényt kell integrálni „alkalmasabb" $g^{-1}(A) = E$ tartományon.

Általános útmutatás nincs arra, hogy mikor milyen helyettesítést kell alkalmazni, de (az egyváltozós esethez hasonlóan) tudunk „tippeket" adni.

Példák:

1) Legyen $A = g(E) = \{(x, y \,|\, x, y > 0,\ x^2 + y^2 < a^2)\}$. Számítsuk ki a $\iint\limits_A x^2 y^2 dxdy$ integrált.

Megoldás: Válasszuk g-t a

$$g(r, \varphi) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi)$$

polár-transzformációnak.

$$\det g' = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Továbbá g az $E = \{(r, \varphi) \,|\, 0 < r < a,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$ nyílt téglalapot képezi az A halmazba kölcsönösen egyértelmű módon és $\det g' = r > 0$ is teljesül E-n.

Így

$$\iint\limits_A x^2 y^2 dxdy = \iint\limits_E (r\cos\varphi)^2 (r\sin\varphi)^2 \cdot r\, dr d\varphi =$$

$$= \iint\limits_{[0,a]\times[0,\frac{\pi}{2}]} r^3 (\cos\varphi \cdot \sin\varphi)^2 dr d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int\limits_0^a r^3 \frac{\sin^2 2\varphi}{4} dr \right] d\varphi$$

Az utóbbi integrálás pedig már nem túl nehéz. Itt egy körcikk alakú tartomány helyett egy téglalapon kell integrálni és a függvény sem bonyolódott el tulságosan.

2) Számítsuk ki a $\iint\limits_S \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ integrált, ha

$$S = \{(x,y)\,|\,\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\}\ .$$

Megoldás: Alkalmazzuk most is a $g(r,\varphi) = (r\sin\varphi, r\sin\varphi)$ polár-transzformációt. Ez most az

$$E = \{(r,\varphi)\,|\,\pi \le r \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

zárt téglalapot képezi az S halmazba, $\det g' = r > 0$ és „majdnem" kölcsönösen egyértelmű módon (hol a „baj"?), de akkor is igaz, hogy

$$\iint\limits_S \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_E (\sin r)\cdot r\,drd\varphi =$$

$$= \iint\limits_{[\pi,2\pi]\times[0,2\pi]} r\sin r\,drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_\pi^{2\pi} r\sin r\,dr\right)d\varphi$$

és ez utóbbi integrál „módszeresen" számítható. Most egy körgyűrű alakú tartomány helyett jött az egyszerűbb téglalap és a függvény is kedvezőbb lett számunkra.

Megjegyzés: Ha az eredeti tartomány körgyűrűcikk, akkor gondolhatunk a polár-transzformációra.

3) Számítsa ki az

$$xy = a^2\ ,\quad xy = 2a^2\ ,\quad y = x\ ,\quad y = 2x \qquad (x,y>0)$$

görbékkel határolt tartomány Jordan-mértékét.

Megoldás: Az adott S tartomány most:

A tanultak szerint $m_J(S) = \iint\limits_S 1 dydy$, ha az $\int\limits_S 1$ létezik. A határoló görbék egyenletei azt „sugallják”, hogy olyan g transzformáció kell, melynek inverzét az

$$(*) \qquad t = xy \ , \qquad s = \frac{y}{x} \qquad (x, y > 0)$$

szerint $g^{-1}(x,y) = (xy, \frac{y}{x})$ $(x, y > 0)$ adja. g-t a $(*)$ egyenletrendszer egyértelmű

$$x = \sqrt{\frac{t}{s}} \ , \qquad y = \sqrt{ts} \qquad (t, s > 0)$$

megoldása miatt pedig a

$$g(t,s) = \left(\sqrt{\frac{t}{s}}, \sqrt{ts}\right) \qquad (t, s > 0)$$

transzformáció adja.

Könnyen ellenőrízhető, hogy ez az

$$E = \{(t,s) \,|\, a^2 \leq t \leq 2a^2, \ 1 \leq s \leq 2\}$$

téglalapot képezi S-re kölcsönösen egyértelmű módon és

$$\det g'(t,s) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{ts}} & -\dfrac{\sqrt{t}}{2\sqrt{s^3}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{s}{t}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{t}{s}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2s} > 0$$

teljesül E-n. Így

$$m_J(S) = \iint\limits_S 1 \, dxdy = \iint\limits_E 1 \cdot \frac{1}{2s} \, dtds =$$

$$\int\limits_{a^2}^{2a^2} \left(\int\limits_1^2 \tfrac{1}{2s} ds \right) dt = \int\limits_{a^2}^{2a^2} \ln\sqrt{2} \, dt = a^2 \ln\sqrt{2}$$

.

4) Legyen $S = \{(x,y,z) \,|\, x, y > 0, \ x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$. Számítsuk ki a

$$\iiint\limits_S x^2 z \, dxdydz$$

integrált.

Megoldás: Alkalmazzuk a

$$g(r,\varphi,\vartheta) \doteq (r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\varphi)$$

térbeli polár transzformációt. Most $\det g' = r^2\sin\varphi > 0$ (ahogy ezt már számoltuk). g (ahogy ez könnyen belátható) az

$$E = \{(r,\varphi,\vartheta)\,|\,0<r<a,\ 0<\varphi<\pi,\ 0<\vartheta<\pi/2\}$$

halmazt kölcsönösen egyértelmű módon képezi le S-re.

Így

$$\iiint_S x^2 z\,dxdydz = \iiint_E (r\sin\varphi\cos\vartheta)^2(r\cos\varphi)^2 r^2\sin\varphi\,drd\varphi d\vartheta =$$
$$= \iiint_{(0,a)\times(0,\pi)\times(0,\frac{\pi}{2})} r^6\sin^3\varphi\cos^2\varphi\cos^2\vartheta\,drd\varphi d\vartheta\ ,$$

ami a Fubini-tétellel számítható.

5) Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ az $x_1 = -x_2^2$, $x_1 = 2x_2 - x_2^2$ és $x_1 = 2 - 2x_2 - x_2^2$ görbék által határolt tartomány. Számítsuk ki $\iint_S x_1\,dx_1dx_2$- t.

Megoldás: A határoló görbék egyenletei (ha nem is olyan egyértelműen, mint például a 3. példában) azt sugallják, hogy g^{-1}-et

$$(\circ)\qquad \begin{aligned} t_1 &= x_1 + x_2^2 \\ t_2 &= 2x_2 - (x_1 + x_2^2) \end{aligned}$$

mutatja, azaz $g^{-1}(x_1,x_2) = (x_1 + x_2^2, 2x_2 - (x_1 + x_2^2))$. Ekkor g-t a $(\circ)$

egyenletrendszer

$$x_1 = t_1 - \left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)^2$$
$$x_2 = \frac{t_1+t_2}{2}$$

megoldása adja:

$$g(t_1,t_2) = \left(t_1 - \left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)^2, \frac{t_1+t_2}{2}\right) .$$

g az

$E = \{(t_1,t_2) \,|\, t_1 = 0,\ t_2 = 0$ és $2t_1 + t_2 = 2$ egyenletek által hat. tart.$\}$

halmazt képezi S-be és

$$\det g' = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2}(t_1+t_2) & -\frac{1}{2}(t_1+t_2) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} > 0$$

az E halmazon. Így

$$\iint_S x_1 \, dx_1 dx_2 = \iint_E \left[t_1 - \left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)^2\right] \cdot \frac{1}{2} \, dt_1, dt_2 =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_0^{2-2t_1} \left(t_1 - \left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)^2\right) dt_2\right] dt_1 = \frac{1}{48} .$$

2. Feladatsor

1) Legyen $\langle P^k\rangle = \langle P_1^k \times \cdots \times P_n^k\rangle$ a $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla egy felosztássorozata. Bizonyítsa be, hogy $\langle P^k\rangle \iff$ normális, ha $\langle P_i^k\rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ normális.
2) Legyenek P^1 és P^2 a $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla felosztásai. Bizonyítsa be, hogy $P^1 \subset P^2 \iff P_i^1 \subset P_i^2$ $(i = 1, \ldots, n)$.
3) Bizonyítsa be, hogy ha $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor Q bármely $P^1 \subset P^2$-t teljesítő felosztására
$$s(f, P^1) \leq s(f, P^2) \qquad \text{és} \qquad S(f, P^1) \geq S(f, P^2)$$
teljesül.
4) Legyenek $f, g : Q \subset \mathbb{R}$ olyan korlátos függvények, hogy $f(x) \leq g(x)$ $(x \in Q)$. Mutassa meg, hogy
$$\underline{\int}_Q f \leq \underline{\int}_Q g \qquad \text{és} \qquad \overline{\int}_Q f \leq \overline{\int}_Q g$$
teljesül.
5) Legyen $Q = [0, 1] \times [0, 1]$,
$$f : \ Q \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } x = y \\ 0 & , \text{ ha } x \neq y \end{cases}$$
Mutassa meg, hogy f Riemann-integrálható.
6) Legyenek $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ nemnegatív és monoton növekedő függvények. Bizonyítsa be, hogy a
$$h : \ [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad h = f \cdot g$$
függvény integrálható a $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ téglán.
7) Adja meg a Darboux-tétel (többváltozós függvényekre érvényes esetének) bizonyítását.
8) Legyen $Q = [0, 1] \times [0, 1]$,
$$f : \ Q \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy \ .$$
Határozza meg $\underline{\int}_Q f$ és $\overline{\int}_Q f$ értékét.
9) Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla és $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ a Q-t lefedő véges halmazrendszer (téglákból). Bizonyítsa be, hogy $V(Q) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} V(Q_i)$.
10) Ha $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_i$ és $A_i \subset \mathbb{R}^n$ $(i \in \mathbb{N})$ nullmértékű halmazok $\mathbb{R}^n$-ben, akkor A is nullmértékű $\mathbb{R}^n$-ben.

11) Bizonyítsa be, hogy $A \subset \mathbb{R}^n \iff$ nullmértékű $\mathbb{R}^n$-ben, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\exists$ A-nak $Q_1^0, \dots, Q_n^0, \dots$ nyílt téglákból álló nyílt lefedése, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V(Q_n) < \varepsilon$ teljesül.

12) Bizonyítsa be, hogy egy $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla esetén a $\operatorname{Bd} Q$ halmaz nullmértékű $\mathbb{R}^n$-ben.

13) Mutassa meg, hogy egy $A \subset \mathbb{R}^n$ nullmértékű halmazra $\bar{A}$ és $\operatorname{Bd} A$ nem feltétlenül nullmértékűek $\mathbb{R}^n$-ben.

14) Legyen $f : Q \to \mathbb{R}$ integrálható a $Q \subset \mathbb{R}^n$ téglán. Bizonyítsa be, hogy
   - ha $f = 0$ egy nullmértékű halmaztól eltekintve, akkor $\int\limits_Q f = 0$,
   - ha $f \geq 0$ és $\int\limits_Q f = 0$, akkor $f = 0$ egy nullmértékű halmaztól eltekintve.

15) Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Bizonyítsa be, hogy a $G_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$ halmaz (f gráfja) nullmértékű $\mathbb{R}^2$-ben.

16) Vizsgálja meg, hogy léteznek-e az alábbi integrálok. Ha igen, úgy határozza meg értéküket.

   a) $\displaystyle\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} x\sqrt{y}\ dxdy$;

   b) $\displaystyle\iint\limits_{[0,1]\times[-1,0]} xe^{xy}\ dxdy$;

   c) $\displaystyle\iint\limits_{[0,a]\times[0,b]} \frac{1}{(x^2 + y^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}\ dxdy$, $\qquad (a, b > 0,\ c \neq 0)$;

   d) $\displaystyle\iiint\limits_{[-1,2]\times[-1,0]\times[0,2]} \left(\frac{z}{1 - |x|y}\right)^2 dxdydz$;

   e) $\displaystyle\iint\limits_{[0,\alpha]\times[0,1]} \sqrt{1 - y\cos^2 x}\ dxdy \qquad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$.

17) Legyen $f : [0, \pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos x & \text{, ha } y \text{ racionális} \\ 0 & \text{, ha } y \text{ irracionális} \end{cases}$$

Bizonyítsa be , hogy

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^\pi f(x,y)\ dx \right) dy$$

létezik, de

$$\iint\limits_{[0,\pi]\times[0,1]} f(x,y)\ dxdy \qquad \text{és} \qquad \int\limits_0^\pi \left(\int\limits_0^1 f(x,y)\ dy \right) dx$$

nem létezik.

18) Legyen $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y^2} & \text{, ha } 0 < x < y < 1, \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{, ha } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 f(x,y)\ dx \right) dy \qquad \text{és} \qquad \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 f(x,y)\ dy \right) dx$$

létezik és nem egyenlő, de f nem Riemann-integrálható $[0,1] \times [0,1]$-en.

19) Bizonyítsa be, hogy $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmazra $\int\limits_S f \doteq \int\limits_Q f_S$ $(S \subset Q)$ értéke nem függ a Q téglamegválasztásától.

20) Bizonyítsa be a II/2. fejezetben kimondott lemmát.

21) Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\iint\limits_S (x^2+y^2)\ dxdy$, ha S az $y = x,\ y = x + a,\ y = 0,\ y = 3a$ egyenesekkel határolt tartomány;

b) $\iint\limits_S (x^2+y^2)\ dxdy$, ha $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq a,\ a > 0\}$;

c) $\iint\limits_S xy^2\ dxdy$, ha $S = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq \frac{p}{2},\ 0 \leq y \leq \sqrt{2px},\ p > 0\}$;

d) $\iint\limits_S (x^2+y)\ dxdy$, ha $S = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$;

e) $\iint\limits_S \cos(x+y)\ dxdy$, ha $S = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq \pi,\ 0 \leq x \leq y\}$;

f) $\iiint\limits_S \dfrac{1}{(1+x+y+z)^2}\, dxdydz$, ha S az $x=0,\ y=0,\ z=0$ és $x+y+z=1$ síkok által meghatározott tetraéder;

g) $\iint\limits_S e^{x^2+y^2}\, dxdy$, ha $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2,\ R>0\}$;

h) $\iiint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz$, ha $S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le R^2, R>0\}$.

22) Számítsa ki az alábbi görbékkel határolt tartományok Jordan-mértékét:

a) $xy=a^2\ ,\ x+y=\dfrac{5}{2}a \qquad (a>0)$;

b) $y^2=2px+p^2\ ,\ y^2=-2qx+q^2 \qquad (p,q>0)$;

c) $x^2=ay\ ,\ x^2=by\ ,\ x^2=cy^2\ ,\ x^2=dy^2 \qquad (0<a<b,\ 0<c<d)$.

23) Számítsa ki az alábbi feltételekkel határolt testek Jordan-mértékét (térfogatát):

a) $z=1+x+y\ ,\ z=0\ ,\ x+y=1\ ,\ x=0\ ,\ y=0$;

b) $x+y+z=a\ ,\ x^2+y^2=R^2\ ,\ x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0 \quad (a>R\sqrt{2})$;

c) $z=x^2+y^2\ ,\ y=x^2\ ,\ y=1\ ,\ z=0$.

III. PRIMITÍV ÉS INTEGRÁL (VAGY POTENCIÁL) FÜGGVÉNY

1. Előzmények és azok kiegészítése

a) A tartomány (nyílt, összefüggő halmaz), $\mathbb{R}^n$-beli görbe, sima görbe fogalma ismert.

b) $g = (g_1, \dots, g_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ szakaszonként sima görbe, ha folytonos és véges sok sima görbe egyesítése. Bizonyítható (lásd például Pál-Shipp-Simon, Analízis II., 143. oldal) a következő:
Tétel. *A $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz akkor és csak akkor összefüggő, ha bármely két pontja összeköthető D-ben haladó szakaszonként sima görbével.*

c) $D \subset \mathbb{R}^n$ az $x_0 \in D$-re nézve csillagtartomány, ha $\forall\ x \in D$-re az $[x_0, x]$ szakasz D-ben van. Egy csillagtartomány nyilván összefüggő.

d) Ugyancsak ismert az $f = (f_1, \dots, f_n) : g([a, b]) \to \mathbb{R}^n$ függvény $g = [g_1, \dots, g_n] : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ görbementi integrálja, és annak kiszámítása, ha f folytonos és g sima:

$$\int_g f \doteq \int_a^b (f \circ g) dg \doteq \sum_{i=1}^n \int_a^b (f_i \circ g) dg_i = \sum_{i=1}^n \int_a^b (f_i \circ g)(t) g_i'(t) dt \ ,$$

illetve ezek felírása a speciális $\mathbb{R}^3$-beli jelölésekkel.

2. Primitív függvény, Newton-Leibniz formula

Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ tartomány. Akkor mondjuk, hogy a $F : D \to \mathbb{R}$ függvény az $f : D \to \mathbb{R}^n$ függvény primitív függvénye, ha F differenciálható és $F' = f$. (Ha például $f = (P, Q, R) : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ F : D \to \mathbb{R}$, akkor $F' = f$ azt jelenti, hogy $F_x = P,\ F_y = Q,\ F_z = R$.)

Könnyen bizonyítható (lásd Pál-Shipp-Simon, Analízis II., 149. oldal), hogy ha F primitív függvénye f-nek, akkor $f\ \forall\ G$ primitív függvénye $G = F + C$ $(C \in \mathbb{R})$ alakú.

Tétel (Newton-Leibniz formula görbementi integrálra).
Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény a $g : [a, b] \to D$ szakaszonként sima görbe, $F : D \to \mathbb{R}$ az f egy primitív függvénye. Ekkor

$$\int_g f = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Bizonyítás. A feltételek miatt $\exists\ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, hogy $F \circ g\ \forall\ [t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ intervallumon differenciálható és

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t) \qquad (t \in [t_{i-1}, t_i],\ i = 1, \ldots, n).$$

Alkalmazva a Newton Leibniz formulát

$$\int_g f = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f \circ g)(t) g'(t) dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \big[F(g(t_i)) - F(g(t_{i-1}))\big] = F(g(b)) - F(g(a)),$$

amit bizonyítani kellett.

Következmény. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Ha f-nek $\exists$ primitív függvénye, akkor $\forall$ D-ben haladó g szakaszonként sima zárt görbére $\int_g f = 0$.*

Bizonyítás. A tételből $g(a) = g(b)$ miatt jön az állítás.

3. Integrál (vagy potenciál) függvény és kapcsolata a primitív függvénnyel

1. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, hogy $\forall$ D-ben haladó g szakaszonként sima zárt görbére $\int_g f = 0$. Legyen $x_0 \in D$ rögzített, $x \in D$ tetszőleges és $g_1 : [a, b] \to D$ egy x_0-t x-szel összekötő szakaszonként sima görbe ($g_1(a) = x_0,\ g_1(b) = x$). Ekkor $\forall$ g_2 D-ben haladó, x_0-t x-szel összekötő szakaszonként sima görbére $\int_{g_1} f = \int_{g_2} f$, azaz $\int_g f$ értéke csak x-től függ, független az x_0-t x-szel összekötő úttól.*

Bizonyítás. $g_1 \cup (-g_2)$ zárt görbe, így

$$0 = \int\limits_{g_1 \cup (-g_2)} f = \int\limits_{g_1} f + \int\limits_{-g_2} f = \int\limits_{g_1} f - \int\limits_{g_2} f \ ,$$

ami adja az állítást.

Definíció. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonos, hogy $\forall$ D-ben haladó zárt görbére (mely szakaszonként sima) vett integrálja 0. Legyen $x_0 \in D$ rögzített, $x \in D$ tetszőleges, $g : [a, b] \to D$ x_0-t x-szel összekötő szakaszonként sima görbe. Az előbbiek szerint egyértelmű

$$\Phi(x) = \int\limits_g f \qquad (x \in D)$$

függvényt f integrál (potenciál) függvényének nevezzük. Jelölése: $\int\limits_{x_0}^{x} f$.

2. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, melyre $\int\limits_g f = 0$ $\forall$ D-ben haladó szakaszonként sima zárt görbére. Ekkor a Φ integrálfüggvény f-nek (x_0-ban eltűnő) primitív függvénye.*

Bizonyítás. Legyen $x \in D$ és $K(x, r) \subset D$, g_1 az $x_0 \in D$-t x-szel összekötő, D-ben haladó szakaszonként sima görbe, $h \in \mathbb{R}^n$ olyan, hogy $0 < |h| < r$ és $g_2(t) = x + th$ $(t \in [0, 1])$ x-et $x + h$-val összekötő szakasz.
Ekkor $g_1 \cup g_2$ x_0-t $x + h$-val köti össze és így

$$\Phi(x + h) = \int\limits_{x_0}^{x+h} f = \int\limits_{g_1} f + \int\limits_{g_2} f = \int\limits_{x_0}^{x} f + \int\limits_{g_2} f = \Phi(x) + \int\limits_{g_2} f \ ,$$

illetve ebből

$$\Phi(x + h) - \Phi(x) = \int\limits_{g_2} f = \int\limits_0^1 f(x + th) \cdot h dt$$

következik, amiből – f folytonosságát felhasználva –

$$|\Phi(x + h) - \Phi(x) - f(x)h| = \Big|\int\limits_0^1 [f(x + th) - f(x)]h \ dt\Big| \leq$$

$$\sup_{t \in [0,1]} \Big\{|f(x + th) - f(x)|\Big\}|h| \to 0, \quad \text{ha} \quad h \to 0$$

adódik, mely éppen Φ differenciálhatóságát jelenti, és hogy $\Phi' = f$.

Megjegyzés: Többváltozós esetben tehát a folytonosság nem elég garancia a primitív függvény létezéséhez, ahhoz kell valami más is.

4. A primitív függvény létezésének további feltételei

1. Tétel (a primitív függvény létezésének szükséges feltétele). *Ha valamely $D \subset \mathbb{R}^n$ tartományon értelmezett $f : D \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvénynek létezik primitív függvénye, akkor f derivált mátrixa szimmetrikus, azaz $D_i f_j = D_j f_i$ $(1 \leq i, j \leq n)$.*

Bizonyítás. Ha f differenciálható és $\exists$ F primitív függvénye, akkor $F' = f$ miatt F kétszer differenciálható, így a Young-tétel miatt

$$D_i f_j = D_i D_j F = D_j D_i F = D_j f_i \qquad (1 \leq i, j \leq n),$$

amit bizonyítani kellett.

Ha a tartományra további feltételeket teszünk, akkor a derivált mátrix szimmetriája elégséges a primitív függvény létezéséhez:

2. Tétel (a primitív függvény létezésének elegendő feltétele). *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ valamely $x_0 \in D$-re nézve csillagtartomány és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény. Ha f derivált mátrixa szimmetrikus, azaz $D_i f_j = D_j f_i$ $(1 \leq i, j \leq n)$, akkor f-nek van primitív függvénye, nevezetesen $\Phi(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f$ egy x_0-ban eltűnő primitív függvény.*

Bizonyítás. Mivel D x_0-ra csillagtartomány, így az x_0-t x-szel összekötő g görbe legyen az $[x_0, x]$ szakasz, ekkor

$$\Phi(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f = \int\limits_{0}^{1} f(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)\, dt \; .$$

$D_i f_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ folytonossága miatt teljesülnek a paraméteres integrálok differenciálására vonatkozó tétel feltételei, így Φ differenciálható

és

$$
\begin{aligned}
D_i\Phi(x) &= \int_0^1 D_i\big[f(x_0+t(x-x_0))(x-x_0)\big]dt = \\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \big[t\cdot D_i f_j(x_0+t(x-x_0))(x_j-x_{0j}) + f_i(x_0+t(x-x_0))\big] = \\
&= \int_0^1 \left[t\cdot \frac{d}{dt} f_i(x_0+t(x-x_0)) + f_i(x_0+t(x-x_0))\right] dt = \\
&= f_i(x) - \int_0^1 f_i(x_0+t(x-x_0))dt + \int_0^1 f_i(x_0+t(x-x_0))dt = f_i(x)
\end{aligned}
$$

$(i=1,\dots,n)$. Így $\Phi' = f$ is igaz.

Megjegyzések:

1) A tétel igaz úgynevezett egyszeresen összefüggő tartományokra is.

2) Ha $D\subset\mathbb{R}^3$ egy tartomány, $f=(P,Q,R):D\to\mathbb{R}^3$ egy erőtér, akkor f primitív függvényét az erőtér potenciáljának nevezik. A két tétel azt mondja: valamely csillagtartományon értelmezett erőtérnek akkor és csak akkor van potenciálfüggvénye, ha $P_y=Q_x$, $Q_z=R_y$, $P_z=R_x$, vagy $\forall$ D-ben haladó zárt, szakaszonként sima g-re $\int_g f = 0$.

3) $\operatorname{rot} f \doteq (R_y-Q_z, P_z-R_x, Q_z-P_y)$. Így (ha $D\subset\mathbb{R}^3$ csillagtartomány) az $f:(P,Q,R):D\to\mathbb{R}^3$ erőtérnek akkor és csak akkor léteik primitív (potenciál) függvénye, ha $\operatorname{rot} f = 0$ (rotációmentes).

3. Feladatsor

1) Legyen $f(x,y) = (y, -x)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ adott függvény, a g görbe vezessen az $(1,0)$ pontból a $(-1,0)$ pontba, hogy

   a) $g(t) = (-t, 0) \quad (t \in [-1,1])$,

   b) $g(t) = (\cos t, \sin t) \quad (t \in [0,\pi])$.

   Számítsa ki $\int\limits_g f$-et.

2) Legyen

$$f(x,y) = \left(\frac{y^2}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2}{1+x^2+y^2}\right) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

   g a $[0,1] \times [0,1]$ négyzet határa. Számítsa ki $\int\limits_g f$-et.

3) Legyen $f(x,y,z) = (yz, 0, xy)$ $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$ adott függvény, g pedig az

   a) $g(t) = (a\cos t, b\sin t, ct) \quad (0 \le t \le \frac{1}{2}\pi)$ görbe,

   vagy

   b) az a)-beli görbe kezdő és végpontját összekötő szakasz.

   Számítsa ki $\int\limits_g f$-et.

4) Számítsa ki $\int\limits_g (x+y)dx + (x-y)dy$-t, ha g az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis (pozitív irányítással).

5) Határozza meg az alábbi függvények primitív függvényeit:

   $f_1(x,y) = (y,x)$; $\qquad f_2(x,y) = (x,y)$; $\qquad f_3(x,y) = (x-y, y-x)$;

   $f_4(x,y) = (x+y, x-y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2$ minden esetben);

$$f_5(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\});$$

$$f_6(x,y) = \left(\frac{y}{x^2}, -\frac{1}{x}\right) \qquad (x > 0);$$

6) Számítsa ki az alábbi görbementi integrálokat:

   $\int\limits_g ydx + xdy$, ahol g az $[(-1,2),(2,3)]$ szakasz;

$\int_g xdx + ydy$, ahol g az $[(0,1),(3,-4)]$ szakasz;
$\int_g (x-y)dx + (y-x)dy$, ahol g az $[(1,-1),(1,1)]$ szakasz;

7) Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$$

függvénynek nem létezik primitív függvénye. Ha f a $T = \mathbb{R}^2 \setminus E$ halmazon értelmezett, ahol $E = \{(x,0) \mid x \leq 0\}$, akkor létezik primitív függvénye, határozza meg.

8) Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ egy téglalap $f = (P,Q) : T \to \mathbb{R}^2$ adott függvény (folytonosan differenciálható). Bizonyítsa be, hogy

$$\Phi_1(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$$

és

$$\Phi_2(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

primitív függvénye f-nek.

9) Határozza meg az

$$f_1(x,y,z) = (x, y^2, -z^2); \quad f_2(x,y,z) = (yz, xz, xy) \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

függvények primitív függvényét.