Lajkó Károly

# Differenciálegyenletek

harmadik kiadás

Debreceni Egyetem
Matematikai Intézet
2003

lajko@math.klte.hu

Amennyiben hibát talál a jegyzetben, kérjük jelezze a szerzőnek!

A jegyzet dvi, pdf és ps formátumban letölthető a következő címről:
http://riesz.math.klte.hu/~lajko/jegyzet.html

Ez a jegyzet $\mathcal{AMS}$–LaTeX-ben készült

Szedés és tördelés: Kovács László

# Tartalomjegyzék

**I. Differenciálegyenlet, Cauchy-feladat fogalma** **5**
1. Bevezető feladatok . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
2. Differenciálegyenlet fogalma . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
3. Kezdeti érték probléma vagy Cauchy-feladat . . . . . . . . . 8

**II. Elemi úton megoldható differenciálegyenlet-típusok** **11**
1. Szeparábilis differenciálegyenletek . . . . . . . . . . . . . . . 11
2. Változóban homogén differenciálegyenletek . . . . . . . . . . 13
3. Az $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ differenciálegyenlet . . . . . . . . . . . 13
4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek . . . . . . . . . . . . 14
5. Egzakt differenciálegyenletek . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18
6. Integráló szorzó keresése . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21
7. A Bernoulli- és Ricatti-egyenlet . . . . . . . . . . . . . . . . 22

**III. Egzisztencia-tételek Cauchy-feladatokra** **25**
1. Segédeszközök a funkcionálanalízisből . . . . . . . . . . . . . 25
2. Egzisztencia és unicitiás tétel DER-KÉP-re . . . . . . . . . . . 27
3. (L-DER-KÉP) megoldhatósága . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31
4. ($n$-KÉP) megoldhatósága . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
5. Egzisztenciatétel DER-KÉP-re . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34

**IV. Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek** **35**
1. Az $n$-edrendű lineáris homogén differenciálegyenletek általános elmélete . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35
2. Konstansegyütthatós lineáris homogén differenciálegyenletek 42
3. $n$-edrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek . . . . . 44
4. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek . . . . . . . . . . . . 47
5. Konstansegyütthatós lineáris differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 54

**V. Peremfeladatok, stabilitás** **57**
1. A peremfeladat fogalma . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
2. Sturm-Liouville rendszerek . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
3. Parciális differenciálegyenletek peremfeltételekkel . . . . . . 61

4. Stabilitás . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63

**VI. Variációszámítás** **71**
1. Alapfogalmak, alapfeladatok . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71
2. Segédtételek . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74
3. Funkcionálok variációi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 75
4. Az Euler-Lagrange differenciálegyenlet . . . . . . . . . . . . 76
5. Az 1. alapfeladat megoldása . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79

**Feladatsor** **82**

# I. Differenciálegyenlet, Cauchy-feladat fogalma

## 1. Bevezető feladatok

a) Legyen adott az egyenesen mozgó pont $v$ sebességfüggvénye, mely folytonos. A $t_0$ időpillanatban tartózkodjon a pont az $S_0$ helyen. Határozzuk meg a pont $S$ útfüggvényét!

*Megoldás:* A sebesség definíciójából következik az

$$S'(t) = v(t) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{1.1}$$

egyenlet, ahol $S$ az ismeretlen, $v$ az ismert függvény.
Az egyenletben $S'$ szerepel (ez nehézséget jelent), de (1.1) azt mutatja, hogy $S$ primitív függvénye $v$-nek (ez viszont jó), így

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + C \tag{$*$}$$

teljesül. Ugyanakkor a feladat szerint $S(t_0) = S_0$ is teljesül, így a probléma az

$$S'(t) = v(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad S(t_0) = S_0 \tag{1.2}$$

alakban fogalmazható meg, azaz (1.1)-et az $S(t_0) = S_0$ feltétel mellett kell megoldani, ami $(*)$ miatt adja, hogy $C = S_0$, így az

$$S(t) = S_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau \qquad (t \in \mathbb{R})$$

szerint adott a feladat megoldása.

b) Mennyi ideig emelkedik egy $v_0 = 100\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sec}}$ kezdősebességgel függőlegesen felfelé lőtt rakéta?

*Megoldás:* Fizikából ismeretes, hogy a rakéta $v$ sebességfüggvénye és deriváltja kielégíti a

$$v'(t) = -g - k\,v^2(t) \tag{1.3}$$

egyenletet. Ennek a megoldását kell keresni a $v(0) = 100$ feltétel mellett és meg kell határozni azt a $T$ időpillanatot, amikor $v(T) = 0$. A feladat tehát

$$v'(t) = -g - k\,v^2(t), \qquad v(0) = 100, \quad v(T) = 0 \tag{1.4}$$

megoldása. Látható, hogy most a keresett $v$ függvény és a $v'$ deriváltfüggvénye is szerepel. A megoldás most nem nagyon „látszik”.

Az (1.1) és (1.3), illetve (1.2) és (1.4) általánosítása elvezet a differenciálegyenlet, illetve Cauchy-feladat fogalmához.

## 2. Differenciálegyenlet fogalma

Jelöljön $y$ a továbbiakban egy keresett függvényt, $y(x)$ ennek a helyettesítési értékét $x$-ben. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adott, ekkor a

$$y' = f(x, y) \qquad \big(\text{illetve } y'(x) = f(x, y(x))\,\big) \tag{2.1}$$

egyenlet az (1.1) és (1.3) egyenletek általánosításának tekinthető. (2.1)-et elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenletnek is szokás nevezni.

Általánosabban:

**1. definíció.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény (ahol $D$ egy tartomány). Az

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big) \tag{2.2}$$

egyenletet $n$-edrendű közönséges explicit differenciálegyenletnek nevezzük, ennek speciális esete $n = 1$-re a (2.1) elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenlet.

Az $y : I \to \mathbb{R}$ (ahol $I \subset \mathbb{R}$ intervallum) függvény megoldása (2.2)-nek $I$-n, ha

1) $y$ $n$-szer differenciálható,
2) $\big(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\big) \in D, \quad \forall\, x \in I,$
3) $y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\big), \quad \forall\, x \in I$

teljesül.

További általánosítás:

**2. definíció.** Legyen $F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvény. A

$$F\big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\big) = 0 \tag{2.3}$$

egyenletet közönséges $n$-edrendű differenciálegyenletnek nevezzük.
Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény megoldása a (2.3) differenciálegyenletnek az $I$ intervallumon, ha

1) $y$ $n$-szer differenciálható,
2) $\big(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) \in D, \quad \forall\, x \in I,$
3) $F\big(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) = 0 \quad \forall\, x \in I$

teljesül.

**Megjegyzés.** Ha (2.2), illetve (2.3)-ban $f$, illetve $F$ az $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, illetve $y, y', \dots, y^{(n)}$ változóinak lineáris függvénye, akkor a (2.2), illetve (2.3) differenciálegyenlet lineáris, egyébként nemlineáris.

**3. definíció.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány, $f = (f_1, \dots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. A

$$y' = (y_1', \dots, y_n') = f(x, y) = f(x, y_1, \dots, y_n) \tag{2.4}$$

egyenletrendszert, amely az

$$y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{2.4'}$$

alakba is írható, elsőrendű közönséges ($n$ ismeretlen függvényt tartalmazó) explicit differenciálegyenlet-rendszernek nevezzük.

Az $y = (y_1, \ldots, y_n) : I \to \mathbb{R}^n$ függvény (függvényrendszer) a (2.4) (illetve (2.4′)) differenciálegyenlet-rendszer megoldása $I$-n, ha

1) $y$ (illetve az $y_i$-k) differenciálható(k),
2) $\big(x, y(x)\big) = \big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big) \in D \quad \forall\, x \in I$,
3) $y'(x) = f(x, y(x))$ (illetve $y_i'(x) = f_i\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big)$ $i = 1, \ldots, n$) $\forall\, x \in I$

teljesül.

## 3. Kezdeti érték probléma vagy Cauchy-feladat

**1. definíció.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $(x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n}) \in D$ rögzített. A
(3.1)
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \quad (i = 0, \ldots, n-1)$$

problémát egy $n$-edrendű explicit közönséges differenciálegyenletre vonatkozó kezdeti érték problémának vagy Cauchy-feladatnak nevezzük (ez $n = 1$-re $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ alakú).
Az $y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ kikötéseket kezdeti feltételeknek nevezzük.
Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény megoldása (3.1) ($n$-KÉP)-nek, ha

1) $y$ $n$-szer differenciálható,
2) $\big(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big) \in D \quad \forall\, x \in I$,
3) $y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big) \quad \forall\, x \in I$,
4) $y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \quad (i = 0, \ldots, n-1)$

teljesül.

**Megjegyzés.** Hasonló a helyzet a nem explicit esetben is,
$F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ függvénnyel.

**2. definíció.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány, $f = (f_1, \ldots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, $(x_0, y_0) = (x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n}) \in D$ adott pont. A

$$(3.2) \qquad y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (y = (y_1, \ldots, y_n))$$

problémát egy differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdeti érték problémának vagy Cauchy-feladatnak nevezzük.
Az $y = (y_1, \ldots, y_n) : I \to \mathbb{R}^n$ függvény megoldása a (3.2) (DER-KÉP)-nek, ha

1) $y$ differenciálható,
2) $\big(x, y(x)\big) = \big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big) \in D \quad \forall\, x \in I$,
3) $y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \quad \forall\, x \in I$,
4) $y(x_0) = y_0$

teljesül.

**Tétel (átviteli elv).** Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $(x_0, y_{01} \ldots, y_{0n}) = (x_0, y_0) \in D$ rögzített.
Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor megoldása a (3.1) ($n$-KÉP)-nek $I$-n, ha az $\big(y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big)$ vektorfüggvény (függvény $n$-es) megoldása a

$$(*) \quad \begin{cases} y_1' & = & y_2 \\ & \vdots & \\ y_{n-1}' & = & y_n \\ y_n' & = & f(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \qquad y_i(x_0) = y_{0i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

(DER-KÉP)-nek $I$-n.

**Bizonyítás.**

a) Ha $y : I \to \mathbb{R}$ megoldása (3.1)-nek $I$-n, akkor az

$$y_1(x) \doteq y(x), \qquad y_2(x) \doteq y'(x), \qquad \ldots \qquad y_n(x) \doteq y^{(n-1)}(x)$$

$(x \in I)$ szerint definiált $(y_1, \ldots, y_n)$ vektorfüggvény megoldása $(*)$-nak, mert

$$y_1'(x) = y'(x) = y_2(x), \qquad y_2'(x) = y''(x) = y_3(x), \qquad \dots$$
$$y_{n-1}'(x) = y^{(n-1)}(x) = y_n(x),$$
$$y_n'(x) = y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\big) =$$
$$= f(x, y_1(x), \dots, y_n(x)),$$

$(x \in I)$, illetve $y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1}$ $(i = 0, \dots, n-1)$-ből

$$y_1(x_0) = y_{01}, \qquad \dots, \qquad y_n(x_0) = y_{0n},$$

azaz

$$y_i(x_0) = y_{0i} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

adódik.

b) Ha $(y_1, \dots, y_n)$ megoldása $(*)$-nak $I$-n, akkor $y_i'(x) = y_{i+1}(x)$ $(i = 1, \dots, n-1,\ x \in I)$, így

$$y_n(x) = y_{n-1}'(x) = y_{n-2}''(x) = \dots = y_1^{(n-1)}(x), \quad x \in I,$$

azaz

$$y_1^{(n)}(x) = y_n'(x) = f\big(x, y_1(x), \dots, y_1^{(n-1)}(x)\big), \quad x \in I$$

és

$$y_1^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \qquad (i = 0, \dots, n-1),$$

tehát $y_1 \doteq y : I \to \mathbb{R}$ megoldása (3.1)-nek $I$-n.

**Megjegyzés.** Az átviteli elv lehetővé teszi, hogy ($n$-KÉP) feladatok megoldhatóságát (DER-KÉP) megoldhatóságára vezessük vissza.

# II. Elemi úton megoldható differenciálegyenlet-típusok

## 1. Szeparábilis differenciálegyenletek

**Definíció.** Legyenek $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ $(g \neq 0)$ adott folytonos függvények. Az

$$y' = f(x)g(y) \tag{SZ}$$

differenciálegyenletet szeparábilis (szétválasztható változójú) differenciálegyenletnek nevezzük.

**Tétel.** Az $y : [a,b] \to [c,d]$ differenciálható függvény akkor és csak akkor megoldása (SZ)-nek, ha

$$\left( \left( \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)} dt \right) \circ y \right)(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \tag{SZMo}$$

$\big(x, x_0 \in [a,b];\ y, y_0 \in [c,d]\big)$ teljesül.

**Bizonyítás.** $f$ és $1/g$ folytonosak, így az

$$\begin{aligned} F(x) &\doteq \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C_1 \qquad \big(x, x_0 \in [a,b]\big), \\ G(y) &\doteq \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)} dt + C_2 \qquad \big(y, y_0 \in [c,d]\big) \end{aligned}$$

szerint definiált $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $G : [c,d] \to \mathbb{R}$ függvényekre $F' = f$, $G' = 1/g$ teljesül.

a) Ha $y$ teljesíti (SZMo)-t, akkor

$$G\big(y(x)\big) = F(x) + C_2 - C_1 \qquad \big(x \in [a,b]\big),$$

ami $y$, $F$, $G$ differenciálhatósága miatt adja, hogy

$$G'\big(y(x)\big) \cdot y'(x) = F'(x) \qquad \big(x \in [a,b]\big),$$

azaz

$$y'(x) = f(x)g\big(y(x)\big) \qquad \big(x \in [a,b]\big)$$

teljesül, tehát $y$ megoldása (SZ)-nek.

b) Ha $y$ megoldása (SZ)-nek, akkor

$$f(x) = \frac{y'(x)}{g\big(y(x)\big)} \qquad (x \in [a,b])$$

és a helyettesítéses integrálás tétele miatt bármely $x, x_0 \in [a,b]$ esetén

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g\big(y(t)\big)}dt = \left(\left(\int_{y_0=y(x_0)}^{y} \frac{1}{g(t)}dt\right) \circ y\right)(x)$$

következik, azaz (SZMo) teljesül.

**Megjegyzések.**

1) A tétel szerint $y(x_0) = y_0$ is teljesül, így az $y' = f(x)g(y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdeti érték probléma megoldását kaptuk meg.

2) A következő formális módszert gyakran használják:

$$(\mathsf{SZ}) \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \quad (*),$$

amit megoldva $y$-ra kapjuk (SZ) megoldását. Az $(x_0, y_0)$ ponton áthaladó megoldáshoz úgy kell megválasztani az integrációs konstansokat, hogy a $(*)$ egyenlőség teljesüljön $x = x_0$, $y = y_0$ mellett. Ez teljesül, ha

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt\ ,$$

ami adja, hogy $y$ teljesíti (SZMo)-t.

3) Vizsgálható olyan eset is, amikor valamilyen $y_0 \in [c,d]$-re $g(y_0) = 0$ (ekkor $y(x) = y_0$ nyilván megoldás, de lehetnek más megoldások is).

# 2. Változóban homogén differenciálegyenletek

**Tétel.** Legyen $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvény, $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $0 \notin [a,b]$ és $\exists\, y'$ $[a,b]$-n és $y(x)/x \in [c,d]$.
$y$ akkor és csak akkor megoldása $[a,b]$-n a

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{VH}$$

változóban homogén differenciálegyenletnek, ha az

$$u : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad u(x) \doteq \frac{y(x)}{x}$$

függvény megoldása $[a,b]$-n az

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

szeparábilis differenciálegyenletnek.

**Bizonyítás.** Nyilvánvaló.

# 3. Az $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ differenciálegyenlet

– Ha $c = \gamma = 0$, akkor a címben egy (VH) típusú egyenlet szerepel, mondjuk $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú adott folytonos függvény esetén.

– Ha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = a\beta - b\alpha = 0,$$

azaz ha $\dfrac{a}{\alpha} = \dfrac{b}{\beta} = \lambda$, illetve $a = \lambda\alpha$, $b = \lambda\beta$, akkor a címben szereplő egyenlet átmegy az

$$y' = g(\alpha x + \beta y + \gamma)$$

alakba, melyet az

$$u(x) = \alpha x + \beta y(x) + \gamma$$

helyettesítéssel az

$$u' = \alpha + \beta y' = \alpha + \beta g(u)$$

alakba írhatunk, ami egy speciális (SZ) egyenlet.

– Ha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0 \ ,$$

akkor az

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszernek pontosan egy $\xi, \eta$ megoldása van.
Ekkor belátható (igen egyszerűen), hogy az

$$y : H \to \mathbb{R} \qquad (\xi \notin H,\ x \in H \ \Rightarrow\ \alpha x + \beta y + \gamma \neq 0)$$

függvény akkor és csakis akkor megoldása $H$-n az általános differenciálegyenletnek, ha a

$$\psi : H^* \to \mathbb{R}, \quad \psi(t) = y(t + \xi) - \eta \qquad \big(H^* = \{t \mid t + \xi \in H\}\big)$$

függvény megoldása az

$$\psi'(x) = F\left(\frac{\psi(x)}{x}\right)$$

differenciálegyenletnek, ahol

$$F(z) = f\left(\frac{a + bz}{\alpha + \beta z}\right) \ .$$

# 4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

A következőkben szükségünk lesz az alábbi, a paraméteres integrálok differenciálására vonatkozó, a korábbinál részben általánosabb, de kevesebb változószámú és egyszerűbb értelmezési tartományú függvényekre teljesülő tételre.

**Lemma.** Legyenek $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények, hogy
$$c \le \varphi(x), \psi(x) \le d, \qquad x \in [a,b] \ .$$
Legyen továbbá $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos és az első változója szerint folytonosan differenciálható függvény $[a,b] \times [c,d]$-n. Ekkor a

$$h(x) \doteq \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt \qquad x \in [a,b]$$

függvény differenciálható, és $\forall\ x \in [a,b]$ esetén

$$h'(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} D_1 f(x,t)dt + f(x,\psi(x))\psi'(x) - f(x,\varphi(x))\varphi'(x) \ .$$

**Bizonyítás.**

Ha $\quad \phi(x) \doteq \int\limits_c^d f(x,t)dt \quad \Rightarrow \quad \exists\ \phi'(x) = \int\limits_c^d D_1 f(x,t)dt$ .

Ha $\quad F(x,y,z) = \int\limits_y^z f(x,t)dt \quad \Rightarrow \quad \exists\ D_1F = \int\limits_y^z D_1 f;$

$\exists\ D_2F = -f(x,y);$

$\exists\ D_3F = f(x,z).$

Mivel $\quad h(x) = F(x,\varphi(x),\psi(x))$ és $\quad \exists\ D_1F,\ D_2F,\ D_3F;$

$\Rightarrow \quad \exists\ h'(x) = D_1F + D_2F\varphi' + D_3F\psi';$

$\Rightarrow$ az állítás.

**Definíció.** Legyenek $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények, $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható ismeretlen függvény. A

(LIH) $$y' = f(x)y + g(x)$$

differenciálegyenletet elsőrendű lineáris inhomogén, míg az

(LH) $$y' = f(x)y$$

differenciálegyenletet elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletnek nevezzük.

**Tétel.** Az $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor megoldása (LIH)-nek, ha $\exists\ c \in \mathbb{R}$, hogy

(LIHMo) $$y(x) = cy_H(x) + y_P(x) \qquad (x \in [a,b]),$$

ahol $y_H : [a,b] \to \mathbb{R}$ az (LH) differenciálegyenlet sehol el nem tűnő, $y_P : [a,b] \to \mathbb{R}$ pedig (LIH) egy (partikuláris) megoldása.
Továbbá, ha $x_0 \in [a,b]$ rögzített, akkor bármely $x \in [a,b]$-re

(H) $$y_H(x) = \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right),$$

(P) $$\begin{cases} y_P(x) = \int\limits_{x_0}^{x} g(\tau)\exp\left(\int\limits_{\tau}^{x} f(t)dt\right)d\tau = \\ \qquad = \left[\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right)\right] \cdot \int\limits_{x_0}^{x} g(\tau)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{\tau} f(t)dt\right)d\tau\ . \end{cases}$$

**Bizonyítás.**

a) Legyen $y$ megoldása (LIH)-nek, $x_0 \in [a,b]$ adott, akkor

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x) \qquad (x \in [a,b]),$$

melyet $\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right) \neq 0$-val szorozva kapjuk, hogy

$$y'(x)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right) - f(x)y(x)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right) =$$
$$= g(x)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right),$$

amiből látható, hogy $x \in [a,b]$ esetén

$$\frac{d}{dx}\left[y(x)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right)\right] = g(x)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right).$$

Ez pedig adja, hogy

$$y(x)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right) = \int\limits_{x_0}^{x} g(\tau)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{\tau} f(t)dt\right)d\tau + c\ ,$$

melyet $\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right)$-vel szorozva

$$y(x) = c\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right) + \int\limits_{x_0}^{x} g(\tau)\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt - \int\limits_{x_0}^{\tau} f(t)dt\right)d\tau =$$

$$= c\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right) + \int\limits_{x_0}^{x} g(\tau)\exp\left(\int\limits_{\tau}^{x} f(t)dt\right)d\tau$$

adódik, melyből (H) és (P) figyelembevételével jön (LIHMo).

b) Ha $y$ (LIHMo) alakú, akkor ((H)-t és (P)-t tekintve)

$$y_H'(x) = f(x)\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right) = f(x)y_H(x)\ ,$$

azaz (H) megoldása (LH)-nak.
Ugyanakkor (P)-ből, a lemma

$$\varphi(x) = x_0, \qquad \psi(x) = x, \qquad f(x,\tau) = g(\tau)\exp\left(\int\limits_{\tau}^{x} f(t)dt\right)$$

speciális választása mellett bármely $x, \tau \in [a,b]$ esetén

$$y_P'(x) = \int\limits_{x_0}^{x} g(\tau)\exp\left(\int\limits_{\tau}^{x} f(t)dt\right)f(x)d\tau + g(x)\exp\left(\int\limits_{x}^{x} f(t)dt\right) - 0 =$$

$$= f(x)\left[\int\limits_{x_0}^{x} g(\tau)\exp\left(\int\limits_{\tau}^{x} f(t)dt\right)d\tau\right] + g(x) =$$

$$= f(x)y_P(x) + g(x)$$

adódik, azaz $y_P$ megoldása (LIH)-nek.
Végül pedig (LIHMo) differenciálásával bármely $x \in [a,b]$ esetén

$$\begin{aligned} y'(x) &= [cy_H + y_P]'(x) = cy_H'(x) + y_P'(x) = \\ &= cf(x)y_H(x) + f(x)y_P(x) + g(x) = \\ &= f(x)[cy_H(x) + y_P(x)] + g(x) = f(x)y(x) + g(x) \ , \end{aligned}$$

azaz a (LIHMo) alakú függvény valóban megoldása (LIH)-nek.

# 5. Egzakt differenciálegyenletek

**Definíció.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, $P, Q : D \to \mathbb{R}$ adott függvények. Az

(E) $$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

egyenletet egzaktnak nevezzük, ha az $f = (P,Q) : D \to \mathbb{R}^2$ függvénynek létezik primitív függvénye, azaz létezik $F : D \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy

$$F' = f, \quad \text{azaz} \quad D_1 F = P \quad \text{és} \quad D_2 F = Q$$

teljesül.

**Megjegyzés.** (E)-t szokás az

(E′) $$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

alakban is írni.

**Tétel.** Az (E) egzakt differenciálegyenletnek az $y : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény (melyre $(x, y(x)) \in D$, ha $x \in I$) akkor és csak akkor megoldása $I$-n, ha $\exists\, C \in \mathbb{R}$, hogy

(EMo) $$F(x, y(x)) = C \qquad (x \in I),$$

ahol $F$ az $f = (P,Q)$ függvény primitív függvénye.

**Bizonyítás.**

a) Legyen $y$ (EMo) alakú, akkor az összetett függvény differenciálási szabálya szerint

$$D_1F(x,y(x)) + D_2F(x,y(x))y'(x) = 0 \qquad (x \in I)$$

következik, ami $D_1F = P$ és $D_2F = Q$-val adja, hogy $y$ megoldása (E)-nek.

b) Ha $y$ megoldása (E)-nek $I$-n és (E) egzakt, akkor

$$0 = D_1F(x,y(x)) + D_2F(x,y(x))y' = \frac{d}{dx}F(x,y(x)) \qquad (x \in I)$$

teljesül, ami adja (EMo)-t.

**Megjegyzések.**

1) Egy egzakt differenciálegyenlet megoldásához elegendő az $F$ primitív fügvény meghatározása.

2) Ha $f = (P,Q) : D \to \mathbb{R}^2$ olyan, hogy $D$ csillagszerű tartomány, $f$ folytonosan differenciálható (azaz $P$ és $Q$ is), továbbá $D_2P = D_1Q$ $D$-n, akkor létezik $f = (P,Q)$-nak primitív függvénye. Ha $(x_0,y_0)$ egy csillagközéppont és $g : [a,b] \to D$ olyan szakaszonként sima görbe, mely az $(x_0,y_0)$-t $(x,y)$-nal köti össze, akkor ez a primitív függvény az

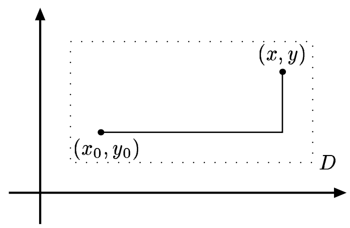
$$F(x,y) = \int_g f = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} f$$

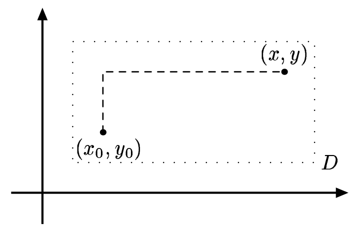
integrálfüggvény (lásd Analízis III., III.4.2. tétel).

3) A 2) megjegyzés feltételein túl teljesüljön, hogy $g(t) \doteq (x(t),y(t))$ folytonosan differenciálható ($g(a) = (x_0,y_0)$, $g(b) = (x,y)$), akkor a görbementi integrál kiszámítására vonatkozó ismert tétel (lásd például Analízis II.) alapján, ha $\exists\ g^{-1}$, úgy

$$F(x,y) = \int_a^{g^{-1}(x,y)} P(x(t),y(t))x'(t)dt + \int_a^{g^{-1}(x,y)} Q(x(t),y(t))y'(t)dt\ .$$

4) Ha $D$ téglalap vagy körlap, akkor bármely rögzített $(x_0, y_0)$-ból bármely $(x, y) \in D$ elérhető a tengelyekkel párhuzamos szakaszokból álló töröttvonal mentén, például:




A folytonos vonalra:

$$g(t) = g^1(t) \cup g^2(t) = (x^1(t), y^1(t)) \cup (x^2(t), y^2(t)) \ ,$$

ahol

$$\begin{cases} x^1(t) = t \\ y^1(t) = y_0 \end{cases} \quad t \in [x_0, x], \qquad \begin{cases} x^2(t) = x \\ y^2(t) = t \end{cases} \quad t \in [y_0, y],$$

így

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)dt$$

A szaggatott vonalra (hasonlóan):

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)dt$$

5) $F(x, y)$ utóbbi két alakjában szokás az első integrálban $t \to x$, a másodikban $t \to y$ használata is, ekkor

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy \ ,$$

illetve

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy \ .$$

6) Az $(\mathsf{E})$ egzakt egyenlet $(x_0, y_0)$-on áthaladó megoldását $C = 0$ mellett kapjuk.

7) Az $y' = f(x)g(y)$ $(g \neq 0)$ szeparábilis egyenlet egzakt differenciálegyenlet.

# 6. Integráló szorzó keresése

**Definíció.** Ha $y$ teljesíti $(\mathsf{E})$-t és $\exists\ \mu : D \to \mathbb{R}$ $(\mu \neq 0)$ függvény, hogy a $(\mu P, \mu Q)$ függvénynek létezik primitív függvénye, azaz a

$$(*) \qquad \mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

differenciálegyenlet egzakt, akkor $\mu$-t az $(\mathsf{E})$ egyenlet integráló szorzójának (Euler-multiplikátorának) nevezzük.

**Megjegyzések.**

1) Ha létezik integráló szorzó, úgy ($(\mathsf{E})$ és $(*)$ ekvivalenciája miatt) $(\mathsf{E})$ megoldása visszavezethető a $(*)$ egzakt differenciálegyenlet megoldására.

2) Integráló szorzót az alábbi módon kereshetünk:

$$D_2 \mu P = D_1 \mu Q \qquad \Leftrightarrow \qquad Q\mu_x - P\mu_y = (P_y - Q_x)\mu \ ,$$

melyből ha $\mu = \mu(\omega(x,y))$ (pl. $\omega(x,y) = x$ vagy $y$ vagy $x + y$ ...)

$$Q\frac{d\mu}{d\omega}\omega_x - P\frac{d\mu}{d\omega}\omega_y = (P_y - Q_x)\mu \ ,$$

illetve

$$\frac{\mu'(\omega)}{\mu(\omega)} = \frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}$$

következik, ami adja, hogy

$$\mu(\omega) = \exp \int \frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}(\omega) d\omega \ ,$$

ha $\frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}$ az $\omega$ függvénye.

# 7. A Bernoulli- és Ricatti-egyenlet

**1. tétel.** Legyenek $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ adott függvények, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\alpha \neq 1$. Az $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(y > 0)$ differenciálható függvény akkor és csak akkor megoldása $[a,b]$-n a

$$\text{(B)} \qquad y'(x) + f(x)y(x) + g(x)y^{\alpha}(x) = 0$$

Bernoulli-féle differenciálegyenletnek, ha a

$$\psi : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad \psi(x) = y^{1-\alpha}(x)$$

függvény megoldása a

$$\psi'(x) + (1-\alpha)f(x)\psi(x) + (1-\alpha)g(x) = 0$$

lineáris differenciálegyenletnek $[a,b]$-n.

**Bizonyítás.** $y(x) = [\psi(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ és $y'(x) = \dfrac{1}{1-\alpha}[\psi(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot \psi'(x)$ miatt (B) akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{1}{1-\alpha}[\psi(x)]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \psi'(x) + f(x)[\psi(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}} + g(x)[\psi(x)]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 0 \ ,$$

azaz

$$\psi'(x) + (1-\alpha)f(x)\psi(x) + (1-\alpha)g(x) = 0$$

bármely $x \in [a,b]$ esetén, amit bizonyítani kellett.

**2. tétel.** Legyenek $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ adottak, $y, y_P : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálhatók és $y_P$ egy megoldása az

$$\text{(R)} \qquad y'(x) + f(x)y^2(x) + g(x)y(x) + h(x) = 0$$

Ricatti-féle differenciálegyenletnek. $y$ akkor és csak akkor megoldása $(\mathsf{R})$-nek, ha a

$$\psi : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad \psi(x) \doteq y(x) - y_P(x)$$

függvény megoldása a

$$\psi'(x) + \big[2f(x)\, y_P(x) + g(x)\big]\psi(x) + f(x)\psi^2(x) = 0$$

$(\mathsf{B})$ differenciálegyenletnek.

**Bizonyítás.** Egyszerű.

# III. Egzisztencia-tételek Cauchy-feladatokra

## 1. Segédeszközök a funkcionálanalízisből

A lineáris tér, normált tér, metrikus tér, teljes metrikus tér fogalma már ismert az Analízis I-III.-ból.
Fontos lesz számunkra az alábbi két eredmény.

**1. tétel (Banach-féle fixponttétel).** Legyen $(X,d)$ teljes metrikus tér, $A : X \to X$ kontrakció, azaz olyan leképezés, hogy $\exists\ \alpha \in (0,1)$, hogy

$$d(Ax, Ay) \le \alpha d(x,y) \qquad (\forall\ x,y \in X)$$

teljesül, akkor $A$-nak pontosan egy fixpontja van, azaz pontosan egy $x \in X$ létezik, hogy $Ax = x$.

**Bizonyítás.** Legyen $x_0 \in X$ tetszőleges, $\langle x_n \rangle$ pedig

$$x_1 = Ax_0, \quad \dots, \quad x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0$$

szerint definiált sorozat $X$-ben.

- Először megmutatjuk, hogy $\langle x_n \rangle$ Cauchy-sorozat:
  Legyen $m \ge n$, ekkor

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(A^n x_0, A^m x_0) \le \alpha d(A^{n-1}x_0, A^{m-1}x_0) \le \\ &\dots \\ &\le \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \le \\ &\le \alpha^n \big\{ d(x_0,x_1) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \big\} \le \\ &\le \alpha^n d(x_0,x_1) \big\{ 1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-n-1} \big\} \le \\ &\le \alpha^n d(x_0,x_1) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \\ &= \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0,x_1) \ , \end{aligned}$$

  ami $\alpha^n \to 0$ miatt adja, hogy $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall\ m,n \ge n_0(\varepsilon) \ \Rightarrow\ d(x_n,x_m) < \varepsilon$ .

- $(X, d)$ teljessége miatt $\langle x_n \rangle$ konvergens, azaz $\exists\ x \in X$, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.
- Megmutatjuk, hogy $x$ fixpontja $A$-nak. Egy kontrakció nyilván folytonos ($d(Ax, Ax_0) \leq \alpha d(x, x_0)$ miatt), így

  $$Ax = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x\ ,$$

  tehát $x$ fixpontja $A$-nak.
- A fixpont egyértelműen meghatározott, mert ha $Ax = x$ és $Ay = y$ is teljesül, úgy

  $$d(x, y) = d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y)\ ,$$

  ami $\alpha < 1$ miatt csak úgy lehetséghes, ha $d(x, y) = 0$, azaz $x = y$.

**2. tétel.** Egy teljes metrikus tér bármely zárt altere is teljes metrikus tér.

Teljes metrikus térre fontos példa a $C_k[a, b]$ tér:

- ennek alaphalmaza: $C_k[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}^k \mid f \text{ folytonos}\}$;
- $C_k[a, b]$ lineáris tér a függvényekre értelmezett összeadásra és skalárral való szorzásra nézve;
- $C_k[a, b]$ normált tér az $\|f\|_0 \doteq \sup\limits_{x\in[a,b]} \{\|f(x)\|_{\mathbb{R}^k}\}$ szerint definiált normával (ami igen egyszerűen bizonyítható);
- $C_k[a, b]$ metrikus tér a $d(f, g) \doteq \|f - g\|_0$ szerint definiált (a $\|\ \|_0$ normából származtatott) metrikával.
- $C_k[a, b]$ ezen metrikával teljes metrikus tér.
  Legyen $\langle f_n \rangle$ ($f_n \in C_k[a, b]$) Cauchy-sorozat, akkor $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall\ n, m \geq n_0(\varepsilon)\ \Rightarrow\ \|f_n - f_m\|_0 < \varepsilon$, ami adja, hogy

  $$(*)\qquad \|f_n(x) - f_m(x)\|_{\mathbb{R}^k} \leq \|f_n - f_m\|_0 < \varepsilon \qquad (\forall\ x \in [a, b]),$$

  azaz az $\langle f_n \rangle$ függvénysorozat egyenletesen konvergens $[a, b]$-n (a függvénysorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritérium miatt), tehát $\exists\, f \in C_k[a,b]$, hogy $f_n \to f$ egyenletesen. Ugyanakkor (mert folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának határfüggvénye) az $f$ folytonos. Ekkor $(*)$-ból $\forall\, n \geq n_0(\varepsilon)$ és $x \in [a,b]$ esetén

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^k} \leq \varepsilon \ ,$$

illetve ebből

$$\|f_n - f\|_0 \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

következik, tehát $\langle f_n \rangle$ konvergál az $f \in C_k[a,b]$ elemhez a $C_k[a,b]$ metrikus térben, ami adja az állítást.

**Megjegyzés.** Ha $k = 1$, úgy $C_1[a,b]$-t egyszerűen $C[a,b]$-vel jelöljük és az $[a,b]$ feletti folytonos, valós értékű függvények terének nevezzük.

**Definíció.** Legyen $G_1 \subset \mathbb{R}^m$, $I = [a,b]$, $G = I \times G_1$, $f : G \to \mathbb{R}^n$. $f$ Lipschitz-feltételt teljesít $G$-n (az utolsó $m$ változójában), ha $\exists\, L > 0$, hogy $\forall\, (x, y_1), (x, y_2) \in G$-re

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\|_{\mathbb{R}^n} \leq L\|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^m} \ .$$

# 2. Egzisztencia és unicitiás tétel DER-KÉP-re

Igen fontos a DER-KÉP probléma következő átfogalmazása (visszavezetése integrálegyenlet-rendszerre):

**Lemma.** Az $y : I \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény akkor, és csak akkor megoldása az

(DER-KÉP) $\qquad y' = f(x,y) \ , \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$

problémának, ha folytonos megoldása az

(IER) $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

integrálegyenlet-rendszernek. (Itt $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény.)

**Bizonyítás.**

a) Ha $y : I \to \mathbb{R}^n$ megoldása (DER-KÉP)-nek, akkor

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad (x \in I).$$

$f$ és $y$ folytonossága adja, hogy $f(x, y(x))$ folytonos $I$-n, így létezik az

$$\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

integrál és

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \qquad (x \in I),$$

ahol $y(x_0) = y_0$, azaz teljesül (IER).

b) Ha $y : I \to \mathbb{R}^n$ folytonos megoldása (IER)-nek $I$-n, akkor $f(x, y(x))$ folytonossága miatt

$$\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

differenciálható és deriváltja $f(x, y(x))$, másrészt (IER) adja, hogy $y$ differenciálható és $y'(x) = f(x, y(x))$ $(x \in I)$, továbbá (IER) szerint $y(x_0) = x_0$ is igaz, ebből pedig következik, hogy $y$ megoldása (DER-KÉP)-nek.

**Megjegyzés.** A lemma miatt (DER-KÉP) megoldhatósága és a megoldás egyértelműsége (egzisztencia és unicitás) egyet jelent (IER) megoldhatóságával és a megoldás egyértelműségével.

**Tétel (Picard-Lindelöf egzisztencia és unicitás tétel).**
Legyen $G_1 \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, $I = [a, b] \subset \mathbb{R},\ D = I \times G_1,\ f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, hogy létezik $L > 0$, hogy

$$\|f(x, y_1) - f(x.y_2)\|_{\mathbb{R}^n} < L\|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^m} \qquad (\forall\ (x, y_1), (x, y_2) \in D),$$

azaz Lipschitz-tulajdonságú $D$-n. Legyen továbbá $x_0 \in I$ és $y_0 \in G_1$ rögzített. Akkor $\exists\, \alpha > 0$, hogy az

(DER-KÉP) $$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Cauchy-feladatnak az $I_1 = I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ intervallumon létezik megoldása és az egyértelmű.

**Bizonyítás.** A lemma szerint elegendő az (IER) integrálegyenlet-rendszer folytonos megoldásainak létezését és annak egyértelműségét bizonyítani.

a) A létezés bizonyítása:

- $G_1$ nyílt, így $\exists\, r > 0$, hogy $T = \{y \mid \|y - y_0\| \leq r\} \subset G_1$, és így az $I \times T \subset D$ teljesül és $I \times T$ zárt. Ekkor $f$ folytonossága miatt $\exists\, K > 0$, hogy $\|f\| < K$ $I \times T$-n.
- Legyen $\alpha = \min\left\{\frac{r}{K}, \frac{1}{L+1}\right\}$, $I_1 = I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.
- Tekintsük az

  $$X = C_n^* = \{\varphi \mid \varphi : I_1 \to T, \varphi \text{ folytonos}\}$$

  halmazt a

  $$d : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{x \in I_1} \{\|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\|\}$$

  metrikával. $(X, d)$ zárt altere a korábbiakban tekintett, $C_n(I_1)$ teljes metrikus térnek, így teljes metrikus tér.
- Értelmezzük $(X, d)$-n az $A$ leképezést

  $$(A\varphi)(x) \doteq y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt \qquad (x \in I_1)$$

  szerint. $A : X \to X$ típusú, mert $\psi \doteq A\varphi$ folytonos $I_1$-en (az integrálfüggvény ismert tulajdonsága miatt), továbbá

  $$\begin{aligned}\|\psi(x) - y_0\| &= \left\|\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt\right\| \leq \int_{x_0}^{x} \|f(t, \varphi(t))\|dt \leq \\ &\leq K\|x - x_0\| \leq K\alpha \leq r\end{aligned}$$

  miatt $\psi(I_1) \subset T$ is igaz, így $\psi = A\varphi \in X$.

– $A$ kontrakció, mert ha $\varphi_1, \varphi_2 \in X$, úgy

$$\begin{aligned}
\|(A\varphi_1)(x) - (A\varphi_2)(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^{x} [f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t))]dt \right\| \leq \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \|f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t))\| dt \leq \\
&\leq \int_{x_0}^{x} L d(\varphi_1,\varphi_2) dt \leq \\
&\leq L\|x - x_0\| d(\varphi_1,\varphi_2) \leq \\
&\leq L\,\alpha\, d(\varphi_1,\varphi_2) \leq \frac{L}{L+1} d(\varphi_1,\varphi_2)
\end{aligned}$$

(hiszen $L/(L+1) \in (0,1)$).

– Az 1. tétel (Banach-féle fixponttétel) miatt $A$-nak létezik fixpontja, azaz $\exists y \in X$ folytonos függvény, hogy $(Ay)(x) = y(x)$ $(\forall\ x \in I_1)$, vagyis

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt \qquad (x \in I_1)$$

teljesül, tehát létezik megoldása (IER)-nek, és így (DER-KÉP)-nek $I_1$-en.

b) A megoldás egyértelműségének bizonyítása:
A Banach-féle fixponttétel miatt a megoldás egyértemű is az $I_1$-en differenciálható függvények körében $I_1$-en.

**Megjegyzések.**

1) A tétel feltételei mellet a (DER-KÉP) megoldását (az $A$ leképezés fixpontját) az

$$y_0(x) \doteq y_0, \quad y_k(x) \doteq y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))dt \quad (k = 1, 2, \ldots; x \in I_1)$$

szerint definiált $\langle y_k \rangle$ függvénysorozat határfüggvénye adja.
Az eljárást Picard-féle szukcesszív approximációnak nevezzük.

2) $n = 1$ mellett az elsőrendű explicit differenciálegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatra vonatkozó Picard-féle egzisztencia és unicitás tételt kapjuk.

3) Egy példa: A

(KÉP) $$y' = xy, \qquad y(0) = 1$$

Cauchy-feladatnak megfelelő integrálegyenelet:

(IE) $$y(x) = 1 + \int_0^x ty(t)dt$$

Ekkor

$$y_0(x) = 1, \qquad y_1(x) = 1 + \int_0^x tdt = 1 + \frac{x^2}{2}, \dots$$

$$y_k(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k, \dots,$$

és $y_k(x) \to \exp(x^2/2)$ egyenletesen, így (KÉP) megoldása:

$$y(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

# 3. (L-DER-KÉP) megoldhatósága

Legyenek $g_{ij}$, $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ adott folytonos függvények, akkor

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x)y_j + \varphi_i(x), \qquad y_i(x_0) = y_{0i} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

egy lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó Cauchy-feladat, mely az

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{g}} = (g_{ij})_{n \times n}$$

jelöléssel az

(L-DER-KÉP) $$y' = \underline{\underline{g}}(x)y + \varphi(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

alakba is írható.
Ez ekvivalens az

(L-IER) $$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \big[\underline{\underline{g}}(t)\,y(t) + \varphi(t)\big]\,dt$$

integrálegyenlet-rendszerrel.
Legyen $D = I \times \mathbb{R}^n$, akkor az

$$f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n, \qquad f(x,y) \doteq \underline{\underline{g}}(x)y + \varphi(x)$$

folytonos függvényre $\forall\ (x,y^1),(x,y^2) \in D$ esetén

$$\big\|f(x,y^1) - f(x,y^2)\big\| = \big\|\underline{\underline{g}}(x)(y^1 - y^2)\big\| =$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x)(y_j^1 - y_j^2)\right]^2} \le nK\big\|y^1 - y^2\big\| = L\big\|y^1 - y^2\big\|$$

teljesül, azaz Lipschitz-tulajdonságú, így az (L-DER-KÉP) megoldható és a megoldás egyértelmű $I_1 \subset I$-n.

# 4. ($n$-KÉP) megoldhatósága

**Tétel (egzisztencia és unicitás tétel (n-KÉP)-re).**
Legyen $G_1 \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $D = I \times G_1$, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy $\exists\ L > 0$, hogy

$$\big|f(x,y^1) - f(x,y^2)\big| < L\big\|y^1 - y^2\big\| \qquad (\forall (x,y^1),(x,y^2) \in D),$$

azaz Lipschitz-tulajdonságú $D$-n. Legyen továbbá $x_0 \in I$, $y_0 \in G_1$ rögzített.
Akkor $\exists\ \alpha > 0$, hogy az

($n$-KÉP) $$y^{(n)} = f(x,y,\ldots,y^{(n-1)}), \qquad y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1}$$

$(i=0,\dots,n-1)$ Cauchy-feladatnak az $I_1 = I \cap [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ intervallumon létezik megoldása és az egyértelmű.

**Bizonyítás.** Az átviteli elv szerint ($n$-KÉP) ekvivalens az

$$(\triangle) \qquad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \qquad y_i(x_0) = y_{0i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Cauchy-feladattal, azaz $y : I_1 \to \mathbb{R}$ akkor, és csak akkor megoldása ($n$-KÉP)-nek, ha $(y, y', \dots, y^{(n-1)}) : I_1 \to \mathbb{R}^n$ megoldása a $(\triangle)$ (DER-KÉP)-nek, ahol

$$\underline{f} = (f_1, \dots, f_n), \qquad f_k(x,y) = y_{k+1}, \quad (k = 1, \dots, n-1), \qquad f_n = f.$$

Könnyen ellenőrízhető, hogy teljesülnek a Picard-Lindelöf-tétel feltételei, így a kapott (DER-KÉP)-nek (és így ($n$-KÉP)-nek) létezik megoldása és egyértelmű.

**Következmény (L-$n$-KÉP megoldhatósága).** Legyenek $a_1, \dots, a_n, b : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ rögzített. Akkor az

$$(\text{L-}n\text{-KÉP}) \qquad \begin{cases} y^{(n)} = a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y + b(x) \\ \quad y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \qquad (i = 0, \dots, n) \end{cases}$$

Cauchy-feladatnak egy és csak egy megoldása van $I$-n.

**Bizonyítás.** Most az (L-$n$-KÉP)-nek megfelelő (DER-KÉP)

$$y'(x) = \underline{\underline{A}}(x)y(x) + B(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

alakú, ahol

$$\underline{\underline{A}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & & & \dots & 1 \\ a_n(x) & & & \dots & a_1(x) \end{pmatrix} \qquad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

és ekkor alkalmazható tételünk.

# 5. Egzisztenciatétel DER-KÉP-re

**Tétel (Cauchy-Peano egzisztencia tétel).** Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, $(x_0, y_0) \in D$. Akkor az

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Cauchy-feladatnak létezik megoldása.
(De nem feltétlenül egyértelmű, lásd például az $y' = \sqrt{|y|}$ differenciálegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatot.)

**Bizonyítás.** Nem kell.

# IV. Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek

## 1. Az $n$-edrendű lineáris homogén differenciálegyenletek általános elmélete

**1. definíció.** Legyenek $a_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ folytonos függvények. A

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)} = 0 \tag{$\mathsf{H}_n\mathsf{D}$}$$

egyenletet $n$-edrendű lineáris homogén differenciálegyenletnek nevezzük.

Egyszerű számolással bizonyítható a következő tétel:

**1. tétel.** Ha az $y_1, \dots, y_k : I \to \mathbb{R}$ függvények megoldásai $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$-nek $I$-n, akkor $\forall\, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ esetén az

$$y = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i$$

függvény is megoldás $I$-n.

**2. definíció (lineáris függőség és függetlenség).**
Az $y_1, \dots, y_k : I \to \mathbb{R}$ függvények lineárisan függőek $I$-n, ha létezik $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ $(\sum\limits_{i=1}^{k} c_i^2 > 0)$ konstansrendszer, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} c_i y_i(x) = 0 \qquad (\forall x \in I). \tag{$*$}$$

$y_1, \dots, y_k : I \to \mathbb{R}$ lineárisan függetlenek, ha $(*)$ csak úgy teljesül, ha $c_i = 0$ $(i = 1, \dots, k)$.

**3. definíció.** Az $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ $n-1$-szer differenciálható függvények Wronski-determinánsa:

$$W = W(y_1, \dots, y_n) \doteq \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

**2. tétel (Liouville-formula).** Ha az $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ függvények megoldásai $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$-nek $I$-n és $x_0 \in I$ adott, akkor

$$W(x) = W(y_1(x), \dots, y_n(x)) = W(x_0) \exp \left[ -\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t) dt \right].$$

**Bizonyítás.** Könnyen belátható, hogy

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1' & \dots & y_n' \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x) y_1^{(n-i)} & \dots & -\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x) y_n^{(n-i)} \end{vmatrix} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-i)} & \dots & y_n^{(n-i)} \end{vmatrix} = -a_1(x) W(x) \qquad (x \in I).$$

Így $W$ az
$$y'(x) = -a_1(x)y(x), \qquad y(x_0) = W(x_0)$$
(1-KÉP) probléma egyértelműen létező
$$W(x) = W(x_0)\exp\left[-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt\right]$$
megoldása, és ezt kellett bizonyítani.

**1. következmény.** ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) egy $y_1, \dots, y_n$ megoldásrendszerének Wronski-determinánsa vagy $\equiv 0$, vagy sehol sem 0.

**4. definíció (alaprendszer).** Az $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ függvények ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) alaprendszerét alkotják, ha megoldásai annak és lineárisan függetlenek.

**3. tétel.** $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ akkor, és csak akkor alaprendszere ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek, ha $\forall\ y_i$ $(i = 1, \dots, n)$ megoldás $I$-n, és $W(x) \neq 0$.

**Bizonyítás.**

a) Ha $W(x) \neq 0$ $(x \in I)$ és $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ olyan, hogy
$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) = 0 \qquad (\forall x \in I)\ ,$$
akkor
$$(\square) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(j)}(x) = 0 \qquad (\forall x \in I, j = 0, \dots, n-1)$$
teljesül, ami egy lineáris egyenletrendszer $c_1, \dots, c_n$-re, melynek determinánsa éppen $W(x) \neq 0$ $(x \in I)$ $\Rightarrow$ $c_1 = \cdots = c_n = 0$ $\Rightarrow$ az $y_1, \dots, y_n$ megoldások lineárisan függetlenek $\Rightarrow$ $y_1, \dots, y_n$ alaprendszer.

b) Ha $y_1, \dots, y_n$ alaprendszere ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek és létezne $x_0 \in I$, hogy $W(x_0) = 0$, akkor léteznének $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ $(\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 > 0)$ konstansok, hogy
$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(j)}(x_0) = 0 \qquad (j = 1, \dots, n-1)$$

egyenletrendszer megoldásai.
Legyen $y$ ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) olyan megoldása $I$-n, melyre

$$y^{(j)}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(j)}(x_0) = 0 \qquad (j = 0, \ldots, n-1).$$

Az így kapott ($n$-KÉP)-nek csak egy megoldása van. De $y \equiv 0$ és $y = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i$ is megoldás, így

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) = 0 \qquad (\forall\ x \in I),$$

azaz $y_1, \ldots, y_n$-ek lineárisan függőek, ami ellentmondás.
Így $W(x) \neq 0$ $\forall$ $x \in I$.

**4. tétel ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$ általános megoldása).** Legyen $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) alaprendszere $I$-n, akkor ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) $\forall$ $y : I \to \mathbb{R}$ megoldása

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \qquad (x \in I)$$

alakú, ahol $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ konstansok.

**Bizonyítás.**
Ha $y_1, \ldots, y_n$ ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) alaprendszere, akkor $W(x_0) \neq 0$ $\forall$ $x_0 \in I$. Ha $y : I \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges megoldása ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek, akkor legyen $c_1, \ldots, c_n$ a

$$(\circ) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(j)}(x_0) = y^{(j)}(x_0) \qquad (j = 0, \ldots, n-1)$$

egyenletrendszer ($W(x_0) \neq 0$ miatt létező) megoldása.
Ekkor a

$$\psi(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \qquad (x \in I)$$

szerint definiált függvény olyan megoldása ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek $I$-n, melyre teljesülnek a

$$\psi^{(j)}(x_0) = y^{(j)}(x_0) \qquad (j = 0, \ldots, n-1)$$

kezdeti feltételek ($\circ$) miatt.
Így $\psi$ és $y$ ugyanazon ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-re vonatkozó ($n$-KÉP) megoldásai, ezért megegyeznek, azaz

$$y(x) = \psi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \qquad (x \in I),$$

amit bizonyítani kellett.

**Megjegyzések.**

1) Az általános megoldáshoz így elég az alaprendszert meghatározni.
2) Belátható (lásd Kósa 90. oldal), hogy alaprendszer mindig létezik.
3) Az alaprendszer meghatározására nincs általános módszer.

Fontos viszont az alábbi, D'Alembert-től származó fokszámcsökkentő eljárás:

**5. tétel.** Ha ismert ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) $m$ számú lineárisan független $y_1, \dots, y_m : I \to \mathbb{R}$ megoldása $I$-n, akkor ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) megoldásainak meghatározása visszavezethető egy $(n-m)$-edrendű lineáris homogén differenciálegyenlet megoldására.

**Bizonyítás.**
– Legyenek $y_1, \dots, y_m$ $(\neq 0)$ lineárisan független megoldásai ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek, míg $y : I \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges megoldás, akkor legyen

$$(\triangle) \qquad u \doteq \left(\frac{y}{y_1}\right)',$$

azaz

$$y(x) = y_1(x) \int u(x)dx \ .$$

Innen

$$y' = y_1' \int u(x)dx + y_1 u \ , \quad \dots \ , \quad y^{(n)} = y_1^{(n)} \int u(x)dx + \dots + y_1 u^{(n-1)}$$

következik. $y, y', \dots, y^{(n)}$ kapott értékeit ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-be helyettesítve:

$$\left[y_1^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y_1^{(n-i)}\right] \int u dx + y_1 u^{(n-1)} + \dots + A(x)u = 0$$

adódik, melyből – felhasználva, hogy $y_1 \neq 0$ megoldása $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$-nek – kapjuk, hogy $u$ teljesíti a

$$(\mathsf{H}_{(n-1)}\mathsf{D}) \qquad u^{(n-1)} + Q_1(x)u^{(n-2)} + \cdots + Q_{n-1}(x)u = 0$$

$(n-1)$-edrendű differenciálegyenletet és viszont: ha $u$ teljesíti $(\mathsf{H}_{(n-1)}\mathsf{D})$-t, akkor a $(\Delta)$-ben definiált y teljesíti $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$-t.

– Válasszuk most $(\Delta)$-ben $y$-nak rendre az $y_2, \ldots, y_m$ függvényeket, akkor a

$$(\Delta') \qquad u_k \doteq \left(\frac{y_k}{y_1}\right)' \qquad (k = 2, \ldots, m)$$

függvények megoldásai $(\mathsf{H}_{(n-1)}\mathsf{D})$-nek, továbbá lineárisan függetlenek, mert ellenkező esetben $\exists\ \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ $(\sum \alpha_i^2 > 0)$, hogy

$$\sum_{i=2}^{m} \alpha_i u_i(x) = 0 \qquad (x \in I),$$

ami adja, hogy

$$\sum_{i=2}^{m} \alpha_i \int u_i + \alpha_1 = 0 \qquad (x \in I).$$

Ebből, a $(\Delta')$-ből adódó

$$\frac{y_k}{y_1} = \int u_k(x)dx$$

egyenlőség miatt

$$\sum_{i=2}^{m} \alpha_i \frac{y_i}{y_1} + \alpha_1 = 0 \qquad (x \in I),$$

illetve

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i(x) = 0 \qquad (x \in I)$$

következne, ellentétben azzal, hogy $y_1, \ldots, y_m$ lineárisan függetlenek.

– Így $(\mathsf{H}_{(n-1)}\mathsf{D})$-nek ismert $m-1$ lineárisan független megoldása, ezek $u_2, \dots, u_m$. Ebből az előbbi eljárással meghatározható $(\mathsf{H}_{(n-2)}\mathsf{D})$ $m-2$ számú lineárisan független megoldása. Az eljárást folytatva egy $(\mathsf{H}_{(n-m)}\mathsf{D})$ $n-m$-edrendű differenciálegyenlethez jutunk.

Ha $(\mathsf{H}_{(n-m)}\mathsf{D})$ megoldásait meghatározzuk, akkor azokból $(\mathsf{H}_{(n-m+1)}\mathsf{D})$, $\dots$,$(\mathsf{H}_{(n-1)}\mathsf{D})$ és így $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$ megoldásai is adottak lesznek $(\Delta)$ szerint.

**2. következmény.** Legyen $y_1 : I \to \mathbb{R}$ $(y_1 \neq 0)$ megoldása az

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{$\mathsf{H}_2\mathsf{D}$}$$

differenciálegyenletnek. Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor, és csak akkor megoldása $(\mathsf{H}_2\mathsf{D})$-nek, ha az

$$u : I \to \mathbb{R} \qquad u \doteq \left(\frac{y}{y_1}\right)'$$

függvény megoldása az

$$u' + \left(a_1(x) + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right) u = 0 \tag{$\mathsf{H}_1\mathsf{D}$}$$

differenciálegyenletnek. Így $(\mathsf{H}_2\mathsf{D})$ általános megoldása

$$\begin{aligned} y &= cy_1 \int \exp\left[-\int \left(a_1(x) + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right) dx\right] dx = \\ &= cy_1 \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left[-\int a_1(x)dx\right] dx \ . \end{aligned}$$

**Bizonyítás.** Az előbbi eljárás azonnal adja $(\mathsf{H}_1\mathsf{D})$-t, ami egy szeparábilis differenciálegyenlet, az

$$\begin{aligned} u &= c \int \exp\left[-\int (a_1(x) + 2)dx\right] dx = \\ &= cy_1 \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left[-\int a_1(x)dx\right] dx \ . \end{aligned}$$

megoldással, ami $y = y_1 \int u\, dx$ szerint adja az állítást.

# 2. Konstansegyütthatós lineáris homogén differenciálegyenletek

**Definíció.** Ha ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-ben

$$a_i(x) = a_i \in \mathbb{R} \qquad (x \in I),$$

akkor a kapott

$$(\mathsf{KH}_n\mathsf{D}) \qquad y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(n-i)} = 0$$

egyenletet $n$-edrendű konstansegyütthatós lineáris homogén differenciálegyenletnek nevezzük.
($\mathsf{KH}_n\mathsf{D}$) karakterisztikus polinomja:

$$(\mathsf{KP}) \qquad P(\lambda) \doteq \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{n-i},$$

míg karakterisztikus egyenlete:

$$(\mathsf{KE}) \qquad \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{n-i} = 0.$$

**Tétel.** Ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ $p_1, \ldots, p_k$ ($\in \mathbb{N}$)-szeres (különböző) gyökei ($\mathsf{KH}_n\mathsf{D}$) karakterisztikus egyenletének, hogy $p_1 + \cdots + p_n = n$, akkor

$$(\mathsf{AR}) \qquad \begin{cases} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \ldots, & x^{p_1-1}e^{\lambda_1 x} \\ \vdots & & & \\ e^{\lambda_k x}, & xe^{\lambda_k x}, & \ldots, & x^{p_k-1}e^{\lambda_k x} \end{cases}$$

alaprendszere ($\mathsf{KH}_n\mathsf{D}$)-nek, ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ valósak.

Ha például $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ konjugált komplex gyökei ($\mathsf{KE}$)-nek, hogy $p_1 = p_2 = p$-szeresek, akkor ($\mathsf{AR}$) első két sora helyett

$$\begin{matrix} e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & \ldots, & x^{p-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, & \ldots, & x^{p-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{matrix}$$

szerepel. (Hasonló a helyzet a további komplex gyökök esetén is.)

**Bizonyítás.** (Csak a valós esetre)

a) $(\mathsf{AR})$ elemei megoldásai $(\mathsf{KH}_n\mathsf{D})$-nek:
– $e^{\lambda_i x}$ $(i=1,\ldots,k)$ esetén egyszerű helyettesítéssel győződhetünk meg erről.
– $xe^{\lambda_i x},\ldots,x^{p_i-1}e^{\lambda_i x}$ $(i=1,\ldots,k)$ esetén fel kell használni azt is, hogy ha $\lambda_i$ $p_i$-szeres gyöke $(\mathsf{KE})$-nek, akkor

$$P(\lambda_i)=P'(\lambda_i)=\cdots=P^{(p_i-1)}(\lambda_i)=0$$

teljesül.

b) $(\mathsf{AR})$ függvényei lineárisan függetlenek:
Tegyük fel, hogy lineárisan függőek. Ekkor léteznek $c_i$ $(\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2>0)$ konstansok, melyekkel képezve $(\mathsf{AR})$ függvényeinek lineáris kombinációját, az azonosan 0-nak adódik, ami adja, hogy

$$(1)\qquad e^{\lambda_1 x}P_{n_1}(x)+\cdots+e^{\lambda_m x}P_{n_m}(x)\equiv 0,$$

ahol $m\le k$, $P_{n_k}$ fokszáma $\le n_k$ és létezik $P_{n_k}$, hogy abban létezik 0-tól különböző együttható. Legyen ez $P_{n_1}=P_l$ $l$-edfokú. Szorozzuk meg (1)-et $e^{-\lambda_m x}$-szel, akkor

$$P_l(x)e^{(\lambda_1-\lambda_m)x}+\cdots+P_{n_{m-1}}(x)e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)x}+P_{n_m}(x)\equiv 0$$

következik, ahol $\lambda_i-\lambda_m\ne 0$ $(i=1,\ldots,m-1)$. Az utóbbi egyenletet $n_m+1$-szer differenciálva kapjuk, hogy

$$P_l^1(x)e^{(\lambda_1-\lambda_m)x}+\cdots+P_{n_{m-1}}^1(x)e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)x}\equiv 0\ ,$$

ahol $P_l^1(x)$ is $l$-edfokú, azaz $x^l$ együtthatója nem 0. Ebből $e^{\lambda_m x}$-szel való szorzás után

$$(2)\qquad P_l^1(x)e^{\lambda_1 x}+\cdots+P_{n_{m-1}}^1(x)e^{\lambda_{m-1}x}\equiv 0$$

adódik.
Az eljárást $m-1$-szer ismételve ( (2)-vel kezdve) kapjuk, hogy

$$P_l^{m-1}(x)e^{\lambda_1 x}\equiv 0\ ,$$

ahol $P_l^{m-1}$ is $l$-edfokú, ami viszont azt jelentené, hogy egy $l$-edfokú polinom azonosan nulla, ami lehetetlen.
Így $(\mathsf{AR})$ függvényei lineárisan függetlenek.

**Következmény.** Az

$$(\mathsf{KH_2D}) \qquad y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

karakterisztikus egyenlete a másodfokú

$$(\mathsf{KE_2}) \qquad \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

egyenlet, így ha ennek gyökei:

a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor $(\mathsf{KH_2D})$ általános megoldása

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x};$$

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \in \mathbb{R}$, akkor $(\mathsf{KH_2D})$ általános megoldása

$$y = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2\, x\, e^{\lambda_0 x};$$

c) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, akkor $(\mathsf{KH_2D})$ általános megoldása

$$y = \big[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\big] e^{\alpha x}.$$

## 3. $n$-edrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek

**Definíció.** Legyenek $a_i, b : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ adott folytonos függvények, akkor az

$$(\mathsf{IH_nD}) \qquad y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)} = b(x)$$

differenciálegyenletet $n$-edrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletnek nevezzük.

**1. tétel.** Legyen $y_p$ partikuláris megoldása $(\mathsf{IH_nD})$-nek. Az $y$ akkor, és csak akkor megoldása $(\mathsf{IH_nD})$-nek, ha az

$$y_H : I \to \mathbb{R}, \qquad y_H(x) = y(x) - y_p(x)$$

szerint definiált függvény megoldása az $(\mathsf{IH_nD})$-ből képzett $(\mathsf{H_nD})$-nek.

**Bizonyítás.**

a) Ha $y$ és $y_p$ megoldásai $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-nek, akkor az $y$-ra és $y_p$-re felírt $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-t kivonva egymásból

$$(y-y_p)^{(n)}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)(y-y_p)^{(n-i)}=0$$

adódik, azaz $y-y_p \doteq y_H$ valóban megoldása $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$-nek.

b) Ha $y_p$ megoldása $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-nek és $y_H$ megoldása $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$-nek, akkor a két egyenlet összeadása adja, hogy $y \doteq y_H+y_p$ is megoldása $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-nek.

**Következmény.** Ha $y_p$ $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$ egy partikuláris megoldása, $y_1,\dots,y_n$ pedig $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$ alaprendszere, akkor $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$ általános megoldása

$$y=\sum_{i=1}^{n}c_iy_i+y_p\ .$$

Hogyan határozható meg $y_p$?

**2. tétel (a konstansvariálás módszere $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-re).** Ha $y_1,\dots,y_n$ az $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-ből képzett $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$ alaprendszere és a $c_i : I\to\mathbb{R}$ $(i=1,\dots,n)$ függvények kielégítik a

$$(\mathsf{C})\quad \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i^{(j)}(x)=0\quad (j=0,\dots,n-2),\qquad \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)=b(x)$$

egyenletrendszert $I$-n, akkor

$$(\mathsf{P})\qquad y_p : I\to\mathbb{R},\qquad y_p(x)\doteq\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i(x)$$

megoldása $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-nek.

**Bizonyítás.** $(\mathsf{P})$-ből $(\mathsf{C})$ felhasználásával:

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= \sum_{i=1}^n c_i'(x)y_i(x) + \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i'(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i'(x)\\
&\ \vdots\\
y_p^{(n-1)}(x) &= \sum_{i=1}^n c_i'(x)y_i^{(n-2)}(x) + \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i^{(n-1)}(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i^{(n-1)}(x)\\
y_p^{(n)}(x) &= \sum_{i=1}^n c_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i^{(n)}(x) =\\
&= \sum_{i=1}^n c_i(x)\left[-\sum_{j=1}^n a_j(x)y_i^{(n-j)}(x)\right] + b(x) =\\
&= -\sum_{j=1}^n a_j(x)\left[\sum_{i=1}^n c_i(x)y_i^{(n-j)}(x)\right] + b(x) =\\
&= -\sum_{j=1}^n a_j(x)y_p^{(n-j)}(x) + b(x)\ ,
\end{aligned}$$

azaz $y_p$ teljesíti $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-t, amit bizonyítani kellett.

**Megjegyzések.**

1) $(\mathsf{C})$ $c_1',\dots,c_n'$-re egy inhomogén lineáris egyenletrendszer, melynek determinánsa a Wronszki-determináns, melyre $W(x)\neq 0$ ($I$-n). Így léteznek $\phi_i$ $(i=1,\dots,n)$ függvények, hogy

$$c_i'(x)=\phi_i(x) \qquad (x\in I,\ i=1,\dots,n),$$

amiből

$$c_i(x)=\int \phi_i(x)dx \qquad (i=1,\dots,n)$$

adja a $c_i$ függvényeket.

2) $(\mathsf{IH}_2\mathsf{D})$ esetén

$(\mathsf{IH}_2\mathsf{D})$ $$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=b(x),$$

és ha $y_1,\ y_2$ alaprendszer, akkor $(\mathsf{C})$

$(\mathsf{C}')$ $$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)=0\\ c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)=b(x)\end{cases}$$

alakú. Ebből pedig

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ b(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(y_1(x), y_2(x))} = -\frac{b(x)y_2(x)}{W(y_1(x), y_2(x))};$$

$$c_2'(x) = \frac{b(x)y_1(x)}{W(y_1(x), y_2(x))},$$

illetve

$$c_1(x) = \int -\frac{b(x)y_2(x)}{W(y_1(x), y_2(x))}dx; \qquad c_2(x) = \int \frac{b(x)y_1(x)}{W(y_1(x), y_2(x))}dx$$

következik. Továbbá ezen $c_1$ és $c_2$ függvényekkel a partikuláris megoldás

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \qquad (x \in I).$$

# 4. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

**1. definíció.** Legyenek $g_{ij}, \varphi_i : I \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ folytonos függvények. A

(LIHDER) $$y_i' + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x)y_j = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

illetve az $(y_1, \ldots, y_n)^\top \doteq \underline{y}$, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)^\top \doteq \underline{\varphi}$, $(g_{ij})_{n\times n} \doteq \underline{\underline{g}}$ jelölésekkel a

(LIHDER′) $$\underline{y}' + \underline{\underline{g}}(x)\underline{y} = \underline{\varphi}$$

egyenletrendszert lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszernek, míg az

(LHDER) $$\underline{y}' + \underline{\underline{g}}(x)\underline{y} = 0$$

egyenletrendszert lineáris homogén differenciálegyenlet-rendszernek nevezzük.

**Megjegyzések.**

1) (LIHDER), illetve (LHDER) megoldásainak meghatározása visszavezethető az $n$-edrendű lineáris differenciálegyenletek elméletére.

2) Ugyanakkor önálló elmélet is kidolgozható, mely szoros analógiát mutat az $n$-edrendű lineáris differenciálegyenletek elméletével. A következőkben kimondott tételek bizonyítása is hasonló, természetesen bizonyos módosításokkal (például más egzisztencia és unicitás tételt kell használni, módosul a Wronski-determináns fogalma is).

**1. tétel.** Ha $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_k$ megoldásai (LHDER)-nek, akkor

$$\underline{y} = c_1\underline{y}_1 + \cdots + c_k\underline{y}_k \qquad (c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R})$$

is az.

**2. tétel.** Ha $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ lineárisan független megoldásai (LHDER)-nek, akkor bármely $\underline{y}$ megoldásra létezik $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, hogy

$$\underline{y} = c_1\underline{y}_1 + \cdots + c_n\underline{y}_n.$$

**2. definíció.** Az (LHDER) $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ ($\underline{y}_1 = (y_{11}, \dots, y_{n1})^\top, \dots, \underline{y}_n = (y_{1n}, \dots, y_{nn})^\top$) lineárisan független megoldásaiból képzett

$$\psi = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & & \\ y_{n1} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

mátrixot alap-, vagy megoldásmátrixnak, míg a

$$W \doteq \det \psi$$

determinánst az $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ függvények Wronski-determinánsának nevezzük.

**3. tétel.** Ha $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n : I \to \mathbb{R}^n$ megoldásai (LHDER)-nek és $x_0 \in I$ rögzített, akkor

$$W(x) = W(x_0) \exp \left[ -\int\limits_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} g_{ii}(t)dt \right] \qquad (x \in I)$$

teljesül. Így $W(x) \equiv 0$, vagy $W(x) \neq 0$ $(x \in I)$.

**4. tétel.** $\psi$ akkor, és csak akkor alapmátrixa (LHDER)-nek, ha $W(x) \neq 0$ $(x \in I)$.

**Megjegyzés.** Itt is a fő feladat az alaprendszer meghatározása, melyre általános módszer nincs, de itt is használható D'Alambert redukciós módszere, melynek lényege: ha ismert (LHDER) egy megoldása, akkor az egyenletrendszer eggyel kevesebb egyenletből álló differenciálegyenletrendszerre vezethető vissza.

**5. tétel.** Ha $\underline{y}_p$ megoldása (LIHDER)-nek, úgy $\underline{y}$ akkor, és csak akkor megoldása, ha $\underline{y} - \underline{y}_p \doteq \underline{y}_H$ megoldása a (LIHDER)-ből képzett (LHDER)-nek. Azaz (LIHDER) általános megoldása $\underline{y} = \underline{y}_H + \underline{y}_p$ alakú.

**6. tétel (a konstansvariálás módszere).** Ha $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ (LHDER) alaprendszere és $c_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ olyan függvények, hogy teljesül a

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' \underline{y}_i = \underline{\varphi} \ ,$$

azaz a

$$\left\{ \begin{array}{c} c_1'(x) y_{11}(x) + \cdots + c_n'(x) y_{1n}(x) = \varphi_1(x) \\ \vdots \\ c_1'(x) y_{n1}(x) + \cdots + c_n'(x) y_{nn}(x) = \varphi_n(x) \end{array} \right\} \qquad (x \in [a,b])$$

egyenletrendszer, akkor

$$\underline{y}_p(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \underline{y}_i(x) \qquad (x \in [a,b])$$

megoldása (LIHDER)-nek.

**Megjegyzések.**

1) Ha (LHDER) konstansegyütthatós, azaz $\underline{\underline{g}} = A$ konstans mátrix, azaz $g_{ij}(x) = a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i,j = 1, \dots, n)$, akkor az

(KLHDER) $$\underline{y}' + A\underline{y} = 0$$

megoldásait az

$$\underline{y}(x) = ce^{\lambda x} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda x} \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

alakban keressük, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$.
Ekkor (KLHDER)-ből kapjuk, hogy

$$\underline{y}' = \lambda c e^{\lambda x} = -Ace^{\lambda x},$$

azaz $Ac = -\lambda c$, illetve $(A + \lambda E)c = 0$ egyenletrendszer teljesül. Másképpen fogalmazva $y = ce^{\lambda x}$ akkor, és csak akkor megoldása (KLHDER)-nek, ha

$$(*) \qquad (A + \lambda E)c = 0 \ ,$$

ahol $E$ az egységmátrix. Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer $c$-re.
Lineáris algebrából ismert, hogy $(*)$-nak akkor, és csak akkor létezik nemtriviális megoldása, ha

$$\det(A + \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + \lambda \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

azaz $\lambda$ megoldása a

$$P_n(\lambda) = \det(A + \lambda E) = 0$$

karakterisztikus egyenletnek, ami $n$-edfokú.
Ennek $n$ (valós vagy komplex) megoldása van, melyekhez meghatározhatók a $c \neq 0$ vektorok (ezek csak egy multiplikatív konstanstól eltekintve egyértelműek).
Ezután eljuthatunk (KLHDER) alaprendszeréhez is (ha $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mind valósak, akkor egyszerűbb az eset most is).

2) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert:

$$(\mathsf{IH}) \quad \begin{cases} y_1' - y_1 - y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 = x \end{cases} \qquad \left( n = 2,\ A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \ \varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right)$$

Tekintsük a homogén

$$
(\mathsf{H}) \qquad \begin{cases} y_1' - y_1 - y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 = 0 \end{cases}
$$

differenciálegyenlet-rendszert. Ennek megoldásait az

$$
(*) \qquad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda x} \\ c_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix}
$$

alakban keresve kapjuk, hogy $(*)$ akkor, és csak akkor megoldása (H)-nak, ha

$$
\begin{cases} (\lambda - 1)c_1 - c_2 = 0 \\ -c_1 + (\lambda - 1)c_2 = 0 \end{cases} .
$$

Ez egy lineáris homogén egyenletrendszer $c_1, c_2$-re, melynek akkor, és csak akkor létezik triviálistól különböző megoldása, ha

$$
\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0 ,
$$

azaz, ha $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad -c_1 - c_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = -c_1 \ (c_1 \text{ tetsz.}), \\
&\Rightarrow \quad \underline{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} . \\
\lambda_2 = 2 \quad &\Rightarrow \quad c_1 - c_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = c_1 , \\
&\Rightarrow \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_1 e^{2x} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Az alapmátrix:

$$
\psi(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2x} \\ -1 & e^{2x} \end{pmatrix} .
$$

A Wronski-determináns:

$$
W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2x} \\ -1 & e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{2x} \neq 0 .
$$

Így

$$
\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \qquad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}
$$

alaprendszere a homogén differenciálegyenlet-rendszernek, ami adja, hogy

$$\underline{y}_H(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_{1H}(x) = c_1 + c_2 e^{2x} \\ y_{2H}(x) = -c_1 + c_2 e^{2x} \end{cases}$$

a vizsgált (H) konstansegyütthatós lineáris homogén differenciálegyenlet általános megoldása.
Ekkor (a 6. tétel miatt)

$$\underline{y}_p(x) = c_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

megoldása (IH)-nak, ha

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot 1 + c_2'(x) \cdot e^{2x} = 0 \\ c_1'(x) \cdot (-1) + c_2'(x) \cdot e^{2x} = x \end{cases}$$

teljesül, melyből

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ x & e^{2x} \end{vmatrix}}{2e^{2x}} = -\frac{x}{2}; \qquad c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & x \end{vmatrix}}{2e^{2x}} = \frac{x}{2} e^{-2x} \ ,$$

illetve

$$\begin{cases} c_1(x) = -\dfrac{x^2}{4} \ , \\ c_2(x) = \displaystyle\int \frac{x}{2} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}\frac{x}{2} e^{-2x} - \int -\frac{1}{2}\frac{1}{2} e^{-2x} = \\ \qquad\quad = -\dfrac{x}{4} e^{-2x} - \dfrac{1}{8} e^{-2x}. \end{cases}$$

következik. Így (az 5. tétel miatt) (IH) általános megoldását az

$$\begin{aligned} \underline{y}(x) &= \underline{y}_H(x) + \underline{y}_p(x) = \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} + c_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alakban kapjuk, amiből következik, hogy

$$y_1(x) = c_1 + c_2e^{2x} - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{8}$$
$$y_2(x) = -c_1 + c_2e^{2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{8}.$$

3) Az előbbi példa differenciálegyenlet-rendszerének másik megoldása:
Az

(IH) $$\begin{cases} y_1' - y_1 - y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 = x \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszer első egyeneltét differenciálva (az egyenletek adják, hogy $y_1$ és $y_2$ is kétszer, sőt akárhányszor differenciálható)

$$y_1'' - y_1' - y_2' = 0$$

következik, melyet összehasonlítva a differenciálegyenlet-rendszerrel eliminálható $y_2'$ és $y_2$, és az

$$y_1'' - 2y_1' = x$$

másodrendű konstansegyütthatós lineáris inhomogén differenciálegyenlet adódik $y_1$-re.
A homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, ami akkor, és csak akkor teljesül, ha $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, amiből kapjuk, hogy

$$y_{1H}(x) = c_1 + c_2e^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Keressük $y_{1p}$-t

$$y_{1p}(x) = c_1(x) + c_2(x)e^{2x}$$

alakban, ez megoldás, ha $c_1'(x)$ és $c_2'(x)$ teljesíti a

$$\left.\begin{array}{r} c_1'(x)\cdot 1 + c_2'(x)\cdot e^{2x} = 0 \\ c_1'(x)\cdot 0 + c_2'(x)\cdot 2e^{2x} = x \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert, amiből következik, hogy

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ x & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{2x} \\ 0 & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = -\frac{xe^{2x}}{2e^{2x}} = -\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1(x) = -\frac{x^2}{4} \ ,$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix}}{2e^{2x}} = \frac{x}{2}e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad c_2(x) = \frac{x}{4}e^{-2x} - \frac{1}{8}e^{-2x} \ .$$

Így

$$y_1(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{8} + c_1 + c_2\, e^{2x}$$

és

$$y_2(x) = y_1'(x) - y_1(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{8} - c_1 + c_2\, e^{2x} \ .$$

# 5. Konstansegyütthatós lineáris differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval

**Definíció.** Az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltján az

$$F(s) \doteq \mathcal{L}\,[f(t)] \doteq \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (s \in \mathbb{R}_+)$$

szerint definiált $F \doteq \mathcal{L}\,[f] : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ függvényt értjük, ha az improprius integrál konvergens. Inverzét (ha létezik) $\mathcal{L}^{-1}$-gyel jelöljük.

A Laplace-transzformált tulajdonságai:

1) Ha $\exists\ \mathcal{L}\,[f(t)]$ és $\mathcal{L}\,[g(t)]$, akkor $\exists\ \mathcal{L}\,[a\, f(t) + b\, g(t)] =$ $= a\mathcal{L}\,[f(t)] + b\mathcal{L}\,[g(t)]$.

2) Ha $\exists\ \mathcal{L}\,[f(t)] = F(s)$, akkor $\exists\ \mathcal{L}\,[e^{at} f(t)] = F(s-a)$.

3) Ha $\exists\ \mathcal{L}\,[f(t)] = F(s)$, akkor $\exists\ \mathcal{L}\,[f(ct)] = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$.

4) Ha $f$ „elég jó", akkor

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n\mathcal{L}\left[f(t)\right] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - \\ - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \ ,$$

speciálisan: $\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s\mathcal{L}\left[f(t)\right] - f(0)$.

5) $\mathcal{L}\left[c\right] = \dfrac{c}{s}$; $\quad \mathcal{L}\left[\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right] = \dfrac{1}{s^n}$.

6) $\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \dfrac{1}{s-a}$, $\quad \mathcal{L}\left[\dfrac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}\right] = \dfrac{1}{(s-a)^n} \quad (a \in \mathbb{R})$.

7) $\mathcal{L}\left[\sin\omega t\right] = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ; $\quad \mathcal{L}\left[\cos\omega t\right] = \dfrac{s}{s^2+\omega^2} \quad (\omega \in \mathbb{R})$.

8) Egy folytonos függvény egyértelműen meghatározott Laplace-transzformáltja által.

Alkalmazás ($\mathsf{KIH}_n\mathsf{D}$) megoldására:
Képezzük

$$(\mathsf{KIH}_n\mathsf{D}) \qquad y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(n-i)} = b(t)$$

mindkét oldalának Laplace-transzformáltját, akkor $\mathcal{L}$ 1. tulajdonsága miatt

$$\mathcal{L}\left[y^{(n)}\right] + \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{L}\left[y^{(n-i)}\right] = \mathcal{L}\left[b(t)\right]$$

illetve 4. tulajdonsága miatt

$$\left(s^n + \sum_{i=1}^{n} a_i s^{n-i}\right)\mathcal{L}\left[y(t)\right] = y(0)\left[s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i s^{n-i-1}\right] + \\ + y'(0)\left[s^{n-2} + \sum_{i=1}^{n-2} a_i s^{n-i-2}\right] + \cdots + y^{(n-1)}(0) + \mathcal{L}\left[b(t)\right]$$

adódik, melyből $\mathcal{L}\left[y(t)\right]$ meghatározható. Ennek ismeretében pedig – a 8. tulajdonság miatt – valamint az 5-7. tulajdonságok felhasználásával meghatározható $y(t)$ is.

**Példa.**
Oldjuk meg a következő (KIH$_3$D)-re vonatkozó Cauchy-feladatot:

$$(*) \qquad y''' - 3y' + 2y = 3e^t\ , \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2\ .$$

Képezve a Laplace-transzformáltat

$$\mathcal{L}\left[y'''\right] - 3\mathcal{L}\left[y'\right] + 2\mathcal{L}\left[y\right] = 3\mathcal{L}\left[e^t\right]$$

adódik, illetve ebből (4. miatt)

$$s^3\mathcal{L}\left[y\right] - s - 2 - 3s\mathcal{L}\left[y\right] + 2\mathcal{L}\left[y\right] = \frac{3}{s-1}$$

következik, melyből egyszerű számolással (parciális törtekre bontással)

$$\mathcal{L}\left[y\right] = \frac{s+2+\frac{3}{s-1}}{(s-1)^2(s+2)} = -\frac{1}{9(s+2)} + \frac{1}{9(s-1)} + \frac{2}{3(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3}$$

adódik. Végül

$$y(t) = -\frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{1}{9}e^t + \frac{2}{3}te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$$

adja $(*)$ megoldását (8-at is felhasználva).

# V. PEREMFELADATOK, STABILITÁS

## 1. A peremfeladat fogalma

Általában, ha egy

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)$$

alakú differenciálegyenletnél azon feltételek, melyek esetén a megoldás egyértelműen jellemezhető, nem egy helyre vonatkoznak (mint a kezdetiérték-feladatnál), hanem azon $[a, b]$ intervallum két végpontjára, amelyen a megoldást keressük, akkor peremfeladatról beszélünk.
Az alkalmazások miatt különösen fontos a másodrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó peremfeladat definiálása.
Tekintsük az

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \qquad (x \in [a, b]) \tag{1}$$

differenciálegyenletet a következő peremfeltételek valamelyikével:

| | |
|---|---|
| elsőrendű peremfeltétel: | $y(a) = \eta_1, y(b) = \eta_2,$ |
| másodrendű peremfeltétel: | $y'(a) = \eta_1, y'(b) = \eta_2,$ |
| harmadrendű peremfeltétel: | $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \eta_1,$ <br> $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \eta_2.$ |

Nyilván az első-, és másodrendű peremfeltétel speciális esete a harmadrendű peremfeltételnek, melyet Sturm-féle peremfeltételnek nevezünk.
Szokás még $y(a) - y(b) = \eta_1, \quad y'(a) - y'(b) = \eta_2$ alakú peremfeltételt is tekinteni, melyet $\eta_1 = \eta_2 = 0$ esetén periódikus peremfeltételnek is neveznek.

Sturmtól származik a következő alakú peremfeladat:

$$\big(p(x)y'\big)' + q(x)y = b(x) \qquad (x \in [a, b]), \tag{S}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 p(a) y'(a) = \eta_1 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 p(b) y'(b) = \eta_2 \end{cases}, \tag{SPF}$$

ahol $p$ folytonosan differenciálható, $q, b$ folytonos függvények $[a,b]$-n, továbbá $p > 0$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$.
Megjegyezzük, hogy (1) a $p(x) = e^{\int a_1(x)dx}$ szorzással adja (S)-t. A $p(a), p(b)$ szorzók bevezetésének a peremfeltételekben praktikus okai vannak.
Ha $b(x) \equiv 0$, $\eta_1 = \eta_2 = 0$, akkor a fenti (S)+(SPF)-hez tartozó homogén peremfeladatot kapjuk.

**Megjegyzés.** A peremfeladat megoldásában alapvető feladat a homogén egyenlet alaprendszerének meghatározása. Megmutatható, hogy ha $y_1$ és $y_2$ a homogén differenciálegyenlet alaprendszere, akkor az inhomogén peremfeladatnak akkor, és csak akkor létezik egyértelmű megoldása, ha

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 p(a) y_1'(a) & \alpha_1 y_2(a) + \alpha_2 p(a) y_2'(a) \\ \beta_1 y_1(b) + \beta_2 p(b) y_1'(b) & \beta_1 y_2(b) + \beta_2 p(b) y_2'(b) \end{vmatrix} \neq 0 \; .$$

Ekkor a homogén peremfeladatnak csak triviális megoldása van.

Az általános elméletet nem vizsgáljuk.

## 2. Sturm-Liouville rendszerek

A következőkben egy szabad paramétert is tartalmazó peremfeladatot tekintünk.
Az

$$y'' + a_1(x)y' + \big[a_2(x) + \lambda\big]y = 0 \; , \qquad x \in [a,b]$$

másodrendű differenciálegyenlet, melyben egy $\lambda$ paraméter is van, a

$$p(x) \doteq \exp\left[\int a_1(t)dt\right], \qquad q(x) \doteq a_2(x)p(x), \qquad s(x) = p(x)$$

($x \in [a,b]$) jelölésekkel a vele ekvivalens

(S-L) $$\big(p(x)y'\big)' + [q(x) + \lambda s(x)]\, y = 0 \; , \qquad x \in [a,b]$$

alakba írható, melyet Sturm-Liouville egyenletnek is neveznek.
Feltesszük, hogy $\lambda \in \mathbb{R}$, $q$ és $s$ folytonos, $p$ folytonosan differenciálható

függvények az $I = [a, b]$ intervallumon.
(S-L) reguláris, ha $p$ és $s$ pozitívak, míg ha a jobboldalon 0-tól különböző függvény van, úgy inhomogén (S-L) egyenletről beszélünk.
(S-L)-t az

$$\text{(PF)} \qquad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 p(a) y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 p(b) y'(b) = 0 \end{cases}$$

peremfeltételek mellett vizsgáljuk, ahol $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2$ nem mind zérus valós konstansok.
(S-L)-t és (PF)-et együtt Sturm-Liouville rendszernek nevezzük, jelölése: (S-L-R).
Azon $\lambda$-kat, melyekre (S-L-R)-nek létezik 0-tól különböző megoldása sajátértékeknek, a hozzájuk tartozó megoldásokat pedig sajátfüggvényeknek nevezzük.

**Példa.** Tekintsük az

$$\text{(S-L-R)} \qquad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0 \end{cases} \qquad (0 \le x \le \pi)$$

speciális Sturm-Liouville rendszert.

a) Ha $\lambda \le 0$, úgy az alaprendszer $e^{\sqrt{|\lambda|}x},\ e^{-\sqrt{|\lambda|}x}$, és így az általános megoldás:

$$y = c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x},$$

de a peremfeltételek miatt $c_1 = c_2 = 0$, ezért $y \equiv 0$.

b) Ha $\lambda > 0$, akkor az alaprendszer $\cos\sqrt{\lambda}x,\ \sin\sqrt{\lambda}x$, és így az általános megoldás:

$$y = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

A peremfeltételek miatt:

$$\begin{aligned} &y(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = 0 &&\Rightarrow \quad A = 0\ , \\ &y'(\pi) = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0 &&\Rightarrow \quad B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0\ . \end{aligned}$$

Ha $B = 0$ lenne, úgy $y = 0$ adódna, ha $B \neq 0$, akkor $\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0$ miatt

$$\sqrt{\lambda}\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{2n+1}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \quad (n = 0, 1, 2\dots),$$

azaz az (S-L-R) sajátértékei a

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)^2}{4} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

valós számok, míg a hozzájuk tartozó sajátfüggvények

$$y_n(x) = \sin\frac{2n+1}{2}x \qquad (n = 0, 1, \dots).$$

**Megjegyzések.**

1) Ha (S-L)-ben $p(a) = p(b)$ és (PF) az $y(a) = y(b),\ y'(a) = y'(b)$ alakot ölti, akkor periódikus Sturm-Liouville rendszerről beszélünk.

2) Adott sajátértékhez több (lineárisan független) sajátfüggvény is tartozhat.

3) Vizsgálható a különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények ortogonalitása a $p$ súlyfüggvényre, ami azt jelenti, hogy ha például $\varphi_j$ és $\varphi_k$ különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények, akkor

$$\int_a^b \varphi_j(x)\varphi_k(x)p(x)dx = 0 \qquad (j \neq k).$$

   A példában $p = 1,\ [a, b] = [0, \pi]$, így azt kell megmutatni, hogy

$$\int_0^\pi \sin\frac{2i+1}{2}x \sin\frac{2j+1}{2}x = 0 \qquad (i, j = 0, 1, \dots;\ i \neq j).$$

4) Vizsgálható a sajátértékek elhelyezkedése is (pl. egy reguláris (S-L-R) sajátértékei $s(x) > 0$ esetén valósak).

5) Egy reguláris (S-L-R) sajátfüggvényei egy konstans szorzóig egyértelműen meghatározottak.

6) Egy reguláris (S-L-R) általános megoldása a sajátfüggvények segítségével az

$$y = \sum_i c_i y_i$$

   függvénysorral állítható elő (lásd Fourier-sorok).

# 3. Parciális differenciálegyenletek peremfeltételekkel

Legyen adott az $(0,0)$ és $(l,0)$ pontban rögzített húr, melynek $x$ pontja a $t$ időpillanatban az $u(x,t)$ magasságban van. A rezgést az

$$\text{(RHD)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

parciális differenciálegyenlet írja le, ahol $a = \sqrt{F/\mu}$ ($F$ a feszítőerő, $\mu$ az egységnyi hosszra eső tömeg.) A rögzítettséget a

$$\text{(P)} \qquad u(0,t) = 0 \qquad u(l,t) = 0$$

peremfeltételek fejezik ki.
A $t = 0$-ban a húr alakját egy $f$, sebességét egy $\varphi$ függvény írja le, azaz teljesülnek a

$$\text{(K)} \qquad u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = \varphi(x) \qquad (x \in [a,b])$$

kezdeti feltételek is.
Megoldandó tehát (RHD) a (P) perem-, illetve a (K) kezdeti feltételek mellett (ez egy hiperbólikus parciális differenciálegyenletre vonatkozó vegyes feladat).
Keressük (RHD) megoldását az

$$\text{(SZ)} \qquad u(x,t) = X(x)T(t) \qquad (x \in [0,l], t \in \mathbb{R}_+)$$

alakban. Ezt (RHD)-be helyettesítve

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

adódik, melyből következnek a

$$\text{(H}_2\text{D}_1\text{)} \qquad X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (x \in [0,l]),$$

$$\text{(H}_2\text{D}_2\text{)} \qquad T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}_+)$$

másodrendű homogén differenciálegyenletek.
(P) most az $X(0)T(t) = 0$, $X(l)T(t) = 0$ alakot ölti, amiből $u(x,t) \not\equiv 0$ miatt kapjuk ($\text{H}_2\text{D}_1$)-re a

$$\text{(P}_1\text{)} \qquad X(0) = 0, \qquad X(l) = 0$$

peremfeltételt.
Az előbb már láttuk, hogy $(\mathsf{H_2D_1})$ megoldása

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x \qquad (x \in [0,l]),$$

amiből $(\mathsf{P_1})$ miatt jön, hogy csak

$$\lambda_k = \frac{k^2 \cdot \pi^2}{l^2}$$

mellett van megoldás és ez $A = 0$ miatt

$$X_k(x) = B_k \sin\frac{k\pi}{l}x \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

$(\mathsf{H_2D_2})$-re pedig, adott $\lambda_k = (k^2\pi^2)/(l^2)$ esetén (azaz adott $X_k$-hoz) a

$$T_k(t) = C_k \cos a\frac{k\pi}{l}t + D_k \sin a\frac{k\pi}{l}t$$

megoldás következik. Így $u$-ra:

$$u_k(x,t) = \left[E_k \cos a\frac{k\pi}{l}t + F_k \sin a\frac{k\pi}{l}t\right]\sin\frac{k\pi}{l}x$$

adódik, mely teljesíti $(\mathsf{RHD})$-t és a $(\mathsf{P})$ peremfeltételeket.
Megmutatható, hogy

$$E_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx\ ,$$

$$F_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx$$

mellett az

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[E_k \cos a\frac{k\pi}{l}t + F_k \sin a\frac{k\pi}{l}t\right]\sin\frac{k\pi}{l}x$$

függvény megoldása $(\mathsf{RHD})$-nek és teljesíti a $(\mathsf{P})$ perem- és $(\mathsf{K})$ kezdeti feltételeket is.
Ez a megoldási módszer a Fourier-módszer (ami felhasználja a Fourier-sorok elméletét is).

# 4. Stabilitás

Legyen adott az $y' = y$ differenciálegyenlet és $y(t)$ az egyenlet $y(0) = \eta$, míg $z(t)$ a $z(0) = \eta + \varepsilon$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása. Ekkor

$$\int\limits_{\eta}^{y} \frac{1}{y}\,dy = \int\limits_{0}^{t} 1\,dt \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = \eta e^t \qquad\qquad (t \geq 0),$$

$$\int\limits_{\eta+\varepsilon}^{z} \frac{1}{y}\,dy = \int\limits_{0}^{t} 1\,dt \qquad \Rightarrow \qquad z(t) = (\eta+\varepsilon) e^t \qquad (t \geq 0)$$

adja, hogy

$$z(t) - y(t) = \varepsilon e^t \qquad (t \geq 0).$$

Az adott differenciálegyenletnél a változó kezdeti feltételekhez tartozó megoldások különbsége $\lim\limits_{t\to\infty} e^t = +\infty$ miatt $+\infty$-hez tart.
Ha most az $y' = -y$ differenciálegyenletet tekintjük, úgy az $y(0) = \eta$, illetve $z(0) = \eta + \varepsilon$ kezdeti feltételeket teljesítő $y(t)$, illetve $z(t)$ megoldások különbségére (az előbbivel azonos módon) kapjuk, hogy

$$z(t) - y(t) = \varepsilon e^{-t} \qquad (t \geq 0),$$

ami adja, hogy $\lim\limits_{t\to\infty} (z(t) - y(t)) = 0$, hiszen $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t} = 0$.

**Cél:** Megadni annak kritériumát, hogy egy adott differenciálegyenlet megoldása folytonosan függ a kezdeti feltételektől abban az értelemben, hogy $z(0)$ és $y(0)$ kis eltérése esetén az $|z(t) - y(t)|$ eltérés is kicsi a $t \geq 0$ intervallumon.
Az ilyen típusú problémák a differenciálegyenletek stabilitáselméletéhez tartoznak.

**1. definíció (stabilitás, aszimptotikus stabilitás).** Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ adott függvény, mely legalább az

$$S_\alpha = \big\{(t, \underline{y}) \mid t \geq 0,\ \|\underline{y} - \underline{x}(t)\| < \alpha\big\}$$

halmazon értelmezett és folytonos, ahol $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ az

$$\underline{y}' = f(t, \underline{y})$$

differenciálegyenlet megoldása a $0 \leq t < \infty$ intervallumon.
Az $\underline{x}(t)$ megoldást stabilnak nevezzük, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta$, melyre $\|\underline{y}_0 - \underline{x}(0)\| < \delta$ esetén az $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$ kezdeti feltételt teljesítő $\underline{y}$ megoldás minden $t \geq 0$-ra értelmezett és

$$\|\underline{y}(t) - \underline{x}(t)\| < \varepsilon \qquad \forall\ t \in [0, \infty)$$

teljesül. Az $\underline{x}(t)$ megoldást aszimptotikusan stabilnak nevezzük, ha stabil és $\lim\limits_{t \to \infty} \|\underline{y}(t) - \underline{x}(t)\| = 0$.
Egy $\underline{x}(t)$ megoldást instabilnak nevezünk, ha nem stabil.

**2. definíció (mátrix polinomja).** Legyen

$$P_n(x) \doteq a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egy valós polinom, $B = (B_{ij})$ egy $n \times n$-es mátrix, akkor $P_n(B)$ alatt a

$$P_n(B) \doteq a_0 E + a_1 B + \cdots + a_n B^n$$

mátrixot értjük és a $B$ mátrix polinomjának nevezzük.
Ha $B = At$ (ahol $A = (a_{ij})$ $n \times n$-es mátrix), akkor

$$P_n(At) \doteq a_0 E + a_1 At + \cdots + a_n A^n t^n$$

egy $t$-től függő mátrix.

**Megjegyzés.** $\dfrac{d}{dt} P_n(At) = A P_n'(At)$, ahol $P_n'(x)$ a $P_n(x)$ deriváltja.

**3. definíció (mátrix hatványsora).** Legyen

$$f(x) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (|x| < r)$$

adott hatványsor az $r$ konvergenciasugárral, akkor rendeljük hozzá a $B = (B_{ij})$ mátrixhoz az $f(B)$ mátrixot, hogy

$$\text{(MH)} \qquad f(B) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k \qquad \left( \|B\|_e \doteq \sqrt{\sum_{i,j} |B_{ij}|^2} < r \right).$$

Tekintsük a $C_k$ $n \times n$-es mátrixok $C = \sum_{k=0}^{\infty} C_k$ végtelen sorát. Ha $C_k = (c_{ij}^k)$ és $C = (c_{ij})$, úgy ez az egyenlőség a következő $n^2$ „darab" $c_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^k$ végtelen számsor rövidítése.

Azt mondjuk, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ mátrix sor konvergens, illetve abszolút konvergens, ha az $n^2$ „darab" $\sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^k$ számsor is ilyen tulajdonságú.

**Megjegyzések.**

1) $\|B\|_e$-t a $B$ mátrix euklideszi normájának nevezzük, melyre – a norma szokásos tulajdonságain túl – $\|AB\|_e \le \|A\|_e \, \|B\|_e$, $\|Ax\|_e \le \|A\|_e \, \|x\|_e$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ is teljesül.

2) Az (MH) hatványsor abszolút konvergens, ha $s = \|B\|_e < r$, mert akkor $\|B^2\|_e \le \|B\|_e^2 = s^2, \dots, \|B^k\|_e \le s^k, \dots$, ami adja az abszolút konvergenciát a majoráns kritérium miatt.

3) Az

$$f(At) \doteq a_0 E + a_1 At + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k t^k$$

$t$-től függő sor abszolút konvergens, ha $|t| < r/(\|A\|_e) = t_0$ és egyenletesen konvergens a $(-t_0, t_0)$ bármely zárt intervallumán, azaz az $n^2$ számú számsor mindegyike egyenletesen konvergens, továbbá $f(At)$ tagonként differenciálható és

$$\frac{d}{dt} f(At) = A f'(At) \ .$$

**Következmény.**

$$e^B = E + B + \frac{B^2}{2!} + \dots \ ,$$

továbbá $(e^{At})' = Ae^{At}$; $e^{B+C} = e^B e^C$ (ha $BC = CB$) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Ezek segítségével egy másik (a korábbitól eltérő) utat találhatunk a konstansegyütthatós lineáris homogén differenciálegyenlet-rendszerek alaprendszerének és a konstansegyütthatós lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszerek általános megoldásának meghatározására.

**1. tétel.** legyen $(A)_{n\times n}$ konstans mátrix, akkor a

(KLHDER) $$\underline{y}' = A\underline{y}$$

megoldása $[0,\infty)$-en $\underline{y}(0) = E$ mellett

(KLHDER-Mo) $$\underline{y}(x) = e^{Ax}.$$

Továbbá a

(KLIHDER-KÉP) $$\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{\varphi}\ , \qquad (\underline{y}(0) = \underline{y}_0)$$

megoldása:

(KLIHDER-KÉP-Mo) $$\underline{y}(x) = e^{Ax}\underline{y}_0 + \int\limits_0^x e^{A(x-t)}\underline{\varphi}(t)\,dt\ .$$

**Bizonyítás.**

a) $(e^{Ax})' = Ae^{Ax}$ adja az állítás első felét, és nyilván $\underline{y}(0) = E$ is igaz.

b) Ismeretes, hogy (lásd konstansvariálás módszere (LIHDER)-re) ha $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ (LHDER) alaprendszere, úgy (LIHDER) általános megoldása

(*) $$\underline{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{y}_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\underline{y}_i(x)\ ,$$

ahol $c_i'(x)$ teljesíti a

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij}(x)c_i'(x) = \varphi_j(x) \qquad (j = 1, \dots, n)$$

egyenletrendszert, mely az

$$y_H = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & & \\ y_{n1} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} (c_1'(x)\dots c_n'(x))^\top = \underline{c}'(x) \\ (\varphi_1(x)\dots\varphi_n(x))^\top = \underline{\varphi}(x) \end{cases}$$

jelölések mellett az

$$y_H(x)\,\underline{c}'(x) = \underline{\varphi}(x)$$

alakba írható, ahol $\det y_H \neq 0$ (mert $y_H$ alaprendszer), így $\exists\, y_H^{-1}$ és

$$\underline{c}'(x) = y_H^{-1}(x)\underline{\varphi}(x) \ .$$

Ebből

$$\underline{c}(x) = \underline{c}(0) + \int_0^x y_H^{-1}(t)\underline{\varphi}(t)\, dt \ .$$

Így $(*)$ a $\underline{c} = (c_1 \dots c_n)^\top$ jelölés mellett az

$$\underline{y}(x) = y_H(x)(\underline{c} + \underline{c}(0)) + \int_0^x y_H(x) y_H^{-1}(t)\underline{\varphi}(t)\, dt$$

alakot ölti, amiből $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$ miatt $\underline{y}_0 = y_H(0)(\underline{c} + \underline{c}(0))$, illetve

$$\underline{c} + \underline{c}(0) = y_H^{-1}(0)\underline{y}_0$$

következik. Így

$$\underline{y}(x) = y_H(x) y_H^{-1}(0)\underline{y}_0 + \int_0^x y_H(x) y_H^{-1}(t)\underline{\varphi}(t)\, dt$$

teljesül. Ebből pedig

$$y_H(x) = e^{Ax}, \qquad y_H^{-1}(x) = e^{-Ax}$$

felhasználásával jön az állítás.

**2. tétel.** Ha az $A$ mátrix $\lambda_i$ sajátértékei teljesítik a $\operatorname{Re} \lambda_i < \alpha$ egyenlőtlenségeket, akkor

$$\|e^{At}\| \leq c e^{\alpha t} \qquad (t \geq 0),$$

ahol $c > 0$ alkalmas konstans.

**3. tétel.** A

(KLHDER) $$\underline{y}' = A\underline{y}$$

minden megoldása akkor, és csak akkor tart $\underline{0}$-hoz $t \to \infty$ esetén, ha $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ az $A$ bármely $\lambda_i$ sajátértékére.

**4. tétel (stabilitási tétel (KLHDER)-re).** Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ $(p \le n)$ az $A$ mátrix sajátértékei és $\gamma = \max\{\operatorname{Re}\lambda_i\}$. Akkor az $\underline{x}(t) \equiv \underline{0}$ triviális megoldása (KLHDER)-nek

- $\gamma < 0$-ra aszimptótikusan stabil,
- $\gamma > 0$-ra instabil,
- $\gamma = 0$ esetén nem aszimptótikusan stabil (de lehet stabil vagy instabil is).

**Gronwall-lemma.** A $\phi : [0,a] \to \mathbb{R}$ függvény legyen folytonos és teljesüljön, hogy

$$\phi(t) \le \alpha + \beta \int_0^t \phi(\tau)\, d\tau \qquad \forall\, t \in [0,a], \beta > 0 \ .$$

Akkor

$$\phi(t) \le \alpha e^{\beta t} \qquad (t \in [0,a]) \ .$$

**Bizonyítás.** Nem kell.

**5. tétel (általános stabilitási tétel).** A $g(t,\underline{x})$ függvény legyen értelmezett $t \ge 0$, $\|\underline{x}\| \le \alpha$ $(\alpha > 0)$ esetén, folytonos és

$$(*) \qquad \lim_{\|\underline{x}\| \to 0} \frac{\|g(t,\underline{x})\|}{\|\underline{x}\|} = 0$$

egyenletesen $t \ge 0$-ra és $g(t,\underline{0}) = \underline{0}$. Az $A$ mátrix legyen konstans és olyan, hogy $A$ $\forall\ \lambda_i$ sajátértékére $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$. Akkor a

$$(**) \qquad \underline{y}' = A\underline{y} + g(t,\underline{y})$$

differenciálegyenlet $\underline{x}(t) \equiv \underline{0}$ megoldása aszimptótikusan stabil.

**Bizonyítás.** A feltételek és a 2. tétel miatt léteznek $c > 1$ és $\beta > 0$ konstansok, hogy $\operatorname{Re}\lambda_i < -\beta$ és

$$\left\| e^{At} \right\| \le c e^{-\beta t} \qquad (t \ge 0).$$

Másrészt $(*)$ miatt $\exists\ \delta,\ 0 < \delta < \alpha$, hogy

$$(***) \qquad \|g(t,\underline{x})\| \leq \frac{\beta}{2c}\|\underline{x}\| \qquad (\|\underline{x}\| \leq \delta, t \geq 0).$$

Megmutatjuk, hogy

$$(\Rightarrow) \qquad \|\underline{y}(0)\| \leq \varepsilon < \frac{\delta}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \|\underline{y}(t)\| \leq c\varepsilon e^{-\frac{\beta t}{2}}\ .$$

Az 1. tétel szerint $(**)$ megoldása (mivel $\varphi(s) = g(s,\underline{y}(s))$) teljesíti az

$$\underline{y}(t) = e^{At}\underline{y}(0) + \int\limits_0^t e^{A(t-s)}g(s,\underline{y}(s))\,ds$$

integrálegyenletet, így $(***)$ miatt a

$$(****) \qquad \|\underline{y}(t)\| \leq \|\underline{y}(0)\|ce^{-\beta t} + \int\limits_0^t ce^{-\beta(t-s)}\frac{\beta}{2c}\|\underline{y}(s)\|\,ds$$

egyenlőtlenség teljesül, ha $\|\underline{y}\| \leq \delta$.
Legyen $\underline{y}(t)$ olyan megoldása $(**)$-nak, hogy $\|\underline{y}_0\| < \varepsilon$ és legyen $\phi(t) = \|\underline{y}(t)\|e^{\beta t}$. Ekkor a $(****)$ egyenlőtlenség adja, hogy

$$\phi(t) \leq c\varepsilon + \frac{\beta}{2}\int\limits_0^t \phi(s)\,ds \qquad (\text{ha } \|\underline{y}\| \leq \delta),$$

ami a Gronwall-lemma miatt adja, hogy

$$\phi(t) \leq c\varepsilon e^{\frac{\beta t}{2}},$$

vagyis

$$(\circ) \qquad \|\underline{y}(t)\| \leq c\varepsilon e^{-\frac{\beta t}{2}} < \delta\ .$$

Ebből látható, hogy $\|\underline{y}(t)\|$ $\delta$-t pozitív $t$-re nem veszi fel és így $(\circ)$ teljesül, ami adja $(\Rightarrow)$ fennállását is.
$\underline{y}(t)$ a $g$ függvény értelmezési tartományának határáig, így $(\circ)$ miatt az egész $0 \leq t < \infty$ intervallumra folytatható.
Így

$$0 \leq \lim_{t\to\infty}\|\underline{y}(t) - \underline{x}(t)\| = \lim_{t\to\infty}\|\underline{y}(t)\| \leq c\varepsilon \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{\beta t}{2}} = 0$$

adja, hogy $\underline{x}(t) \equiv \underline{0}$ aszimptótikusan stabil.

# VI. Variációszámítás

## 1. Alapfogalmak, alapfeladatok

A variációszámítás általánosabb függvénykapcsolatokra (funkcionálokra) vizsgál szélsőérték-probémákat.

**1. definíció.** Legyen $M$ a valós függvények egy osztálya. Egy $\Im : M \to \mathbb{R}$ függvényt funkcionálnak nevezünk.

**Megjegyzések.**

1) $M$ lehet például:
   $C^0[a,b]$, az $[a,b]$ felett értelmezett folytonos függvények halmaza.
   $C^1[a,b]$, az $[a,b]$ felett értelmezett folytonosan differenciálható függvények halmaza.
   $C^2[a,b]$, az $[a,b]$ felett értelmezett kétszer folytonosan differenciálható függvények halmaza.

2) $C^0[a,b]$, $C^1[a,b]$, $C^2[a,b]$ is lineáris terek (a függvények körében értelmezett összeadásra és skalárral való szorzásra nézve). Másrészt értelmezhető bennük norma, illetve ebből távolság is.
   Például $C^0[a,b]$-ben az $y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények távolsága:
   $$\varrho_0(y_1, y_2) \doteq \max_{x \in [a,b]} |y_1(x) - y_2(x)|$$
   szerint értelmezhető. $C^1[a,b]$-ben pedig
   $$\varrho_1 \doteq \max\{\varrho_0(y_1, y_2), \varrho_0(y_1', y_2')\}$$
   szerint is.

3) Általánosabban lineáris normált tér felett értelmezett függvényekkel (funkcionálokkal), illetve azokra tekintett szélsőérték-problémákkal is foglalkozhatnánk.

**2. definíció.** Az $\Im : M \to \mathbb{R}$ funkcionálnak az $y_0 \in M$ függvényen abszolút minimuma (maximuma) van, ha $\forall\ y \neq y_0$-ra $(y \in M)$
$$\Im(y(x)) > \Im(y_0(x)) \qquad \big(\Im(y(x)) < \Im(y_0(x))\big)$$
teljesül.

**3. definíció.** Az $\Im : C^1[a,b] \to \mathbb{R}$ funkcionálnak az $y_0 \in C^1[a,b]$ függvényen relatív erős (illetve relatív gyenge) minimuma van, ha $\exists\, \varepsilon > 0$, hogy

$$\Im(y(x)) > \Im(y_0(x)) \qquad (x \in [a,b])$$

teljesül az $y_0$ függvény $\varepsilon$-sugarú $\varrho_0$ (illetve $\varrho_1$) környezetébe eső $\forall\, y \in C^1[a,b]$ $(y \neq y_0)$ függvényre. (A maximum ugyanígy értelmezhető.)

**Alapfeladatok:**

1) A sík adott $P_1(a,A)$, $P_2(b,B)$ pontjait összekötő síkgörbék közül határozzuk meg azokat, melyeket az $x$-tengely körül megforgatva a legkisebb felszínű forgásfelület adódik.

   Keressük a megoldást először, amikor a görbe az

   $$\big\{(x, y(x)) \;\big|\; y \in C^1[a,b],\ x \in [a,b]\big\}$$

   halmaz, azaz egy $y \in C^1[a,b]$ függvény gráfja, hogy

   (1) $$y(a) = A\ , \qquad y(b) = B$$

   is teljesül.
   Ismeretes, hogy az (1)-et teljesítő $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(y \in C^1[a,b])$ függvény $x$-tengely körüli megforgatásával keletkezett forgásfelület felszínét az $y$ függvényében az

   (FF) $$\Im(y(x)) \doteq 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$$

   szerint definiált $\Im : C^1[a,b] \to \mathbb{R}$ funkcionál adja meg.
   Az 1. alapfeladat tehát: Az (FF) szerint definiált funkcionál minimumát adó, (1)-et is teljesítő $y \in C^1[a,b]$ függvények meghatározása.
   Az 1. alapfeladat általánosítása, amikor egy

   (2) $$\Im(y(x)) \doteq \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx$$

szerint értelmezett $\mathfrak{I} : C^1[a,b] \to \mathbb{R}$ funkcionál minimumát adó, (1)-et is teljesítő, $y \in C^1[a,b]$ függvényt keresünk, ahol az alapfüggvénynek is nevezett $F$ függvény elég jó függvény.
Ez az általános síkbeli nemparaméteres probléma.

Kereshetjük a minimális forgásfelületet adó görbéket az általánosabb,

$$g(t) = (x(t), y(t)) \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

alakban is, ahol $g \in C^1[\alpha, \beta]$ és

$$x(\alpha) = 0, \quad x(\beta) = b, \qquad y(\alpha) = A, \quad y(\beta) = B \tag{3}$$

is teljesül.
Ekkor (ahogy ez szintén ismeretes) az

$$\mathfrak{I}(x(t), y(t)) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt \tag{4}$$

szerint definiált funkcionál minimumát adó $g$ függvényeket kell meghatározni, ez a 2. alapfeladat. Ennek általánosítása, ha egy

$$\mathfrak{I}(x(t), y(t)) \doteq \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t), y(t), x'(t), y'(t))\, dt \tag{5}$$

szerint definiált funkcionál minimumát szolgáltató, (3)-at is teljesítő $g$ függvényeket kell meghatározni, adott $F$ elég jó alapfüggvény esetén.
Ez egy síkbeli paraméteres probléma.

2) Vizsgálhatók az úgynevezett térbeli (paraméteres, vagy nemparaméteres) problémák is. Ilyenkor például (nemparaméteres esetben) egy

$$\mathfrak{I}(\underline{y}(x)) = \mathfrak{I}(y_1(x), \dots, y_n(x)) \doteq$$
$$\doteq \int_{a}^{b} F(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x))\, dx$$

szerint értelmezett funkcionál szélsőértékét (mondjuk minimumát) adó függvényeket keressük ($y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ típusú és $y \in C^1[a,b]$, illetve $y(a) = A,\ y(b) = B$).

3) Vizsgálhatók feltételes szélsőérték-problémák is funkcionálokra. Például az úgynevezett Lagrange-feladat: határozzuk meg egy felület két adott pontját összekötő görbék közül a minimális ívhosszúságúakat.

# 2. Segédtételek

**1. lemma (paraméteres integrál differenciálhatósága).** Legyen $F : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos és második változójában folytonosan parciálisan differenciálható függvény. Akkor a

$$\phi(x_2) \doteq \int_a^b F(\tau, x_2)\, d\tau \ , \qquad x_2 \in [c,d]$$

szerint értelmezett $\phi : [c,d] \to \mathbb{R}$ függvény ($F$ paraméteres integrálja) differenciálható és

$$\phi'(x_2) = \int_a^b F_{x_2}(\tau, x_2)\, d\tau \qquad x_2 \in [c,d].$$

**Bizonyítás.** Lásd Analízis II., I/7 fejezet tétele $n = 1$ mellett ($f(x,t) \to F(\tau, x_2)$ átírással).

**2. lemma (Lagrange).** Ha az $m : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, hogy bármely $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\ h \in C^2[a,b]$ és $h(a) = h(b) = 0$-t teljesítő függvényre

$$\int_b^a m(x)\, h(x)\, dx = 0 \ ,$$

akkor $m(x) \equiv 0\ \ [a,b]$-n.

**Bizonyítás.** Lásd Kósa: Differenciálegyenletek (jegyzet), 133. oldal.

# 3. Funkcionálok variációi

Ismeretesek a következők:

Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in D$-beli $e \subset \mathbb{R}^n$ iránymenti deriváltja

$$D_e f(x_0) \doteq \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\,e) - f(x_0)}{t}$$

(ha a határérték létezik).
Továbbá, ha $\exists\ f'(x_0)$, akkor

- $d\,f(x, x_0) \doteq f'(x_0)(x - x_0)$ az $f$ első differenciálja;
- $\forall$ $e$-re $\exists$ $D_e f(x_0) = f'(x_0) \cdot e$.

Mivel $x_0$ belső pontja a $D$ (nyílt) halmaznak, így $\exists\ \delta > 0$, hogy a

$$\varphi(t) \doteq f(x_0 + t(x - x_0)), \qquad |t| < \delta$$

szerint definiálható a $\varphi : K(0, \delta) \to \mathbb{R}$ valós függvény, melyre az előbbiek szerint

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} = \\ &= D_{(x - x_0)} f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) = d\,f(x, x_0) \end{aligned}$$

teljesül, ha $\exists\ f'(x_0)$, azaz $f$ első differenciálja $\varphi'(0)$.
A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele és az előbbiek adják, hogy ha $f$-nek lokális szélsőértéke van $x_0$-ban és $\exists f'(x_0)$, akkor $\varphi'(0) = 0$. Ha $\exists\ f''$, akkor $\exists\ \varphi''(0) = d^2 f(x, x_0)$, azaz $f$ második differenciálja éppen $\varphi''$. Miután pedig egy $f$ többváltozós függvény lokális szélsőértékeinek meghatározásában az első- és második differenciálnak (azaz $\varphi'(0)$ és $\varphi''(0)$-nak) van alapvető szerepe, így természetes, hogy funkcionálokra is bevezessük ezen fogalmak analógiáit, az első és második variációt.

**Definíció.** Legyen $F$ kétszer folytonosan differenciálható a $D \subset [a, b] \times \mathbb{R}^2$ nyílt halmazon, $\mathfrak{I}$ pedig

$$(*) \qquad \mathfrak{I}(y(x)) \doteq \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

($y \in C^1[a,b]$, $y(a) = A$, $y(b) = B$) szerint értelmezett funkcionál $C^1[a,b]$-n. Legyen továbbá $\eta \in C^2[a,b]$, hogy $\eta(a) = \eta(b) = 0$, míg $\delta > 0$ olyan, hogy ha adott $y \in C^1[a,b]$-re $(x, y(x), y'(x)) \in D$, akkor $|t| < \delta$ esetén az $\tilde{y}(x) = y(x) + t\eta(x)$ szerint definiált $\tilde{y}$ függvényre $(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) \in D$ (és $\tilde{y}(a) = A$, $\tilde{y}(b) = B$) teljesül.
Ekkor a

$$(\circ) \quad \varphi(t) \doteq \Im(y(x) + t\eta(x)) \doteq \int_a^b F(x, y(x) + t\eta(x), y'(x) + t\eta'(x))dx$$

($|t| < \delta$) szerint értelmezett (kétszer differenciálható) $\varphi$ függvényre létező $\varphi'(0)$ és $\varphi''(0)$ értékeket a $(*)$ szerint értelmezett $\Im$ funkcionál első, illetve második variációjának nevezzük és rendre $\delta\Im$, illetve $\delta^2\Im$-vel jelöljük.

**Tétel.** Ha a definíció feltételei mellett $\Im$ az $y$ függvényen lokális szélsőértéket vesz fel, akkor $\delta\Im = 0$. (A lokális minmum szükséges feltétele miatt.)

**Bizonyítás.** Ha a $(*)$ szerint értelmezett $\Im$ funkcionálnak $y$-ban lokális minimuma van, akkor $\exists\ r > 0$, hogy

$$\Im(y) \leq \Im(\psi) \qquad \forall\ \psi \in C^1[a,b],\ \psi(a) = A,\ \psi(b) = B$$

esetén, melyre $\varrho_1(y, \psi) < r$. Mivel

$$\varrho_1(y, y + t\eta) = |t| \sup_{x \in [a,b]} \left\{|\eta(x)|, |\eta'(x)|\right\},$$

így $\exists\ r_0 > 0$, hogy $\varrho_1(y, y + t\eta) < r$, ha $|t| < r_0$, azaz $\Im(y) \leq \Im(y + t\eta)$, ha $|t| < r_0$, ami $\varphi$ 0-beli definíciója miatt adja, hogy $\varphi(0) < \varphi(t)\ \forall\ |t| < r_0$, azaz $\varphi$-nek 0-ban lokális szélsőértéke van. Másrészt $\exists\ \varphi'(0)$ (az 1. lemma miatt), így $\delta\Im \doteq \varphi'(0) = 0$, amit bizonyítani kellett.

# 4. Az Euler-Lagrange differenciálegyenlet

**Tétel (a lokális szélsőérték egy szükséges feltétele).**
Legyen $F : D \subset [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható

függvény, $\Im$ $(*)$ szerint értelmezett funkcionál $C^1[a,b]$-n. Ha $\Im$-nek $y$-ban ($y \in C^1[a,b]$, $y(a) = A$, $y(b) = B$) lokális extrémuma van, akkor $y$-ra $[a,b]$-n teljesül az

$$\text{(E-L)} \qquad F_y\big(x, y(x), y'(x)\big) - \frac{d}{dx}\big[F_{y'}(x, y(x), y'(x))\big] = 0$$

Euler-Lagrange differenciálegyenlet.

**Bizonyítás.** Az adott feltételek mellett, a $\varphi$ definíciója miatt $\exists\ \varphi'(0)$, melyet az 1. lemma és a láncszabály miatt

$$\varphi'(0) = \int_a^b \big[F_y(x, y(x), y'(x))\eta(x) + F_{y'}(x, y(x), y'(x))\eta'(x)\big]\,dx$$

szerint kapunk.
Ugyanakkor a parciális integrálás tétele szerint

$$\int_a^b F_{y'}(x, y(x), y'(x))\eta'(x)dx = \big[F_{y'}(x, y(x), y'(x))\eta(x)\big]_a^b -$$

$$- \int_a^b \eta(x)\frac{d}{dx}\big[F_{y'}(x, y(x), y'(x))\big]dx =$$

$$= - \int_a^b \eta(x)\frac{d}{dx}\big[F_{y'}(x, y(x), y'(x))\big]dx.$$

Ezt $\varphi'(0)$ előbbi alakjába helyettesítve:

$$\varphi'(0) = \int_a^b \Big\{F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}\big[F'_y(x, y(x), y'(x))\big]\Big\}\,\eta(x)\,dx$$

adódik. Az előző tétel miatt $\varphi'(0) = 0$ és akkor a Lagrange lemma adja a tétel állítását.

**Megjegyzések.**

1) Ha a tétel feltételei mellett $F$-re még az is teljesül, hogy

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \neq 0 \qquad \forall\, x \in [a,b],$$

akkor $\exists\, y''$ és folytonos.

2) Ha pedig $y \in C^2[a,b]$ is teljesül, akkor (E-L)-ben elvégezve a differenciálást

$$F_y - \left[F_{y'x} + F_{y'y}y' + F_{y'y'}y''\right] = 0\ ,$$

illetve átrendezéssel

(E-L$'$) $$y''F_{y'y'} + y'F_{y'y} + F_{y'x} - F_y = 0$$

adódik.

3) Speciális típusú alapfüggvények:
– Ha $F$ nem függ $x$-től és $F_{y'y'} \neq 0$, úgy ha $y$ megoldása (E-L)-nek, akkor $\exists\, c \in \mathbb{R}$, hogy

(1) $$F - y'F_{y'} = c.$$

**Bizonyítás.** (E-L$'$) ebben az esetben az

(E-L$''$) $$y''F_{y'y'} + y'F_{y'y} - F_y = 0$$

alakot ölti. Másrészt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[F - y'F_{y'}\right] &= F_y y' + F_{y'}y' + F_{y'}y'' - \\ &- y''F_{y'} - y'F_{y'y}y' - y'F_{y'y'}y'' = \\ &= y'\left[F_y - y'F_{y'y} - y''F_{y'y'}\right] = 0\ ,\end{aligned}$$

ami adja az állítást.

– Ha $F$ nem függ $y$-tól, úgy $y$ akkor és csak akkor megoldása (E-L)-nek, ha $\exists\, c \in \mathbb{R}$, hogy

(2) $$F_{y'}(x, y'(x)) = c \qquad (x \in [a,b]).$$

**Bizonyítás.** Ekkor (E-L) adja, hogy

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y'(x)) = 0,$$

ami viszont akkor, és csak akkor teljesül, ha (2) fennáll.

– Ha $F$ nem függ $y'$-től, úgy $y$ akkor, és csak akkor megoldása (E-L)-nek, ha

$$F_y(x, y(x)) = 0 \qquad (x \in [a, b]) \tag{3}$$

teljesül.

**Bizonyítás.** Ekkor (E-L) a (3) egyenlettel ekvivalens.

# 5. Az 1. alapfeladat megoldása

Az

$$\mathfrak{I}(y(x)) \doteq 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}dx, \qquad y \in C^2[a, b],$$

$$y(a) = A, \qquad y(b) = B$$

funkcionál minimumát adó függvény meghatározása volt a feladat.

Így

$$F(y(x), y'(x)) = y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)} \qquad (x \in [a, b])$$

miatt $F$ nem függ $x$-től, tehát az előző paragrafus első esetével van dolgunk.

Ezért, ha $\mathfrak{I}$ az $y$ függvényen minimumot vesz fel, akkor

$$F - y'F_{y'} = y\sqrt{1 + y'^2} - y'y\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = c$$

azaz az (E-L) differenciálegyenlet speciális alakja most

$$y - c\sqrt{1 + y'^2} = 0. \tag{FF-D}$$

Ez egy implicit differenciálegyenlet.

→ $\sqrt{1+y'^2} > 0$, így (FF-D)-nek nincs olyan integrálgörbéje, mely az $y \geq 0$ félsíkból átmenne az $y < 0$ félsíkba, vagy fordítva, így $c$-t választhatjuk nemnegatívnak. Ha $c > 0$ esetén $y$ megoldás, akkor $-y$ is kielégíti (FF-D)-t, ha $c$ helyett $-c$-t írunk.

→ $y = c$ ($\geq 0$) megoldása (FF-D)-nek, de nem teljesíti (E-L)-t, mert

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = \sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx} \frac{y\, y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 1 - 0 \neq 0.$$

→ Nyilván $c > 0$ kell, hogy legyen, hiszen egyébkeént $y = 0$ lenne a megoldás, ami az előbbiek miatt nem teljesíti (E-L)-t.

→ Ha $y$ olyan megoldás, mely semmilyen szakaszon sem állandó, akkor $y'$ legfeljebb egy pontban tűnhet el, mert ha $\exists\ a < b$, hogy $y'(a) = y'(b) = 0$ és $y'(x) \neq 0,\ x \in (a,b)$ , akkor (FF-D) miatt $y(a) = y(b) = c$, ami adná – a Rolle-tétel miatt – hogy $\exists\ x \in (a,b),\ y'(x) = 0$, ami ellentmondás.

→ Legyen most $y$ az (FF-D) olyan megoldása, amelyre $y'(x) \neq 0$ ($x \in D_y$). Akkor (FF-D)-ből nyilván $y(x) > c$ ($x \in D_y$) következik, hiszen $\sqrt{1+y'^2} > 1$.
Az $y(x) - c\sqrt{1+z^2} = 0$ egyenletnek $\forall\ x \in D_y$-ra a

$$z_1(x) = \sqrt{\frac{y(x)}{c}^2 - 1}, \qquad z_2(x) = -\sqrt{\frac{y(x)}{c}^2 - 1}$$

szerint értelmezett függvények a megoldásai, melyek folytonosan differenciálhatók $D_y$-on.
Mivel $z_1(x) > 0,\ z_2(x) < 0$ ($x \in D_y$), így az egyenletnek nincs más folytonos megoldása. Ugyanakkor kielégíti az $y'$ folytonos függvény is, így $y'(x) = z_1(x)$ vagy $y'(x) = z_2(x)$. Tehát $y$ kielégíti az

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1} \qquad y' = -\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1}$$

($y > 0,\ c > 0$) differenciálegyenletek valamelyikét.

→ Ezek általános megoldása

$$y = c\,\mathrm{ch}\,\frac{x-\beta}{c}, \qquad x \in (\beta, \infty),$$

illetve

$$y = c\,\mathrm{ch}\,\frac{x-\beta}{c}, \qquad x \in (-\infty, \beta),$$

és ezek kielégítik (FF-D)-t is, sőt az $x = \beta$ helyen is.

Ha tehát létezik megoldása a feladatnak, az csak az

$$y(x, c, \beta) \doteq c\,\mathrm{ch}\,\frac{x-\beta}{c}\ , \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \beta \in \mathbb{R})$$

szerint meghatározott, úgynevezett láncgörbe lehet.

# Feladatsor

1) Adjuk meg az alábbi görbeseregek differenciálegyenletét:

$$y = e^{cx} \ ; \qquad y = (x-c)^3 \ ; \qquad y = cx^3 \ ; \qquad y = \sin(x+c) \ .$$

2) Oldjuk meg az alábbi szeparábilis differenciálegyeneleteket, illetve a rájuk vonatkozó kezdetiérték problémákat:

$$y' = e^{2x} - x \qquad\qquad y' = 2x \ , \quad y(1) = 4$$
$$(x+1)y' = -xy \qquad\qquad (x^2-1)y' + 2xy^2 = 0 \ , \quad y(0) = 1$$
$$xyy' = \sqrt{y^2+1} \qquad\qquad y' = 3\sqrt[3]{y^2} \ , \quad y(1) = 0$$
$$y' - xy^2 = 2xy \qquad\qquad xy' + y = y^2 \ , \quad y(1) = \frac{1}{2}$$
$$y' = y\cos x \qquad\qquad y' = (1+y^2)\ln x \ , \quad y(1) = 0$$

3) Oldjuk meg a következő lineáris differenciálegyenleteket:

$$xy' - 2y = 2x^4 \qquad\qquad (2x+1)y' = 4x + 2y$$
$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\sin x} \qquad\qquad x(y'-y) = e^x$$
$$x^2y' + xy + 1 = 0 \qquad\qquad y' = 2x(x^2+y)$$
$$xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x} \qquad\qquad xy' + 2y = \sin(x)$$

4) Oldjuk meg a következő egzakt differenciálegyenleteket:

$$(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$$
$$(2x+y)dx + (x-2y)dy = 0$$
$$\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}y' = 0$$
$$\frac{x-y}{(x+y)^3} + \frac{2x}{(x+y)^3}y' = 0$$
$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$$
$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$$
$$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$$

5) A korábbiakra visszavezetéssel oldjuk meg az alábbi differenciál-egyenleteket:

$$(x + 2y)dx - xdy = 0$$
$$(x - y) + (x + y)y' = 0$$
$$y^2 - 2xy + x^2y' = 0$$
$$2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$$
$$y^2 + x^2y' = xyy'$$
$$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$$
$$xy' - y = x\,\overset{\frac{y}{x}}{\mathrm{tg}}$$
$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$
$$2x + y + 1 + (4x + 2y - 3)y' = 0$$
$$x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$$
$$2x - 4y + 6 + (x + y - 3)y' = 0$$
$$(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$$
$$y' = 2\left(\frac{y + 2}{x + y - 1}\right)^2$$
$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$$
$$(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0$$
$$xy^2(xy' + y) = 1$$
$$y^2dx - (xy + x^3)dy = 0$$
$$\left(y - \frac{1}{x}\right)dx + \frac{1}{y}dy = 0$$
$$xydx = (y^3 + x^2y + x^2)dy$$
$$(2x^2y^2 + y)dx - (x^3y - x)dy = 0$$

6) Egzisztencia és unicitás tételek Cauchy-feladatokra

a) Bizonyítsa be, hogy egy teljes metrikus tér bármely zárt altere is teljes metrikus tér.

b) Legyen $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $T \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f : [a, b] \times T \to \mathbb{R}$ ($f = f_1, \ldots, f_n$) olyan függvény, hogy $\forall\ D_j f_i$ létezik és korlátos $[a, b] \times T$-n. Bizonyítsa be, hogy $f$ Lipschitz feltételt teljesít $[a, b] \times T$-n az utolsó $n$ változójában.

c) Bizonyítsuk be, hogy a Picard-Lindelöf tétel bizonyításában szereplő $(X, d) = (C_n^*, d)$ zárt altere a $C_n(I_1)$ teljes metrikus térnek.

d) Határozza meg az alábbi Cauchy-feladatok megoldását a Picard-féle szukcesszív approximációval:

$$y' = xy\ , \quad y(0) = 1\ ; \qquad y' = x^2 - y\ , \quad y(0) = 1\ .$$

e) A Picard-féle módszerrel adjunk közelítő megoldásokat az alábbi Cauchy-feladatokra. Becsüljük meg, milyen intervallumon biztosított a megoldás létezése (a közelítés konvergenciája).

$$\begin{aligned} &y' = x - y^2\ , && y(0) = 0 && (y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \text{ megh.});\\ &y' = y^2 - 3x^2 - 1\ , && y(0) = 1 && (y_0,\ y_1,\ y_2 \text{ megh.});\\ &y' = y + e^y\ , && y(0) = 1 && (y_0,\ y_1,\ y_2, \text{ megh.}). \end{aligned}$$

(Az első feladatnál becsüljük meg az $y_3$ közelítés pontosságát is az $x = 0,5$ és az $x = 1$ értékeknél.)

f) Bizonyítsa be, hogy az ($n$-KÉP) megoldhatóságának vizsgálatában szereplő speciális (DER-KÉP) problémánál teljesülnek a Picard-Lindelöf tétel feltételei.

g) Vizsgálja az $y' = \sqrt{|y|}$ differenciálegyenletre vonatkozó valamilyen Cauchy-feladat megoldhatóságát és a megoldás egyértelműségét.

7) Az alábbi feladatokban vizsgálja meg, hogy a megadott függvények lineárisan függetlenek-e:

a) $f_1(x) = x + 2$ , $f_2(x) = x - 2$ $(x \in \mathbb{R})$;
b) $f_1(x) = \sin(x)$ , $f_2(x) = \cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$;
c) $f_1(x) = 1$ , $f_2(x) = x$ , $f_3(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$;
d) $f_1(x) = e^x$ , $f_2(x) = e^{2x}$ , $f_3(x) = e^{3x}$ $(x \in \mathbb{R})$;
e) $f_1(x) = x$ , $f_2(x) = e^x$ , $f_3(x) = xe^x$ $(x \in \mathbb{R})$.

8) Határozza meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását:

a) $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$ , ha $y_1(x) = x$ ismert;
b) $y'' - 2(1 + \mathrm{tg}^2(x))y = 0$ , ha $y_1(x) = \mathrm{tg}(x)$ ismert;
c) $y'' - y'\,\mathrm{tg}(x) + 2y = 0$ , ha $y_1(x) = \sin(x)$ ismert;
d) $xy''' - y'' - xy' + y = 0$ , ha $y_1(x) = x$ , $y_2(x) = e^x$ ismert.

9) Adja meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását:

a) $x(x-1)y'' - xy' + y = 0$ ;
b) $xy'' + 2y' - xy = 0$ ;
c) $(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 0$ .

10) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket:

$y'' + y' - 2y = 0$ ; $y'' + 4y' + 3y = 0$ ; $y'' - 2y' = 0$ ;
$y'' - 4y' + 5y = 0$ ; $y'' + 2y' + 10y = 0$ ; $y'' + 4y = 0$ ;
$y''' - 8y = 0$ ; $y^{(4)} - y = 0$ ; $y^{(6)} + 64y = 0$ ;
$y'' - 2y' + y = 0$ ; $4y'' + 4y' + y = 0$ ;
$y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y^{(3)} = 0$ ; $y^{(5)} - 10y^{(3)} + 9y' = 0$ ;
$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ ; $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ ;
$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$ ; $y''' - 3y' + 2y = 0$ .

11) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket:

$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ ; $\quad y'' + y = 4xe^x$ ;

$y'' - y = 2e^x - x^2$ ; $\quad y'' + y' - 2y = 3xe^x$ ;

$y'' - 3y' + 2y = \sin(x)$ ; $\quad y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$ ;

$y'' - 3y' + 2y = \cos(x)$ ; $\quad y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin(2x)$ ;

$y'' + y = x\sin(x)$ ; $\quad y''' + y' = \sin(x) + x\cos(x)$ ;

$y'' + 4y' + 3y = \mathrm{ch}(x)$ ; $\quad y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ ;

$y'' + y = \dfrac{1}{\sin(x)}$ ; $\quad y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}(x)$ ;

$(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2$ .

12) Határozza meg az alábbi Cauchy-feladatok megoldását:

a) $y''' - y' = 0$ , $\quad y(0) = 3$ , $\quad y'(0) = -1$ , $\quad y''(0) = 1$ ;

b) $y'' - 2y' + y = 0$ , $\quad y(2) = 1$ , $\quad y'(2) = -2$ ;

c) $y'' + y = 4e^x$ , $\quad y(0) = 4$ , $\quad y'(0) = -3$ ;

d) $y'' - 2y' = 2e^x$ , $\quad y(1) = -1$ , $\quad y'(1) = 0$ ;

e) $y'' + y = 2x - \pi$ , $\quad y(0) = 0$ , $\quad y(\pi) = 0$ .

13) Oldja meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszereket:

a) $\begin{cases} y_1' - y_1 + y_2 = 0 \\ y_2' + 4y_1 - y_2 = 0 \ , \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} y_1' + y_1 - 8y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 = 0 \ , \end{cases}$

c) $\begin{cases} y_1' - y_1 + y_2 - y_3 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 + y_3 = 0 \\ y_3' - 2y_1 + y_2 = 0 \ , \end{cases}$ $\qquad$ d) $\begin{cases} y_1' - y_2 = e^x \\ y_2' - y_1 = x^2 \ . \end{cases}$

14) Feladatok a stabilitáshoz.

a) Vizsgáljuk meg, hogy az

$$y'(t) = t - y(t) \qquad (t \geq 0)$$

differenciálegyenlet $x(0) = 1$ feltételt kielégítő $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ megoldása stabil-e, illetve aszimptotikusan stabil-e.

b) Vizsgáljuk meg az

$$\begin{cases} y_1' = 4y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszer azon

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

megoldásának stabilitását, melyre

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

c) Vizsgáljuk meg az

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 + 2y_1 y_2 \\ y_2' = 2y_1 - 3y_2 + 5y_1^4 + y_2^3 \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszerre, hogy az

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(úgynevezett nullmegoldás) stabil-e.

d) Vizsgáljuk meg az

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 - t^2 \\ y_2' = 3y_1 - y_2 - t \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszer azon

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

megoldásának stabilitását, melyre

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$