Dr. Lajkó Károly

Gazdasági Matematika I.

NYÍREGYHÁZI FŐISKOLA
GAZDASÁGMÓDSZERTANI TANSZÉK

Dr. Lajkó Károly

Gazdasági Matematika I.

jegyzet az alapképzéshez

NYÍREGYHÁZI FŐISKOLA
GAZDASÁGMÓDSZERTANI TANSZÉK

Tartalomjegyzék

I. fejezet

Halmazok, relációk, függvények

Jelölések

Itt (és a későbbiekben is) a definíciók, állítások és bizonyítások tömör leírására használjuk a matematikai logika (középiskolából is ismert) jelöléseit.

Így, annak leírására, hogy

– az „A kijelentésből következik a B kijelentés” az $A \Longrightarrow B$;
– az „A kijelentés egyenértékű a B kijelentéssel” („A akkor és csak akkor teljesül, ha B”) az $A \Longleftrightarrow B$;
– a „van olyan” („létezik”) kijelentésre a $\exists$;
– a „minden” („bármely”) kijelentésre a $\forall$;
– a „definíció szerint egyenlő” kijelentésre a $\doteq$

szimbólumokat használjuk.

1. Halmazelméleti alapfogalmak

Ebben a részben az úgynevezett naiv halmazelmélet legfontosabb fogalmait tárgyaljuk.

A ***halmaz*** és a ***halmaz eleme*** fogalmát adottnak (matematikai absztrakciónak) tekintjük.

A halmazokat általában nagybetűkkel ($A, B, C, \dots; X, Y, Z, \dots; A_1, A_2, \dots$), elemeiket kisbetűkkel ($a, b, c, \dots;\ x, y, z, \dots; a_1, a_2, \dots$) jelöljük.

Azt például, hogy a eleme az A halmaznak az $a \in A$, míg azt, hogy a nem eleme az A halmaznak az $a \notin A$ szimbólummal jelöljük.

Egy ***halmaz adott***, ha minden dologról egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy eleme, vagy sem.

A ***halmazokat megadhatjuk*** az elemeik felsorolásával: $\{a, b, c, x, y, z, \alpha, \beta\}$, vagy valamilyen ismert halmaz elemeire való T tulajdonság (állítás) segítségével: az $\{x \mid x\ T \text{ tulajdonságú}\}$, $\{x \mid T(x)\}$, $\{x \in A \mid T(x)\}$ jelölésekkel.

1. definíció. Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, ***üres halmaz***nak nevezzük, és a $\emptyset$ szimbólummal jelöljük.

2. definíció. Az A és B ***halmazok egyenlők***, ha elemeik ugyanazok, azaz $x \in A \Longleftrightarrow x \in B$. Ezt $A = B$, tagadását $A \neq B$ módon jelöljük.

Példa.
1. Ha $A = \{a, b, c, d\}$ és $B = \{d, b, c, a\}$, akkor $A = B$.
2. Ha $A = \{a, b, c, d\}$ és $B = \{b, c, e\}$, akkor $A \neq B$.

1. megjegyzés. A 2. definíció adja, hogy csak egy üres halmaz létezik.

3. definíció. Az A ***halmaz részhalmaza (része) a*** B ***halmaznak***, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$ is teljesül (azaz $x \in A \implies x \in B$). Ennek jelölése: $A \subset B$, vagy $B \supset A$.

Példa. Ha $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ és $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, akkor $A \subset B$.

4. definíció. Az A halmaz ***valódi része*** a B halmaznak, ha $A \subset B$, de $A \neq B$.

Példa. Ha $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ és $B = \{\beta, \gamma, \alpha\}$, akkor $A \subset B$, de A nem valódi részhalmaza B-nek, mert $A = B$.

2. megjegyzés. $A = B \iff A \subset B$ és $B \subset A$.

3. megjegyzés. Szokásos az is, hogy $A \subset B$, illetve $B \subset A$ azt jelöli, hogy A valódi része B-nek; ilyenkor azt, hogy A részhalmaza B-nek $A \subseteq B$ vagy $B \subseteq A$ jelöli.

5. definíció. ***Halmazrendszer*** (vagy halmazcsalád) alatt olyan nemüres halmazt értünk, amelynek elemei halmazok.

6. definíció. Egy A halmaz összes részhalmazaiból álló halmazt az A ***hatványhalmaz***ának nevezzük, és 2^A-val jelöljük.

7. definíció. Ha $I \neq \emptyset$ egy (úgynevezett) indexhalmaz, és bármely $i \in I$ esetén adott egy A_i halmaz, akkor az $\{A_i \mid i \in I\}$ módon jelölt halmazt ***I-vel indexelt halmazrendszer***nek nevezzük.

8. definíció. Az A és B ***halmazok egyesítésén*** (***unióján***) azt az $A \cup B$-vel jelölt halmazt értjük, amely mindazokból az elemekből áll, melyek az A és B halmazok közül legalább az egyikhez hozzátartoznak.

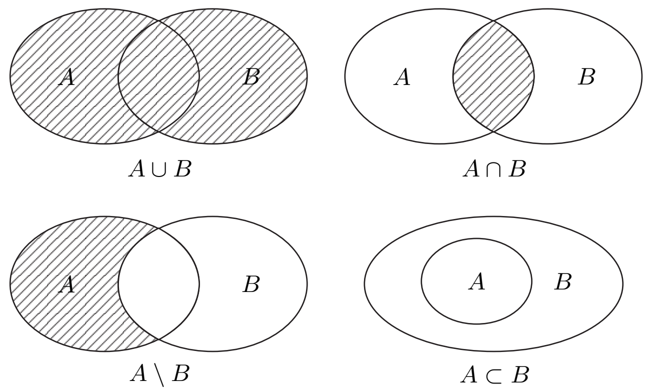
Az A és B ***halmazok közös részén*** (***metszetén***) azt az $A \cap B$-vel jelölt halmazt értjük, amely mindazokból az elemekből áll, amelyek mind az A, mind B halmaznak elemei.

Az A és B ***halmazok különbségén*** azt az $A \setminus B$-vel jelölt halmazt értjük, amely az A halmaz azon elemeiből áll, amelyek nem elemei a B halmaznak.

Tömörebb írásmódban:

$$A \cup B \doteq \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\},$$
$$A \cap B \doteq \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\},$$
$$A \setminus B \doteq \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$$

A halmazok közötti műveletek és relációk jól szemléltethetőek úgynevezett ***Venn-diagram***okkal.



1. ábra. Venn-diagramok

Egy $\mathcal{R}$ ***halmazrendszer egyesítésén***, illetve ***közös részén*** az

$$\bigcup \mathcal{R} \doteq \{a \mid \exists\ A \in \mathcal{R},\ a \in A\}, \qquad \bigcap \mathcal{R} \doteq \{a \mid \forall\ A \in \mathcal{R}\text{-ra } a \in A\}$$

halmazokat értjük.

Ha $\mathcal{R} = \{A_i \mid i \in I\}$ egy indexelt halmazrendszer, akkor egyesítését, illetve közös részét az $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, illetve $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ szimbólumokkal jelöljük.

Példa. Ha $A = \{a, \alpha, \beta, b, c\}$ és $B = \{a, \alpha, b, d, e\}$, akkor

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{a, \alpha, \beta, b, c, d, e\}, \\ A \cap B &= \{a, \alpha, b\}, \\ A \setminus B &= \{\beta\}, \\ B \setminus A &= \{d, e\}. \end{aligned}$$

1. tétel. *Ha A, B, C tetszőleges halmazok, akkor*

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A$$

(kommutativitás);

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(asszociativitás);

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(disztributivitás);

$$\begin{aligned} A \backslash B &= A \backslash (A \cap B), & (A \backslash B) \cap C &= (A \cap C) \backslash B, \\ A \backslash (B \cap C) &= (A \backslash B) \cup (A \backslash C), & A \backslash (B \cup C) &= (A \backslash B) \cap (A \backslash C), \\ A \cup B = B &\iff A \subset B, & A \cap B = B &\iff A \supset B, \\ A \backslash B = \emptyset &\iff A \subset B. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A definíciókból közvetlenül adódik. Szemléltessük Venn-diagrammal! □

9. definíció. Az A és B halmazok ***diszjunktak*** (***idegenek***), ha $A \cap B = \emptyset$. Ha egy $\mathcal{R}$ halmazrendszer bármely két különböző halmaza diszjunkt, akkor ***páronként diszjunktnak*** nevezzük.

Példa.
1. Ha $A = \{\alpha, \beta, a, b\}$, $B = \{\gamma, \delta, e\}$, akkor $A \cap B = \emptyset$, így A és B diszjunktak.
2. Ha $A = \{\alpha, \beta, b\}$, $B = \{a, \beta, d\}$, akkor $A \cap B = \{\beta\} \neq \emptyset$, így A és B nem diszjunktak.

10. definíció. Ha X adott halmaz és $A \subset X$, akkor a

$$C_X A (= A^c = \overline{A} = CA) \doteq X \setminus A$$

halmazt az A ***halmaz*** X ***halmazra vonatkozó komplementeré***nek nevezzük.

Példa. Ha $X = \{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma\}$, $A = \{a, \beta, \gamma\}$, akkor $C_X A = \{b, c, \alpha\}$.

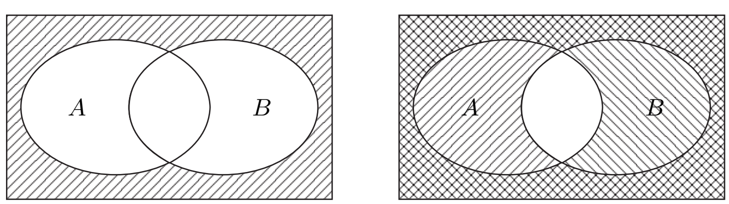
2. tétel. *Ha* $A, B \subset X$, *akkor*

$$A \cup \overline{A} = X, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset, \quad \overline{\emptyset} = X, \quad \overline{X} = \emptyset \quad \overline{\overline{A}} = A,$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Az előző két összefüggést ***de Morgan-féle azonosság****nak nevezzük. A de Morgan-féle azonosságok érvényesek tetszőlegesen sok halmaz esetén is:*

$$\overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \overline{A}_\gamma \qquad \text{és} \qquad \overline{\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{A}_\gamma \ .$$

Bizonyítás. A definíciókból közvetlenül adódik. Szemléltessük Venn-diagrammal is! □



$\overline{A \cup B}$ $\qquad$ $\overline{A} \cap \overline{B}$

2. ábra. de Morgan-azonosság Venn-diagramokkal

2. Relációk (leképezések)

1. definíció. Az a és b elemekből készített ***rendezett elempár***on egy (a, b) szimbólumot értünk, amelyre igaz, hogy $(a, b) = (c, d) \iff a = c$ és $b = d$.

1. megjegyzés. Az $(a, b) \doteq \{\{a\}, \{a, b\}\}$ definíció is lehetséges. Ekkor bizonyítható, hogy teljesül $(a, b) = (c, d) \iff a = c$ és $b = d$.

2. definíció. Az A és B halmazok ***Descartes-szorzat***án az

$$A \times B \doteq \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

halmazt értjük.

Példa. Ha $A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{x, y, z\}$, akkor az

	1	2	3	4
x	$(1, x)$	$(2, x)$	$(3, x)$	$(4, x)$
y	$(1, y)$	$(2, y)$	$(3, y)$	$(4, y)$
z	$(1, z)$	$(2, z)$	$(3, z)$	$(4, z)$

	x	y	z
1	$(x, 1)$	$(y, 1)$	$(z, 1)$
2	$(x, 2)$	$(y, 2)$	$(z, 2)$
3	$(x, 3)$	$(y, 3)$	$(z, 3)$
4	$(x, 4)$	$(y, 4)$	$(z, 4)$

táblázatok mutatják, hogy

$$\begin{aligned} A \times B = \{\, &(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z), \\ &(3, x), (3, y), (3, z), (4, x), (4, y), (4, z)\,\}; \\ B \times A = \{\, &(x, 1), (x, 2), (x, 3), (x, 4), (y, 1), (y, 2), (y, 3), (y, 4), \\ &(z, 1), (z, 2), (z, 3), (z, 4)\,\}. \end{aligned}$$

1. tétel. *Ha A, B és C tetszőleges halmazok, akkor*

a) $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset$ *vagy* $B = \emptyset$,
b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
d) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
e) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
f) $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$,
g) $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$,
h) $B \subset C \implies A \times B \subset A \times C$.

2. megjegyzés. $A \times B$ általában nem egyenlő $B \times A$, ahogy azt a 2. definíció utáni példa is mutatja.

3. definíció. Az $A \times B$ halmaz egy F részhalmazát A ***és*** B ***közötti*** (***binér***) ***reláció***nak, vagy más szavakkal A***-ból*** B***-be*** való ***leképezés***nek nevezzük. Ha $A = B$, akkor azt mondjuk, hogy F reláció A-n.

Példa. Ha $A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{x, y, z\}$, akkor

$$F = \{(1, x), (1, y), (2, z), (3, y), (3, z)\} \subset A \times B$$

binér reláció A és B között,

$$G = \{(x,3),(y,1),(z,1),(z,3)\} \subset B \times A$$

binér reláció B és A között.

3. megjegyzés. Az $(a,b) \in F$ tartalmazást szokás aFb-vel is jelölni és így olvassuk: a az F relációban van b-vel (vagy F a-hoz b-t rendeli).

4. definíció. A

$$D_F \doteq \{x \in A \mid \exists\, y \in B,\ (x,y) \in F\}\ ,$$
$$R_F \doteq \{y \in B \mid \exists\, x \in A,\ (x,y) \in F\}$$

halmazokat az F reláció (leképezés) ***értelmezési*** (ős-) ***tartomány***ának, illetve ***értékkészlet***ének (képtartományának) nevezzük.

Példa. Az előbbi F és G relációkra

$$D_F = \{1,2,3\} \neq A\ , \quad R_F = \{x,y,z\} = B\ ,$$
$$D_G = \{x,y,z\} = B\ , \quad R_G = \{1,3\} \neq A\ .$$

4. megjegyzés. Ha $D_F = A$, úgy A-nak B-be; ha $R_F = B$, úgy A-ból B-re; ha $D_F = A$ és $R_F = B$, úgy A-nak B-re való leképezéséről beszélünk.

Példa. Az előbbi F leképezés A-ból B-re való leképezés, míg a G leképezés B-nek A-ba való leképezése.

5. definíció. Ha $F \subset A \times B$ adott reláció és $C \subset A$, akkor az

$$F(C) \doteq \{y \in B \mid \exists\, x \in C,\ (x,y) \in F\}$$

halmazt a C ***halmaz*** F***-re vonatkozó képé***nek nevezzük.

Az egyelemű $\{x\} \subset A$ $(x \in A)$ halmaz képét jelölje $F(x)$, azaz ha $(x,y) \in F$, akkor az $y = F(x)$ jelölés is lehetséges. Ekkor $F(x)$-et F x-beli értékének is nevezzük. ($F(x)$ nem feltétlenül egyértelműen meghatározott!)

Példa. Ha A és B és F az előbbi, továbbá $C = \{1,3\} \subset A$, akkor $F(C) = \{x,y,z\} = B = R_F$ a C F-re vonatkozó képe. $(1,x) \in F$, így $x = F(1)$ az F 1-beli képe, de $(1,y) \in F$, így $y = F(1)$ is az F 1-beli képe, azaz $F(1)$ nem egyértelműen meghatározott.

6. definíció. Ha $F \subset A \times B$ adott reláció (leképezés), $C \subset D_F$, akkor

$$F|_C \doteq \{(x,y) \in F \mid x \in C\}$$

az F reláció (leképezés) C***-re való leszűkítése.***

Példa. Ha A, B, C és F az előbbi, úgy $C \subset D_F$ és

$$F|_C = \{(1,x),(1,y),(3,y),(3,z)\}$$

az F C-re való leszűkítése.

7. definíció. Az $F \subset A \times B$ reláció (leképezés) ***inverzé***n az

$$F^{-1} \doteq \{(y,x) \in B \times A \mid (x,y) \in F\}$$

halmazt értjük.

Példa. Ha A, B, F az előbbi, úgy

$$F^{-1} = \{(x,1),(y,1),(y,3),(z,2),(z,3)\} \subset B \times A\ .$$

5. megjegyzés. E definícióból könnyen következik, hogy

$$D_{F^{-1}} = R_F, \qquad R_{F^{-1}} = D_F, \qquad (F^{-1})^{-1} = F, \qquad F^{-1}(B) = D_F.$$

Példa. Az előbbi példák alapján

$$\begin{aligned} D_{F^{-1}} &= \{x,y,z\} = R_F\ , \quad R_{F^{-1}} = \{1,2,3\} = D_F\ , \\ (F^{-1})^{-1} &= \{(1,x),(1,y),(2,z),(3,y),(3,z)\} = F\ , \\ F^{-1}(B) &= \{1,2,3\} = D_F\ . \end{aligned}$$

8. definíció. Legyenek A, B, C adott halmazok, $F \subset A \times B$ és $G \subset B \times C$ adott relációk. F ***és*** G ***kompozícióján*** (összetételén) a

$$G \circ F \doteq \{(x,z) \mid \exists\ y \in B,\ (x,y) \in F,\ (y,z) \in G\}$$

relációt értjük. (Nyilván $G \circ F$ A és C közötti reláció.)

Példa. Ha $A = \{1,2,3\},\ B = \{y,z\},\ C = \{\alpha,\beta\}$ továbbá $F = \{(1,y),(1,z),(3,y)\} \subset A \times B$ és $G = \{(y,\alpha),(z,\alpha),(z,\beta)\} \subset B \times C$ relációk, akkor a $G \circ F = \{(1,\alpha),(1,\beta),(3,\alpha)\} \subset A \times C$ reláció az F és G kompozíciója.

2. tétel. *A 8. definíció jelölései mellett* $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$. *Ha* $H \subset C \times D$ *egy harmadik reláció (*D *tetszőleges halmaz), akkor*

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F\ .$$

Példa. Az előbbi példa halmazait és relációit tekintve
$(G \circ F)^{-1} = \{(\alpha,1),(\alpha,3),(\beta,1)\}$, továbbá
$F^{-1} = \{(y,1),(y,3),(z,1)\}$ és $G^{-1} = \{(\alpha,y),(\alpha,z),(\beta,z)\}$
miatt $F^{-1} \circ G^{-1} = \{(\alpha,1),(\alpha,3),(\beta,1)\}$.
Így $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$.

A rendezési reláció a számok közötti „kisebb vagy egyenlő” viszony elvont megfogalmazása.

9. definíció. Legyen adott az A halmaz. Az $R \subset A \times A$ relációt ***rendezési reláció***nak, vagy rendezésnek nevezzük az A halmazon, ha $\forall\ x,y,z \in A$ esetén

a) xRx (vagyis $(x,x) \in R$) (reflexív),
b) ha xRy és yRx, akkor $x = y$ (antiszimmetrikus),
c) ha xRy és yRz, akkor xRz (tranzitív),
d) xRy vagy yRx teljesül (lineáris vagy teljes).

Ekkor az (A, R) párt, vagy az A halmazt ***rendezett halmaz***nak nevezzük. Ha csak a), b) és c) teljesül, akkor R-t ***parciális rendezés***nek nevezzük. R-t általában $\leq$-vel jelöljük és pl. az $x \leq y$-t úgy olvassuk, hogy x kisebb vagy egyenlő, mint y.

Ha $x \leq y$, de $x \neq y$, akkor ezt úgy jelöljük, hogy $x < y$ (x kisebb, mint y). A $<$ reláció nem rendezés. Szokásos még $x \leq y$, illetve $x < y$ helyett az $y \geq x,\ y > x$ jelölést is használni.

Példa. Ha $A = \{1, 2, 3\}$, akkor

$$A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}\ .$$

$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\} \subset A \times A$ parciális rendezés A-n.
$R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\} \subset A \times A$ esetén (A, R_2), illetve A rendezett halmaz.

10. definíció. Legyen A egy rendezett halmaz. Egy $B \subset A$ részhalmazt ***felülről korlátos***nak nevezünk, ha $\exists\ a \in A$, hogy $\forall\ b \in B$ esetén $b \leq a$. Az a-t a B halmaz ***felső korlát***jának nevezzük. Hasonlóan definiálható az ***alulról korlátos*** halmaz, illetve az ***alsó korlát*** is. Egy halmazt ***korlátos***nak nevezünk, ha alulról és felülről is korlátos.

Egy $\alpha \in A$ elemet a B halmaz ***pontos felső korlát***jának nevezünk, ha

– α felső korlátja B-nek
– a B halmaz bármely β felső korlátjára $\alpha \leq \beta$ teljesül.

Ha létezik pontos felső korlátja B-nek, úgy azt $\sup B$-vel jelöljük (supremum B). Hasonlóan értelmezhető a ***pontos alsó korlát*** is.

Példa. Az előbbi példa szerint A R_2-vel rendezett halmaz.
A $B = \{1, 2\} \subset A$ halmaznak 2 és 3 felső, míg 1 alsó korlátja. B pontos felső korlátja 2, pontos alsó korlátja 1.

11. definíció. Egy olyan rendezett halmazt, amelyben minden nem üres felülről korlátos részhalmaznak van pontos felső korlátja, ***teljes***nek nevezzük.

Példa. Az előbbi A halmazra, az R_2 rendezéssel, nyilván teljesül, hogy minden nem üres B részhalmazának van pontos felső korlátja, így A teljes.

3. Függvények

A függvény fogalmának kialakítását az motiválja, hogy „többértékű” függvények ne jöhessenek szóba.

1. definíció. Legyenek A és B adott halmazok. Az $f \subset A \times B$ relációt ***függvény***nek nevezzük, ha $(x, y) \in f$ és $(x, z) \in f$ esetén $y = z$ teljesül (azaz $\forall\ x \in A$ esetén legfeljebb egy olyan $y \in B$ létezik, amelyre $(x, y) \in f$).

Példa. Ha $A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{x, y, z\}$, akkor

1. az $f = \{(1,x),(1,y),(2,z),(3,y),(3,z)\} \subset A \times B$ reláció nem függvény, mert $(1,x) \in f$ és $(1,y) \in f$ és $x \neq y$,
2. az $f = \{(1,x),(2,z),(3,y)\} \subset A \times B$ reláció függvény.

1. megjegyzés. Minden függvény reláció, így az értelmezési tartomány, értékkészlet, kép, leszűkítés definíciója megegyezik a 4., 5. és 6. definíciókkal, és a jelölések is változatlanok.

2. megjegyzés. A függvény definíciója így is megfogalmazható:
$f \subset A \times B$ reláció függvény, ha $\forall\ x \in D_f$ esetén pontosan egy $y \in B$ létezik, hogy $(x,y) \in f$.

3. megjegyzés. Ha f jelöli a függvényt, akkor $(x,y) \in f$ esetén $y = f(x)$ jelöli az x ***elem képét***, vagy az f ***függvény*** x ***helyen felvett értékét*** (helyettesítési értékét), $f : A \to B$ azt, hogy f A-t B-be képezi, míg $\{(x, f(x))\}$ az f ***gráf***ját (illetve magát a függvényt is) jelenti.

4. megjegyzés. A függvény megadásánál szokásosak az alábbi jelölések is:

$$y = f(x),\ x \in A\ (x \in D_f)\ ; \qquad x \mapsto f(x)\ x \in A\ (x \in D_f)\ ;$$

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}\ .$$

2. definíció. Az $f \subset A \times B$ függvény ***invertálható***, ha az f^{-1} reláció is függvény. Ekkor f^{-1}-et az f ***inverz függvény***ének (inverzének) nevezzük (az invertálható függvényt kölcsönösen egyértelmű, vagy egy-egyértelmű leképezésnek is nevezzük).

Példa. Legyen $A = \{1,2,3,4\},\ B = \{x,y,z\}$, akkor
1. az $f = \{(1,x),(2,z),(3,y)\} \subset A \times B$ függvény esetén $f^{-1} = \{(x,1),(z,2),(y,3)\} \subset B \times A$ is függvény, így f invertálható.
2. a $g = \{(1,x),(2,z),(3,x)\} \subset A \times B$ függvény esetén $g^{-1} = \{(x,1),(z,2),(x,3)\} \subset B \times A$ nem függvény, mert $(x,1) \in g^{-1}$ és $(x,3) \in g^{-1}$, de $1 \neq 3$, így g nem invertálható.

1. tétel. *Az $f : A \to B$ függvény akkor és csak akkor invertálható, ha minden $x, y \in A,\ x \neq y$ esetén $f(x) \neq f(y)$ (vagyis $\forall\ x, y \in A$ esetén $f(x) = f(y) \implies x = y$).*

Bizonyítás. Gyakorlaton (feladat). □

Az összetett függvény értelmezéséhez lényeges a következő:

2. tétel. *Legyenek $f \subset A \times B$ és $g \subset B \times C$ függvények. Ekkor $g \circ f$ is függvény, és $\forall\ x \in D_{g \circ f}$-re $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Példa. Legyenek adottak az $A = \{1,2,3\},\ B = \{x,y\},\ C = \{u,v\}$ halmazok és az $f = \{(1,x),(2,x),(3,y)\} \subset A \times B,\ g = \{(x,u),(y,u)\} \subset B \times C$ függvények. Ekkor $g \circ f = \{(1,u),(2,u),(3,u)\}$ függvény, és például $(g \circ f)(1) = u,\ g(f(1)) = g(x) = u \implies (g \circ f)(1) = g(f(1))$.

3. definíció. Legyen adott az f és g függvény. A $g \circ f$ függvényt ***összetett függvény***nek, az f-et belső, a g-t külső függvénynek nevezzük.

5. megjegyzés. A definíció adja, hogy

$$D_{g\circ f} \subset D_f; \qquad D_{g\circ f} = D_f \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ha } R_f \subset D_g;$$
$$g \circ f = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ha } R_f \cap D_g = \emptyset \ .$$

Példa. A 2. tételt követő példában:

$$D_{g\circ f} = \{1, 2, 3\} = D_f \quad \Longrightarrow \quad D_{g\circ f} \subset D_f \text{ igaz.}$$
$$R_f = \{x, y\} \subset D_g = \{x, y\}) \quad \Longrightarrow \quad D_{g\circ f} = D_f \ .$$

4. definíció. Az A halmaz ***identikus függvény***én az

$$\mathrm{id}_A : A \to A \ , \quad \mathrm{id}_A(x) = x$$

függvényt értjük.

Két halmazról el tudjuk dönteni azt, hogy elemeik száma egyenlő-e, ha a két halmaz elemeit „párba állítjuk”. Ez a gondolat motiválta a halmazok ekvivalenciájának fogalmát.

5. definíció. Az M és N ***halmazok ekvivalensek***, ha $\exists\ f : M \to N$ (M-et N-re képező) invertálható függvény.

6. definíció. Legyen A tetszőleges halmaz. Egy $f : A \times A \to A$ függvényt (***binér***) ***művelet***nek nevezünk A-ban.

II. fejezet

Számok

Bevezetés

Az iskolában megtanultuk a számolás szabályait, megismertük a számok „tulajdonságait”. Az alábbi axiómarendszer nem más, mint ezen tulajdonságok közül a legfontosabbak rögzítése. A testaxiómák az összeadás és a szorzás szabályait, a rendezési axiómák a $\leq$ reláció tulajdonságait rögzítik, a teljesség pedig valami olyasmit fejez ki, hogy a számegyenes „nem lyukas”.

Az axiómák jelentősége azonban messze túlnő a szabályok egy összességének rögzítésén. Az alábbi axiómákkal ugyanis levezethető minden más szabály és tulajdonság. Sőt valójában az axiómákat teljesítő objektum az, amit valós számoknak nevezünk.

A fejezet további részében az axiómákkal levezetjük a valós számok néhány tulajdonságát. Az elmélet teljes felépítésére nem vállalkozunk, de az olvasó megnyugtatására leszögezzük, hogy az iskolában a tizedestörtekről és a számegyenesről kialakított kép megfelel az axiómákon nyugvó elméletnek.

1. A valós számok axiómarendszere

Az $\mathbb{R}$ halmazt a ***valós számok halmazá***nak nevezzük, ha teljesíti az alábbi axiómákat.

TESTAXIÓMÁK
Értelmezve van $\mathbb{R}$-ben két művelet, az

$$f_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x+y \doteq f_1(x,y) \text{ összeadás és az}$$
$$f_2 : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\cdot y \doteq f_2(x,y) \text{ szorzás,}$$

amelyek kielégítik a következő, úgynevezett testaxiómákat:

1) $x+y=y+x\ ,\ x\cdot y=y\cdot x \ \ \forall\, x,y\in\mathbb{R}$ (kommutativitás),
2) $(x+y)+z=x+(y+z),\ (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$
$\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$ (asszociativitás),
3) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z \ \ \forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$ (disztributivitás),
4) $\exists\, 0\in\mathbb{R}$, hogy $x+0=x \ \ \forall\, x\in\mathbb{R}$
(létezik zérus, vagy nullelem),

5) $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén $\exists\ -x \in \mathbb{R}$, hogy $x + (-x) = 0$
(létezik additív inverz),
6) $\exists\ 1 \in \mathbb{R}$, hogy $1 \neq 0$ és $1 \cdot x = x\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$
(létezik egységelem),
7) $\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ x \neq 0$ esetén $\exists\ x^{-1} \in \mathbb{R}$, hogy $x \cdot x^{-1} = 1$
(létezik multiplikatív inverz).

Rendezési axiómák
Értelmezve van az $\mathbb{R}$ testben egy $\leq \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ rendezési reláció, azaz $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén

a) $x \leq x$
b) ha $x \leq y$ és $y \leq x$, akkor $x = y$
c) ha $x \leq y$ és $y \leq z$, akkor $x \leq z$
d) $x \leq y$ vagy $y \leq x$,

továbbá teljesül még, hogy

(i) ha $x, y \in \mathbb{R}$ és $x \leq y$, akkor $x + z \leq y + z\ \ \forall\ z \in \mathbb{R}$,
(ii) ha $x, y \in \mathbb{R},\ 0 \leq x$ és $0 \leq y$, akkor $0 \leq x \cdot y$

(az összeadás és a szorzás monotonitása).

Ekkor $\mathbb{R}$-et rendezett testnek nevezzük.

Teljességi axióma
Az $\mathbb{R}$ rendezett test (mint rendezett halmaz) teljes, azaz $\mathbb{R}$ bármely nemüres, felülről korlátos részhalmazának létezik pontos felső korlátja.

Összefoglalva
Az $\mathbb{R}$ halmazt a valós számok halmazának nevezzük, ha $\mathbb{R}$ teljes rendezett test.

Megjegyzés. Megmutatható, hogy létezik ilyen halmaz, és bizonyos értelemben egyértelmű. A lehetséges modellekről később még röviden beszélünk.

2. Kiegészítések a valós számfogalomhoz

a) A testaxiómák fontosabb következményei

A továbbiakban a szorzást jelentő pontot nem írjuk ki (ez általában nem zavaró), továbbá az összeadás és a szorzás asszociativitása lehetővé teszi, hogy $(x+y)+z$ és $x+(y+z)$ helyett $x+y+z$-t, míg $(xy)z$ és $x(yz)$ helyett xyz-t írjunk.

1. tétel. *$\mathbb{R}$-ben (de általában minden testben) a* ***zérus*** *és az* ***egységelem egyértelműen*** *meghatározott.*

Bizonyítás. Ha pl. $\mathbb{R}$-ben 0 és $0'$ is zéruselem, akkor az 1. és 4. testaxióma miatt

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

tehát $0 = 0'$. Hasonlóan látható be 1 egyértelműsége. □

2. tétel. *Ha $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén $x + y = x + z$, akkor $y = z$, ha még $x \neq 0$, akkor $xy = xz \implies y = z$ (**egyszerűsítési szabály**).*

Bizonyítás. A testaxiómák és az $x + y = x + z$ feltétel adja, hogy

$$y = 0 + y = (-x + x) + y = -x + (x + y) = -x + (x + z) =$$
$$= (-x + x) + z = 0 + z = z \ ,$$

illetve

$$y = 1 \cdot y = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot (x \cdot z) = (x^{-1} \cdot x) \cdot z = 1 \cdot z = z \ ,$$

tehát $y = z$ mindkét esetben. □

3. tétel. *Bármely $\mathbb{R}$-beli elemnek **pontosan egy additív inverze**, és bármely $\mathbb{R}$-beli, 0-tól különböző elemnek **pontosan egy multiplikatív inverze van**.*

Bizonyítás. Ha x-nek y és z additív, vagy $x \neq 0$-ra multiplikatív inverze, úgy $x + y = 0 = x + z$, illetve $xy = 1 = xz$, és az előbbi tétel (az egyszerűsítési szabály) adja, hogy $y = z$ mindkét esetben, tehát a tétel állítása igaz. □

4. tétel. *Legyen $x, y \in \mathbb{R}$, akkor pontosan egy $z_1 \in \mathbb{R}$ létezik, hogy $y + z_1 = x$; ha még $y \neq 0$, akkor pontosan egy $z_2 \in \mathbb{R}$ létezik, hogy $yz_2 = x$ (**kivonási**, illetve **osztási feladat**).*

Bizonyítás. $z_1 = x + (-y)$, illetve $z_2 = xy^{-1}$ esetén nyilvánvaló, hogy $y + z_1 = x$, $yz_2 = x$. Az egyértelműség az $y + z_1 = x = y + z_1'$, illetve $yz_2 = x = yz_2'$ egyenlőségekből a 2. tétel segítségével adódik, hiszen $z_1 = z_1'$ és $z_2 = z_2'$ igaz. □

1. definíció. A 4. tétel szerint egyértelműen létező z_1 illetve z_2 valós számokat (melyekre tehát $y + z_1 = x$, illetve $y \neq 0$ esetén $yz_2 = x$ teljesül) az x ***és*** y valós számok ***különbségé***nek, illetve ***hányadosá***nak nevezzük és $x - y$-nal, illetve $\dfrac{x}{y}$-nal jelöljük. $\dfrac{x}{0}$-t nem értelmezzük.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy $x - y = x + (-y)$, illetve $\dfrac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$, hiszen

$$y + (x + (-y)) = y + ((-y) + x) = (y + (-y)) + x = 0 + x = x \ ,$$

illetve

$$y \cdot (x \cdot y^{-1}) = y \cdot (y^{-1} \cdot x) = (y \cdot y^{-1}) \cdot x = 1 \cdot x = x$$

teljesül. Speciálisan $\dfrac{1}{y} = y^{-1}$.

5. tétel. *Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $-(-x) = x$, $\forall\ 0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x \ , \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \ .$$

Bizonyítás. Az 5. testaxiómában x helyére $-x$-et illetve a 7. testaxiómában x helyére x^{-1}-et írva kapjuk a megfelelő állításokat. □

6. tétel. *Legyen* $x, y \in \mathbb{R}$. $x \cdot y = 0 \iff x = 0$ *vagy* $y = 0$.

b) Természetes, egész, racionális és irracionális számok (mint $\mathbb{R}$ részhalmazai)

1. definíció. Az $\mathbb{R}$ azon $\mathbb{N}$ részhalmazát, melyre

(i) $1 \in \mathbb{N}$,
(ii) ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $n + 1 \in \mathbb{N}$,
(iii) ha $M \subset \mathbb{N}$ olyan, hogy $1 \in M$ és $n \in M$-ből következik, hogy $n + 1 \in M$, akkor $M = \mathbb{N}$

teljesül, a ***természetes számok halmazá***nak nevezzük.

Az (i)-(ii)-(iii) tulajdonságokat a természetes számok ***Peano-féle axiómái***nak nevezzük. A (iii), úgynevezett indukciós axióma biztosítja a teljes indukciós bizonyítások létjogosultságát.

2. definíció. Egy $x \in \mathbb{R}$ számot ***egész szám***nak nevezünk, ha léteznek $n, m \in \mathbb{N}$, hogy $x = m - n$. A $\mathbb{Z} = \{m - n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ halmazt pedig az egész számok halmazának nevezzük.

1. megjegyzés. Könnyen belátható, hogy $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{n \mid -n \in \mathbb{N}\}$, ahol az $\{n \mid -n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^-$ halmazt a negatív egész számok halmazának nevezzük.

2. megjegyzés. $\forall\ x, y \in \mathbb{Z} \implies x + y, x - y, xy \in \mathbb{Z}$. Azaz az egész számok halmazából nem vezet ki az összeadás, a kivonás és a szorzás.

3. definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$, úgy

$$x^1 \doteq x, \qquad x^n \doteq x^{n-1}x \quad (n \in \mathbb{N},\ n \neq 1)$$

szerint definiáljuk x ***természetes kitevőjű hatványait***. Továbbá

$$x^0 \doteq 1\ , \qquad x^{-n} \doteq \frac{1}{x^n} \quad (x \neq 0,\ n \in \mathbb{N})$$

szerint a ***0, illetve negatív egész kitevőjű hatványt***.

Több elem összeadásának, illetve szorzásának pontos definíciója, és ezek elegáns jelölése a következő.

4. definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \doteq a_1, \quad \text{ha } n = 1, \qquad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + a_n, \quad \text{ha } n > 1,$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \doteq a_1, \quad \text{ha } n = 1, \qquad \text{és} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cdot a_n, \quad \text{ha } n > 1.$$

3. megjegyzés. Az első n természetes szám szorzata $n! \doteq 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (az $n!$ jelőlést „n faktoriális”-nak olvassuk). 0! alatt 1-et értünk.

$\binom{n}{k} \doteq \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ a binomiális együttható ($n, k \in \mathbb{N}$). Az $\binom{n}{k}$ jelölést „n alatt a k"-nak olvassuk.
Belátható, hogy $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + \cdots + \\ &+ \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n}x^n = \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k} \qquad \text{(binomiális tétel).}\end{aligned}$$

5. definíció. Egy $x \in \mathbb{R}$ számot ***racionális***nak nevezünk, ha létezik $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, hogy $x = \dfrac{p}{q}$. Ellenkező esetben x-et irracionálisnak nevezzük. A

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ és } \exists\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ \text{hogy } x = \frac{p}{q}\right\}$$

halmazt a ***racionális számok***, míg az $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ halmazt az ***irracionális*** számok halmazának nevezzük.

4. megjegyzés.
- Adott x esetén p és q nem egyértelműen meghatározott.
- Ha $x, y \in \mathbb{Q}$, akkor $x+y, x-y, xy \in \mathbb{Q}$, és ha még $y \neq 0$, akkor $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ is teljesül. Azaz a racionális számok halmazából nem vezet ki a a négy alapművelet.
- $\mathbb{Q}$ rendezett test.
- Belátható, hogy $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \neq \emptyset$. Azaz van irracionális szám.

c) A rendezési axiómák fontosabb következményei

6. definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ha $0 < x$, akkor x-et ***pozitív***nak, ha $0 \leq x$, akkor ***nem negatív***nak, ha $x < 0$, akkor ***negatív***nak; ha $x \leq 0$, akkor ***nem pozitív***nak nevezzük.
Az $\{x \mid x > 0\}$, $\{x \mid x \geq 0\}$, $\{x \mid x < 0\}$ és $\{x \mid x \leq 0\}$ halmazokat pedig $\mathbb{R}$-beli pozitív, nem negatív, negatív, nem pozitív számok halmazának nevezzük.

7. tétel. *Ha $x, y, z, u, v \in \mathbb{R}$, akkor*

a) $x < y \implies x + z < y + z$;
b) $0 < x \implies -x < 0$; $x < 0 \implies 0 < -x$;
c) $0 < x \wedge 0 < y \implies 0 < xy$;
d) $0 \leq x^2$; $0 < 1$;
e) $0 < x \wedge y < 0 \implies xy < 0$; $x < 0 \wedge y < 0 \implies 0 < xy$;
f) $0 < xy \wedge 0 < x \implies 0 < y$; $0 < x \implies 0 < \dfrac{1}{x}$;

g) $x \le y \ \wedge \ z \le u \implies x+z \le y+u$;
$x < y \ \wedge \ z \le u \implies x+z < y+u$;
$(0 \le x \ \wedge \ 0 \le y \implies 0 \le x+y; \quad 0 < x \ \wedge \ 0 \le y \implies 0 < x+y)$;
h) $x < y \ \wedge \ 0 < z \implies xz < yz; \quad x < y \ \wedge \ z < 0 \implies yz < xz$;
i) $0 < y < x \ \wedge \ 0 < z < v \implies yz < xv$;
j) $0 < x < y \ \wedge \ n \in \mathbb{N} \implies 0 < x^n < y^n$;
k) $0 < x < y \implies 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$;
l) $n \in \mathbb{N} \implies n \ge 1$;
m) $\forall\, k \in \mathbb{Z}$ *esetén* $\nexists\, l \in \mathbb{Z}$, *hogy* $k < l < k+1$.

7. definíció. Az $x \in \mathbb{R}$ ***abszolút értékén*** az

$$|x| \doteq \begin{cases} x\ , & \text{ha } 0 \le x, \\ -x\ , & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

nem negatív számot értjük.

8. tétel. *Ha* $x, y \in \mathbb{R}$, *akkor*

a) $|-x| = |x|$;
b) $|xy| = |x||y|$;
c) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \ne 0)$;
d) $|x+y| \le |x| + |y|$;
e) $||x| - |y|| \le |x-y|$.

8. definíció. Ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor a $d(x,y) \doteq |x-y|$ számot az x ***és*** y ***távolságá***nak nevezzük.
Azaz a $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény távolság (metrika) $\mathbb{R}$-ben.

9. tétel. *Ha* $x, y, z \in \mathbb{R}$, *akkor*

1) $d(x,y) \ge 0$, $\quad d(x,y) = 0 \iff x = y$;
2) $d(x,y) = d(y,x)$ (*szimmetrikus*);
3) $d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z)$ (*háromszög egyenlőtlenség*).

Bizonyítás. Az abszolútérték tulajdonságai alapján igen egyszerű. □

9. definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Az

$$]\,a,b\,[\ \doteq \{x \mid a < x < b\}\ ;$$
$$[\,a,b\,] \doteq \{x \mid a \le x \le b\};$$
$$]\,a,b\,] \doteq \{x \mid a < x \le b\};$$
$$[\,a,b\,[\ \doteq \{x \mid a \le x < b\}$$

halmazokat ***nyílt***, ***zárt***, ***félig nyílt*** (***zárt***) ***intervallumok***nak nevezzük $\mathbb{R}$-ben.

10. definíció. Az $a \in \mathbb{R}$ valós szám r (> 0) sugarú ***nyílt gömbkörnyezet***én a $K(a,r) \doteq \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,a) < r\}$ halmazt értjük.
Valójában $K(a,r)$ az a középpontú, $2r$ hosszúságú nyílt intervallum, azaz $K(a,r) = \,]\,a-r, a+r\,[$.

d) A teljességi axióma fontosabb következményei

10. tétel. *Az $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ (a természetes számok halmaza) felülről nem korlátos.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbb{N}$ felülről korlátos az $\mathbb{R}$ rendezett halmazban. Ekkor a teljességi axióma miatt $\exists\ \alpha = \sup \mathbb{N}$. Így $\alpha - 1$ $(< \alpha)$ nem felső korlátja $\mathbb{N}$-nek, azaz $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy $\alpha - 1 < n$, amiből $\alpha < n+1$ következik. Ugyanakkor $n+1 \in \mathbb{N}$ miatt ez azt jelenti, hogy α nem felső korlátja $\mathbb{N}$-nek, ami ellentmondás. □

11. tétel. *Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik $l \in \mathbb{Z}$, hogy $l \le x < l+1$. l egyértelműen meghatározott.*

12. tétel (Archimedesi tulajdonság). *Bármely $x \in \mathbb{R}_+$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén létezik $n \in \mathbb{N}$, hogy $y < nx$.*

Bizonyítás. Az 10. tétel miatt $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy $\dfrac{y}{x} < n$ (hiszen $\dfrac{y}{x}$ sem lehet felső korlátja $\mathbb{N}$-nek), ami adja, hogy $y < nx$. □

11. definíció. Legyen $I = \{[a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \mid i \in \mathbb{N}\}$ zárt intervallumok olyan rendszere, melyre $a_i \le a_{i+1} \le b_{i+1} \le b_i \quad \forall\ i \in \mathbb{N}$ (azaz $[a_{i+1}, b_{i+1}] \subset [a_i, b_i]$), akkor ezt egymásba skatulyázott zárt intervallum rendszernek nevezzük.

13. tétel (Cantor-féle metszettétel). *Legyen $I = \{[a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \mid i \in \mathbb{N}\}$ egymásba skatulyázott zárt intervallumok rendszere. Ekkor*

$$\bigcap I = \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset\ .$$

Bizonyítás. Az egymásba skatulyázottság adja, hogy $\forall\ i,j \in \mathbb{N}$-re $a_i \le b_j$, így $\forall\ j \in \mathbb{N}$-re b_j az $A \doteq \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ halmaznak felső korlátja, melyre $\alpha = \sup A \le b_j$ teljesül. Így α alsó korlátja a $B = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ halmaznak, ezért $\alpha \le \inf B = \beta$.
Mivel $[\alpha, \beta] \subset [a_i, b_i]$ $\forall\ i \in \mathbb{N}$-re, ezért $\bigcap I = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \supset [\alpha, \beta] \neq \emptyset$, ami adja az állítást. □

Tételünk tehát azt állítja, hogy egymásba skatulyázott zárt intervallumok metszete nem üres.

Megjegyzés. Szokásos az is, hogy a Cantor-tételt választják teljességi axiómának. Ekkor a mi teljességi axiómánkat kell bizonyítani.

12. definíció. A $H \subset \mathbb{R}$ halmazt $\mathbb{R}$-ben mindenütt sűrűnek nevezzük, ha bármely $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ esetén létezik $h \in H$, melyre $x < h < y$ teljesül.

14. tétel. *A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza sűrű $\mathbb{R}$-ben. Azaz bármely két valós szám között van racionális szám.*

Megjegyzés. Belátható, hogy $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (az irracionális számok halmaza) is sűrű $\mathbb{R}$-ben.

15. tétel. *Bármely x nem negatív valós szám és $n \in \mathbb{N}$ esetén pontosan egy olyan y nem negatív valós szám létezik, melyre $y^n = x$.*

13. definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$ nem negatív és $n \in \mathbb{N}$. Azt (az előbbi tétel alapján egyértelműen létező) $y \in \mathbb{R}$ ***nem negatív számot, melyre*** $y^n = x$ ***teljesül az*** x ***szám*** n***-edik gyökének nevezzük***, és rá az $\sqrt[n]{x}$, vagy $x^{\frac{1}{n}}$ jelölést használjuk ($\sqrt[2]{x}$ helyett $\sqrt{x}$-et írunk).

14. definíció. Ha n páratlan természetes szám és $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$, akkor $\sqrt[n]{x} \doteq x^{\frac{1}{n}} \doteq -\sqrt[n]{-x}$. (Erre teljesül, hogy $(\sqrt[n]{x})^n = x$.)

15. definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{Q}$ és $r = \dfrac{m}{n}$ (ahol $m \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{N}$). Ekkor x r-edik hatványa: $x^r \doteq x^{\frac{m}{n}} \doteq \sqrt[n]{x^m}$.

Megjegyzések.
1. A racionális kitevőjű hatvány értéke független az r előállításától.
2. A hatványozás azonosságai racionális kitevőjű hatványokra is igazolhatók.

e) A bővített valós számok halmaza

16. definíció. Ha $S \subset \mathbb{R}$ felülről nem korlátos, akkor legyen $\sup S = +\infty$. Ha $S \subset \mathbb{R}$ alulról nem korlátos, akkor legyen $\inf S = -\infty$.
Az $\mathbb{R}_b = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ halmazt a bővített valós számok halmazának nevezzük.

Megjegyzések.
1. Meg akarjuk őrizni $\mathbb{R}_b$-ben $\mathbb{R}$ eredeti rendezését, ezért legyen
   $-\infty < x < +\infty \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén.
2. Ekkor $+\infty$ felső korlátja $\mathbb{R}_b$ bármely részhalmazának, és minden nem üres részhalmaznak van $\mathbb{R}_b$-ben pontos felső korlátja. Ilyen megjegyzés fűzhető az alsó korlátokhoz is.
3. $\mathbb{R}_b$ nem test.
4. Megállapodunk az alábbiakban:

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén	$x + (+\infty) = +\infty$; $x - (+\infty) = -\infty$; $\dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0$;
$\forall\, 0 < x \in \mathbb{R}$ esetén	$x \cdot (+\infty) = +\infty$; $x \cdot (-\infty) = -\infty$;
$\forall\, y \in \mathbb{R},\ y < 0$ esetén	$y \cdot (+\infty) = -\infty$; $y \cdot (-\infty) = +\infty$;

továbbá

$$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty\ ;\ (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty\ ;\ (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty\ .$$

Nem értelmezzük ugyanakkor a következőket:

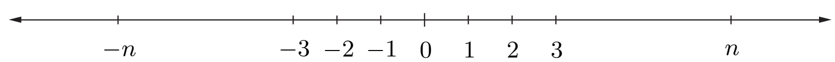
$$0\cdot(+\infty)\ ;\ 0\cdot(-\infty)\ ;\ (+\infty)-(+\infty)\ ;\ (-\infty)-(-\infty)\ .$$

f) A valós számok egy modellje – a számegyenes

Tekintsünk a síkban egy egyenest és rajta a 0 pontot, majd a 0 által meghatározott egyik félegyenesen az 1 pontot.

A 0-ból 1-be vezető szakaszt 1-ből indulva mérjük fel ebben az irányban, majd a kapott pontból folytassuk az eljárást. A $\overline{01}$ szakasz n-szeri felvétele után kapott ponthoz rendeljük az $n \in \mathbb{N}$ számot $\forall\ n \in \mathbb{N}$ esetén:

Így a természetes számokat az egyenes bizonyos pontjaiként ábrázoljuk.
Az eljárást 0-ból ellenkező irányban elvégezve elhelyezzük (ábrázoljuk) a $-1, -2, \ldots, -n, \ldots$ $(n \in \mathbb{N})$ negatív egészeket is.



1. ábra. A természetes számok elhelyezése a számegyenesen

Ha $m \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor egyértelműen megadható egy x pont az egyenesen, hogy a 0-ból x-be vezető szakaszt n-szer felmérve éppen az m pontot kapjuk (egyszerűsítve: $\exists\ x,\ nx = m$). Az így nyert (szerkesztett) x ponthoz az $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ számot rendeljük.

Ezzel még nem rendeltünk valós számot az egyenes minden pontjához. Ha például a $\overline{01}$ szakaszt egy négyzet oldalának tekintjük és annak átlóját felmérjük 0-ból valamelyik irányban, a kapott pontban nincs racionális szám (ez olyan c szám, melyre $c^2 = 2$, azaz $c = \sqrt{2}$, vagy $c = -\sqrt{2}$, melyek nem racionálisak).

Az egyenes összes még megmaradó pontjához rendelt számok az irracionális számok. Azt, hogy ez az egyenes, mint számegyenes nem „lyukas” a teljességi axióma, vagy a Cantor-féle metszettétel biztosítja.

Megadhatóak a műveletek geometriai jelentései, vizsgálhatók tulajdonságaik, bevezethető a rendezés és bizonyíthatók annak tulajdonságai. Szemléletes az intervallum, abszolút érték, távolság fogalma.

Bebizonyítható, hogy $\mathbb{R}$ és az egyenes pontjai között kölcsönösen egyértelmű a megfeleltetés és az ezt biztosító bijekció lényegében egyértelmű.

g) Nevezetes egyenlőtlenségek

16. tétel (Bernoulli-egyenlőtlenség). *Ha* $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ *és* $x \geq -1$, *akkor*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\ .$$

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $n = 1$ vagy $x = 0$.

Bizonyítás. Teljes indukcióval.
$n = 1$-re az állítás nyilván igaz. Ha n-re igaz, akkor $1 + x \geq 0$ miatt

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq$$
$$\geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \ ,$$

így az állítás minden természetes számra igaz. □

17. definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$; $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$A_n \doteq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \doteq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \ ;$$

Továbbá $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ esetén

$$G_n \doteq \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n} \doteq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \ .$$

Az A_n és G_n számokat az $x_1, \ldots, x_n$ számok ***számtani*** (aritmetikai), illetve ***mértani*** (geometriai) ***közep***ének nevezzük.

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség az alábbi.

17. tétel (Cauchy). *Ha $n \in \mathbb{N}$ és $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ akkor*

$$G_n \leq A_n \ ,$$

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

18. tétel (Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség).
Legyenek $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \ .$$

19. tétel (Minkowski-egyenlőtlenség).
Legyenek $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \ .$$

Bizonyítás. A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség alapján. □

3. (Szám)halmazok számossága

1. definíció. Az A ***és B halmazok egyenlő számosságúak***, ha ekvivalensek, azaz $\exists\ f : A \to B$ invertálható függvény, hogy $B = f(A)$ (tehát $\exists\ f : A \to B$ bijekció). Az A ***halmaz számossága nagyobb, mint a B halmaz számossága***, ha A és B nem egyenlő számosságú és $\exists\ C \subset A$, hogy C és B számossága megegyezik.

2. definíció. Az A ***halmaz véges*** (számosságú), ha $A = \emptyset$ vagy $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy A ekvivalens az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazzal. Az A ***halmaz végtelen*** (számosságú), ha nem véges. Az A ***halmaz megszámlálhatóan végtelen*** (számosságú), ha ekvivalens a természetes számok halmazával. Az A ***halmaz megszámlálható***, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

Megjegyzések.

1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ megszámlálhatóan végtelen, mert az
$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f((m, n)) = 2^{m-1}(2n-1)$$
függvény bijekció.
2. Ha $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ olyan halmazrendszer, hogy Γ nem üres, megszámlálható, $\forall\ A_\gamma$ megszámlálható, akkor az $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ is megszámlálható.

1. tétel. *A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen.*

Bizonyítás. Ha $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re $A_n \doteq \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}\}$, úgy $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Q}$. Másrészt $\mathbb{Z}$, és így A_n is megszámlálhatóan végtelen, és ekkor (az előbbi megjegyzés 2. része miatt) $\mathbb{Q}$ is az. □

2. tétel. *A valós számok számossága nagyobb, mint* $\mathbb{N}$ *számossága.*

Bizonyítás. Feladat. □

3. definíció. A valós számok halmazát és a vele ekvivalens halmazokat kontinuum számosságú halmazoknak nevezzük.

4. $\mathbb{R}$ topológiája

1. definíció. Legyen adott az $E \subset \mathbb{R}$ halmaz. Azt mondjuk, hogy

- $x \in E$ ***belső pontja*** E-nek, ha $\exists\ K(x, r)$, hogy $K(x, r) \subset E$;
- $x \in \mathbb{R}$ ***külső pontja*** E-nek, ha belső pontja E komplementerének, CE-nek (azaz $\exists\ K(x, r),\ K(x, r) \cap E = \emptyset$);
- $x \in \mathbb{R}$ ***határpontja*** E-nek, ha nem belső és nem külső pontja (azaz $\forall\ K(x, r)$-re $K(x, r) \cap E \neq \emptyset\ \wedge\ K(x, r) \cap CE \neq \emptyset$).

E belső pontjainak halmazát E ***belsejé***nek, a határpontjainak halmazát E ***határá***nak nevezzük. E belsejét E° jelöli.

Példa. Legyen $E =]0,1[\subset \mathbb{R}$.
$x = \dfrac{1}{2}$ belső pontja E-nek, mert $K(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) =]0,1[\subset E$.
$x = 5$ külső pontja E-nek, mert $K(5,1) =]4,6[\subset CE$ miatt belső pontja CE-nek.
$x = 1$ határpontja E-nek, mert $\forall\, K(1,r) \not\subset E$ miatt nem belső pontja és $\forall\, K(1,r) \not\subset CE$ miatt nem külső pontja E-nek.

2. definíció. Az $E \subset \mathbb{R}$ halmazt ***nyílt***nak nevezzük, ha minden pontja belső pont; ***zárt***nak nevezzük, ha CE nyílt.

Példa.

1. $E =]0,1[\subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, mert $\forall\ x \in]0,1[$ esetén $K(x,r) \subset]0,1[$, ha $r = \inf\{x, 1-x\}$, azaz E minden pontja belső pont.
2. $E = [0,+\infty[\subset \mathbb{R}$ zárt halmaz, mert $CE =]-\infty, 0[$ nyílt halmaz, hiszen $\forall\ x \in CE$ esetén $K(x,|x|) \subset CE$, azaz CE minden pontja belső pont.

1. tétel. *$\mathbb{R}$-ben igazak a következők:*

1) *$\mathbb{R}$ és $\emptyset$ nyílt halmazok,*
2) *tetszőlegesen sok nyílt halmaz egyesítése nyílt,*
3) *véges sok nyílt halmaz metszete nyílt,*

illetve

4) *$\mathbb{R}$ és $\emptyset$ zárt halmazok,*
5) *tetszőlegesen sok zárt halmaz metszete zárt,*
6) *véges sok zárt halmaz egyesítése zárt.*

Bizonyítás.
– 1) és 4) a definíció alapján nyilvánvaló.
– 2) igaz, mert E_γ $(\gamma \in \Gamma)$ nyílt $\Longrightarrow$ bármely $x \in \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ -ra létezik γ_0, melyre $x \in E_{\gamma_0} \Longrightarrow \exists\ K(x,r) \subset E_{\gamma_0} \Longrightarrow K(x,r) \subset \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma \Longrightarrow \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ nyílt.
– 3) is igaz, mert ha E_i $(i = 1,\dots,n)$ nyílt, akkor $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i \Longrightarrow x \in E_i$ $(i = 1,\dots,n) \Longrightarrow \exists\ K(x,r_i) \subset E_i$ $(i = 1,\dots,n) \Longrightarrow 0 < r < r_i$ $(i = 1,\dots,n)$-re $K(x,r) \subset E_i$ $(i = 1,\dots,n) \Longrightarrow K(x,r) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i \Longrightarrow x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$ belső pont $\Longrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$ nyílt.
– 5) és 6) a

$$C\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} CE_\gamma \quad \text{és} \quad C\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} CE_i$$

de-Morgan-azonosságokból jön a zártság definíciója, illetve 2) és 3) teljesülése miatt. □

3. definíció. Legyen adott az $E \subset \mathbb{R}$ halmaz. Az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontot az E halmaz ***torlódási pont***jának nevezzük, ha bármely $r > 0$ esetén a $K(x_0, r)$ környezet

tartalmaz x_0-tól különböző E-beli pontot, azaz
$(K(x_0, r)\setminus\{x_0\}) \cap E \neq \emptyset$.
$x_0 \in E$ ***izolált pont***ja E-nek, ha nem torlódási pontja, azaz létezik $r > 0$, hogy $(K(x_0, r)\setminus\{x_0\}) \cap E = \emptyset$.
E torlódási pontjainak halmazát E'-vel jelöljük.

Példa.

1. Az $E = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ halmaznak $0 \in \mathbb{R}$ $(0 \notin E)$ torlódási pontja, mert bármely $K(0, r)$ környezetben van eleme E-nek, hiszen $\forall\ r \in \mathbb{R}_+$-ra – mert $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos – $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy $n > \frac{1}{r}$, azaz $0 < \frac{1}{n} < r$.
2. Az $E = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ halmaz minden pontja izolált pont, mert $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re $(K(n, 1) \setminus \{n\}) \cap E = \emptyset$.

2. tétel. *Az $E \subset \mathbb{R}$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha $E' \subset E$ (azaz tartalmazza minden torlódási pontját).*

Bizonyítás.

a) E zárt $\Longrightarrow$ CE nyílt $\Longrightarrow$ $\forall\ x \in CE \quad \exists\ K(x, r) \subset CE \Longrightarrow$
$\forall\ x \in CE$-re $x \notin E' \implies E' \subset E$.

b) Legyen $E' \subset E$. $x \notin E \implies x \notin E' \implies \exists\ K(x, r)$, melyre $(K(x, r)\setminus\{x\}) \cap E = \emptyset$. Másrészt $x \notin E$ miatt $\{x\} \cap E = \emptyset$. Tehát $x \notin E \implies \exists\ K(x, r) \subset CE$. Azaz CE nyílt, így E zárt. □

Megjegyzés. $\mathbb{R}_b$-ben a $+\infty$ és $-\infty$ környezetén az $(r, +\infty)$ és $(-\infty, r)$ $(r \in \mathbb{R})$ intervallumokat értjük. Így definiálható az is, hogy a $+\infty$ és $-\infty$ mikor torlódási pont.

3. tétel (Bolzano-Weierstrass). *Bármely $S \subset \mathbb{R}$ korlátos, végtelen halmaznak létezik torlódási pontja.*

4. definíció. Nyílt halmazok egy O rendszere az $S \subset \mathbb{R}$ halmaznak egy ***nyílt lefedése***, ha $S \subset \bigcup O$.

Példa. Az $\mathbb{N}$ halmaznak a $\{K(n, 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmazrendszer egy nyílt lefedése, hiszen $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re $n \in K(n, 1)$, és így $n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} K(i, 1)$, továbbá $K(i, 1)$ nyílt halmaz.

5. definíció. A $K \subset \mathbb{R}$ ***halmazt kompakt***nak nevezzük, ha minden nyílt lefedéséből kiválasztható véges sok halmaz, mely lefedi K-t.

Példa.

1. $\mathbb{N}$ nem kompakt, mert $\forall\ K(n, 1)$ elhagyásával az $n \in \mathbb{N}$-t a maradék halmazok nem fedik le, így létezik olyan nyílt lefedése $\mathbb{N}$-nek, melyből nem választható ki véges lefedés.
2. $K = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \mathbb{R}$ kompakt, mert $\forall\ O$ nyílt lefedőrendszer esetén – $K \subset O$ miatt – az $1, 2, 3, 4, 5$ elemekhez léteznek O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 nyílt halmazok,

hogy $i \in O_i,\ i = 1, 2, 3, 4, 5$ és így $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{5} O_i$, azaz $\forall$ O lefedésből kiválasztható véges lefedés.

4. tétel (Heine-Borel). *Egy $K \subset \mathbb{R}$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Példa.

1. $\{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \mathbb{R}$ kompakt, valamint korlátos és zárt is.
2. $\mathbb{N}$ nem korlátos és nem kompakt halmaz.
3. $]a, b[\subset \mathbb{R}$ nem kompakt.

III. fejezet

Sorozatok

1. Alapfogalmak és kapcsolatuk

1. definíció. Egy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt $\mathbb{R}$-beli ***sorozat***nak nevezünk. $f(n)$-et a sorozat n-edik elemének nevezzük.
A sorozat ***n-edik elem***ét $f(n) = a_n$ vagy $f(n) = x_n$ jelöli. A sorozat elemeinek halmazára az $\{a_n\}$ vagy $\{x_n\}$ jelölést használunk. Magát a sorozatot az $f \doteq \langle a_n \rangle$, vagy $f \doteq \langle x_n \rangle$ szimbólummal jelöljük.

Példa. $\langle \frac{1}{n} \rangle$, $\langle n \rangle$ sorozatok $\mathbb{R}$-ben, n-edik tagjuk $\frac{1}{n}$, illetve n, elemeik halmaza $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, illetve $\mathbb{N}$.

2. definíció (korlátosság). Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli ***sorozat***ot ***korlátos***nak nevezzük, ha $\{x_n\}$ korlátos. Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat alulról (felülről) korlátos, ha $\{x_n\}$ alulról (felülről) korlátos.

Példa.
1. Az $\langle \frac{1}{n} \rangle$ sorozat korlátos, mert egyrészt $0 < \frac{1}{n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, így alulról korlátos, másrészt $n \geq 1$ miatt $\frac{1}{n} \leq 1$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén, így felülről korlátos.
2. Az $\langle n \rangle$ sorozat alulról korlátos, mert $0 < n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, de felülről nem korlátos, mert $\{n\} = \mathbb{N}$ felülről nem korlátos, így $\langle n \rangle$ nem korlátos.

3. definíció (monotonitás). Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli ***sorozat***ot ***monoton*** növekvőnek (csökkenőnek) nevezzük, ha bármely $n \in \mathbb{N}$-re $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$); szigorúan monoton növekvő (csökkenő) ha $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re $x_n < x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$) teljesül.

Példa.
1. $\langle \frac{1}{n} \rangle$ szigorúan monoton csökkenő, mert $0 < n < n+1$ miatt
   $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
2. $\langle n \rangle$ szigorúan monoton növekvő, mert $n < n+1$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
3. $\langle (-1)^n n \rangle$ nem monoton növekvő, mert $a_1 = -1 < 2 = a_2$,
   de $a_2 = 2 > -3 = a_3$. Hasonlóan belátható, hogy a sorozat nem monoton csökkenő.

A kalkulus legfőbb eszközeit – a differenciálhányadost és az integrált – a határérték segítségével definiálják. Egy sorozat határértékeként olyat számot szeretnénk érteni, melyet a sorozat „tetszőleges pontossággal megközelít”.

4. definíció (konvergencia). Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli ***sorozat***ot ***konvergens***nek nevezzük, ha létezik $x \in \mathbb{R}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n \geq n(\varepsilon)$-ra $d(x, x_n) < \varepsilon$ teljesül. Az $x \in \mathbb{R}$ számot $\langle x_n \rangle$ határértékének nevezzük. Azt, hogy $\langle x_n \rangle$ konvergens és határértéke x, így jelöljük: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ vagy $x_n \to x$.

Példa.

1. A $\langle c \rangle$ konstans sorozat konvergens, és határértéke c, mert $\forall\, \varepsilon > 0$-ra $\forall\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ esetén $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$-ra $d(c, c) = 0 < \varepsilon$.
2. Az $\langle \frac{1}{n} \rangle$ sorozat konvergens és határértéke 0, mert $\forall\, \varepsilon > 0$-ra (mivel $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos) $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$, azaz $\frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$, így $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$-ra $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$, tehát $d(0, \frac{1}{n}) < \varepsilon$.

Megjegyzések.

1. A környezet fogalmát felhasználva a konvergencia ún. „környezetes” definícióját kapjuk: az $\langle x_n \rangle$ sorozat konvergens, ha $\exists\, x \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, K(x, \varepsilon)$-hoz $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$-ra $x_n \in K(x, \varepsilon)$ teljesül.
2. Egyszerűen belátható, hogy $x_n \to x \iff \forall\, K(x, \varepsilon)$-re $x_n \in K(x, \varepsilon)$ legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével.
3. Ha $\langle x_n \rangle$ olyan sorozat, hogy $x_n \to 0$, akkor nullsorozatnak nevezzük.

5. definíció (divergencia). Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli ***sorozat***ot ***divergens***nek nevezzük, ha nem konvergens. Azaz ha bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik $\varepsilon > 0$ (vagy $K(x, \varepsilon)$), hogy bármely $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$-re létezik $n \geq n(\varepsilon)$, hogy $d(x, x_n) \geq \varepsilon$ (vagy $x_n \notin K(x, \varepsilon)$).

Példa. $\langle (-1)^n \rangle$ divergens.
$x = +1$ és $x = -1$ nem lehet határérték, mert $\varepsilon = 1$ választással $(-1)^n \notin K(1, 1)$, ha n páratlan és $(-1)^n \notin K(-1, 1)$, ha n páros.
Ha $x \neq +1$ és $x \neq -1$ is teljesül, akkor $\varepsilon = \inf\{d(x, 1), d(x, -1)\}$ esetén $x_n \notin K(x, \varepsilon)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Így a definíció adja az állítást.

6. definíció. Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat $+\infty$-hez (illetve $-\infty$-hez) konvergál, ha $\forall\, M \in \mathbb{R}$-hez $\exists\, n(M) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n(M)$-re $x_n > M$ (illetve $x_n < M$) teljesül.

Példa.

1. Az $\langle n \rangle$ sorozat $+\infty$-hez konvergál, mert $\forall\, M \in \mathbb{R}$-re (mivel $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos) $\exists\, n(M) \in \mathbb{N}$, hogy $n(M) > M$, így $\forall\, n \geq n(M)$-re $n > M$, ami adja a definíció teljesülését.
2. A $\langle -n \rangle$ sorozat $-\infty$-hez konvergál, mert $\forall\, M \in \mathbb{R}$-re (mivel $\{-n\}$ alulról nem korlátos) $\exists\, n(M) \in \mathbb{N}$, hogy $-n(M) < M$, így $\forall\, n \geq n(M)$-re $-n \leq -n(M)$, ami ($-n(M) < M$ miatt) adja, hogy $-n < M$, azaz teljesül a definíció.

1. tétel (a határérték egyértelműsége). *Ha $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli konvergens sorozat, akkor egy határértéke van (azaz $x_n \to a$ és $x_n \to b$ esetén $a = b$).*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x_n \to a$ és $x_n \to b$ és $a \neq b$. Ekkor $a \neq b$ miatt

$$K\left(a, \frac{d(a,b)}{2}\right) \cap K\left(b, \frac{d(a,b)}{2}\right) = \emptyset \ .$$

Továbbá az $x_n \to a$ és $x_n \to b$ miatt $\exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\forall\ n > n(\varepsilon)$-ra $x_n \in K\left(a, \frac{d(a,b)}{2}\right)$ és $x_n \in K\left(b, \frac{d(a,b)}{2}\right)$, ami lehetetlen. Tehát $a = b$. $\square$

Megjegyzés. A tétel akkor is igaz, ha $x_n \to +\infty$ (vagy $x_n \to -\infty$).

2. tétel (konvergencia és korlátosság). *Ha az $\langle x_n \rangle$ sorozat konvergens, akkor korlátos.*

Bizonyítás. Ha $x_n \to x$ és $\varepsilon > 0$ adott, akkor $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$-ra $d(x, x_n) < \varepsilon$. Legyen $r = \sup\{\varepsilon,\ d(x, x_1), \ldots, d(x, x_{n(\varepsilon)-1})\}$. Ekkor $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re

$$d(x, x_n) \leq r \ ,$$

így $\{x_n\}$ korlátos $\Longrightarrow$ $\langle x_n \rangle$ korlátos. $\square$

Megjegyzés. Egy sorozat korlátosságából általában nem következik a konvergenciája.

Példa. A $\langle (-1)^n \rangle$ sorozat korlátos, mert $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ teljesül $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re (azaz alulról és felülről is korlátos), de – ahogy ezt már bizonyítottuk – nem kovergens.

3. tétel (monotonitás és konvergencia). *Ha az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat monoton növekvő (illetve csökkenő) és felülről (illetve alulról) korlátos, akkor konvergens és $x_n \to \sup\{x_n\}$ (illetve $x_n \to \inf\{x_n\}$).*

Bizonyítás. Legyen $\langle x_n \rangle$ monoton növekvő és felülről korlátos. Ekkor $\exists\ x = \sup\{x_n\}$ A szuprénum definíciója miatt $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $x_{n(\varepsilon)} > x - \varepsilon$, azaz $x_{n(\varepsilon)} \in K(x, \varepsilon)$. A monoton növekedés miatt $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ esetén $x_{n(\varepsilon)} \leq x_n < x$. Tehát $x_n \in K(x, \varepsilon)$, így $x_n \to x$.
A másik eset ($\langle x_n \rangle$ monoton csökkenő és alulról korlátos) bizonyítása analóg módon történik. $\square$

Példa. Az $\langle 1 - \frac{1}{n} \rangle$ sorozat monoton növekvő az alábbiak miatt. $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} \Longleftrightarrow -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} \Longleftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Longleftrightarrow n < n + 1$. Az utolsó egyenlőség teljesül $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re.

A sorozat felülről korlátos: $1 - \frac{1}{n} < 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{n} < 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{n} > 0$, ami igaz.
Így $\langle 1 - \frac{1}{n} \rangle$ konvergens.

$\sup\{1 - \frac{1}{n}\} = 1$, ugyanis $\beta = 1 - \varepsilon < 1$ $(\varepsilon > 0)$ nem lehet felső korlát, mert akkor $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re $1 - \frac{1}{n} \leq 1 - \varepsilon$ teljesülne, ami ekvivalens a $-\frac{1}{n} \leq -\varepsilon$, illetve $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$ és végül az $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$ egyenlőtlenséggel, $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re, ami $\mathbb{N}$ felülről korlátosságát jelentené, és ez ellentmondás.

Így az $\{1 - \frac{1}{n}\}$ halmaz $\forall\ \beta$ felső korlátjára $\beta \geq 1$ teljesül, ezért az 1 felső korlát a pontos felső korlát.

Tehát $1 - \frac{1}{n} \to 1$.

2. Sorozatok és műveletek, illetve rendezés

Definíció. Ha $\langle x_n\rangle$ és $\langle y_n\rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozatok, $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor az

$$\langle x_n\rangle + \langle y_n\rangle \doteq \langle x_n + y_n\rangle\ ; \qquad \lambda\langle x_n\rangle \doteq \langle \lambda x_n\rangle$$

szerint definiált sorozatokat az adott ***sorozatok összeg***ének illetve λ-***szorosá***nak nevezzük.
Ha $\langle x_n\rangle$ és $\langle y_n\rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozatok, akkor az

$$\langle x_n\rangle \cdot \langle y_n\rangle \doteq \langle x_n \cdot y_n\rangle\ ; \qquad \frac{\langle x_n\rangle}{\langle y_n\rangle} \doteq \left\langle \frac{x_n}{y_n}\right\rangle \quad (y_n \neq 0)$$

szerint definiált sorozatokat az adott ***sorozatok szorzatá***nak, illetve ***hányado-sá***nak nevezzük.

Az alábbi tételek szerint a négy alapművelet és a határérték képzés sorrendje felcserélhető

1. tétel. *Legyen $\langle x_n\rangle$ és $\langle y_n\rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat, $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges úgy, hogy $x_n \to x$ és $y_n \to y$. Ekkor $\langle x_n\rangle + \langle y_n\rangle$ és $\lambda\langle x_n\rangle$ konvergensek és $x_n + y_n \to x + y$, $\lambda x_n \to \lambda x$.*

Bizonyítás.

a) Ha $x_n \to x$ és $y_n \to y$, úgy $\forall\varepsilon > 0$-ra $\frac{\varepsilon}{2}$-höz $\exists\ n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geq n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ esetén $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ és $d(y, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ezért $\forall\ n \geq n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$-re
$$d(x + y, x_n + y_n) = |(x + y) - (x_n + y_n)| = |(x - x_n) + (y - y_n)| \leq$$
$$\leq |x - x_n| + |y - y_n| = d(x, x_n) + d(y, y_n) < \varepsilon\ ,$$
azaz $x_n + y_n \to x + y$.

b) Ha $\lambda = 0$, akkor $\lambda\langle x_n\rangle = \langle \lambda x_n\rangle = \langle 0\rangle$ konvergens és $\lambda x_n = 0 \to 0 \in \mathbb{R}$.
Ha $\lambda \neq 0$, akkor $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$-hoz $\exists\ n\left(\frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geq n\left(\frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right)$ esetén $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Ekkor $\forall\ n \geq n\left(\frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right)$-ra
$$d(\lambda x, \lambda x_n) = |\lambda x - \lambda x_n| = |\lambda|\,|x - x_n| = |\lambda| d(x, x_n) < |\lambda|\frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon\ ,$$
azaz $\lambda x_n \to \lambda x$. $\square$

Példa.

1. Az $\langle 1 + \frac{1}{n}\rangle$ sorozat konvergens, mert az $\langle 1\rangle$ sorozat konvergens és határértéke 1, az $\langle \frac{1}{n}\rangle$ sorozat is konvergens és határértéke 0, így a tétel miatt sorozatunk is konvergens és határértéke $1 + 0 = 1$.
2. Az $\langle \frac{5}{n}\rangle$ sorozat konvergens és határértéke 0, mert $\frac{1}{n} \to 0$ miatt $\frac{5}{n} = 5 \cdot \frac{1}{n} \to 5 \cdot 0 = 0$.

2. tétel. *Legyenek $\langle x_n\rangle$ és $\langle y_n\rangle$ olyan $\mathbb{R}$-beli sorozatok, hogy $x_n \to x$ és $y_n \to y$. Ekkor $\langle x_n\rangle \cdot \langle y_n\rangle$ és ha $y, y_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor $\dfrac{\langle x_n\rangle}{\langle y_n\rangle}$ is konvergens és $x_n \cdot y_n \to x \cdot y$, $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{x}{y}$.*

Példa.

1. Az $\left\langle \dfrac{1}{n^2}\right\rangle$ sorozat konvergens és határértéke 0, mert $\left\langle \dfrac{1}{n^2}\right\rangle = \left\langle \dfrac{1}{n}\right\rangle \cdot \left\langle \dfrac{1}{n}\right\rangle$ és $\dfrac{1}{n} \to 0$, így $\dfrac{1}{n^2} \to 0 \cdot 0 = 0$.
2. A $\left\langle \dfrac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}\right\rangle$ sorozat konvergens és határértéke $\dfrac{3}{2}$, mert $3+\dfrac{1}{n} \to 3$, $2+\dfrac{1}{n^2} \to 2$, így $\dfrac{3+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \to \dfrac{3}{2}$.

3. tétel. *Ha $\langle x_n\rangle$ korlátos, $\langle y_n\rangle$ pedig nullsorozat $\mathbb{R}$-ben, akkor $\langle x_n\rangle \cdot \langle y_n\rangle$ nullsorozat $(x_n \cdot y_n \to 0)$.*

Példa. A $\langle(-1)^n \frac{1}{n}\rangle$ sorozat nullsorozat, mert $\langle(-1)^n \frac{1}{n}\rangle = \langle(-1)^n\rangle\langle\frac{1}{n}\rangle$, továbbá $\langle(-1)^n\rangle$ korlátos $\langle\frac{1}{n}\rangle$ pedig nullsorozat.

4. tétel. *Ha $\langle x_n\rangle$ olyan $\mathbb{R}$-beli sorozat, hogy*

a) *$|x_n| \to +\infty$ és $x_n \neq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, akkor $\dfrac{1}{x_n} \to 0$;*

b) *$x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, akkor $\left|\dfrac{1}{x_n}\right| \to \infty$.*

Példa.

1. $\langle n^2+1\rangle$ konvergál a $+\infty$-hez, mert ha $M < 1$, úgy $n^2+1 > 1 > M$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, míg ha $M \geq 1$, akkor ($n \to +\infty$ miatt) $\sqrt{M-1}$-hez $\exists\, n(M) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n(M)$-re $n > \sqrt{M-1} \iff n^2 > M-1 \iff n^2+1 > M$.
   Így a tétel a) része miatt $\dfrac{1}{n^2+1} \to 0$.
2. $\dfrac{n^2}{n+2} = \dfrac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$ és $\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} \to 0$, így a tétel b) része miatt $\dfrac{n^2}{n+2} \to +\infty$.

5. tétel. *Ha $\langle x_n\rangle$ és $\langle y_n\rangle$ olyan $\mathbb{R}$-beli sorozatok, hogy $x_n \to x$ és $y_n \to y$ és*

a) *$\exists\, N_0 \in \mathbb{N}$, hogy $x_n \leq y_n$ (vagy $x_n < y_n$) $\forall\, n > N_0$-ra, akkor $x \leq y$;*

b) *$x < y$, akkor $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n > N_0$-ra $x_n < y_n$.*

6. tétel (rendőr-tétel). *Ha $\langle x_n\rangle$, $\langle y_n\rangle$, $\langle z_n\rangle$ olyan $\mathbb{R}$-beli sorozatok, hogy $x_n \to x$ és $y_n \to x$ és $x_n \leq z_n \leq y_n$, akkor $z_n \to x$.*

Bizonyítás. A feltételek miatt $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ és $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $x_n \in K(x,\varepsilon)$, ha $n \geq n_1(\varepsilon)$ és $y_n \in K(x,\varepsilon)$, ha $n \geq n_2(\varepsilon)$. Így $x_n, y_n \in K(x,\varepsilon)$, ha $n \geq n(\varepsilon) = \sup\{n_1, n_2\}$, ezért az $x_n \leq z_n \leq y_n$ feltételből $z_n \in K(x,\varepsilon)$, ha $n \geq n(\varepsilon)$. Tehát $z_n \to x$. $\square$

Példa. $0 < \dfrac{n+1}{n^3+1} < \dfrac{n+1}{n^3} \leq \dfrac{2n}{n^3} = \dfrac{2}{n^2}$ miatt a tétel adja, hogy $\dfrac{n+1}{n^3+1} \to 0$.

3. Részsorozatok

1. definíció. Legyen $\langle a_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat. Ha $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő és $b_n = a_{\varphi(n)}$, akkor $\langle b_n \rangle$-t az $\langle a_n \rangle$ ***részsorozat***ának nevezzük.

Példa. Az $\left\langle \dfrac{1}{2n} \right\rangle$ sorozat és az $\left\langle \dfrac{1}{n^2+2} \right\rangle$ sorozat is részsorozata az $\left\langle \dfrac{1}{n} \right\rangle$ sorozatnak.

1. tétel. *Ha az $\langle a_n \rangle$ konvergens és határértéke a akkor $\forall\ \langle b_n \rangle$ részsorozatára $b_n \to a$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha $b_n = a_{\varphi(n)}$, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő, akkor teljes indukcióval kapjuk, hogy $\varphi(n) \geq n$ $(n \in \mathbb{N})$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, akkor $a_n \to a$ miatt $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$-ra $a_n \in K(a,\varepsilon)$. Így $\varphi(n) \geq n$ miatt $b_n \in K(a,\varepsilon)$ $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$, azaz $b_n \to a$. $\square$

Példa. A tétel és az $\left\langle \dfrac{1}{n} \right\rangle$ nullsorozat volta miatt az $\left\langle \dfrac{1}{2n} \right\rangle$ és az $\left\langle \dfrac{1}{n^2+2} \right\rangle$ sorozatok is nullsorozatok.

Megjegyzés. A tétel megfordítása nem igaz, de ha egy sorozat két diszjunkt részsorozatra bontható, melyek határértéke ugyanaz, akkor az a sorozatnak is határértéke.

2. tétel (Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel). *Ha az $\langle a_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat korlátos, akkor létezik konvergens részsorozata.*

2. definíció. Legyen A az $\langle a_n \rangle$ korlátos ($\mathbb{R}$-beli) sorozat konvergens részsorozatai határértékeinek halmaza. A $\sup\{A\}$ és $\inf\{A\}$ (létező) számokat az $\langle a_n \rangle$ ***felső*** illetve ***alsó határérték***ének vagy ***limesz szuperior***jának illetve ***limesz inferior***jának nevezzük. Jelölés: $\overline{\lim}\ a_n$, $\underline{\lim}\ a_n$ ($\limsup a_n$, $\liminf a_n$).
Ha $\langle a_n \rangle$ felülről (vagy alulról) nem korlátos, akkor $\overline{\lim}\ a_n = +\infty$ (illetve $\underline{\lim}\ a_n = -\infty$).

Példa. Az $\langle a_n \rangle = \langle (-1)^n \rangle$ sorozat konvergens részsorozatai a $\langle b_n \rangle = \langle 1 \rangle$ és $\langle b_n \rangle = \langle -1 \rangle$ konstans sorozatok, illetve azon $\langle b_n \rangle$ sorozatok, melyekben $b_n = 1$ véges sok

n kivételével, vagy $b_n = -1$ véges sok n kivételével.
Ezek határértéke 1 vagy -1, így $\overline{\lim}\ a_n = 1$, $\underline{\lim}\ a_n = -1$.

Megjegyzések.

1. $\sup\{A\}$, $\inf\{A\} \in A$.
2. Ha $\overline{\lim}\ a_n = \underline{\lim}\ a_n = a$, akkor $a_n \to a$.

4. Cauchy-sorozatok

Definíció. Az $\langle a_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozatot ***Cauchy-sorozat***nak nevezzük, ha $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ p, q \geq n(\varepsilon)$ $(p, q \in \mathbb{N})$ esetén $d(a_p, a_q) < \varepsilon$.

A határérték definíciója azt jelenti, hogy a sorozat tagjai „közel kerülnek” a határértékhez. A Cauchy-tulajdonság viszont azt, hogy a sorozat tagjai „közel kerülnek” egymáshoz.

Tétel (Cauchy-féle konvergencia kritérium). *Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

Megjegyzések.

1. A tétel segítségével eldönthető egy sorozat konvergenciája a határérték ismerete nélkül is, a divergenciát pedig bizonyos esetekben könnyebben tudjuk bizonyítani, mint a definíció alapján.
2. Szokás a Cauchy-féle konvergencia kritériumot teljességi axiómának választani (ami ugyancsak biztosítja, hogy a számegyenes nem „lyukas”), s ekkor az általunk adott teljességi axióma tétel lesz.

Példák.

1. Az $\left\langle \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right\rangle$ sorozat konvergens.
   Ha $p, q \in \mathbb{N}$, és például $p > q$, akkor
$$\begin{aligned} |a_p - a_q| &= \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+2)^2} + \cdots + \frac{1}{p^2} < \\ &< \frac{1}{q(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots + \frac{1}{(p-1)p} = \\ &= \frac{1}{q} - \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+1} - \frac{1}{q+2} + \cdots + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} = \\ &= \frac{1}{q} - \frac{1}{p} < \frac{1}{q} \end{aligned}$$
   és az archimedeszi axióma nevű tétel miatt $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$ és akkor $\forall\ q \in \mathbb{N}$, $q \geq n(\varepsilon)$-re $\frac{1}{q} < \varepsilon$, így $\forall\ q \geq n(\varepsilon)$ (és $\forall\ p \in \mathbb{N}$) esetén $|a_p - a_q| < \frac{1}{q} < \varepsilon$, ami adja azt is, hogy $\forall\ p, q \geq n(\varepsilon)$-ra $|a_p - a_q| < \varepsilon$, azaz a sorozat teljesíti a Cauchy-féle konvergencia kritériumot, ezért konvergens.

2. Az $\left\langle \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right\rangle$ sorozat divergens.
Ugyanis $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

így $\varepsilon = \frac{1}{2}$-hez egyetlen $n(\varepsilon)$ küszöbszám sem jó, ezért a sorozat nem teljesíti a Cauchy-féle kritérium feltételét.

5. Nevezetes sorozatok

Az alábbi tételek bizonyítását a Kalkulus I. példatár tartalmazza.

1. tétel. *Legyen* $a \in \mathbb{R},\ \langle a_n \rangle = \langle a^n \rangle$. *Ekkor*

1. $|a| < 1$ *esetén* $a^n \to 0$;
2. $|a| > 1$ *esetén* $\langle a^n \rangle$ *divergens;* $a > 1$*-re* $a^n \to +\infty$;
3. $a = 1$ *esetén* $a^n \to 1$; $a = -1$ *esetén* $\langle a^n \rangle$ *divergens.*

2. tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}$ *rögzített, akkor* $n^k \to +\infty$, $\sqrt[k]{n} \to +\infty$ *és* $n^p \to +\infty$, *ha* $p = \frac{k}{l}$ $(k, l \in \mathbb{N})$.

3. tétel. *Legyen* $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. *Ekkor* $\sqrt[n]{a} \to 1$.

4. tétel. $\sqrt[n]{n} \to 1$.

5. tétel. *Ha* $a \in \mathbb{R},\ a > 1$, *akkor* $a_n = \dfrac{a^n}{n!} \to 0$.

6. tétel. $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

7. tétel. *Ha* $a > 1$, *akkor* $\dfrac{n^k}{a^n} \to 0\ \forall\ k \in \mathbb{N}$ *rögzített számra.*

8. tétel. *Az* $\left\langle \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\rangle$ *sorozat konvergens. (Határértékét* e*-vel jelöljük.)*

IV. fejezet

Sorok

1. Alapfogalmak és alaptételek

Egy $\langle a_n \rangle$ sorozat tagjai összeadásával formálisan felírhatjuk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ „végtelen sok tagú" összeget. Ezen formális összeg mikor jelent egy számot? Erre a kérdésre a $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ részletösszegek konvergenciája segítségével fogunk válaszolni. Ki fog az is derülni, hogy a tényleges (numerikus, számítógépes) számítások gyakran ilyen sorok alapján adnak (közelítő) értéket a konkrét feladatok megoldására.

1. definíció. Ha adott egy $\langle a_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat, akkor azt az $\langle S_n \rangle$ sorozatot, melynél $S_n \doteq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ***végtelen sor***nak nevezzük és $\sum a_n$ (vagy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$-nel jelöljük. S_n-t a sor n***-edik részletösszeg***ének, a_n-t a sor n***-edik tag***jának nevezzük. Ha adott még az $a_0 \in \mathbb{R}$ szám is, úgy azt az $\langle S_n \rangle$ sorozatot, melynél $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ is végtelen sornak nevezzük és rá a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jelölést használjuk.

2. definíció. A $\sum a_n$ sort ***konvergens***nek mondjuk, ha $\langle S_n \rangle$ konvergens, és a $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ számot a sor összegének nevezzük.

Ezen összeget jelölheti a $\sum a_n$, illetve a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (ha az összegzés a_0-tól indul, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$) szimbólum is.

A $\sum a_n$ sor ***divergens***, ha nem konvergens.

Példák.

1. A $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ sornál $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \\ + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1\ ,$$

így a sor konvergens és összege 1.

2. Legyen $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ úgynevezett mértani (vagy geometriai) sor konvergens, mert
$$S_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \to \frac{1}{1-q}\ ,$$
így összege $\dfrac{1}{1-q}$.

3. A $\sum \dfrac{1}{n}$ úgynevezett harmonikus sor divergens, mert
$$\langle S_n \rangle = \left\langle 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right\rangle,$$
és korábban beláttuk, hogy az $\left\langle 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right\rangle$ sorozat divergens.

Megjegyzés. $\sum a_n$ sor konvergenciája éppen azt jelenti, hogy $\exists\ S \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \geq n(\varepsilon)$ esetén $|S_n - S| < \varepsilon$.

1. tétel (Cauchy-féle konvergencia kritérium sorokra).
A $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n, m \in \mathbb{N},\ n > m \geq n(\varepsilon)$ esetén
$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon\ .$$

Bizonyítás. A $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens (definíció szerint), ha $\langle S_n \rangle$ konvergens, ami (a sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritérium miatt) akkor és csak akkor igaz, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n, m \geq n(\varepsilon)$ $(n > m)$ esetén
$$\varepsilon > |S_n - S_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n|\ .$$
amit bizonyítani kellet. □

1. következmény. *A $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ m \geq n(\varepsilon)$ és $p \in \mathbb{N}$ esetén*
$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+p}| < \varepsilon\ .$$

Bizonyítás. Mint az előbb, csak $n = m + p > m \geq n(\varepsilon)$ választással. □

2. következmény (a sor konvergenciájának szükséges feltétele).
Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $a_n \to 0$.

Bizonyítás. Ha az 1. tételben $m = n - 1$, úgy azt kapjuk, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén $|a_n| < \varepsilon$, ami azt jelenti hogy $a_n \to 0$. □

Példa.
1. A $\sum \dfrac{1}{n}$ sornál $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, de (ahogy azt láttuk) a sor maga nem konvergens.
2. A $\sum \dfrac{1}{n^2}$ sornál $a_n = \dfrac{1}{n^2} \to 0$ és (mint azt láttuk) a sor konvergens.

3. definíció. A $\sum a_n$ ***abszolút konvergens***, ha $\sum |a_n|$ konvergens. A $\sum a_n$ ***feltételesen konvergens***, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

2. tétel. *Egy abszolút konvergens sor konvergens is.*

Bizonyítás. A $\sum |a_n|$ konvergenciája miatt $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ m, n \in \mathbb{N},\ n > m \geq n(\varepsilon)$-re

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \right| < \varepsilon \quad \text{és így} \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \right| < \varepsilon \ ,$$

ami az 1. tétel miatt adja $\sum a_n$ konvergenciáját. $\square$

3. tétel. *Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens sorok, és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek, akkor a $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ sor is konvergens, és összege $\lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Bizonyítás. $\sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ miatt a $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ sor n-edik részletösszege a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok n-edik részletösszegének a λ, μ számokkal képzett lineáris kombinációja, így a sorozatok műveleti tulajdonságai miatt jön az állítás. $\square$

2. Konvergenciakritériumok

1. tétel (nemnegatív tagú sorokra). *Legyen $\sum a_n$ nemnegatív tagokból álló sor. $\sum a_n$ akkor és csak akkor konvergens, ha részletösszegeinek $\langle S_n \rangle$ sorozata korlátos.*

Bizonyítás.

a) $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ alapján $\langle S_n \rangle$ monoton növekvő. Ha még korlátos is, akkor konvergens, így $\sum a_n$ konvergens.

b) $\sum a_n$ konvergens $\Longrightarrow$ $\langle S_n \rangle$ konvergens $\Longrightarrow$ $\langle S_n \rangle$ korlátos. $\square$

Példa. A $\sum \frac{1}{n^2}$ nem negatív tagú sor esetén $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \\ &= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2 \ , \end{aligned}$$

azaz $\langle S_n \rangle$ korlátos, így a sor konvergens.

2. tétel (összehasonlító kritérium). *Legyen $\sum a_n$ egy sor és $\sum b_n$ egy nemnegatív tagú sor.*

a) *Ha $|a_n| \leq b_n \quad \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ esetén, és $\sum b_n$ konvergens, akkor a $\sum a_n$ abszolút konvergens (majoráns kritérium).*

b) *Ha* $|a_n| \geq b_n$ $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ *esetén és* $\sum b_n$ *divergens, akkor a* $\sum a_n$ *nem abszolút konvergens (minoráns kritérium).*

Példa.

1. A $\sum \dfrac{1}{n^2+10}$ sor konvergens, mert $\dfrac{1}{n^2+10} < \dfrac{1}{n^2}$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, és a $\sum \dfrac{1}{n^2}$ sor konvergens.
2. A $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ sor divergens, mert $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{n}$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, és a $\sum \dfrac{1}{n}$ sor divergens.

3. tétel (Leibniz-féle kritérium). *Legyen* $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *és az* $\langle a_n \rangle$ *sorozat monoton csökkenően tartson a 0-hoz. Ekkor a* $\sum(-1)^{n+1}a_n$ *(úgynevezett jelváltó, vagy alternáló) sor konvergens.*

Példa. A $\sum(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ úgynevezett Leibniz-féle sor konvergens, mert $a_n = \dfrac{1}{n} > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, és $\langle \frac{1}{n} \rangle$ monoton csökkenően tart 0-hoz.

4. tétel (Cauchy-féle gyökkritérium). *Legyen* $\sum a_n$ *egy sor.*

a) *Ha* $\exists\ 0 < q < 1$ *és* $n_0 \in \mathbb{N}$, *hogy* $\forall\ n \geq n_0$*-ra* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, *akkor* $\sum a_n$ *abszolút konvergens.*

b) *Ha valamely* $n_0 \in \mathbb{N}$ *esetén* $\forall\ n \geq n_0$*-ra* $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, *akkor* $\sum a_n$ *divergens.*

Példa. A $\sum \dfrac{n}{3^n}$ sor konvergens, mert $\sqrt[n]{n} \to 1$ miatt $\forall\ q \in \left]\dfrac{1}{3}, 1\right[$ esetén $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geq n_0$-ra $\sqrt[n]{\dfrac{n}{3^n}} = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{3} < q < 1$.

5. tétel (D'Alembert-féle hányadoskritérium). *Legyen* $\sum a_n$ *egy sor, melyre* $a_n \neq 0$.

a) *Ha* $\exists\ 0 < q < 1$ *és* $n_0 \in \mathbb{N}$, *hogy* $\forall\ n \geq n_0$*-ra* $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$, *akkor* $\sum a_n$ *abszolút konvergens.*

b) *Ha* $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, *hogy* $\forall\ n \geq n_0$*-ra* $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, *akkor a* $\sum a_n$ *sor divergens.*

Példa. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$ sorra

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}\text{-re},$$

ami $\dfrac{2}{n+1} \to 0$ miatt adja, hogy $\forall\ 0 < q < 1$ esetén $\exists\ n_0$, hogy $\forall\ n \geq n_0$-ra $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1$, így a hányados kritérium miatt a sor konvergens.

Hasonlóan belátható, hogy a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ sor $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergens, mert ekkor $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{x}{n+1} \to 0$.

Megjegyzések.

1. A $\sum \dfrac{1}{n}$ és $\sum \dfrac{1}{n^2}$ soroknál nem alkalmazható a 4. és 5. tétel.
   A $\sum \dfrac{1}{n}$ sor divergens. De $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1$, ha $n > 2$, így a gyökkritérium („b)" része) nem használható. Másrészt $\frac{1}{n+1} \,/\, \frac{1}{n} < 1$, azaz a hányadoskritérium („b)" része) sem alkalmazható.
   A $\sum \dfrac{1}{n^2}$ sor konvergens. De $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$, így a gyökkritérium („a)" része) nem alkalmazható. Másrészt $\frac{1}{(n+1)^2} \,/\, \frac{1}{n^2} \to 1$, így a hányadoskritérium („a)" része) sem alkalmazható.
2. A Cauchy-féle gyökkritérium erősebb, mint a D'Alembert-féle hányadoskritérium, azaz ha a konvergencia vagy divergencia az utóbbival eldönthető, akkor az előbbivel is, de megadható olyan sor, melynek konvergenciája a Cauchy-féle gyökkritériummal eldönthető, de a D'Alembert-féle hányadoskritériummal nem. Például:
$$\sum a_n \ , \quad \text{ha} \quad a_n = \begin{cases} 5^{-n} & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 2^{-n} & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

3. Műveletek sorokkal

1. definíció. $\sum a_n$ és $\sum b_n$ ***sorok szorzatá***nak nevezünk minden olyan sort, melynek tagjai $a_i b_j$ alakúak és minden ilyen szorzat pontosan egyszer fordul elő tagként.

Megjegyzés. A különböző szorzatok egymásból csoportosításokkal és átrendezésekkel kaphatók. Értelmezünk két speciális szorzatot.

2. definíció. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ ***sorok téglányszorzata*** az a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ sor, melyben
$$c_n = (a_0 + \ldots + a_{n-1})b_n + a_n(b_0 + \ldots + b_{n-1}) + a_n b_n \ .$$

1. tétel. *Ha a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *és* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *sorok téglányszorzata, akkor*
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) \ .$$

Bizonyítás. Ha S_n^c, S_n^a és S_n^b a $\sum c_n$, $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok n-edik részletösszegei, úgy $S_n^c = S_n^a \cdot S_n^b$, ami adja az állítást. $\square$

	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_n	$\cdots$
b_0	a_0b_0	a_1b_0	a_2b_0	$\cdots$	a_nb_0	
b_1	a_0b_1	a_1b_1	a_2b_1	$\cdots$	a_nb_1	
b_2	a_0b_2	a_1b_2	a_2b_2	$\cdots$	a_nb_2	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
b_n	a_0b_n	a_1b_n	a_2b_n	$\cdots$	a_nb_n	
$\vdots$						

1. ábra. Sorok téglányszorzata

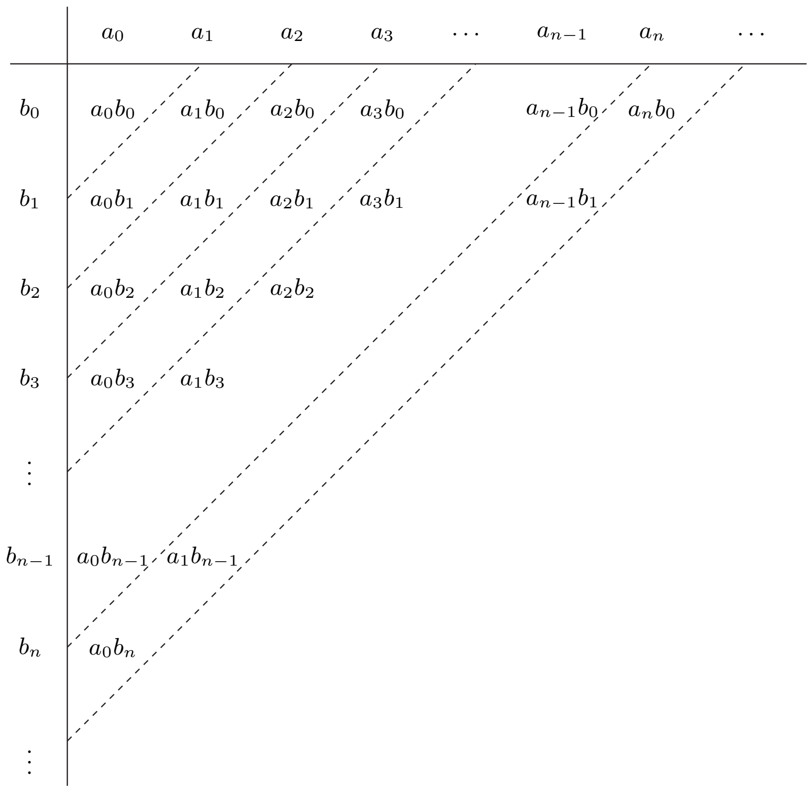
3. definíció. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ ***sorok Cauchy-szorzata*** az a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ sor, melyben

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 \ .$$

Példa. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{y^n}{n!}$ – egyébként, mint az láttuk $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ esetén konvergens – sorok Cauchy-szorzata a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \, \frac{1}{(n-k)!} \, x^k y^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \, x^k y^{n-k} \right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

sor (itt felhasználtuk a binomiális tételt).



2. ábra. Sorok Cauchy-szorzata

2. tétel (Mertens). *Ha a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens sorok egyike abszolút konvergens, akkor Cauchy-szorzatuk konvergens, és összege: $(\sum a_n) \cdot (\sum b_n)$.*

Példa. Az előbbi példa alapján a tétel adja, hogy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

4. Tizedes törtek

1. tétel. *Legyen $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Ekkor $\forall\ x \in (0,1)$ valós számhoz egy és csak egy olyan $\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \to A$ sorozat létezik, hogy $x = \sum \frac{a_n}{10^n}$, és nem létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $a_m < 9$ és $a_k = 9\ \forall k \in \mathbb{N},\ k > m$ esetén.*

Definíció. A tételben szereplő $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ sor összegét

$$0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

módon is jelöljük és $x \in (0, 1)$ ***tizedestört-alakjá***nak nevezzük.
Ha $\exists\ k \in \mathbb{N}$, hogy $a_k \neq 0$ és $a_n = 0\ \forall\ n > k$ természetes számra, akkor ***véges tizedes tört***ről beszélünk és

$$0, a_1 a_2 \dots a_k$$

módon jelöljük.
Ha léteznek olyan $k, l \in \mathbb{N}$ számok, hogy $a_{k+n} = a_{k+l+n}$ $(n = 0, 1, \dots)$, akkor ***szakaszos tizedes tört***ről beszélünk és azt

$$0, a_1 \dots a_{k-1} \overline{a_k \dots a_{k+l-1}}$$

módon is jelöljük.

Megjegyzések.
1. Belátható, hogy $x \in (0, 1)$ akkor és csak akkor racionális, ha szakaszos tizedestört.
2. Ha $y \in \mathbb{R}$, akkor $\exists\ x \in]0, 1[$ és $l \in \mathbb{Z}$, hogy $y = l + x$. Ekkor y előállítása $y = l, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ módon jelölhető, ha $x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$. Nyilván $y \in \mathbb{R}$ akkor és csak akkor racionális, ha a tizedestört része szakaszos. Egyébként y irracionális.
3. A tizedes törtekre (mint végtelen sorokra) értelmezhetők a műveletek, megadható rendezés, bizonyíthatók ezek tulajdonságai, érvényes a teljességi axióma is, ezért ez is egy modellje (reprezentációja) lehet a valós számoknak. Ez a tizedestört modell. Ennek elemeivel – bizonyos egyszerűsítésekkel – középiskolában is találkozhattunk.

V. fejezet

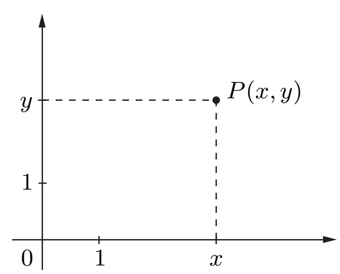
Függvények folytonossága

1. Alapfogalmak

1. definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvényeket ***valós függvény***eknek nevezzük.

A valós függvények olyan speciális relációk, melyek $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ részhalmazai. Ezek szemléltetését, illetve gráfjuk (grafikonjuk) ábrázolását biztosítja a Descartes-féle koordinátarendszer bevezetése, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ modelljének (reprezentációjának) alábbi megadása.

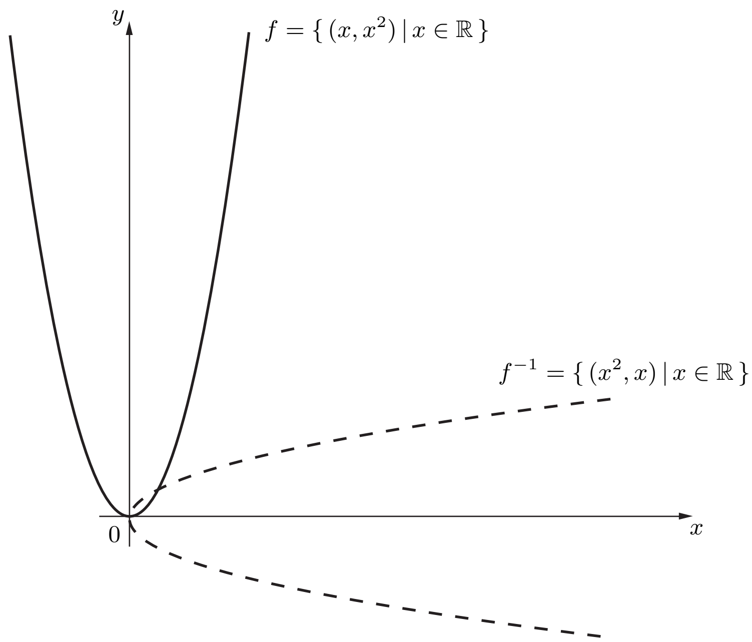
Tekintsünk két, egymásra merőleges egyenest a síkban, mint két olyan számegyenest, melynek 0-pontja a metszéspont és az 1 pont mindkét egyenesen azonos távolságra van 0-tól, akkor a sík pontjaihoz az $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ rendezett párokat bijektíven lehet hozzárendelni oly módon, hogy a P ponthoz rendelt x és y koordináta a P-ből az első és a második egyenesre bocsájtott merőleges talppontjának megfelelő szám legyen a kérdéses egyenesen.



1. ábra. Descartes-féle koordinátarendszer

A koordinátarendszer felvétele után a sík pontjai valós számpárokkal, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ elemeivel jellemezhetők, ekkor „sík”-on az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazt értjük.

Az $\{(x, x^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x \in \mathbb{R}\} = f$ reláció függvény lesz, mert $(x, y), (x, z) \in f$ esetén $y = x^2 = z$ teljesül. Ezt $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ módon is jelölhetjük. Ezen f függvény (mint reláció) inverze az $f^{-1} = \{(x^2, x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ reláció, ami nem függvény, így f nem invertálható. Ha az f $f|_{[0,+\infty[}$ leszűkítését tekintjük, úgy $(f|_{[0,+\infty[})^{-1}$ már függvény, így $f|_{[0,+\infty[}$ invertálható.



2. ábra. Nem invertálható függvény

2. definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***függvény korlátos***, ha $f(E)$ korlátos.
Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***függvény alulról*** (***felülről***) ***korlátos***, ha $f(E)$ alulról (felülről) korlátos.
A $\sup(f(E))$, $\inf(f(E))$ számokat az f pontos felső, illetve pontos alsó korlátjának (***supremum***ának, illetve ***infimum***ának) nevezzük E-n.

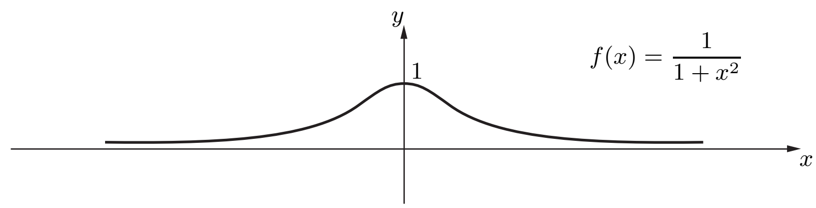
3. definíció. Ha az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén létezik $x_1, x_2 \in E$, hogy

$$\sup f(E) = f(x_1), \quad \inf f(E) = f(x_2) \ ,$$

akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik ***abszolút maximum***a, illetve ***minimum***a E-n.
Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in E$-ben ***helyi*** (***lokális***) ***maximum***a, illetve ***minimum***a van, ha létezik $K(x_0, \delta)$, hogy $x \in K(x_0, \delta) \cap E$-re $f(x) \leq f(x_0)$, illetve $f(x) \geq f(x_0)$ teljesül.

Példa. Az $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény teljesíti az alábbiakat.

– *Alulról korlátos*, mert $0 < \dfrac{1}{1 + x^2}$, hiszen ez, $1 + x^2 > 0$ miatt ekvivalens a $0 < 1$ igaz egyenlőtlenséggel $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén.



3. ábra. Korlátos függvény

- *Felülről korlátos*, mert $\dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$, hiszen ez az $1 \leq 1 + x^2$, illetve $0 \leq x^2$ igaz egyenlőtlenséggel ekvivalens $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén.
- Így f korlátos függvény.
- $\inf f(E) = 0$. Egyrészt 0 alsó korlátja f-nek. Másrészt f minden alsó korlátja ≤ 0. Tegyük fel ellenkezőleg, hogy $\exists\ \varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$ alsó korlátja $f(E)$-nek. Belátjuk, hogy ez nem lehetséges. Ekkor ugyanis $\exists\ x \in \mathbb{R}$, hogy

  $$\frac{1}{1+x^2} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < 1 + x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} < |x|\ ,$$

  utóbbi igaz $\forall\ |x| > \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}$-re (kihasználtuk, hogy az $\varepsilon < 1$ feltevés miatt $\frac{1}{\varepsilon} - 1 > 0$).
- $\sup f(E) = 1$ hasonlóan belátható.
- $\nexists\ x \in \mathbb{R}$, hogy $\dfrac{1}{1+x^2} = 0$, mert ha létezne, úgy $1 = 0$ adódna, ami lehetetlen. Így f-nek nem létezik abszolút minimuma.
- $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 \iff x = 0$, így f-nek 0-ban abszolút maximuma van, és ez 1.
- $x = 0$-ban f-nek lokális maximuma van, ami 1. De $\nexists\ x_0 \in \mathbb{R},\ x \neq 0$, hogy ott lokális minimuma lenne.

4. definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***függvény monoton növekvő*** (***csökkenő***), ha $\forall\ x_1, x_2 \in E,\ x_1 < x_2$-re $f(x_1) \leq f(x_2)$, (illetve $f(x_1) \geq f(x_2)$) teljesül (szigorú monotonitásnál $f(x_1) < f(x_2)$, illetve $f(x_1) > f(x_2)$).
Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $x_0 \in E$-n növekvően (csökkenően) halad át, ha létezik $K(x_0, \delta)$, hogy $\forall\ x < x_0,\ x \in K(x_0, \delta) \cap E$ esetén

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad (f(x) \geq f(x_0))$$

és $x > x_0,\ x \in K(x_0, \delta) \cap E$-re

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad (f(x) \leq f(x_0))$$

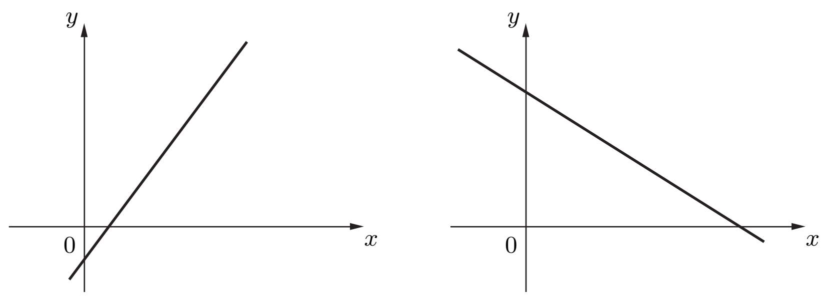
teljesül.

Példa. Az $f(x) = ax + b$ $(x \in \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$ függvény

– $a > 0$ esetén szigorúan monoton növekvő, mert $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2$ esetén

$$ax_1 < ax_2\ , \quad \text{amiből} \quad f(x_1) = ax_1 + b < ax_2 + b = f(x_2)$$

(az egyenlőtlenségek ismert tulajdonságai alapján);



4. ábra. Monoton növekvő és csökkenő függvények

– $a < 0$ esetén szigorúan monoton csökkenő, mert $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2$ esetén

$$ax_1 > ax_2\ , \quad \text{amiből} \quad f(x_1) = ax_1 + b > ax_2 + b = f(x_2)\ .$$

2. A folytonosság fogalma

Az f függvény x_0 pontbeli folytonossága azt a szemléletes tartalmat ragadja meg, hogy $f(x)$ tetszőlegesen kicsit tér el $f(x_0)$-tól, ha x elég közel van x_0-hoz.

1. definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $x_0 \in E$ ***pontban folytonos***, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\ x \in E$, $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény ***folytonos*** az $A \subseteq E$ ***halmazon***, ha A minden pontjában folytonos.

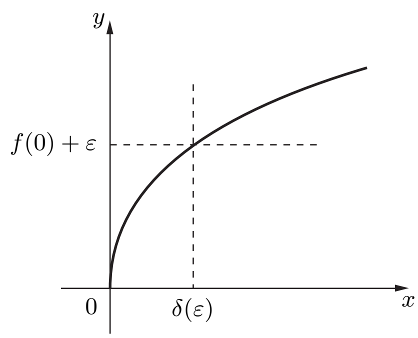
Megjegyzések.
1. A definíció ***környezetes átfogalmazás***a:
   Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $x_0 \in E$ pontban folytonos, ha $\forall\ K(f(x_0), \varepsilon)$-hoz $\exists\ K(x_0, \delta(\varepsilon))$, hogy $\forall\ x \in E,\ x \in K(x_0, \delta(\varepsilon))$ esetén $f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$.
2. A folytonosság pontbeli (lokális) tulajdonság, amely globálissá tehető (a definíció második része szerint).
3. Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény nem folytonos x_0-ban, ha $x_0 \notin E$, vagy $\exists\ \varepsilon > 0$, $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$ esetén $\exists\ x \in E,\ |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ és $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Példa.
1. Egy $f : \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény (sorozat) folytonos $\mathbb{N}$-en.

1. ábra.

Megmutatjuk, hogy $\forall\ n_0 \in \mathbb{N}$ esetén folytonos, ugyanis $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén legyen $\delta(\varepsilon) = \dfrac{1}{2}$, ekkor az $|n - n_0| < \dfrac{1}{2}$ egyenlőtlenség csak $n = n_0$-ra teljesül, és ezért $|f(n) - f(n_0)| = |f(n_0) - f(n_0)| = 0 < \varepsilon$.

2. Az $f(x) = c$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény folytonos $\mathbb{R}$-en. Ugyanis $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$ pontban $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén például $\delta(\varepsilon) = 1$-et választva, ha $x \in \mathbb{R}$ és $|x - x_0| < 1$, akkor $|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.
3. Az $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény folytonos $\mathbb{R}$-en. Hiszen $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$ pontban $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$-t választva, ha $x \in \mathbb{R}$ és
$|x - x_0| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$, akkor $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$.



2. ábra.

4. Az $f(x) = \sqrt[n]{x}$ $(x \geq 0)$ függvény folytonos $x_0 = 0$-ban. Ugyanis $\forall\ \varepsilon > 0$-ra, ha $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^n$, akkor $\forall\ x \geq 0$, $|x - 0| = x < \varepsilon^n$ esetén $|f(x) - f(0)| = |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}| = \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{\varepsilon^n} = \varepsilon$.
5. Az

$$f(x) = \begin{cases} 1\ , & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0\ , & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(Dirichlet-függvény) sehol sem folytonos. Hiszen $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$ esetén $\varepsilon = 1$-hez $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$-t választva (felhasználva, hogy $\forall\ K(x_0, \delta(\varepsilon))$-ban van racionális és irracionális szám is) $\exists\ x$, hogy $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ és $|f(x) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1$, ha $x_0 \in \mathbb{Q}$, illetve $|f(x) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1$, ha $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. tétel (átviteli elv). *Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor, és csak akkor folytonos az $x_0 \in E$ pontban, ha minden x_0-hoz konvergáló E-beli $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén az $\langle f(x_n) \rangle$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Bizonyítás.

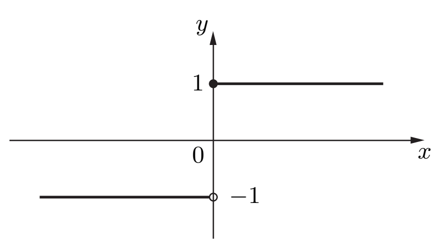
a) Legyen f folytonos $x_0 \in E$-ben. Ekkor $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\ x \in E \cap K(x_0, \delta(\varepsilon))$ esetén $f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$. Legyen $\langle x_n \rangle$ olyan, hogy $x_n \in E$, $x_n \to x_0$. Ekkor $\delta(\varepsilon)$-hoz $\exists\ n(\delta(\varepsilon))$, hogy $\forall\ n \geq n(\delta(\varepsilon))$-ra $x_n \in K(x_0, \delta(\varepsilon)) \cap E$, és így $f(x_n) \in K(f(x_0), \varepsilon)$,
azaz $f(x_n) \to f(x_0)$.

b) Tegyük fel, hogy $\forall\ x_n \to x_0$ $(x_n \in E)$ esetén $f(x_n) \to f(x_0)$. Feltesszük, hogy f nem folytonos $x_0 \in E$-ben, azaz $\exists\ \varepsilon > 0$, hogy $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$-ra, így $\delta(\varepsilon) = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$-re is $\exists\ x_n \in E$, hogy

$$d(x_0, x_n) < \frac{1}{n}\,, \quad \text{de} \quad d(f(x_0), f(x_n)) \geq \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $d(x_0, x_n) \to 0$, azaz $x_n \to x_0$, de $f(x_n)$ nem tart $f(x_0)$-hoz, ami ellentmondás. Tehát f folytonos x_0-ban. $\square$

Megjegyzés. A folytonosság itt megadott ekvivalens megfogalmazását a folytonosság sorozatos vagy Heine-féle definíciójának nevezik.



3. ábra.

Példa. Az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \geq 0, \\ -1\,, & x < 0, \end{cases}$$

függvény nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban. Mert ha $\langle x_n \rangle$ olyan sorozat, hogy $x_n < 0$ $(\forall\ n \in \mathbb{N})$ és $x_n \to 0$, akkor $f(x_n) = -1$ $(\forall\ n \in \mathbb{N})$ és így $f(x_n) \to -1 \neq 1 = f(0)$.

2. definíció. Az $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény ***balról*** (***jobbról***) ***folytonos*** az $x_0 \in E$ pontban, ha az f-nek $(-\infty, x_0] \cap E$-re (illetve $[x_0, +\infty) \cap E$-re) való leszűkítése folytonos x_0-ban.

Megjegyzések.

1. A definíció adja, hogy f akkor és csak akkor balról (illetve jobbról) folytonos x_0-ban, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$,
   $\forall\ x \in E,\ x_0 - \delta(\varepsilon) < x \leq x_0$ (illetve $x_0 \leq x < x_0 + \delta(\varepsilon)$) esetén $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.
2. Megfogalmazható a sorozatos változat is.

Példa. Az előbbi példa függvénye $x_0 = 0$-ban jobbról folytonos, mert leszűkítése $E = [0, +\infty[$-re konstans, így folytonos E-n. Ugyanakkor a függvény balról nem folytonos $x_0 = 0$-ban, amit az előbbi példa bizonyításának ismétlésével láthatunk be.

2. tétel. *Az $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor folytonos az x_0-ban, ha ott jobbról és balról is folytonos.*

3. tétel (jeltartás). *Ha az $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $x_0 \in E$-ben és $f(x_0) \neq 0$, akkor $\exists\ K(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}$, hogy $\forall\ x \in K(x_0, \delta) \cap E$ esetén* $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f(x)$.

Bizonyítás. A folytonosság miatt $\varepsilon = \dfrac{1}{2}|f(x_0)|$-hoz $\exists\ K(x_0, \delta)$, hogy $\forall\ x \in K(x_0, \delta) \cap E$ esetén $f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$, azaz $|f(x)| > \dfrac{1}{2}|f(x_0)|$. Tehát $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f(x)$, ha $x \in K(x_0, \delta) \cap E$. □

3. Folytonosság és műveletek

1. tétel. *Ha az $f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $x_0 \in E$-ben, akkor az $f + g$ és λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) is folytonosak x_0-ban.*

Bizonyítás. Az átviteli elv szerint f, g akkor és csak akkor folytonosak x_0-ban, ha $\forall\ x_n \to x_0$ ($x_n \in E$) esetén $f(x_n) \to f(x_0)$, $g(x_n) \to g(x_0)$. Tehát (a sorozatokról tanultak szerint)

$$f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0)\ .$$

Azaz (ismét használva az átviteli elvet) $f + g$ folytonos x_0-ban.
A másik állítás hasonlóan bizonyítható. □

2. tétel. *Ha az $f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $x_0 \in E$-ben, akkor az $f \cdot g$, és $g(x) \neq 0$ ($x \in E$) esetén, $\dfrac{f}{g}$ is folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás. Mint az előbb. □

Példa.

1. Az $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$ pontban folytonos, mert $f(x) = x^2 = x \cdot x$ miatt két, x_0-ban folytonos függvény szorzata.

2. Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvény $\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pontban folytonos, mert az $f_1(x) = 1$ és $f_2(x) = x \neq 0$, x_0-ban folytonos függvények hányadosa.

3. tétel (az összetett függvény folytonossága).
Legyenek $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : f(E) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvények. Ha f folytonos az $x_0 \in E$ pontban, g folytonos az $y_0 = f(x_0)$-ban, akkor a $h = g \circ f$ függvény folytonos az x_0-ban.

Bizonyítás. g folytonossága miatt: $\forall\, K(g(y_0), \varepsilon)$-hoz $\exists\, K(y_0, \delta_1(\varepsilon))$, hogy
$\forall\, y \in K(y_0, \delta_1(\varepsilon)) \cap f(E)$ esetén $g(y) \in K(g(y_0), \varepsilon)$;
f folytonossága miatt: $K(y_0 = f(x_0), \delta_1(\varepsilon))$-hoz $\exists\, K(x_0, \delta(\varepsilon))$, hogy
$\forall\, x \in K(x_0, \delta(\varepsilon)) \cap E$ esetén $f(x) = y \in K(y_0, \delta_1(\varepsilon))$,
így $g(f(x)) \in K(g(f(x_0)), \varepsilon)$, azaz $g \circ f$ függvény folytonos az x_0-ban. $\square$

Példa. A $h(x) = \sqrt{x^2 + x}$ $(x \geq 0)$ függvény folytonos az $x_0 = 0$-ban. Hiszen $f(x) = x^2 + x$ $(x \geq 0)$ és $g(x) = \sqrt{x}$ választással $h = g \circ f$, továbbá f folytonos $x_0 = 0$-ban (hiszen két folytonos függvény összege), g folytonos $f(0) = 0$-ban (az $\sqrt[n]{x}$ 0-beli folytonossága miatt), így alkalmazható tételünk.

4. Folytonosság és topologikus fogalmak

1. tétel (a folytonosság topologikus megfelelője).
Az $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor folytonos E-n, ha bármely $B \subset \mathbb{R}$ nyílt halmazra $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ nyílt.

2. tétel (kompaktság és folytonosság). *Legyen $E \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, $f : E \to \mathbb{R}$ folytonos függvény E-n, akkor $f(E)$ kompakt.*
(Röviden: kompakt halmaz folytonos képe kompakt.)

Következmények.

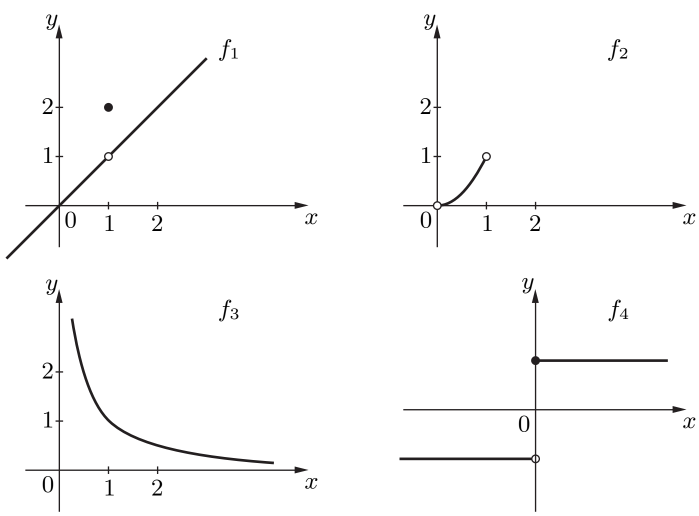
1. $f(E)$ korlátos és zárt.
2. f felveszi E-n az abszolút minimumát és maximumát (mert $\sup f(E)$ és $\inf f(E)$ is eleme $f(E)$-nek, ha $f(E)$ zárt és korlátos).

VI. fejezet

Függvények határértéke

1. Alapfogalmak és tételek

KÉRDÉS: Hogyan „viselkednek” a következő függvények a megadott pont, vagy pontok környezetében?



1. ábra.

$$f_1:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f_1(x)=\begin{cases} x\,, & x\neq 1\\ 2\,, & x=1\end{cases}\,,\qquad x_0=0,1,+\infty,-\infty\ ;$$

$$f_2:\ ]0,1[\to\mathbb{R},\qquad f_2(x)=x^2\,,\qquad x_0=0,1\ ;$$

$$f_3:\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\qquad f_3(x)=\frac{1}{x}\,,\qquad x_0=0,2,+\infty\ ;$$

$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_4(x) = \begin{cases} 1 , & x \geq 0 \\ -1 , & x < 0 \end{cases} , \qquad x_0 = 0 \ .$$

Megállapítások.

1. x_0 minden esetben torlódási pontja az értelmezési tartománynak (de nem mindig eleme).
2. $\exists\ A \in \mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{R}_b$), hogy $x_n \to x_0$ esetén $f(x_n) \to A$. (Kivétel f_4, ekkor $x_n \to 0$ ($x_n > 0$ vagy $x_n < 0$) esetén $f_4(x_n) \to 1$ vagy $f_4(x_n) \to 0$).
3. A nem feltétlenül egyenlő $f(x_0)$ (f_4 esetén nem is létezik).

1. definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***függvény***nek az $x_0 \in E'$ pontban létezik ***határértéke***, ha létezik $A \in \mathbb{R}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$,

$$x \in E,\ 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon \ .$$

A-t az f függvény x_0-beli határértékének nevezzük, és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ vagy $f(x) \to A$, ha $x \to x_0$, jelöléseket használjuk.

Megjegyzések.

1. Fontos megjegyezni, hogy egyrészt csak az értelmezési tartomány x_0 torlódási pontjában beszélünk határértékről, másrészt a definícióban az f függvény x_0-ban felvett értéke nem játszik szerepet. Az első feltétel azért kell, mert így x_0-at meg tudjuk közelíteni tőle különböző (értelmezési tartománybeli) pontokkal. A második dolog miatt pedig az x_0-ban „elrontott” (lásd f_1-et az $x_0 = 1$ pont esetén), vagy x_0-ban nem is definiált függvény határértékére is „értelmes” fogalmat kapunk.
2. Megfogalmazható a környezetes változat is:
   Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in E'$ pontban $\exists$ határértéke, ha $\exists\ A \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\ K(A, \varepsilon)$-hoz $\exists\ K(x_0, \delta(\varepsilon))$, $\forall\ x \in K(x_0, \delta(\varepsilon)) \backslash \{x_0\}$, $x \in E$ esetén $f(x) \in K(A, \varepsilon)$.
3. A határérték létezése pontbeli tulajdonság.
4. Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$-ben ***nem létezik határérték***e, ha $x_0 \notin E'$, vagy $x_0 \in E'$ és $\forall\ A \in \mathbb{R}$, $\exists\ \varepsilon > 0$, $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$ esetén $\exists\ x \in E$, $x \in K(x_0, \delta(\varepsilon)) \backslash \{x_0\}$, $f(x) \notin K(A, \varepsilon)$.
5. A határérték (ha létezik) egyértelműen meghatározott (ez indirekt bizonyítással – hasonlóan, mint a sorozatoknál – egyszerűen belátható).

Példa.

1. Az $f(x) = c$ ($x \in \mathbb{R}$) függvénynek $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$-ben a határértéke c. Hiszen x_0 torlódási pontja $\mathbb{R}$-nek, és $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$ esetén, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, akkor $|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ következik.
2. Az $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$) függvénynek $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$-ben a határértéke x_0. Ugyanis x_0 torlódási pont, és $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$ esetén, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$, akkor $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$ következik.

3. Az előző példabeli f_1 függvénynek $x_0 = 1$-ben létezik határértéke és az 1. Hiszen $x_0 = 1$ torlódási pontja $\mathbb{R}$-nek, és $\forall\ \varepsilon > 0$-ra, ha $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, akkor $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $0 < |x-1| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ esetén $|f(x) - 1| = |x - 1| < \varepsilon$ következik.

2. definíció. Legyen $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény, és x_0 torlódási pontja $[x_0, +\infty) \cap E$-nek (vagy $(-\infty, x_0] \cap E$)-nek). Az f függvénynek az x_0-ban $\exists$ ***jobb-*** (vagy ***bal-***) ***oldali határértéke***, ha
$\exists\ A \in \mathbb{R}$, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall\ x \in E$, $x_0 < x < x_0 + \delta(\varepsilon)$ (vagy $x_0 - \delta(\varepsilon) < x < x_0$) $\Longrightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon$.
A-t f jobb- (illetve bal-) oldali határértékének nevezzük x_0-ban, és a

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = A = f(x_0 + 0) \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \to x_0-0} f(x) = A = f(x_0 - 0)$$

jelölést használjuk.

Megjegyzések.

1. A definíció a leszűkítés segítségével is megfogalmazható. Például: Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény, és x_0 torlódási pontja $[x_0, +\infty[\cap E$-nek. Az f függvénynek az x_0-ban létezik jobboldali határértéke, ha az $f|_{[x_0,+\infty[\cap E}$ függvénynek létezik határértéke x_0-ban.
2. A környezetes átfogalmazás is megadható.
3. Könnyen belátható a következő:
   Legyen $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény, és x_0 torlódási pontja $[x_0, +\infty) \cap E \wedge (-\infty, x_0] \cap E$-nek. Az f függvénynek x_0-ban akkor, és csak akkor létezik határértéke, ha létezik $f(x_0 - 0)$ és $f(x_0 + 0)$ és
   $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$ (f határértéke x_0-ban).

Példa. A fenti f_4 függvénynek $x_0 = 0$-ban a jobboldali határértéke 1, mert 0 torlódási pontja a $[0, +\infty[$-nek és $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$ esetén $\forall\ x \in]0, +\infty[$-re $|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$ következik.
f_4-nek $x_0 = 0$-ban a baloldali határértéke -1, mert 0 torlódási pontja a $]-\infty, 0]$-nak és $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$ esetén $\forall\ x \in]-\infty, 0[$-ra $|f(x) - (-1)| = |-1-(-1)| = 0 < \varepsilon$ következik.
Az f_4 függvény jobb-, és balodali határértéke különbözik $x_0 = 0$-ban, így ott nem létezik határértéke.

3. definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények $x_0 \in E'$-ben a ***határértéke*** $+\infty$ (vagy $-\infty$), ha $\forall\ K$-hoz $\exists\ \delta(K) > 0$, $\forall\ x \in E$, $0 < |x - x_0| < \delta(K)$ esetén $f(x) > K$ (vagy $f(x) < K$).

Megjegyzések.

1. A definíció környezetekkel is megfogalmazható.
2. A $+\infty$ (vagy $-\infty$) egyoldali határértékként is megfogalmazható.
3. Az $x = x_0$ egyenest az f függvény ***függőleges aszimptotájának*** nevezzük, ha f határértéke (vagy egyoldali határértéke) x_0-ban $+\infty$ vagy $-\infty$.

Példa. A fenti f_3 függvénynek az $x_0 = 0$-ban a határértéke $+\infty$, mert 0 torlódási pontja $\mathbb{R}_+$-nak és $\forall$ K-hoz

$$\delta(K) = \begin{cases} K^{-1} & , \text{ ha } K > 0 \\ \\ \text{tetszőleges} & , \text{ ha } K \le 0 \end{cases}$$

választással, ha $x \in \mathbb{R}_+$ és $|x - 0| = x < \dfrac{1}{K}$, illetve $|x - 0| = x < \delta(K)$, akkor $f(x) = \dfrac{1}{x} > K$, illetve $f(x) > 0 \ge K$ következik.

4. definíció. Legyen $E \subseteq \mathbb{R}$ felülről (alulról) nem korlátos halmaz, $f : E \to \mathbb{R}$ adott függvény. Az f függvénynek $+\infty$ (vagy $-\infty$)***-ben*** létezik ***határértéke***, ha $\exists$ $A \in \mathbb{R}$, $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ $M \in \mathbb{R}$, $\forall$ $x \in E \wedge x > M$ $(\forall x < M)$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$. Ekkor A-t f $+\infty$ (vagy $-\infty$)-beli határértékének nevezzük, és rá a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$) jelölést használjuk.

Megjegyzések.

1. A definíció környezetes alakban is megfogalmazható.
2. Az $l(x) = ax + b$ $(x \in \mathbb{R})$ lineáris függvény gráfját (egyenest) az $f :]c, +\infty[\to \mathbb{R}$ (illetve $f :]-\infty, c[\to \mathbb{R}$) függvény aszimptotájának nevezzük $+\infty$-ben (illetve $-\infty$-ben), ha $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - l(x)] = 0$ (illetve $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - l(x)] = 0$). Speciálisan, ha $a = 0$, úgy az $l(x) = b$ $(x \in \mathbb{R})$ egyenest vízszintes aszimptotának nevezzük, ha $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (illetve $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$) teljesül.
3. A példatárban megmutatjuk, hogy az $f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvénynek $x_0 = 0$-ban függőleges aszimptotája van. Az $y = x$ egyenes pedig aszimptótája a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben.
4. Az $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvénynek az $x = 0$ egyenletű egyenes (az y-tengely) függőleges, míg az $y = 0$ egyenes (az x-tengely) vízszintes aszimptotája (mindkettő $-\infty$-ben és $+\infty$-ben is).
5. Ha egy $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt tekintünk, akkor megfogalmazható az is, hogy f határértéke $+\infty$ (vagy $-\infty$)-ben $+\infty$ (vagy $-\infty$), azaz a végtelenben vett végtelen határérték.

Példa. Az f_3 függvénynek $+\infty$-ben a határértéke 0, mert $\mathbb{R}_+$ felülről nem korlátos (hiszen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ nem korlátos felülről), továbbá $\forall$ $\varepsilon > 0$-ra $\delta(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}$ esetén, ha $x > \delta(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}$, akkor $|f(x) - 0| = \dfrac{1}{x} < \varepsilon$ következik.

1. tétel (átviteli elv). *Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in E'$ pontban akkor, és csak akkor létezik határértéke, ha bármely x_0-hoz konvergáló $\langle x_n \rangle : \mathbb{N} \to E \setminus \{x_0\}$ sorozat esetén létezik $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.*

Bizonyítás. Úgy, mint a folytonosságnál, csak az ottani $K(f(x_0), \varepsilon)$ helyett $K(A, \varepsilon)$-t és az x_0-beli folytonosság helyett x_0-beli határértéket kell mondani. □

Példa. Az, hogy a fejezet elején definiált f_4 függvénynek $x_0 = 0$-ban nem létezik határértéke, az átviteli elvvel könnyen bizonyítható.
Ha $\langle x_n \rangle$ olyan sorozat, hogy $x_n \to 0$ és $x_n > 0$, akkor $\langle f_4(x_n) \rangle = \langle 1 \rangle$ konstans sorozat, melynek határértéke 1.
Ha $\langle x_n \rangle$ olyan sorozat, hogy $x_n \to 0$ és $x_n < 0$, akkor $\langle f_4(x_n) \rangle = \langle -1 \rangle$ konstans sorozat, melynek határértéke -1.
$1 \neq -1$, így igaz a példa állítása.

2. Határérték és műveletek illetve egyenlőtlenségek

A határérték képzése és az alapműveletek „felcserélhetők”.

1. tétel. *Legyenek $f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvények úgy, hogy $x_0 \in E'$-ben $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ és $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. Ekkor*

a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda A$, $\quad (\lambda \in \mathbb{R})$;

c) $\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$;

d) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, *ha* $g \neq 0$, $B \neq 0$.

Bizonyítás. Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján. □

Példa. Az $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénynek $x_0 = 0$-ban a határértéke 5, mert 0 torlódási pontja $\mathbb{R}$-nek és a $g(x) = x$, $h(x) = 5$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények határértéke 0-ban 0, illetve 5, így az $x \to 3x^2$ és $x \to 2x$ határértéke is 0, végül az előbbieket felhasználva f-nek 0-ban a határértéke 5.

2. tétel. *Legyen $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in E'$. Ekkor*

a) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0,\ f \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{|f(x)|} = +\infty$;

Bizonyítás. Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján. □

Példa. Az $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvény határértéke $x_0 = 0$-ban $+\infty$, mert 0 torlódási pontja $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-nak, $\exists \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, így a tétel b) része miatt $\exists \lim\limits_{x \to 0} \left|\dfrac{1}{x^2}\right| = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ $(x^2 \neq 0$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Az alábbi tétel azt mutatja, hogy a különböző sorozatok közötti nagyságviszony megfelel a határértékek közötti nagyságviszonynak.

3. tétel. *Legyenek $f, g, h : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvények és $x_0 \in E'$. Ekkor, ha*

a) $\left\{ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \right\} \wedge \left\{ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \right\} \wedge \left\{ \exists\ K(x_0, \delta),\right.$
$\left. f(x) \le g(x)\ \forall\ x \in [K(x_0,\delta)\backslash\{x_0\}] \cap E \right\} \implies \left\{ A \le B \right\}$;

b) $\left\{ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \right\}\ \wedge\ \left\{ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \right\}\ \wedge\ \left\{ A < B \right\} \implies \left\{ \exists\ K(x_0,\delta),\right.$
$\left. f(x) < g(x)\ \forall\ x \in [K(x_0,\delta)\backslash\{x_0\}] \cap E \right\}$;

c) $\left\{ K(x_0,\delta),\ f(x) \le h(x) \le g(x)\ \forall\ x \in [K(x_0,\delta)\backslash\{x_0\}] \cap E \right\}$
$\wedge \left\{ \exists\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \right\} \implies \left\{ \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A \right\}$.

Bizonyítás. Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján. □

Megjegyzések.

1. A tétel megfogalmazható $+\infty$ (illetve $-\infty$)-ben vett határértékre is.
2. Ha a b) részben $g = 0$ vagy $f = 0$, akkor a jeltartási-tétel adódik. Azaz, ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, akkor van az x_0-nak olyan környezete, melyben $f(x) > 0$; pontosabban $\exists\ K(x_0,\delta),\ f(x) < 0$ vagy $f(x) > 0\ \forall\ x \in [K(x_0,\delta)\backslash\{x_0\}] \cap E$.

4. tétel (az összetett függvény határértéke). *Legyenek adottak az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : f(E) \to \mathbb{R}$ függvények, továbbá $x_0 \in E'$, $y_0 \in (f(E))'$ olyan, hogy $x \ne x_0$ esetén $f(x) \ne y_0$. Létezzen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ és $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = A$. Ekkor $\exists\ \lim\limits_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = A$.*

Bizonyítás. Mint a folytonosságra vonatkozó megfelelő tételnél, csak $K(g(f(x_0)),\varepsilon)$ helyett $K(A,\varepsilon)$ és $K(f(x_0),\delta_1(\varepsilon))$ helyett $K(y_0,\delta_1(\varepsilon))$, míg a folytonosság helyett a határérték létezése használandó. □

3. A határérték és a folytonosság kapcsolata

Tétel. *Legyen $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény és $x_0 \in E$, $x_0 \in E'$. f akkor és csak akkor folytonos x_0-ban, ha $\exists\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Bizonyítás.

a) Ha f folytonos x_0 torlódási pontban, akkor a folytonosság definíciója adja, hogy $\exists\ A = f(x_0)$ határértéke x_0-ban.

b) Ha $\exists\ A = f(x_0)$ határérték, akkor a határérték definíciója miatt $\forall\ K(f(x_0),\varepsilon)$-hoz $\exists\ K(x_0,\delta(\varepsilon))$, hogy $\forall\ x \in E,\ x \in K(x_0,\delta(\varepsilon))\backslash\{x_0\}$ esetén $f(x) \in K(f(x_0),\varepsilon)$. Másrészt $f(x_0) \in K(f(x_0),\varepsilon)$. Így $\forall x \in K(x_0,\delta(\varepsilon))$ és $x \in E$ esetén $f(x) \in K(f(x_0),\varepsilon)$, azaz f folytonos x_0-ban. □

Példa. A korábban vizsgált f_1 függvénynek létezik határértéke az $x_0 = 1$-ben és az 1-gyel egyenlő, másrészt $f(1) = 2 \neq 1$, így tételünk szerint f_1 nem folytonos $x_0 = 1$-ben.

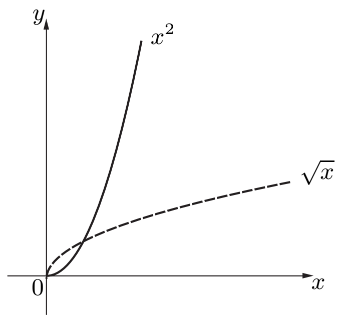
Definíció. Ha az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény nem folytonos az $x_0 \in E$ pontban, akkor azt mondjuk, hogy x_0 ***f-nek szakadási helye***, vagy hogy f-nek x_0-ban szakadása van.
Ha $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény és $x_0 \in E^\circ$ (azaz x_0 belső pont E-ben), és x_0 szakadási helye f-nek, továbbá $\exists \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ és $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$, akkor azt mondjuk, f-nek x_0-ban ***elsőfajú szakadás***a van. Ha még $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, akkor azt mondjuk, hogy ***a szakadás megszüntethető***.
Ha f-nek x_0-ban szakadása van és az nem elsőfajú, akkor azt ***másodfajú szakadás***nak nevezzük.

Példa.
1. f_1 az előbbi példa alapján nem folytonos $x_0 = 1$-ben, így ott szakadása van. $\lim\limits_{x \to 1+0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} f_1(x) = 1$, így a szakadása megszüntethető (változtassuk meg $f_1(1)$ értékét 2-ről 1-re és folytonos lesz).
2. A korábbi f_4 függvény nem folytonos 0-ban, így ott szakadása van, $\lim\limits_{x \to 0+0} f_4(x) = 1 \neq -1 = \lim\limits_{x \to 0-0} f_4(x)$, ezért a szakadás elsőfajú.
3. Belátható, hogy az
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{, ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{, ha } x = 0 \end{cases}$$
függvényre $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = -\infty$, 0-ban szakadása van, e szakadás másodfajú.

4. Monoton függvények

1. tétel (monotonitás és invertálhatóság). *Ha az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton E-n, akkor invertálható, és f^{-1} ugyanolyan értelemben szigorúan monoton $f(E)$-n.*

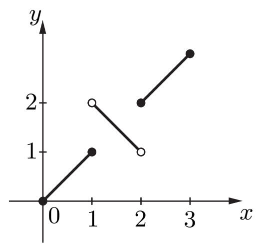
Példa.
1. Az $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény szigorúan monoton növekedő $[0, +\infty[$-en, mert (az egyenlőtlenségek ismert tulajdonsága alapján) $\forall\, x_1, x_2 \in [0, +\infty[$, $x_1 < x_2 \implies x_1^2 < x_2^2$. Így a tétel miatt létező inverze, az $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ függvény is szigorúan monoton növekvő $[0, +\infty[$-en.



1. ábra.

2. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x\ , & \text{ha } x \in [0,1] \ \cup \ [2,3]\ , \\ 3 - x\ , & \text{ha } x \in]1,2[\ . \end{cases}$$



2. ábra.

Belátható, hogy az $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ függvény invertálható és $f^{-1}(x) = f(x)$ ($x \in [0,3]$). De nem szigorúan monoton növekedő $[0,3]$-on (hiszen $\frac{1}{2} < 1$ és $f(\frac{1}{2}) < f(1)$, viszont $\frac{4}{3} < \frac{5}{3}$ és $f(\frac{4}{3}) > f(\frac{5}{3})$).

2. tétel. *Ha az $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és szigorúan monoton, akkor f^{-1} folytonos.*

Megjegyzés. Egy $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ monoton függvény szakadási helyeinek halmaza megszámlálható.

VII. fejezet

Függvénysorozatok és függvénysorok, elemi függvények

1. Függvénysorozatok és függvénysorok konvergenciája

1. definíció. Legyenek adottak az $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ függvények. Az $\langle f_n \rangle$ sorozatot ***függvénysorozat***nak, míg ha

$$S_n = f_1 + ... + f_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $\langle S_n \rangle$-t ***függvénysor***nak nevezzük (az utóbbi esetben a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, vagy $\sum f_n$ jelöléseket használjuk).
Ha még adott az $f_0 : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény is, úgy azt az $\langle S_n \rangle$ függvénysorozatot, melynél $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ is függvénysornak nevezzük és rá a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ vagy $\sum f_n$ jelöléseket használjuk.

2. definíció. Az $\langle f_n \rangle$ ***függvénysorozat az*** $x \in E$***-ben konvergens***, ha az $\langle f_n(x) \rangle$ számsorozat konvergens. Az $\langle f_n \rangle$ ***függvénysorozat pontonként konvergens az*** $E_1 \subset E$ ***halmazon***, ha az $\langle f_n(x) \rangle$ számsorozat $\forall\ x \in E_1$ esetén konvergens. Ekkor az

$$f(x) \doteq \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in E_1)$$

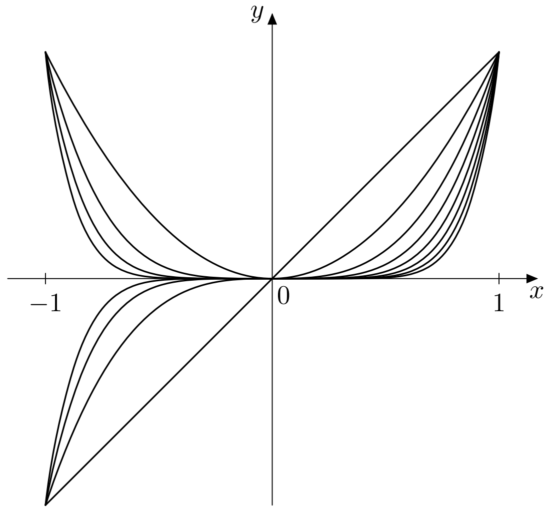
szerint értelmezett függvényt az $\langle f_n \rangle$ függvénysorozat ***határfüggvény***ének nevezzük és azt mondjuk, hogy az $\langle f_n \rangle$ pontonként konvergál E_1-n az f függvényhez. Azon pontok halmazát, melyekre $\langle f_n(x) \rangle$ konvergens a függvénysorozat ***konvergencia tartomány***ának is nevezzük.
A $\sum f_n$ függvénysor az $x \in E$-ben konvergens, illetve az $E_1 \subset E$ halmazon pontonként konvergens, ha az $\langle S_n(x) \rangle$ számsorozat $x \in E$, illetve $\forall\ x \in E_1$ esetén konvergens. Ekkor az

$$f(x) \doteq \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{n=0\vee 1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in E_1)$$

szerint értelmezett függvényt a $\sum f_n$ függvénysor ***összegfüggvény***ének nevezzük és azt mondjuk, hogy $\sum f_n$ pontonként konvergál E_1-en az f függvényhez. Azon pontok halmazát, melyekre $\sum f_n(x)$ konvergens a függvénysor ***konvergencia tartomány***ának nevezzük.

Példa.

1. Legyen $f_n(x) = x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, akkor az $\langle x^n \rangle$ függvénysorozat (a nevezets sorozatok fejezet 1. tétele szerint) akkor konvergens, ha $x \in]-1, 1]$, továbbá határfüggvénye az
$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } x \in]-1, 1[\,, \\ 1\,, & \text{ha } x = 1\,, \end{cases}$$
függvény.



1. ábra.

2. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ függvénysor (a soroknál tanultak szerint) konvergens, ha $|x| < 1$ $(x \in \mathbb{R})$ és összege az $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $\; f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ függvény.

Megjegyzés. A $\sum f_n$ függvénysor pontonkénti konvergenciája egy $E_1 \subseteq E$ halmazon azt jelenti, hogy $\forall\, x \in E_1$-re $\exists\, f(x) \in \mathbb{R}$, $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n(\varepsilon, x)$ esetén $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. (Ekkor $f : E_1 \to \mathbb{R}$ nyilván az összegfüggvény E_1-en.) Látható, hogy az $n(\varepsilon, x)$ küszöbszám függ x-től is (a konvergencia „nem egyenletes").

3. definíció. Az $\langle f_n \rangle$ ***függvénysorozat*** (illetve a $\sum f_n$ függvénysor) ***egyenletesen konvergál az*** $E_1 \subseteq E$ ***halmazon*** az $f : E_1 \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (illetve $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$) $\forall\, x \in E_1$-re. Ilyenkor $\langle f_n \rangle$-et (illetve $\sum f_n$-et) egyenletesen konvergensnek nevezzük E_1-en.

Példa. Az $\langle x^n \rangle$ függvénysorozat az $E_1 = [-r, r]$ $(0 < r < 1)$ halmazon egyenletesen konvergál az $f :]-r, r[\to \mathbb{R},\ f(x) = 0$ függvényhez. Ugyanis egyrészt $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = |x^n| \le |r^n|$ $(x \in E_1)$, másrészt $r \in]0, 1[$ miatt $\langle r^n \rangle$ nullsorozat, így $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$ esetén $|r^n| < \varepsilon$, és ezt az előbbi egyenlőtlenséggel összevetve kapjuk, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$ esetén $|x^n - 0| < \varepsilon\ \forall\ x \in E_1$, ami az egyenletes konvergencia definíciója szerint adja az állítást.

1. tétel (Weierstass elegendő feltétele függvénysorok egyenletes konvergenciájára). *Legyenek adottak az $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ függvények. Legyen továbbá $\sum a_n$ egy olyan nemnegatív tagú konvergens számsor, hogy $|f_n(x)| \le a_n$ $(\forall\ x \in E,\ n \in \mathbb{N})$. Ekkor a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens E-n.*

2. tétel (az összegfüggvény folytonosságának elegendő feltétele). *Legyenek $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ folytonos függvények, tegyük fel, hogy a $\sum f_n$ sor egyenletesen konvergál E-n az $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényhez. Ekkor f folytonos E-n. (Röviden: folytonos függvények egyenletesen konvergens sorának összegfüggvénye folytonos.)*

Példa. Ha $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$,
úgy $\forall\ x \in \mathbb{R},\ x \ne 0$ esetén $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ egy $0 < \dfrac{1}{1+x^2} < 1$ kvóciensű mértani sor, továbbá $f_n(0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$, így $\sum f_n$ konvergens $\forall\ x \in \mathbb{R}$, és összegfüggvénye az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1 - \dfrac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2\ , & \text{ha } x \ne 0, \\ 0\ , & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény.
A függvénysor nem lehet egyenletesen konvergens, mert $\forall\ f_n$ folytonossága miatt, tételünk szerint f folytonos lenne, de az összegfüggvény nem folytonos $x = 0$-ban (ugyanis $x_n \to 0$, de $x_n \ne 0$ esetén $f(x_n) \to 1 \ne 0 = f(0)$).

2. Hatványsorok

1. definíció. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ $\quad (a_n, x, x_0 \in \mathbb{R})$ függvénysort x_0 ***középpontú hatványsor***nak nevezzük.

1. tétel (Cauchy-Hadamard). *Legyen adott a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *hatványsor és*

$$\varrho \doteq \begin{cases} 0\ , & \text{ha } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty\ , \\ +\infty\ , & \text{ha } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0\ , \\ \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}\ , & \text{egyébként}\ . \end{cases}$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *abszolút konvergens, ha* $|x-x_0| < \varrho$*; divergens, ha* $|x-x_0| > \varrho$*.*

2. definíció. A Cauchy-Hadamard tételben definiált ϱ-t a ***hatványsor konvergencia sugará***nak nevezzük.

Megjegyzések.
1. $\varrho = 0$ esetén a hatványsor csak x_0-ban, míg $\varrho = +\infty$ esetén $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens.
2. Ha $0 < \varrho < +\infty$, akkor a $K(x_0, \varrho)$ nyílt környezet része a hatványsor konvergencia tartományának.

2. tétel. *Legyen* ϱ *a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *hatványsor konvergencia sugara. Ha* $0 < \varrho_0 < \varrho$*, akkor a hatványsor egyenletesen konvergens* $K(x_0, \varrho_0)$*-n, az összegfüggvénye pedig folytonos* $K(x_0, \varrho_0)$*-on.*

Következmény. *A*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

hatványsorok konvergencia sugara $\varrho = +\infty$*, összegfüggvényük folytonos* $\mathbb{R}$*-en.*

Bizonyítás. Mivel $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$, $\sqrt[n]{(2n)!} \to +\infty$, $\sqrt[n]{(2n+1)!} \to +\infty$ is igaz, kapjuk, hogy $\varrho = +\infty$ minden esetben. Ezután a folytonosság $\mathbb{R}$-en jön a 2. tételből. $\square$

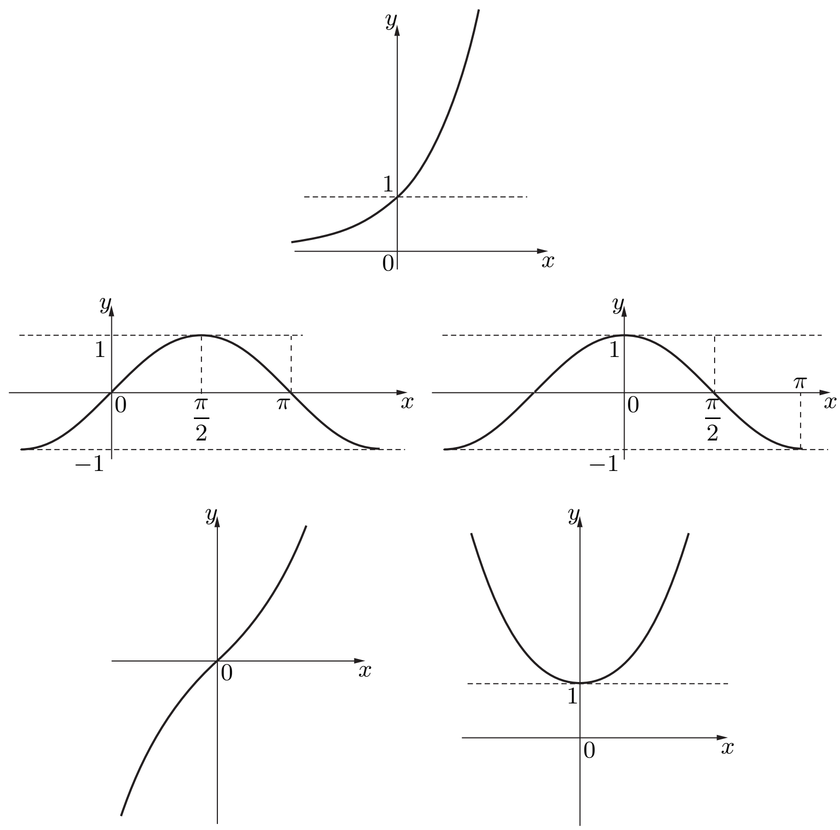
3. Elemi függvények

1. definíció. Az előbbi következményben szereplő hatványsorok konvergensek $\mathbb{R}$-en, ezért $\forall\ x \in \mathbb{R}$-re az

$$\exp(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ ,$$

$$\cos(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,, \qquad \sin(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,$$
$$\mathrm{ch}(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,, \qquad \mathrm{sh}(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

szerint értelmezett függvényeket rendre valós ***exponenciális***, ***cosinus***, ***sinus***, ***cosinus hiperbolicus***, ***sinus hiperbolicus*** függvényeknek nevezzük és exp, cos, sin, ch, sh módon jelöljük. (Valamennyien folytonosak $\mathbb{R}$-en.)



1. ábra. Az exp, sin, cos, sh és ch függvények

Megjegyzés. Az $\exp(x)$ függvényt közelítsük sorának N-edik részletösszegével: $\exp(x) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$. Különböző N-eket választva, végezzük el a tényleges számítógépes számítást! Ábrázoljuk $\exp(x)$-et! Ugyanezt végezzük el $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{ch}(x)$-re.

1. tétel. *Bármely* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}\ , \qquad \operatorname{ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}\ ,$$
$$\exp(x) = \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x)\ ,$$

teljesül.

Bizonyítás. A sorok műveleti tulajdonságai alapján valamennyi egyszerű számolás. □

2. tétel. *Bármely* $x, y \in \mathbb{R}$ *esetén*

a) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ *;*
b) $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ *;*
$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ *;*
c) $\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$ *;*
$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$

(addiciós tételek). Továbbá $\forall\ x \in \mathbb{R}$ *esetén*

d) $\exp(x)\exp(-x) = 1$;
$\cos(-x) = \cos(x)$; $\sin(-x) = -\sin(x)$;
$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x)$; $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x)$;
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$;
$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

Bizonyítás.
a) A fejezet 5. tételét követő példa és az exp függvény definíciója miatt

$$\exp(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + y)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \exp(x)\exp(y)\ .$$

b) és c) azonnal jön az a) rész és az 1. tétel felhasználásával.

d) egyszerű számolás. □

3. tétel. *Az* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényre igazak:*

a) $\exp(x) \neq 0\ (x \in \mathbb{R})$ *;*
b) $\exp(x) \geq 1\ (x \geq 0)$; $0 < \exp(x) < 1\ (x < 0)$ *;*
c) $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ *;*
d) *szigorúan monoton növekvő* $\mathbb{R}$*-en;*
e) $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ *(azaz* $R_{\exp} = \mathbb{R}_+$*)* *;*
f) $\forall\ r \in \mathbb{Q}$ *esetén* $\exp(r) = e^r$.

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I. feladatgyűjtemény. □

2. definíció. A szigorúan monoton és folytonos $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény inverzét valós ***természetes alapú logaritmus függvény***nek nevezzük és az ln (vagy log) szimbólummal jelöljük.

4. tétel. *Az* ln *függvényre teljesül:*

a) $D_{\ln} = \mathbb{R}_+,\ R_{\ln} = \ln(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$;
b) *folytonos és szigorúan monoton;*
c) $\ln(1) = 0,\ \ln(x) < 0\ (0 < x < 1),\ \ln(x) > 0\ (x > 1)$;
d) $\exp(\ln(x)) = x\ (x \in \mathbb{R}_+),\ \ln(\exp(x)) = x\ (x \in \mathbb{R})$;
e) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)\ (x, y \in \mathbb{R}_+)$.

Bizonyítás. A definícióból, a monoton függvényeknél tanultakból és az exp függvény tulajdonságaiból egyszerűen jönnek az állítások (lásd Kalkulus I. feladatgyűjtemény). □

3. definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}_+$ adott, akkor az

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = \exp(x \ln a)$$

szerint definiált függvényt a***-alapú valós exponenciális függvény***nek nevezzük.

5. tétel. *Legyeb* $a \in \mathbb{R}_+$. *Az* $\exp_a$ *függvényre teljesülnek:*

a) $\exp_e = \exp$;
b) $D_{\exp_a} = \mathbb{R},\ R_{\exp_a} = \mathbb{R}_+\ (a \neq 1)$;
c) $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \exp_a(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$,
$\exp_a(-x) = [\exp_a(x)]^{-1} \quad (x \in \mathbb{R})$;
d) *szigorúan monoton növekvő, ha* $a > 1$;
szigorúan monoton csökkenő, ha $0 < a < 1$;
e) *folytonos;*
f) $\exp_a(r) = a^r\ (r \in \mathbb{Q})$.

Bizonyítás. A definíció, az exp és ln függvények tulajdonságai alapján egyszerű (lásd Kalkulus I. feladatgyűjtemény). □

Az előző tétel f) pontjában szereplő a^x $(x \in \mathbb{Q})$ a II.2.d fejezet 15. definíciójában bevezetett racionális kitevőjű hatványt jelentette. Viszont kiderült, hogy az $\exp_a(x)$ folytonos és monoton függvény minden x racionális számra megegyezik a^x-szel. Ez az alapja az a^x tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetére vonatkozó alábbi definíciójának.

4. definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}_+$ és $x \in \mathbb{R}$. Az a x***-edik hatványa***:

$$a^x = \exp_a(x) = \exp(x \ln a) \ .$$

5. definíció. Legyen $1 \neq a \in \mathbb{R}_+$. Az $\exp_a^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt a***-alapú valós logaritmus függvény***nek nevezzük és a $\log_a$ szimbólummal jelöljük.

6. tétel. *A* $\log_a$ *függvényre teljesülnek:*

a) $\log_e = \ln$, $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ $(x \in \mathbb{R}_+,\ 1 \neq a \in \mathbb{R})$;

b) $D_{\log_a} = \mathbb{R}_+$, $R_{\log_a} = \mathbb{R}$,
$\log_a(a) = 1$, $\log_a(1) = 0$;

c) *szigorúan monoton növekvő, ha* $a > 1$;
szigorúan monoton csökkenő, ha $0 < a < 1$;

d) $\exp_a[\log_a(x)] = x$ $(x \in \mathbb{R}_+)$, $\log_a[\exp_a(x)] = x$ $(x \in \mathbb{R})$;

e) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$;

f) $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ $(x \in \mathbb{R},\ 1 \neq a, b \in \mathbb{R}_+)$;

g) $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$ $(1 \neq x \in \mathbb{R}_+,\ r \in \mathbb{Q})$.

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I. feladatgyűjtemény. □

Az exponenciális függvény esetén a változó a kitevőben szerepel (az alap rögzített), míg a hatványfüggvény változója az alap (a kitevő pedig rögzített).

6. definíció. Legyen $\mu \in \mathbb{R}$ adott, az

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^\mu = \exp(\mu \ln(x))$$

függvényt μ-kitevőjű valós ***hatványfüggvény***nek nevezzük. (Ha $\mu \in \mathbb{R}_+$, akkor $f(0) = 0$-val $f : \mathbb{R}_+ \cup 0 \to \mathbb{R}$.)

7. tétel. *Az* $f(x) = x^\mu = \exp(\mu \ln(x))$*-re teljesülnek:*

a) *folytonos függvény;*

b) $R_f = \mathbb{R}_+$, *ha* $\mu \neq 0$; $R_f = \{1\}$, *ha* $\mu = 0$;

c) *szigorúan monoton növekvő, ha* $\mu > 0$;
szigorúan monoton csökkenő, ha $\mu < 0$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ *és* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, *ha* $\mu > 0$,
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ *és* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, *ha* $\mu < 0$;

e) $x^\mu x^\nu = x^{\mu+\nu}$, $\dfrac{x^\mu}{x^\nu} = x^{\mu-\nu}$, $(xy)^\mu = x^\mu y^\mu$,
$\left(\dfrac{x}{y}\right)^\mu = \dfrac{x^\mu}{y^\mu}$, $(x^\mu)^\nu = x^{\mu\nu}$ $(x, y \in \mathbb{R}_+,\ \mu, \nu \in \mathbb{R})$.

Bizonyítás. A definíció és a korábbi tételek alapján egyszerű (lásd Kalkulus I. feladatgyűjtemény). □

VIII. fejezet

Differenciálszámítás

1. Valós függvények differenciálhányadosa

1. definíció. Legyen $\langle a, b \rangle$ egy nyílt vagy zárt intervallum, $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ valós függvény. A

(1) $$\varphi(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (x \neq x_0,\ x, x_0 \in \langle a, b \rangle)$$

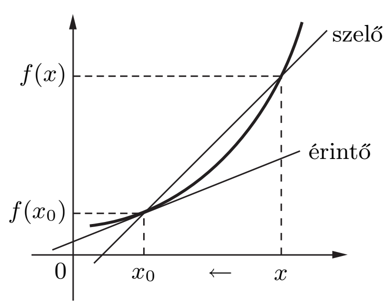
által definiált φ függvényt az f függvény x, x_0-hoz tartozó ***differenciahányados függvény***ének nevezzük.

2. definíció. Az $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ függvény ***differenciálható*** az $x_0 \in \langle a, b \rangle$ pontban, ha létezik a

(2) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

(véges) határérték. Ezt – az $f'(x_0)$-lal jelölt – határértéket az f függvény x_0-beli ***differenciálhányados***ának (vagy ***derivált***jának) nevezzük.

Geometriai interpretáció. Az $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ differenciahányados az f függvény szelőjének meredeksége.



1. ábra.

$x \to x_0$ esetén a szelő határhelyzete az f függvény görbéjéhez az x_0 pontban húzott érintő.
A differenciálhányados geometriai jelentése: ezen érintő meredeksége.

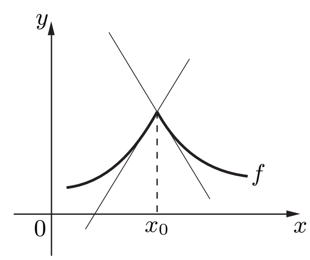
3. definíció. Ha f az $\langle a, b\rangle$ minden pontjában differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy differenciálható $\langle a, b\rangle$-n.
A (2) szerint definiált $f' : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvényt az f függvény differenciálhányados függvényének (vagy derivált függvényének) nevezzük.

Megjegyzések.

1. Geometriai interpretáció:
   Definíció. Ha az $f : \langle a, b\rangle \to R$ függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor az

   (3) $$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

   egyenest az f függvény görbéje $(x_0, f(x_0))$-beli érintőjének nevezzük.
   ($f'(x_0)$ így az $(x_0, f(x_0))$ pontbeli érintő iránytangense.)
2. Egyoldali differenciálhányados is értelmezhető, ha a (2)-ben jobb-, illetve baloldali határértéket tekintünk. (Jelölés: $f'_+(x_0),\ f'_-(x_0)$.) Továbbá bizonyítható, hogy f akkor és csakis akkor differenciálható $x_0 \in (a, b)$-ben, ha létezik $f'_+(x_0),\ f'_-(x_0)$ és egyenlőek.
   Speciálisan, ha $f'_+(x_0)$ és $f'_-(x_0)$ létezik, de nem egyenlő, az geometriailag azt jelenti, hogy az f gráfjának x_0-ban „töréspontja" van. Ekkor f x_0-ban nem differenciálható.



2. ábra.

3. Egy fizikai jelentés: az $s(t)$ útfüggvény differenciálhányadosa a $v(t)$ sebességfüggvény. Ugyanis a (t_0, t) időintervallumban $\dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ az átlagsebesség, és ennek $t \to t_0$ esetén a határértéke a t_0 időpillanatbeli sebesség.
4. Közgazdaságtani alakalmazás. A $Q(L)$ termelési függvény deriváltja az MP_L határtermék: $MP_L = Q'(L)$. Itt L a munkát jelenti, $Q(L)$ pedig az L munkával előállított mennyiség. Az MP_L határtermék tehát a megtermelt mennyiség változási sebessége (a munka mennyiségének megváltozása esetén).

Példa.

1. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = c$ függvényre $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$-ben
   $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} 0 = 0\ ,$$
   azaz $\exists\ f'(x_0) = 0$, így $f'(x) = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

2. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x$ függvény minden $x_0\in\mathbb{R}$ pontban differenciálható és
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1\ ,$$
így $f'(x)=1$ $(x\in\mathbb{R})$.

3. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n$ $(n\in\mathbb{N})$ függvény differenciálható, mert
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}(x^{n-1}+x^{n-1}x_0+\dots+x_0^{n-1})=nx_0^{n-1}\ ,$$
így $f'(x)=nx^{n-1}$ $(x\in\mathbb{R})$.

4. Az $f(x)=|x|$ $(x\in\mathbb{R})$ függvény nem differenciálható az $x_0=0$ pontban, mert
$$\varphi(x,0)=\frac{|x|-|0|}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\dfrac{x}{x}=1\ , & \text{ha } x>0\ ,\\[2ex] \dfrac{-x}{x}=-1\ , & \text{ha } x<0\ ,\end{cases}$$
így
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+0}\varphi(x,0)=1\ ,\qquad f'_-(0)=\lim_{x\to 0-0}\varphi(x,0)=-1\ ,$$
azaz $f'_+(0)\neq f'_-(0)$.
Ha $x_0\neq 0$, akkor
$$\exists\ f'(x_0)=\begin{cases}1\ , & \text{ha } x_0>0\ ,\\[2ex] -1\ , & \text{ha } x_0<0\ ,\end{cases}$$
mert $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x,x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$, ha $x_0>0$,
míg $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x,x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}-1=-1$, ha $x_0<0$.

2. Differenciálhatóság és folytonosság

Tétel. *Ha az $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0\in\langle a,b\rangle$ pontban, akkor folytonos is x_0-ban.*

Bizonyítás. x_0 torlódási pontja $\langle a,b\rangle$-nek, így elegendő megmutatni, hogy $\exists\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ és $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$
igaz, ami adja, hogy $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, és ezt kellett bizonyítani. □

Megjegyzés. A fenti tétel nem fordítható meg. Hiszen például $f(x) = |x|$ az $x_0 = 0$-ban folytonos, de nem differenciálható. Léteznek mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható függvények is.

3. Differenciálhatóság és lineáris approximálhatóság

Definíció. Az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvényt lineárisan approximálhatónak mondjuk az $x_0 \in \langle a, b\rangle$ pontban, ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$ konstans és $\omega : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$ és

$$(L) \qquad f(x) - f(x_0) = A \cdot (x - x_0) + \omega(x) \cdot (x - x_0) \qquad (x \in \langle a, b\rangle)$$

teljesül.

Tétel. *Az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény akkor, és csakis akkor differenciálható az $x_0 \in \langle a, b\rangle$ pontban, ha lineárisan approximálható. Továbbá*
$A = f'(x_0)$.

4. Differenciálhatóság és műveletek

1. tétel. *Ha az $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók az $x_0 \in \langle a, b\rangle$-ben, akkor az $f + g$, $f \cdot g$ és $g(x_0) \neq 0$ esetén az $\dfrac{f}{g}$ függvény is differenciálható x_0-ban, és*

a) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$;
c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Bizonyítás.
a) Az állítás az

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

egyenlőségből, $f'(x_0)$ és $g'(x_0)$ létezése miatt, az $x \to x_0$ határátmenettel következik.

b) Az

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

egyenlőség, $f'(x_0)$ és $g'(x_0)$ létezése – határátmenettel – adja az állítást. (Felhasználjuk azt is, hogy g folytonos x_0-ban.)

c) A bizonyítás hasonló az előbbiekhez. □

Következmények.

1. Ha $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható x_0-ban, $c \in \mathbb{R}$, akkor $c \cdot f$ is differenciálható, és
$$(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$
2. Ha $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálhatók x_0-ban, akkor $f - g$ is, és
$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$
3. Ha $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $f(x_0) \neq 0$, és $\exists\ f'(x_0)$, akkor
$$\exists\ \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$
4. Ha az $f_i : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}\ \ (i = 1, \dots, n)$ függvények differenciálhatók $x_0 \in \langle a, b\rangle$-ben, $\lambda_i \in \mathbb{R}\ \ (i = 1, \dots, n)$, akkor $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f_i$ is differenciálható x_0-ban, és
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f_i\right)'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f_i'(x_0).$$
5. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k\ \ (a_k \in \mathbb{R})$ függvény differenciálható, és
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}.$$
6. Legyenek $P_n(x)$ és $Q_m(x)$ polinom függvények és $Q_m(x_0) \neq 0$. Ekkor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ differenciálható x_0-ban.

Példa. Az
$$f(x) = \frac{5x^2 + 2x + 3}{x^4 + x^2 + 1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
függvény $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén differenciálható. A számláló – mint az $x^2,\ x,\ 1$ differenciálható függvények lineáris kombinációja – differenciálható, továbbá hasonló okok miatt a nevező is differenciálható és 0-tól különböző $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén, így az 1. tétel miatt f valóban differenciálható, és
$$f'(x) = \frac{(10x + 2)(x^4 + x^2 + 1) - (5x^2 + 2x + 3)(4x^3 + 2x)}{(x^4 + x^2 + 1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. tétel (az összetett függvény differenciálhatósága).
Legyenek $g : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R},\ f : \langle a, b\rangle = g(\langle c, d\rangle) \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy g differenciálható az $x_0 \in \langle c, d\rangle$-ben, f differenciálható az $y_0 = g(x_0) \in \langle a, b\rangle$-ben. Akkor az $F = f \circ g$ függvény is differenciálható x_0-ban, és

(ÖD) $$F'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Példa. Az $F(x) = (3x^4 + 5x^2 + 8)^{100}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén differenciálható, mert $F = f \circ g$, ahol $g(x) = 3x^4 + 5x^2 + 8$ $(x \in \mathbb{R})$ és $f(y) = y^{100}$ $(y \in \mathbb{R})$ differenciálható függvények, azaz teljesülnek a 2. tétel feltételei. Továbbá $F'(x) = 100(3x^4 + 5x^2 + 8)^{99}(12x^3 + 10x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

3. tétel (az inverz függvény differenciálhatósága). *Ha $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton, folytonos $\langle a, b\rangle$-n és $x_0 \in \langle a, b\rangle$-ben létezik $f'(x_0)$ és $f'(x_0) \neq 0$, akkor f^{-1} differenciálható $f(x_0)$-ban és*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} , \tag{ID}$$

illetve

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \qquad (y_0 = f(x_0)).$$

5. Hatványsorok differenciálhatósága

Tétel. *Legyen a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ hatványsor konvergencia sugara ϱ, akkor az*

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n , \qquad x \in (-\varrho, \varrho) \tag{1}$$

szerint definiált $f : (-\varrho, \varrho) \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} , \qquad x \in (-\varrho, \varrho) \tag{2}$$

teljesül.
A hatványsor összegfüggvénye a konvergencia tartományának belsejében differenciálható, és a deriváltja a hatványsor tagonkénti deriválásával számítható.

Példa. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ hatványsor konvergencia sugara $\varrho = +\infty$, így a VII.3.1. definícióban általa definiált $\exp(x) \doteq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ (exponenciális) függvény differenciálható és

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül.

6. Elemi függvények differenciálhatósága

1. tétel. *Az* $\exp, \sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}$ *függvények differenciálhatók és*

$$\exp' = \exp\ , \quad \sin' = \cos\ , \quad \cos' = -\sin\ , \quad \mathrm{sh}' = \mathrm{ch}\ , \quad \mathrm{ch}' = \mathrm{sh}\ .$$

Bizonyítás. A hatványsorok differenciálhatósági tétele adja a differenciálhatóságot és a derivált függvényeket is (a számolás egyszerű, ahogy azt az előbbi példa mutatja). □

2. tétel. *Az* $\exp_a,\ \log_a,\ \ln,\ x^\mu$ *függvények differenciálhatók és*

a) $\exp_a'(x) = \exp_a(x) \cdot \ln a \quad (x \in \mathbb{R})$;
b) $\log_a'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad (x \in \mathbb{R}_+)$;
c) $\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}_+)$;
d) $(x^\mu)' = \mu \cdot x^{\mu-1} \quad (x \in \mathbb{R}_+)$.

Bizonyítás.

a) Az $\exp_a(x) \doteq \exp(x \cdot \ln a)$ definíció, $\exp'(y) = \exp(y)$ és $(x \cdot \ln a)' = \ln a$, valamint az összetett függvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel adja az állítást.

b) A $\log_a \doteq \exp_a^{-1}$ definíció, az $\exp_a$ függvény differenciálhatósága, szigorú monotonitása, az inverz függvény differenciálhatósági tétele alapján:

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\exp_a'[\log_a(x)]} = \frac{1}{\exp_a[\log_a(x)] \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}\ .$$

c) $a = e \Longrightarrow \log_e a = \ln e = 1 \Longrightarrow \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

d) Az $x^\mu \doteq \exp(\mu \cdot \ln x)$ definíció és az összetett függvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel alapján

$$(x^\mu)' = [\exp(\mu \cdot \ln x)]' = \exp(\mu \cdot \ln x) \cdot \frac{\mu}{x} = x^\mu \cdot \frac{1}{x} \cdot \mu = \mu \cdot x^{\mu-1}\ . \qquad \square$$

Megjegyzés. Legyen $n \in \mathbb{N},\ n > 1$ $f(x) = \sqrt[n]{x} \doteq x^{\frac{1}{n}} \doteq \exp(\frac{1}{n}\ln x)$ $(x > 0)$ és a 2. tétel adja, hogy $\exists\ f'(x) = \dfrac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1} = \dfrac{1}{n}\, x^{\frac{1-n}{n}} = \dfrac{1}{n}\, \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $(x > 0)$.

Speciálisan az $f(x) = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ függvényre $\exists\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

Ugyanakkor a $g(x) = \sqrt[n]{x}$ $(x \geq 0)$ függvény nem differenciálható az $x_0 = 0$-ban, mert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = +\infty$$

(ugyanis g folytonossága miatt $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[n]{x} = 0$, így $\lim\limits_{x \to 0}(\sqrt[n]{x})^{n-1} = 0$).

7. A sin és cos függvény további tulajdonságai

1. tétel.

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}) \ ;$$
$$|\sin(x)| \leq 1, \quad |\cos(x)| \leq 1 \qquad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Bizonyítás. Gyakorlaton. □

2. tétel.

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (\forall\ x, y \in \mathbb{R}) \ ;$$
$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (\forall\ x, y \in \mathbb{R}) \ .$$

Bizonyítás. Egyszerű az addíciós tételek alapján. □

3. tétel. *A* $[0, 2]$ *intervallumban egyetlen* x *szám van, melyre* $\cos(x) = 0$.

Definíció. Jelöljük π-vel (pi-vel) azt a valós számot, melyre $0 < \frac{\pi}{2} < 2$ és $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

4. tétel.

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \ , \quad \cos\pi = -1 \ , \quad \sin\pi = 0 \ , \quad \sin 2\pi = 0 \ , \quad \cos 2\pi = 1 \ ;$$
$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \ , \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítás. Gyakorlaton (pl. $\sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2} = 1 \implies \sin\frac{\pi}{2} = 1$). □

5. tétel. *A* sin *függvény monoton növekvő a* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *intervallumon.*
A cos *függvény monoton csökkenő a* $[\,0, \pi\,]$ *intervallumon.*

Bizonyítás. Gyakorlaton. □

8. További elemi függvények

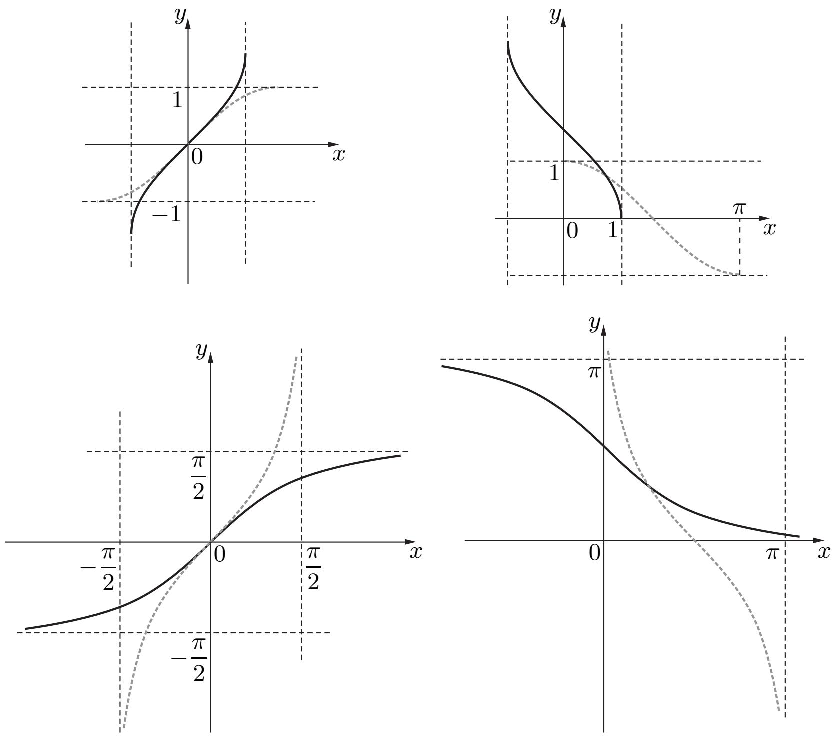
a) A tg és ctg függvények. A

$$\mathrm{tg} : \mathbb{R} \backslash \{(k + \frac{1}{2})\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \ , \qquad \mathrm{tg}(x) \doteq \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \ ;$$
$$\mathrm{ctg} : \mathbb{R} \backslash \{k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \ , \qquad \mathrm{ctg}(x) \doteq \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

szerint definiált függvényeket tangens, ill. cotangens függvényeknek nevezzük. Legfontosabb tulajdonságaikat gyakorlaton vizsgáljuk.

b) Az arcus függvények definíciója.

Az $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$ folytonos és szigorúan monoton növekedő függvény inverzét arcsin (arkusz-szinusz) függvénynek nevezzük. Ez folytonos, szigorúan monoton növekedő és
$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



1. ábra. Az arcus függvények

A $g : [0, \pi] \to \mathbb{R},\ g(x) = \cos(x)$ folytonos és szigorúan monoton csökkenő függvény inverze az arccos (arkusz-koszinusz) függvény, mely folytonos, szigorúan monoton csökkenő és
$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

Az $F : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ F(x) = \operatorname{tg}(x)$ folytonos és szigorúan monoton növekedő függvény inverzét arctg (arkusz-tangens) függvénynek nevezzük. Ez folytonos, szigorúan monoton növekedő és
$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

A $G : (0,\pi) \to \mathbb{R},\ G(x) = \mathrm{ctg}(x)$ folytonos és szigorúan monoton csökkenő függvény inverzét arcctg (arkusz-cotangens) függvénynek nevezzük. Ez folytonos, szigorúan monoton csökkenő és
$\mathrm{arcctg} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$.

1. tétel. *A* tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg *függvények differenciálhatók és*

$$\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}\ , \qquad \mathrm{ctg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}\ ,$$
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \neq \pm 1), \qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \neq \pm 1),$$
$$\mathrm{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}\ , \qquad \mathrm{arcctg}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}\ .$$

Bizonyítás.

– $\mathrm{tg}(x) \doteq \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{(k+\frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})$, a sin és cos függvények differenciálhatók, $\cos(x) \neq 0$, ha $x \in D_{\mathrm{tg}}$, így a korábban tanult tételeket felhasználva

$$\mathrm{tg}'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos(x)\sin'(x)}{\cos^2(x)} = $$
$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}\ .$$

– $\mathrm{ctg}(x)$ differenciálhatósága és $\mathrm{ctg}'(x)$ meghatározása ugyanígy megy.

– Az $\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}$ függvény az $f : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$ függvény inverze, mely szigorúan monoton és folytonos $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$-n $\exists\ f'(x) = \cos(x)\ \forall\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ esetén, továbbá $f'(x) \neq 0$, ha $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, így az inverz függvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel szerint

$$\exists\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,$$

ha $x \in]-1,1[$ (itt felhasználtuk azt is, hogy $\cos(t) > 0$,
ha $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$).
Belátható, hogy az arcsin függvény nem differenciálható, ha $x = -1$, vagy $x = 1$.

– Az arccos, arctg, arcctg függvények differenciálhatósága és deriváltjuk meghatározása az előbbihez hasonlóan történik. $\square$

c) Értelmezhetők a $\mathrm{th} \doteq \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$, $\mathrm{cth} \doteq \dfrac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}$ tangens-hiperbolikusz és cotangens-hiperbolikusz függvények, és vizsgálhatók tulajdonságaik.

d) sh, ch, th, cth inverzeiként értelmezzük az arsh, arch, arth, arcth area-függvényeket és vizsgálhatjuk tulajdonságaikat.

Megjegyzés. A th, cth és az area függvények differenciálási szabálya is egyszerűen bizonyítható (lásd gyakorlaton).

9. Magasabbrendű deriváltak

Az f függvény $f' = f^{(1)}$ deriváltfüggvényét is deriválhatjuk, ekkor megkapjuk az $f'' = f^{(2)}$ második deriváltat. Ezt pedig deriválva kapjuk az $f''' = f^{(3)}$ harmadik deriváltat. Az n-edik derivált (rekurzióval történő) pontos definíciója az alábbi.

Definíció. Legyen $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ adott függvény. f 0-adik deriváltja:
$f^{(0)} \doteq f$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $f^{(n-1)} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ értelmezett és differenciálható függvény, akkor f n-edik deriváltja az $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ függvény.
Ha $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re $\exists\, f^{(n)}$, akkor azt mondjuk, hogy f akárhányszor differenciálható.

Példa.

1. $f(x) = x^2+3x+2$ $(x \in \mathbb{R}) \implies \exists\, f'(x) = 2x+3$ $(x \in \mathbb{R}) \implies \exists\, f''(x) = 2$ $(x \in \mathbb{R}) \implies \exists\, f'''(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R}) \implies \exists\, f^{(n)}(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$-re $\implies f$ akárhányszor differenciálható.
2. Teljes indukcióval bizonyítható, hogy $k, n \in \mathbb{N}$ esetén
$$(x^n)^{(k)} = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}\ (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{ha } k < n;$$
$$(x^n)^{(n)} = n!\ (x \in \mathbb{R});$$
$$(x^n)^{(k)} = 0\ (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{ha } k > n.$$
3. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén $\exists\, \exp^{(n)} = \exp$ (azaz $(e^x)^{(n)} = e^x,\ x \in \mathbb{R}$), tehát az exponenciális függvény akárhányszor differenciálható.

1. tétel. *Ha $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ n-szer differenciálható, akkor $c \cdot f,\ f + g,\ f \cdot g$ is n-szer differenciálható és $\forall\, x \in \langle a, b\rangle$ esetén*
$$(c \cdot f)^{(n)}(x) = c \cdot f^{(n)}(x)\ ;$$
$$(f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)\ ;$$
$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x) \cdot g^{(n-i)}(x) \quad \textit{(Leibniz-szabály).}$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval egyszerű. □

Példa. A $h(x) = (x^2 + 2x)e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény az $f(x) = x^2 + 2x$ $(x \in \mathbb{R})$ és a $g(x) = e^x$ akárhányszor differenciálható függvények szorzata, így a Leibniz-szabály miatt $n = 100$ esetén $\forall\ x \in \mathbb{R}$-re

$$h^{(100)}(x) = \sum_{i=0}^{100} \binom{n}{i} (x^2 + 2x)^{(i)} (e^x)^{(n-i)} =$$
$$= \binom{100}{0}(x^2 + 2x)e^x + \binom{100}{1}(2x+2)e^x + \binom{100}{2}2e^x \ .$$

2. tétel. *Az* $f(x) \doteq \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ $(x \in \,]-\varrho, \varrho\,[\,)$ *hatványsor összegfüggvénye akárhányszor differenciálható és*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1) \cdot a_k \cdot x^{k-n} \qquad (x \in (-\varrho, \varrho)),$$

továbbá $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $\quad (n = 0, 1, \dots)$.

Bizonyítás. A hatványsorok differenciálhatósági tétele alapján, teljes indukcióval, illetve $x = 0$ helyettesítéssel egyszerű. □

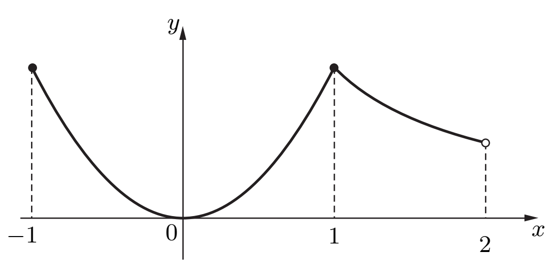
10. Differenciálható függvények vizsgálata

a) A lokális szélsőérték szükséges feltétele

Példa. Az

$$f(x) = \begin{cases} x^2\ , & \text{ha } x \in [-1, 1], \\ \dfrac{1}{x}\ , & \text{ha } x \in \,]\,1, 2\,[\,. \end{cases}$$

függvény szélsőérték helyei: -1, 0, 1. Ezek közül a 0-ban „vízszintes éritője van”. Ezt a pont, amelyben egyrészt differenciálható, másrészt az értelmezési tartományának belső pontja.



1. ábra.

1. tétel. *Legyen* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. *Ha* f*-nek az* $x_0 \in \,]\,a, b\,[$*-ben lokális maximuma (minimuma) van és* $\exists\ f'(x_0)$, *akkor* $f'(x_0) = 0$.

Bizonyítás. Ha például f-nek x_0-ban lokális minimuma van, akkor $\exists\ K(x_0,\delta) \subset]\,a,b\,[$, hogy $f(x) - f(x_0) \geq 0$ $(x \in K(x_0,\delta))$, így

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} \leq 0\ , & \text{ha } x_0-\delta < x < x_0, \\ \geq 0\ , & \text{ha } x_0 < x < x_0+\delta. \end{cases}$$

Ezért

$$f'(x_0) = \left\{ \begin{aligned} f'_-(x_0) &= \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \\ f'_+(x_0) &= \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow f'(x_0) = 0.$$

□

Megjegyzés. A feltétel általában nem elégséges, ahogy ezt például az $f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény az $x_0 = 0$-ban mutatja. Ekkor $\exists\ f'(0) = 0$, de $x^3 > 0$, ha $x > 0$ és $x^3 < 0$, ha $x < 0$, így $\nexists\ K(0,\delta)$, hogy $\forall\ x \in K(0,\delta)$-ra $x^3 \geq 0$ vagy $x^3 \leq 0$ teljesülne, így $x_0 = 0$-ban nincs lokális maximuma és minimuma sem.

Példa. Az $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénynek az $x_0 = 0$ pontban lokális minimuma van (hiszen $x^2 \geq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$) és $\exists\ f'(x_0) = f'(0) = 0$.

b) Középértéktételek

2. tétel (Cauchy). *Ha az $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak $[a,b]$-n, differenciálhatóak $]\,a,b\,[$-n, akkor $\exists\ x \in]\,a,b\,[$, hogy*

(C–K) $$[f(b)-f(a)] \cdot g'(x) = [g(b)-g(a)] \cdot f'(x)\ .$$

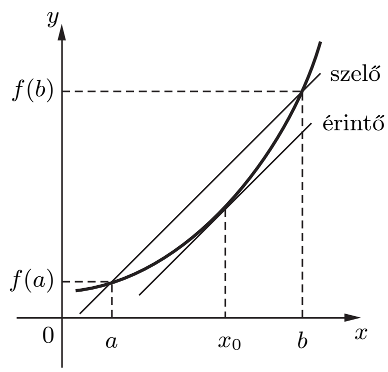
Az alábbiakban a Cauchy-tétel néhány következményét tárgyaljuk.

3. tétel (Lagrange). *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n, differenciálható $]\,a,b\,[$-n, akkor $\exists\ x \in]\,a,b\,[$, hogy*

(L–K) $$f(b)-f(a) = f'(x)(b-a)\ .$$

Bizonyítás. Következik (C-K)-ból $g(x) = x$ választással. □

A Lagrange-tétel geometriai jelentése: az $(a,f(a))$, $(b,f(b))$ pontokat összekötő szelővel párhuzamos az x-beli érintő.



2. ábra.

Példa. Bizonyítsuk be a $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$ $(x, y \in \mathbb{R})$ egyenlőtlenséget.
A $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $\forall$ $[x, y]$-on teljesíti a Lagrange-tétel feltételeit, így $\exists\ t \in\ ]x, y[$, hogy

$$\sin(y) - \sin(x) = \sin'(t)(y - x) = \cos(t)(y - x) \ ,$$

amiből $|\cos(t)| \leq 1$ miatt kapjuk a

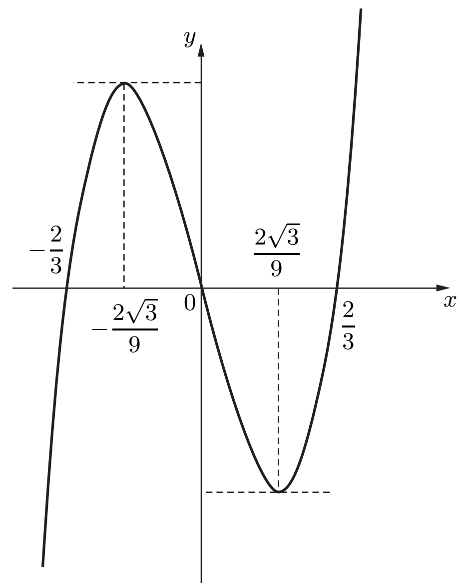
$$|\sin(x) - \sin(y)| = |\cos(t)|\,|x - y| \leq |x - y| \ ,$$

illetve a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

4. tétel (Rolle). *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$-n, differenciálható $]\,a, b\,[$-n, $f(a) = f(b)$, akkor $\exists\ x \in\ ]\,a, b\,[$, hogy $f'(x) = 0$.*

Bizonyítás. Következik (L-K)-ból $f(a) = f(b)$ miatt. □

Példa. Az $f(x) = 9x^3 - 4x$ függvény a $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ intervallumon teljesíti a Rolle-tétel feltételeit, mert (mint polinom függvény) differencálható,
$f\left(-\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, így $\exists\ x \in \left]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right[$, hogy $f'(x) = 27x^2 - 4 = 0$. Ez akkor igaz, ha $x = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Könnyen ellenőrízhető, hogy mindkét érték benne van a $\left]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right[$ intervallumban.



3. ábra.

5. tétel (a monotonitás elegendő feltétele). *Ha $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható, akkor*

a) $f' \geq 0 \implies f$ *monoton növekedő;*
b) $f' \leq 0 \implies f$ *monoton csökkenő;*
c) $f' = 0 \implies f = c$, *azaz konstans.*

Bizonyítás. A Lagrange-tétel segítségével.
Legyen $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ tetszőleges. Az f $[x_1, x_2]$-re való leszűkítése teljesíti a Lagrange-tétel feltételeit, így $\exists\ x \in]\,x_1, x_2\,[$, hogy

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(x) \ ,$$

így bármely fenti $x_1,\ x_2$-re

a) $f' \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1) \implies f$ monoton növekedő;
b) $f' \leq 0 \implies f(x_2) \leq f(x_1) \implies f$ monoton csökkenő;
c) $f' = 0 \implies f(x_2) = f(x_1) \implies f = c$, azaz konstans. □

6. tétel (a monotonitás szükséges és elegendő feltétele). *Legyen* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *differenciálható függvény, akkor*

a) f *monoton növekvő (csökkenő)* $\langle a, b\rangle$*-n* $\iff f' \geq 0$ $(f' \leq 0)$*;*

b) f *szigorúan monoton növekvő (csökkenő)* $\langle a, b\rangle$*-n* $\iff$ $f' \geq 0$ $(f' \leq 0)$ *és* $\nexists\ \langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$*, hogy* $f'(x) = 0$*, ha* $x \in \langle c, d\rangle$*.*

Példa. Az $f(x) = 2+x-x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény differenciálható, $f'(x) = 1-2x$ $(x \in \mathbb{R})$, így $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$. Továbbá $f'(x) = 1 - 2x > 0 \iff x < \frac{1}{2}$, ezért f szigorúan monoton növekvő $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$-en. Másrészt $f'(x) = 1-2x < 0 \iff x > \frac{1}{2}$. Így f szigorúan monoton csökkenő $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$-en.

7. tétel (a szélsőérték egy elégséges feltétele).
Legyen $f :]\,x_0 - r, x_0 + r\,[\to \mathbb{R}$ *differenciálható függvény. Ha*

a) $f'(x) \geq 0 \quad (x \in]\,x_0 - r, x_0\,[), \quad f'(x) \leq 0 \quad (x \in]\,x_0, x_0 + r\,[)$*, akkor* f*-nek* x_0*-ban lokális maximuma van;*

b) $f'(x) \leq 0 \quad (x \in]\,x_0 - r, x_0\,[), \quad f'(x) \geq 0 \quad (x \in]\,x_0, x_0 + r\,[)$*, akkor* f*-nek* x_0*-ban lokális minimuma van.*

Bizonyítás. Az 6. Tétel miatt f növekedő az $]\,x_0 - r, x\,[$ intervallumon, viszont csökkenő az $]\,x_0, x - r\,[$ intervallumon, így x_0-ban maximuma van. A minimum hasonlóan bizonyítható. □

Példa. Az előbbi példa $f(x) = 2 + x - x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ differenciálható függvényére azt kapjuk, hogy $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ és $f'(x) \geq 0$, ha $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$, $f'(x) \leq 0$, ha $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, így a tétel miatt f-nek lokális maximuma van az $x = \frac{1}{2}$ helyen.

c) Taylor-sorok, Taylor-polinom

1. definíció. Legyen az $f :]\,p, q\,[\to \mathbb{R}$ függvény akárhányszor differenciálható. A

$$\text{(TS)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k \qquad (x, a \in]\,p, q\,[)$$

hatványsort az f függvény a-hoz tartozó Taylor-sorának, míg n-edik részletösszegét, a

$$\text{(TP)} \qquad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k \qquad (x, a \in]\,p, q\,[)$$

polinomot az f függvény a-hoz tartozó Taylor-polinomjának nevezzük.
Ha $0 \in]\,p, q\,[$, akkor az $a = 0$-hoz tartozó Taylor-sort f Maclaurin-sorának nevezzük.

Megjegyzések.

1. Minden konvergens hatványsor összegfüggvényének Taylor-sora (lásd: exp, sin, ...).
2. Fontos kérdés: Mikor állítható elő egy függvény Taylor-sorával?

8. tétel (Taylor). *Legyen* $f : K(a,r) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ *és* $\exists\ f^{(n)}$, *akkor* $\forall\ x \in K(a,r)$ *esetén* $\exists\ \xi(x) \in K(a,r)\backslash\{a\}$, *hogy*

$$\text{(T)} \qquad f(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!} \cdot (x-a)^n \qquad (x \in K(a,r))\ .$$

Megjegyzések.

1. $n = 1$-re a Taylor-tétel a Lagrange-tétel.
2. Az
$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!} \cdot (x-a)^n \qquad (x \in K(a,r))$$
szerint definiált R_n függvény a Taylor-formula Lagrange-féle maradéktagja.
3. Ha $\exists\ M$, hogy $\forall\ x \in K(a,r),\ n \in \mathbb{N}$ esetén $|f^{(n)}(x)| \leq M$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, ezért
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k \qquad (x \in K(a,r)),$$
így az f függvény Taylor-sorának összege.
4. Az
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & ,\ x \neq 0 \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases}$$
függvényre $\exists\ f^{(n)}(0) = 0\ (n \in \mathbb{N})$, így az f függvény 0-hoz tartozó Taylor-sorának összege a 0 függvény, ami nyilván $\neq f$.
5. A Taylor-tétel alapján becsülhető f és T_{n-1} eltérése, például:
$$\left|\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)\right| =$$
$$= \left|\frac{\sin^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \cdot x^{2n}\right| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}\ .$$
6. Az $\ln(1+x) = f(x)\ (x \in (-1,\infty))$ függvényre például
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\ ,$$
amiből $x = 1$ választással és határátmenettel
$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \cdots\ ,$$
ahol a jobboldal az ismert Leibniz-féle sor.

d) A szélsőérték általános feltétele

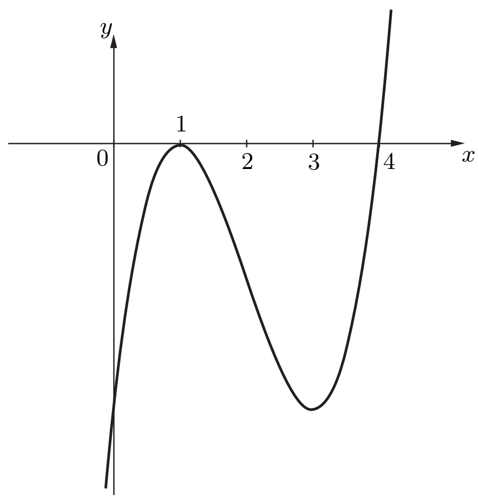
9. tétel. *Ha $f : K(a,r) \to \mathbb{R}$ $(k-1)$-szer differenciálható $(k \geq 2)$, $f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0$ és $\exists\, f^{(k)}(a) \neq 0$, akkor*

a) *ha k páratlan, úgy $f(a)$ nem szélsőérték;*
b) *ha k páros, úgy $f(a)$ szélsőérték, továbbá*
   – *$f^{(k)}(a) > 0$ esetén $f(a)$ szigorú lokális minimum,*
   – *$f^{(k)}(a) < 0$ esetén $f(a)$ szigorú lokális maximum.*

Példa. Az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ kétszer differenciálható, és $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$. $f'(x) = 0 \iff x = 1$ vagy $x = 3$, így e két helyen lehet lokális szélsőértéke:

– $f''(1) = -6 < 0 \implies f$-nek $x = 1$-ben lokális maximuma van, értéke $f(1) = 0$;

– $f''(3) = 6 > 0 \implies f$-nek $x = 3$-ben lokális minimuma van, értéke $f(3) = 4$.



4. ábra.

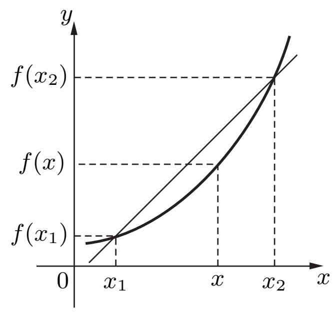
e) Konvex függvények

2. definíció. Az $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ függvényt ***konvex***nek (illetve ***konkáv***nak) nevezzük $\langle a,b \rangle$-n, ha $\forall\, x_1, x_2 \in \langle a,b \rangle$ és $\forall\, p, q \in [0,1]$, $p + q = 1$ esetén

$$\text{(K)} \qquad f(p \cdot x_1 + q \cdot x_2) \leq p \cdot f(x_1) + q \cdot f(x_2)$$

(illetve (K)-ban $\geq$) teljesül. f szigorúan konvex (konkáv), ha (K)-ban szigorú egyenlőtlenség van.

Megjegyzés. Egy konvex f függvény gráfjának pontjai az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontokon áthaladó szelő alatt vannak ($\forall\, x_1, x_2 \in \langle a,b \rangle$, $x_1 < x_2$ esetén).



5. ábra. Konvex függvény

10. tétel. *Az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény akkor és csak akkor konvex, ha az $f' : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény monoton növekvő.*

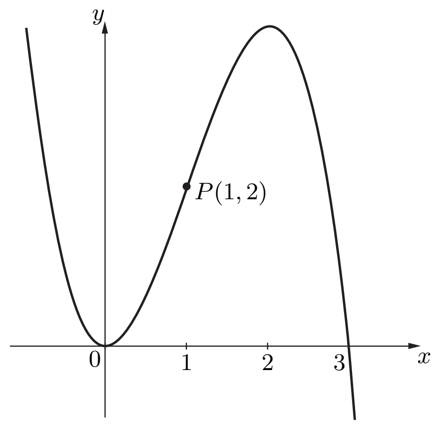
Megjegyzések.
1. Hasonló állítás igaz konkáv függvényekre is.
2. f szigorúan konvex $\iff f'$ szigorúan monoton növekvő.
3. Ha $\exists\ f''$, úgy: f konvex $\iff f'' \geq 0$; f konkáv $\iff f'' \leq 0$.

3. definíció. Az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x \in]a, b[$ inflexiós helye, $(x, f(x))$ pedig inflexiós pontja, ha $\exists\ r > 0$, hogy f konvex (konkáv) $]x - r, x]$-en és konkáv (konvex) $[x, x + r[$-en.

Tehát az inflexiós helyen a függvény vagy konvexből konkávba vált, vagy konkávból konvexbe.

11. tétel. *Az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek az $x \in]a, b[$ akkor és csak akkor inflexiós helye, ha szélsőértékhelye f'-nek.*

Példa. Az $f(x) = 3x^2 - x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény kétszer differenciálható: $f'(x) = 6x - 3x^2$, $f''(x) = 6 - 6x$. Így $f''(x) = 0 \iff x = 1$.
$f''(x) = 6 - 6x \geq 0 \iff x \leq 1$. Tehát f szigorúan konvex $]-\infty, 1[$-en.
$f''(x) = 6 - 6x \leq 0 \iff x \geq 1$. Tehát f szigorúan konkáv $[1, +\infty[$-en.
$x = 1$-ben konvex és konkáv ív találkozik, így $x = 1$ inflexiós hely, $(1, 2)$ pedig inflexiós pont.



6. ábra.

f) L'Hospital-szabály

Alapprobléma.
Ha $f, g : K(a,r) \to \mathbb{R}$ adottak és $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, akkor létezik-e $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, és hogyan számítható ki? (Lehet egyoldali határérték is.)

12. tétel (L'Hospital-szabály). *Legyenek $f, g :]a, a+r[\to \mathbb{R}$ differenciálható függvények, hogy $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, $g(x) \cdot g'(x) \neq 0$. Ha létezik a $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték, akkor létezik a $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is, és a kettő egyenlő egymással.*

Megjegyzések.
1. Hasonló igaz $]a-r, a[$-ra vagy $K(a,r)\setminus\{a\}$-n értelmezett függvények esetén.
2. Ha $f(a) = g(a) = 0$; f, g differenciálhatók a-ban, és $g'(a) \neq 0$, akkor
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \ .$$
3. Ha f és g értelmezési tartománya felülről, illetve alulról nem korlátos, akkor például
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to 0+0} f\left(\frac{1}{y}\right), \quad \text{illetve} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{y\to 0-0} g\left(\frac{1}{y}\right)$$
miatt a L'Hospital-szabály végtelenben vett határértékre is érvényes.
4. A L'Hospital szabály akkor is érvényes, ha
$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$.

5. Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, akkor az $f(x)\cdot g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ egyenlőség jobb oldalára alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt.

Példa.

1. Az $f(x) = \sin(x)$ és $g(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények differenciálhatók, $f'(x) = \cos(x)$, $g'(x) = 1 \neq 0$ $(x \in \mathbb{R})$, $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{1} = 1$. Így a L'Hospital-szabály szerint $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.
2. Az $f(x) = x$ és $g(x) = e^{2x} \neq 0$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények differenciálhatók, $f'(x) = 1$, $g'(x) = 2e^{2x} \neq 0$ $(x \in \mathbb{R})$, $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2e^{2x}} = 0$. Így a 3. és 4. megjegyzések miatt $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^{2x}} = 0$.

g) Függvények vizsgálata, ábrázolása

Egy f függvény teljes vizsgálatánál meghatározzuk:

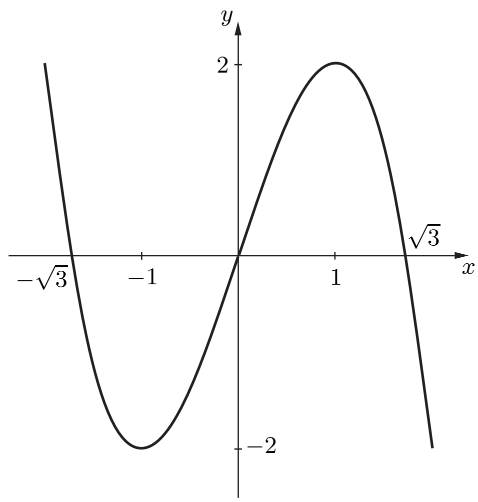
1. a D_f értelmezési tartományt;
2. hogy f páros, páratlan, periódikus függvény-e;
3. f zérushelyeit, D_f azon részhalmazait, ahol f előjele állandó;
4. f határértékeit D_f határpontjaiban;
5. f szakadási helyeit, folytonossági intervallumait;
6. f derivált függvényét (függvényeit): f', f'';
7. D_f azon részintervallumait, ahol f monoton növekedő (csökkenő);
8. f szélsőérték helyeit és szélsőértékeit;
9. D_f azon részintervallumait, ahol f konvex (konkáv), az inflexiós helyeket (pontokat);
10. az esetleges aszimptotákat – olyan $y = ax + b$ egyenletű egyeneseket, melyekre $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax - b) = 0$, illetve $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - ax - b) = 0$; $a = \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ \vee\, x\to-\infty}} \dfrac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ \vee\, x\to-\infty}} (f(x) - ax)$;
11. ábrázoljuk az f függvényt (megrajzoljuk a gráfját);
12. f R_f értékkészletét.

Példa. Végezzük el a teljes függvényvizsgálatot és ábrázoljuk az $f(x) = 3x - x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt!

1. $D_f = \mathbb{R}$;
2. $f(-x) = 3(-x) - (-x)^3 = -[3x - x^3] = -f(x)$, tehát f páratlan;

3. $3x - x^3 = x(3 - x^2) = 0 \iff x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$, tehát f zérushelyei $x = 0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$;
$f(x) > 0$, ha $x \in]-\infty, -\sqrt{3}[\;\vee\; x \in]0, \sqrt{3}[$,
$f(x) < 0$, ha $x \in]-\sqrt{3}, 0[\;\vee\; x \in]\sqrt{3}, +\infty[$;
4. D_f határpontjai: $-\infty, +\infty$;
$\lim\limits_{x\to-\infty}(3x - x^3) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3\left(-\frac{3}{x^2} + 1\right) = +\infty$;
$\lim\limits_{x\to+\infty}(3x - x^3) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^3\left(-\frac{3}{x^2} + 1\right) = -\infty$;
5. f folytonos $\mathbb{R}$-en (mert két folytonos függvény különbsége), így szakadási helye nincs;
6. f differenciálható $\mathbb{R}$-en (mert differenciálható függvények különbsége), és $f'(x) = 3 - 3x^2$ $(x \in \mathbb{R})$, továbbá $f''(x) = -6x$ $(x \in \mathbb{R})$;
7. $f'(x) = 3 - 3x^2 \geq 0 \iff 1 \geq x^2 \iff |x| \leq 1$, tehát f szigorúan monoton növekvő a $[-1, 1]$ intervallumon;
$f'(x) \leq 0 \iff |x| \geq 1$, tehát f szigorúan monoton csökkenő a $]-\infty, -1]$ és $[1, +\infty[$ intervallumokon;
8. $f'(x) = 0 \iff x = -1 \vee x = 1$, tehát ezen helyeken lehet lokális szélsőértéke:
$x = -1$-ben f' előjelet vált, negatívról pozitívra, tehát $x = -1$ lokális minimum hely,
$x = 1$-ben f' előjelet vált, pozitívról negatívra, tehát $x = 1$ lokális maximum hely,
(a lokális minimum és maximum értéke -2, illetve 2); globális szélsőértéke nincs;
9. $\exists\, f''(x) = -6x$: $f''(x) \geq 0 \iff x \leq 0$, $f''(x) \leq 0 \iff x \geq 0$, tehát f konvex a $]-\infty, 0]$, konkáv a $[0, +\infty[$ intervallumokon, $x = 0$ inflexiós hely (a $(0, 0)$ inflexiós pont);
10. aszimptota nincs;

11.



7. ábra.

12. $R_f = \mathbb{R}$ (mert f folytonos és $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$).

IX. fejezet

Integrálszámítás

1. Primitív függvény, határozatlan integrál

Ismeretes, hogy egy $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényhez hozzárendelhető az $f' : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény.

Példa. Ha $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$, úgy létezik $f'(x) = 2x$ $(x \in \mathbb{R})$.

Kérdés: $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$-hez létezik-e $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, hogy $F' = f$?

Példa. Ha $f(x) = \sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor $F(x) = -\cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ esetén $F'(x) = \sin(x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ teljesül.

1. definíció. Legyen adott az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény.
A $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt az f ***primitív függvény***ének vagy ***határozatlan integrál***jának nevezzük, ha $F' = f$.
Az F függvényre az $\int f$ jelölést használjuk. $\int f$ meghatározását integrálásnak mondjuk.
Az $F = \int f$ függvény x helyen felvett értékét $F(x) = \int f(x)dx$ vagy $(\int f)(x)$ jelöli, ami gyakran a primitív függvényt (határozatlan integrált) is jelenti.
A primitív függvény (határozatlan integrál) értelmezhető $f : H \to \mathbb{R}$ függvényre is, ahol H intervallumok egyesítése.

Példa. Az $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény esetén a $F(x) = \mathrm{ch}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény teljesíti, hogy $F'(x) = f(x)$, így $F(x) = \int \mathrm{sh}(x)\,dx$.

1. tétel. *Ha $f, F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $F' = f$ $(F = \int f)$, úgy $G : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor primitív függvénye (határozatlan integrálja) f-nek, ha $\exists\, C \in \mathbb{R}$, hogy $G(x) = F(x) + C$.*

Bizonyítás.
a) Ha $G(x) = F(x) + C$, akkor a feltételek miatt $G'(x) = F'(x) = f(x)$ $(x \in \langle a, b\rangle)$, így a definíció szerint G primitív függvény.
b) Ha $G = \int f$, azaz G is primitív függvénye f-nek, akkor $G'(x) = F'(x)$ $(x \in \langle a, b\rangle)$, ami ekvivalens azzal, hogy $[G(x) - F(x)]' = 0$ $(x \in \langle a, b\rangle)$, így a differenciálszámításban tanultak szerint $G(x) - F(x) = C$ $(x \in \langle a, b\rangle)$, azaz $G(x) = F(x) + C$. $\square$

Megjegyzés. Ha az f függvény értelmezési tartománya nem intervallum, akkor az állítás nem igaz.

Alapintegrálok:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln(x) + C_1 & (x > 0) \\ \ln(-x) + C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\int x^\mu\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \qquad (x \in \mathbb{R}_+,\ \mu \neq -1)$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\operatorname{ctg}(x) + C_k \qquad (x \in \,]\,k\pi, (k+1)\pi\,[\,,\ k \in \mathbb{Z})$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \operatorname{tg}(x) + C_k \qquad (x \in \,]\,k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\,[\,,\ k \in \mathbb{Z})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C \qquad (x \in \,]-1, 1\,[\,)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \operatorname{sh}(x)\,dx = \operatorname{ch}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \operatorname{ch}(x)\,dx = \operatorname{sh}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsh}(x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arch}(x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C \qquad (x \in \,]\,1, \infty\,[\,)$$

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (x \in \,]-\varrho, \varrho\,[\,)$$

2. tétel. *Legyen $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ olyan, hogy létezik $\int f$ és $\int g$, és $p, q \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor létezik $\int (pf + qg)$ és $C \in \mathbb{R}$, hogy*

$$\int [pf(x) + qg(x)]\,dx = p\int f(x)\,dx + q\int g(x)\,dx + C \qquad (x \in \langle a, b\rangle)\ .$$

Bizonyítás. Legyen $F = \int f$, $G = \int g$, akkor F', G' létezése miatt létezik $(pF + qG)'$ is, és

$$(pF + qG)'(x) = pF'(x) + qG'(x) = pf(x) + qg(x) \qquad (x \in \langle a, b \rangle) \ ,$$

ami azt jelenti, hogy létezik $\int (pf(x) + qg(x)) \ dx$ és $= pF(x) + qG(x) + C = p \int f(x) \ dx + q \int g(x) \ dx + C \quad (x \in \langle a, b \rangle)$. □

Példa. Ha $f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$, $g(x) = \cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor létezik $\int x^3 \, dx$ és $\int \cos(x) \, dx$ (lásd alapintegrálok), így tételünk szerint létezik $\int (2x^3 + 3\cos(x)) dx$ és létezik $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\int (2x^3 + 3\cos(x)) dx = 2 \, \frac{x^4}{4} + 3\sin(x) + C \ .$$

3. tétel (parciális integrálás tétele). *Ha az $f, g : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak $\langle a, b \rangle$-n és létezik $\int f'g$, akkor létezik $\int fg'$ is, és van olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy*

$$\text{(P)} \qquad \int f(x)g'(x) \ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \ dx + C \qquad (x \in \langle a, b \rangle) \ .$$

Bizonyítás. A feltételek miatt az $f \cdot g - \int f'g$ függvény differenciálható, és

$$\begin{aligned} \left[f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \ dx \right]' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = \\ &= f(x)g'(x) \ , \end{aligned}$$

ami a határozatlan integrál definíciója miatt azt jelenti, hogy létezik $\int fg'$ és teljesül (P). □

Példák.

1. Legyen $f(x) = x$, $g(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$. f és g differenciálhatók és $f'(x) = 1$, $g'(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$, továbbá létezik $\int f'(x)g(x) \, dx = = \int 1 \cdot e^x \, dx = \int e^x \, dx$ (lásd alapintegrálok), így a tétel miatt létezik $\int x \, e^x \, dx$ és $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\int x \, e^x \, dx = x \, e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx + C = x \, e^x - e^x + C \qquad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

2. Legyen $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$.
f és g differenciálhatók és $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = 1$ $(x \in \mathbb{R}_+)$,
továbbá létezik $\int f'(x)g(x) \, dx = \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = \int 1 \, dx$ $(x \in \mathbb{R}_+)$ (lásd alapintegrálok), így a tétel miatt létezik $\int \ln(x) \, dx = \int 1 \cdot \ln(x) \, dx$ és $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\begin{aligned} \int \ln(x) \, dx = \int 1 \cdot \ln(x) \, dx &= x \, \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx + C = \\ &= x \, \ln(x) - x + C \qquad (x \in \mathbb{R}_+) \ . \end{aligned}$$

Megjegyzés. Ha $P_n(x)$ egy n-edfokú polinom, úgy az alábbi integrálok a parciális integrálás tételével meghatározhatók:

$$\begin{array}{lll}
\int P_n(x)e^x\ dx\,, & \int P_n(x)\sin(x)\,dx\ , & \int P_n(x)\arcsin(x)\,dx\ , \\
\int P_n(x)\ln(x)\,dx\ , & \int P_n(x)\cos(x)\,dx\ , & \int P_n(x)\arccos(x)\,dx\ , \\
 & \int P_n(x)\,\mathrm{sh}(x)\ dx\,, & \int P_n(x)\,\mathrm{arctg}(x)\,dx\ , \\
 & \int P_n(x)\,\mathrm{ch}(x)\,dx\ , & \int P_n(x)\,\mathrm{arcctg}(x)\,dx\ .
\end{array}$$

4. tétel (helyettesítéses integrálás tétele). *Ha $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $g : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ olyanok, hogy létezik $g' : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$ és létezik $\int f$, akkor létezik $\int (f \circ g) \cdot g'$ és van olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy*

$$\text{(H)}\qquad \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \left(\left(\int f\right) \circ g\right)(x) + C = \int f(t)\,dt\,\Big|_{t=g(x)} + C$$

$(x \in \langle c, d\rangle)$.

Bizonyítás. A feltételek miatt létezik $[(\int f) \circ g]'$ és

$$\left[\left(\int f\right) \circ g\right]'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) \qquad (x \in \langle c, d\rangle),$$

ami éppen azt jelenti, hogy létezik $\int (f \circ g)g'$ és teljesül (H). □

Megjegyzés. Ha (a fentieken túl) létezik g^{-1}, akkor (H) a következő alakba is írható:

$$\text{(H}'\text{)}\qquad \int f(x)\ dx = \left[\left(\int (f \circ g)g'\right) \circ g^{-1}\right](x) + C = \\ = \int f(g(t))g'(t)dt|_{t=g^{-1}(x)} + C$$

$(x \in \langle c, d\rangle)$.

Példák.

1. $\int 2x \sin(x^2)\,dx = ?$
   Legyen $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ továbbá létezik $g'(x) = 2x$ $(x \in \mathbb{R})$ és $\int f = \int \sin(x)\,dx$ (lásd alapintegrálok), így a tétel miatt létezik $\int 2x \sin(x^2)\,dx$ és $C \in \mathbb{R}$, hogy
   $$\int 2x \sin(x^2)\,dx = \int \sin(t)\,dt\,\Big|_{t=x^2} + C = -\cos(x^2) + C\ .$$
2. $\int \mathrm{ch}(2x + 3)\,dx = ?$ $(x \in \mathbb{R})$
   Belátható, hogy az $f(x) = \mathrm{ch}(2x + 3)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénynek létezik primitív

függvénye. Legyen $g(t) = \frac{t-3}{2}$, ekkor $g'(t) = \frac{1}{2}$, továbbá létezik $g^{-1}(x) = 2x+3$ $(x \in \mathbb{R})$, így a megjegyzés miatt

$$\int \operatorname{ch}(2x+3)\,dx = \int \operatorname{ch}\left(2\cdot\frac{t-3}{2}+3\right)\cdot\frac{1}{2}\,dt\,\Big|_{t=2x+3} + C =$$
$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} t\,dt\,\Big|_{t=2x+3} + C = \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2x+3) + C\ .$$

3. $\int \frac{3}{x-1}\,dx = ?$ $(x > 1)$
   Legyen $g(t) = t+1$, ekkor $g'(t) = 1$, létezik $g^{-1}(x) = x-1$, így

$$\int \frac{3}{x-1}\,dx = \int \frac{3}{t+1-1}\cdot 1\,dt\,\Big|_{t=x-1} + C =$$
$$= 3\int \frac{1}{t}\,dt\,\Big|_{t=x-1} + C = 3\ln(x-1) + C\ .$$

4. $\int \frac{5}{x^2+2x+2}\,dx = ?$
   Legyen $g(t) = t-1$, ekkor $g'(t) = 1$, létezik $g^{-1}(x) = x+1$, így

$$\int \frac{5}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{5}{(x+1)^2+1}\,dx =$$
$$= 5\int \frac{1}{t^2+1}\cdot 1\,dt\,\Big|_{t=x+1} + C = 5\operatorname{arctg}(x+1) + C\ .$$

Megjegyzések.
1. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ esetén a $g(t) = \sin(t)$ $\quad (t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$,
2. $\int R(\sin(x), \cos(x))\,dx$ esetén (ahol $R(u,v)$ racionális kifejezése u, v-nek és $x \in]-\pi, \pi[$) a

$$g(t) = 2\operatorname{arctg} t \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (\text{ill. } \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t = g^{-1}(x) \quad (x \in]-\pi,\pi[)\ ,$$

3. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,dx$ esetén a

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = g^{-1}(x), \qquad g(t) = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}\ ,$$

4. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ esetén az Euler-féle (vagy trigonometrikus (sin), illetve hiperbolikusz (sh, ch) függvényes)

helyettesítéseket alkalmazzuk.

Racionális törtfüggvények integrálása.

A parciális törtekre bontás tétele szerint minden $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ racionális törtfüggvény egyértelműen előáll egy polinom és

$$\frac{a}{(x-b)^j}\ , \quad \frac{px+q}{(x^2+rx+s)^k} \qquad (j,k \in \mathbb{N}_+,\ r^2-4s<0)$$

alakú törtek bizonyos (itt nem részletezett) összegeként, ahol $(x-b)^j$ és $(x^2+rx+s)^k$ a $Q_m(x)$ osztói. Így $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ meghatározása visszavezethető az

$$\int \frac{a}{(x-b)^j}\,dx \quad \text{és} \quad \int \frac{px+q}{(x^2+rx+s)^k}\,dx$$

meghatározására.

Megjegyzések.
1. Az utóbbi két integráltípust gyakorlaton vizsgáljuk (az első kezelése azonnal látható).
2. A 4. tétel utáni 2), 3), 4) példák esetén az integrálas racionális törtfüggvény integrálására vezethető vissza.
3. További ún. racionalizáló helyettesítések is vizsgálhatók (például $\int R(e^x)\,dx$, binom integrálok).

2. A Riemann-integrálhatóság fogalma

Először egy feladaton bemutatjuk a fejezet címében jelzett fogalom, a Riemann-integrál hátterét (geometriai „tartalmát”).

Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ $(x \in [0,1])$ függvény gráfja, az x-tengely $[0,1]$ szakasza és az $x = 1$ egyenletű egyenes által határolt síkidom területét.

A keresett T területet korlátok közé szorítjuk. Ehhez osszuk fel a $[0,1]$ intervallumot a $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ osztáspontokkal. T felső becslését úgy kapjuk, ha az $[x_{i-1}, x_i]$ szakaszra $f(x_i) = x_i^2$ magasságú téglalapot emelünk $(i = 1, \ldots, n)$ és vesszük ezek területeinek

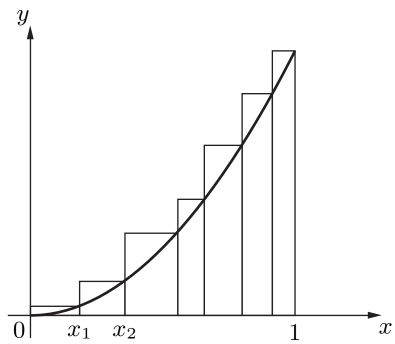
$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot (x_i - x_{i-1})$$

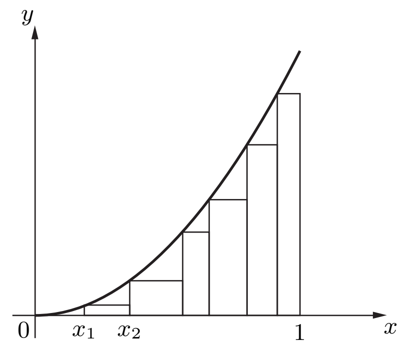
összegét. Nyilván $T \leq S$, mert a függvény szigorú monoton növekedése miatt $x^2 \leq x_i^2$ teljesül az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon, így a kapott téglalapok befedik a vizsgált síkidomot, ezért területük összege legalább T.

Hasonló gondolatmenet adja, hogy ha az $[x_{i-1}, x_i]$ szakaszra $f(x_{i-1}) = x_{i-1}^2$ magasságú téglalapot emelünk $(i = 1, \ldots, n)$, akkor az így kapott téglalapok területeinek

$$s = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összegére $s \leq T$ teljesül, mert minden téglalap a T területű síkidom része és nem nyúlnak egymásba.





Ha az osztáspontokat $x_i = \frac{i}{n}$ $(i = 0, \ldots, n)$ módon választjuk, úgy

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}(1^2 + \cdots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \\ &= \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}\ , \\ s &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}(1^2 + \cdots + (n-1)^2) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \\ &= \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2}\ , \end{aligned}$$

így

$$\frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} \le T \le \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}\ ,$$

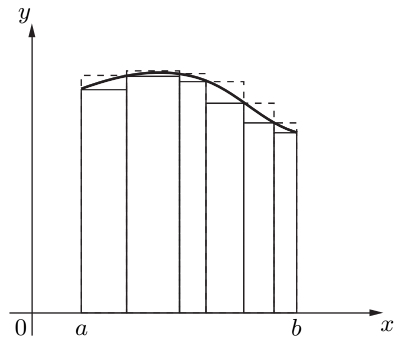
ami jól kezelhető becslést ad T-re, sőt

$$\frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} \to \frac{1}{3} \quad \text{és} \quad \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} \to \frac{1}{3}$$

miatt a becslést tetszőleges pontosságúnak is tekinthetjük, azzal a következtetéssel, hogy a keresett terület $T = \frac{1}{3}$.

Persze igazából csak akkor nyugodhatnánk meg, ha ez nem csak speciális, hanem tetszőleges felosztás (felosztássorozat) esetén is adódna.

E módszer használható általánosabban egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos (vagy csak korlátos) és nemnegatív függvény görbéje, az $[a, b]$ szakasz, az $x = a$ és az $x = b$ egyenesek által határolt síkidom területének közelítésére, esetleg pontos megadására is.



Ha még azt sem tesszük fel, hogy f nemnegatív, úgy eljutunk a Riemann nevével fémjelzett integrál fogalmához, melynek geometriai „tartalma” például nemnegatív folytonos függvényekre éppen a görbe alatti síkidom területe lesz.

Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum. A továbbiakban $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ típusú korlátos függvényekkel foglalkozunk.

1. definíció. A

$$P = \{x_i \mid a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b\} \subset [a,b]$$

halmazt az $[a,b]$ ***intervallum egy felosztásá***nak, az x_i pontokat a ***felosztás osztáspontjai***nak, az $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,\ldots,n)$ intervallumokat a ***felosztás részintervallumai***nak, míg $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ mellett a

$$\|P\| \doteq \sup\{\Delta x_i \mid i = 1,\ldots,n\}$$

számot a ***felosztás finomságá***nak nevezzük.

2. definíció. Legyen P_1 és P_2 $[a,b]$ két felosztása. P_2 ***finomítása*** (továbbosztása) a P_1 felosztásnak, ha $P_1 \subset P_2$. A $P \doteq P_1 \cup P_2$ halmazt a P_1 és P_2 egyesítésének nevezzük.

3. definíció. A $\langle P_k \rangle$ ***normális felosztássorozat***a $[a,b]$-nek, ha $\lim\limits_{k\to\infty} \|P_k\| = = 0$ teljesül.

4. definíció. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, P egy felosztása $[a,b]$-nek.

$$M_i \doteq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad m_i \doteq \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad (M_i, m_i \ \exists \text{ és } \in \mathbb{R})$$

5. definíció. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, P egy felosztása $[a,b]$-nek. Az

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$
$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$
$$\mathcal{O}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i$$

számokat az f függvény P felosztáshoz tartozó ***alsó***, ***felső***, illetve ***oszcillációs összeg***ének, míg $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ esetén a

$$\sigma(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta x_i$$

számot az f függvény P felosztáshoz és $t_1, \ldots, t_n$-hez tartozó ***integrálközelítő összeg***ének nevezzük. (Ezek „geometrialiag” bizonyos „területek”.)

1. tétel. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

a)	*bármely P és $\sigma(f,P)$-re:*	$s(f,P) \le \sigma(f,P) \le S(f,P)$;
b)	*bármely $P_1 \subset P_2$-re:*	$s(f,P_1) \le s(f,P_2),\ S(f,P_2) \le S(f,P_1)$;
c)	*bármely P_1, P_2-re:*	$s(f,P_1) \le S(f,P_2)$.

6. definíció. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f \doteq \sup_P \{s(f,P)\}, \qquad \bar{I} = \overline{\int_a^b} f \doteq \inf_P \{S(f,P)\}$$

számokat az f függvény $[a,b]$ feletti ***alsó***, illetve ***felső Darboux-integrál***jának nevezzük.

2. tétel. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor $\underline{I}, \bar{I} \in \mathbb{R}$ és $\underline{I} \le \bar{I}$ teljesül.*

Bizonyítás. Az 1. tétel c) része miatt bármely P_1-re $s(f,P_1) \le S(f,P)$ bármely P esetén, így létezik $\bar{I} \in \mathbb{R}$ továbbá $s(f,P_1) \le \bar{I}$, ami adja, hogy létezik $\underline{I} \in \mathbb{R}$ és $\underline{I} \le \bar{I}$. □

Következmény. *Bármely P-re $s(f,P) \le \underline{I} \le \bar{I} \le S(f,P)$, ami adja, hogy $0 \le \bar{I} - \underline{I} \le \mathcal{O}(f,P)$.*

Példák.

1. Ha $f(x) = c$ $(x \in [a,b])$, akkor $\underline{I} = \bar{I}$, mert $[a,b]$ bármely P felosztására $m_i = M_i = c$, így $s(f,P) = S(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} c\,\Delta x_i = x \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a)$, tehát $\underline{I} = \bar{I} = c(b-a)$.
2. Létezik f, hogy $\underline{I} \neq \bar{I}$. Legyen
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{, ha } x \in [a,b] \setminus ([a,b] \cap \mathbb{Q}), \end{cases}$$
(azaz a Dirichlet-féle függvény leszűkítése az $[a,b]$ intervallumra). Legyen P tetszőleges felosztása $[a,b]$-nek. Ismeretes, hogy bármely két valós szám között van racionális és irracionális szám is, így $m_i = 0,\ M_i = 1$ a felosztás bármely intervallumán, ami adja, hogy
$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0\ , \qquad S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b-a\ ,$$
így $\underline{I} = 0 \neq b-a = \bar{I}$.

7. definíció. Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény ***Riemann-integrálható*** $[a,b]$-n, ha $\underline{I} = \bar{I}$. Ezt a közös értéket az f $[a,b]$ feletti ***Riemann-integrál***jának nevezzük, és rá az I, $\int\limits_a^b f$ vagy $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ jelölést használjuk. Ha $[c,d] \subset [a,b]$ és f $[c,d]$-re való leszűkítése Riemann-integrálható $[c,d]$-n, akkor azt mondjuk, hogy f Riemann-integrálható $[c,d]$-n. $\int\limits_c^d f$ az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálját jelöli $[c,d]$-n. Ha $f|_{[c,d]} = g$, akkor $\int\limits_c^d f \doteq \int\limits_c^d g$.

Megjegyzések.

1. Az előbbi példák mutatják, hogy az $f(x) = c$ $(x \in [a,b])$ függvény Riemann-integrálható és $\int\limits_a^b c\,dx = c(b-a)$, míg a Dirichlet-féle függvény nem Riemann-integrálható $[a,b]$-n.
2. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos, nemnegatív és Riemann-integrálható függvény, akkor az $\int\limits_a^b f$ szám (f Riemann-integrálja $[a,b]$-n) geometriai tartalma legyen az f gráfja alatti síkidom területe.

3. A Darboux-tétel és következményei

A felső és alsó összegek egyfajta „határérték” tulajdonságát mutatja az alábbi eredmény.

1. tétel (Darboux-tétel). *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor bármely ε-hoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $[a, b]$ bármely P felosztására, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$*

(D) $$S(f, P) - \bar{I} < \varepsilon \quad \text{és} \quad \underline{I} - s(f, P) < \varepsilon$$

teljesül.

2. tétel (A Darboux-tétel következménye). *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

a) *$[a, b]$ bármely $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozatára létezik*

$$\lim_{k\to\infty} s(f, P_k) = \underline{I}\,, \quad \lim_{k\to\infty} S(f, P_k) = \bar{I}\,, \quad \text{és} \quad \lim_{k\to\infty} \mathcal{O}(f, P_k) = \bar{I} - \underline{I}\,;$$

b) *$[a, b]$ bármely $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozatára létezik $\langle \sigma^1(f, P_k) \rangle$ és $\langle \sigma^2(f, P_k) \rangle$ integrálközelítő összegsorozat, hogy*

$$\text{létezik} \lim_{k\to\infty} \sigma^1(f, P_k) = \underline{I} \quad \text{illetve} \quad \lim_{k\to\infty} \sigma^2(f, P_k) = \bar{I}\ .$$

Megjegyzés. $\underline{I}$ és $\bar{I}$ tehát meghatározható egy speciális normális felosztássorozathoz tartozó $\langle s(f, P_k) \rangle$, illetve $\langle S(f, P_k) \rangle$ sorozat határértékeként. Ezért például a már vizsgált $f(x) = x^2$ $(x \in [0, 1])$ függvényre $\underline{I} = \bar{I} = \frac{1}{3}$, így az Riemann-integrálható.

4. A Riemann-integrálhatóság kritériumai és elegendő feltételei

1. tétel. *Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a, b]$-n, ha létezik $I \in \mathbb{R}$ hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy bármely olyan P felosztására $[a, b]$-nek, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$, $|\sigma(f, P) - I| < \varepsilon$ teljesül bármely $\sigma(f, P)$-re.*

2. tétel. *Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a, b]$-n, ha $[a, b]$ bármely $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozathoz tartozó bármely $\sigma(f, P_k)$ integrálközelítő összegsorozat konvergens.*

3. tétel (Riemann-kritérium). *Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a, b]$-n, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik P felosztása $[a, b]$-nek, hogy*

$$\mathcal{O}(f, P) = S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon\ .$$

4. tétel. *Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a, b]$-n, ha az $[a, b]$ bármely $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozata esetén $\langle \mathcal{O}(f, P_k) \rangle$ nullsorozat.*

5. tétel. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Bármely P-re $\bar{I} - \underline{I} \leq \mathcal{O}(f,P)$, így elég megmutatni, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik P felosztása $[a,b]$-nek, hogy $\mathcal{O}(f,P) < \varepsilon$ (mert akkor $\underline{I} = \bar{I}$): f folytonossága adja egyenletes folytonosságát $[a,b]$-n, így $\frac{\varepsilon}{b-a}$-hoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\, x', x'' \in [a,b]$, $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ esetén

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \ .$$

Legyen P olyan, hogy $\|P\| < \delta(\varepsilon)$, akkor

$$\bar{I} - \underline{I} \leq \mathcal{O}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i') - f(x_i''))\Delta x_i < \varepsilon \ .$$

(Itt felhasználtuk, hogy f folytonossága miatt $\exists\, x_i', x_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$, hogy $M_i = f(x_i')$, $m_i = f(x_i'')$.) □

6. tétel. *Egy* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *monoton függvény Riemann-integrálható.*

Bizonyítás.

a) Ha $f(a) = f(b) \implies f(x) \equiv C \implies$ az állítás igaz.

b) Ha $f(a) \neq f(b)$, akkor $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén olyan P-re, hogy $\|P\| < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ (felhasználva például monoton növekvő f függvény esetén, hogy $m_i = f(x_{i-1})$, $M_i = f(x_i)$) kapjuk, hogy

$$\bar{I} - \underline{I} \leq \mathcal{O}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]\Delta x_i <$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \varepsilon \ ,$$

ami adja, hogy $\underline{I} = \bar{I}$ azaz f Riemann-integrálható. □

Példa. Tekintsük az $f(x) = [x]$, $x \in [-1,2]$ függvényt (az egészrész függvény leszűkítését a $[-1,2]$ intervallumra). Ez monoton növekedő, így tételünk miatt Riemann-integrálható $[-1,2]$-n, de nem folytonos).

7. tétel. *Ha* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálható* $[a,b]$*-n,* $[c,d] \subset [a,b]$*, akkor* f *Riemann-integrálható* $[c,d]$*-n is.*

8. tétel (az integrál intervallum feletti additivitása).
Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in \,]\,a,b\,[\,$, f *Riemann-integrálható* $[a,c]$*-n és* $[c,b]$*-n, akkor* f *Riemann-integrálható* $[a,b]$*-n is, és*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \ .$$

Következmény. *Legyen* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *és* $P = \{a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b\}$ *egy felosztása* $[a,b]$*-nek. Ha* f *Riemann-integrálható bármely* $[a_{i-1}, a_i]$ *intervallumon, akkor Riemann-integrálható* $[a,b]$*-n és*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx$$

Bizonyítás. A 8. tétel felhasználásával és teljes indukcióval azonnal kapjuk az állítást. □

Megjegyzések.

1. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, úgy az 5. tétel miatt Riemann-integrálható, azaz $\underline{I} = \bar{I}$. Az $[a,b]$ intervallum egyenlő részekre osztásával nyert $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozat, mert $\|P_k\| = \dfrac{b-a}{k} \to 0$. Így a Darboux-tétel következménye miatt:

$$\lim_{k\to\infty} s(f, P_k) = \underline{I} = \bar{I} = \lim_{k\to\infty} S(f, P_k)\ ,$$

   ezért a középiskolában adott integrál definíció a Riemann-integrállal megegyező eredményt ad.
2. Tételeink alapján egy Riemann-integrálható függvény Riemann-integrálját bármely $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozathoz tartozó $\langle s(f, P_k) \rangle$, $\langle S(f, P_k) \rangle$, vagy $\langle \sigma(f, P_k) \rangle$ sorozat határértéke megadja.

5. A Riemann-integrál műveleti tulajdonságai

1. tétel. *Ha* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálhatók,* $p, q \in \mathbb{R}$*, akkor a* $(p \cdot f + q \cdot g) : [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvény is Riemann-integrálható és*

$$\int_a^b (p \cdot f + q \cdot g) = p \cdot \int_a^b f + q \cdot \int_a^b g$$

Bizonyítás. $[a,b]$ bármely $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozatára

$$\sigma(p \cdot f + q \cdot g, P_k) = p \cdot \sigma(f, P_k) + q \cdot \sigma(g, P_k)\ ,$$

ami f és g Riemann-integrálhatósága és a Riemann-integrálhatóság kritériuma (II.4.2. tétel) miatt adja az állítást. □

Megjegyzés. A tételből teljes indukcióval következik, hogy ha az $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények Riemann-integrálhatók és $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$(i = 1, \ldots, n)$, akkor a $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ függvény is Riemann-integrálható és

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_a^b f_i \ .$$

2. tétel. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor f^2 is, továbbá ha létezik $c > 0$, hogy $|f(x)| \geq c$ bármely $x \in [a, b]$, akkor $\frac{1}{f}$ is Riemann-integrálható.*

3. tétel. *Ha az $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények Riemann-integrálhatók, akkor $f \cdot g$ is, továbbá ha létezik $c > 0$, hogy $|g(x)| > c$ bármely $x \in [a, b]$-re, úgy $\frac{f}{g}$ is Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Az

$$f \cdot g = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2] \quad \text{és} \quad \frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$

egyenlőségek – az első két tétel felhasználásával – nyilvánvalóan adják az állítást. □

Megjegyzések.

1. A 3. tétel teljes indukcióval adja, hogy véges sok Riemann-integrálható függvény szorzata is Riemann-integrálható.
2. Riemann-integrálható függvények kompozíciója általában nem Riemann-integrálható.
3. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ és $R_f \subset [c, d]$. Ha f Riemann-integrálható és g folytonos, akkor $g \circ f$ Riemann-integrálható.

4. tétel. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, akkor $|f|$ is Riemann-integrálható.*

6. Egyenlőtlenségek, középértéktételek Riemann-integrálra

1. tétel. *Legyenek $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálhatók és $f \leq g$, akkor $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

Bizonyítás. Legyen $\langle P_k \rangle$ tetszőleges normális felosztássorozata $[a, b]$-nek, $t_i^k \in [x_{i-1}^k, x_i^k]$ tetszőleges, akkor $f(t_i^k) \leq g(t_i^k)$ miatt $\sigma(f, P_k) \leq \sigma(g, P_k)$, ami adja az állítást. □

2. tétel. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \ .$$

Bizonyítás. $|f|$ az 5.4. tétel miatt Riemann-integrálható, így a $-|f| \le f \le |f|$ egyenlőtlenségből az 1. tétel miatt $-\int |f| \le \int f \le \int |f|$, ami adja az állítást. $\square$

3. tétel (középértéktétel). *Legyenek $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálhatók, továbbá*

$$m \le f(x) \le M \ , \quad 0 \le g(x) \qquad (x \in [a,b]),$$

akkor

$$m \cdot \int_a^b g \le \int_a^b f \cdot g \le M \cdot \int_a^b g \ .$$

Bizonyítás. $m \cdot g,\ f \cdot g,\ M \cdot g$ Riemann-integrálhatók és

$$m \cdot g \le f \cdot g \le M \cdot g$$

$[a,b]$-n, melyből az 1. tétel miatt jön az állítás. $\square$

Következmények.

1. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, $m \le f \le M$, akkor

$$m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f \le M \ .$$

Bizonyítás. A 3. tételből $g(x) = 1$ választással kapjuk az állítást.

2. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor létezik $c \in [a,b]$, hogy

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \ .$$

7. Az integrál, mint a felső határ függvénye

1. definíció. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor

$$\int_a^a f \doteq 0, \qquad \int_b^a \doteq -\int_a^b$$

2. definíció. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor az

(I-F) $$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) \doteq \int_a^x f(t)dt$$

szerint definiált F függvényt f ***integrál***jának, ***mint a felső határ függvényé***nek nevezzük. Ezt szokás ***területmérő függvény***nek, vagy f ***integrálfüggvény***ének is nevezni.

1. tétel. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor F (f integrálja, mint a felső határ függvénye) folytonos $[a,b]$-n.*

2. tétel. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható és folytonos az $x \in [a,b]$ pontban, akkor az F (f integrálja, mint a felső határ függvénye) differenciálható x-ben, és $F'(x) = f(x)$. (Tehát, ha f bármely $x \in [a,b]$-ben folytonos, úgy F egy primitív függvénye f-nek.)*

8. A Newton-Leibniz formula

Tétel (Newton-Leibniz formula). *Legyen $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan, hogy f Riemann-integrálható, F folytonos $[a,b]$-n és differenciálható $]\,a,b\,[$-n, továbbá $F'(x) = f(x)$ $(x \in]\,a,b\,[)$, akkor*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

(Az $F(b) - F(a)$ számot szokás $[F(x)]_a^b$ módon is jelölni.)

Bizonyítás. Legyen $\langle P_k \rangle = \langle \{x_i^k \mid i = 0, 1, \ldots, n_k\} \rangle$ tetszőleges normális felosztás-sorozata $[a,b]$-nek. F teljesíti a Lagrange-tétel feltételeit bármely $[x_{i-1}^k, x_i^k]$ intervallumon, így $\exists\ t_i^k \in]\,x_{i-1}^k, x_i^k\,[$, hogy

$$F(x_i^k) - F(x_{i-1}^k) = F'(t_i^k)\Delta x_i^k = f(t_i^k)\Delta x_i^k \qquad \forall\ i = 0, 1, \ldots, n_k \text{ esetén.}$$

Ezeket összegezve pedig

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n_k} (F(x_i^k) - F(x_{i-1}^k)) = \sum_{i=1}^{n_k} f(t_i^k)\Delta x_i^k = \sigma(f, P_k)$$

következik $\forall\ k$-ra, így $k \to \infty$ esetén (f integrálhatósága miatt)

$$F(b) - F(a) = \sigma(f, P_k) \to \int_a^b f\ ,$$

azaz $F(b) - F(a) = \int_a^b f$ (mert $\sigma(f, P_k)$ konstans sorozat), és ezt kellett bizonyítani. $\square$

Megjegyzés. Ha F differenciálható $[a,b]$-n és $F' = f$, azaz F primitív függvénye f-nek, akkor F-et nyilván az I.1. fejezetben tanultak szerint határozzuk meg, majd alkalmazhatjuk tételünket.

Példák.

1. Számítsa ki az $\int\limits_1^2 [x]\,dx$ Riemann-integrált (ha létezik).

   Az $f(x) = [x],\ x \in [1, 2]$ függvény monoton növekedő, ezért Riemann-integrálható. A $F(x) = x,\ x \in [1, 2]$ függvény differenciálható, továbbá $F'(x) = 1 = [x]$, ha $x \in [1, 2[$. Teljesülnek tehát tételünk feltételei, így

$$\int\limits_1^2 [x]\,dx = F(2) - F(1) = 2 - 1 = 1\ .$$

2. Számítsa ki az $\int\limits_1^\pi \sin(x)\,dx$ Riemann-integrált (ha létezik).

   Az $f(x) = \sin(x),\ x \in [0, \pi]$ folytonos, ezért Riemann-integrálható.
   Ismeretes, hogy $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$ $(x \in \mathbb{R})$, így a
   $F(x) = -\cos(x),\ (x \in [0, \pi])$ az f primitív függvénye (azaz $F'(x) = f(x)$) $[0, \pi]$-n, ezért tételünk és a megjegyzés miatt

$$\int\limits_1^\pi \sin(x)\,dx = \big[-\cos(x)\big]_0^\pi = 1 + 1 = 2\ .$$

9. Parciális és helyettesítéses Riemann-integrálok

1. tétel (parciális Riemann-integrálás). *Ha az $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosan differenciálhatók, akkor*

$$\int\limits_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f'g\ .$$

Bizonyítás. Legyen $F : [a, b] \to \mathbb{R},\ F(t) = \int\limits_a^t fg' + \int\limits_a^t f'g + f(a)g(a) - f(t)g(t)$, akkor $\forall\ t \in [a, b]$-re $\exists\ F'(t)$ és

$$F'(t) = f(t)g'(t) + f'(t)g(t) - [f(t)g(t)]' = 0 \qquad (\forall\ t \in [a, b]),$$

így $F(t) \equiv c$, illetve $F(a) \doteq 0$ miatt $c = 0$ és ezért $F(b) = 0$, ami F definíciójából adja az állítást. □

Példa. Számítsuk ki az $\int\limits_0^\pi x \sin(x)\,dx$ Riemann-integrált (ha létezik).

Az $f(x) = x,\ g(x) = -\cos(x)$ $(x \in [0, \pi])$ folytonosan differenciálhatók, mert létezik $f'(x) = 1,\ g'(x) = \sin(x)$ $(x \in [0, \pi])$ és az $f', g' : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak. Ezért tételünk és a Newton-Leibniz formula szerint

$$\int_0^\pi x\sin(x)\,dx = \pi(-\cos(\pi)) - 0\cdot(-\cos(0)) - \int_0^\pi 1\cdot(-\cos(x))\,dx =$$

$$= \pi + \int_0^\pi \cos(x)\,dx = \pi + \big[\sin(x)\big]_0^\pi = \pi\ .$$

2. tétel (helyettesítéses Riemann-integrálás). *Ha $g:[a,b]\to[c,d]$ folytonosan differenciálható, $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ folytonos, akkor*

(H-R)
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ dx\ .$$

Bizonyítás. Legyen $H:[c,d]\to\mathbb{R}$, $H(u)\doteq\int_{g(a)}^{u} f(x)dx$, akkor H differenciálható és $H'(x)=f(x)$ $(x\in[c,d])$. Legyen továbbá $G:[c,d]\to\mathbb{R}$

$$G(t) = \int_a^t f(g(x))g'(x)\ dx - \int_{g(a)}^{g(t)} f(x)\ dx\ ,$$

akkor $\exists\, G'(t) = f(g(t))g'(t) - H'(g(t))g'(t) = 0$, és így $G(t)\equiv c$. De akkor $G(a)=0$ miatt $c=0$, és így $G(b)=0$, ami G definíciója miatt adja az állítást. □

Megjegyzések.

1. (H-R)-ben x helyett írhatunk t változót a baloldalon és akkor az a

   (H*-R)
   $$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)\ dt\ .$$

   alakban is írható.
2. (H-R)-t akkor használjuk, ha észrevesszük, hogy a kiszámítandó integrálunk integrandusa $f(g(x))\cdot g'(x)$ alakú, míg (H*-R)-t akkor, ha az $x=g(t)$ $(t\in[a,b])$ helyettesítéssel akarjuk (tudjuk) kiszámítani az $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$ integrált.

Példák.

1. Számítsuk ki az $I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\, dx$ (egyébként létező) Riemann-integrált.

   Nyilván

$$I = -\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\, dx\ ,$$

továbbá látható, hogy a $g : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right],\ g(x) = \frac{1}{x}$ folytonosan differenciálható és az $f : \left[\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$ folytonos függvények teljesítik a tétel feltételeit, így (H-R) és néhány korábbi eredmény szerint

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\, dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\, dx = -\int\limits_{\frac{4}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{\frac{4}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin(x)\, dx = \cos\left(\frac{2}{\pi}\right) - \cos\left(\frac{4}{\pi}\right)\ .$$

2. Számítsa ki az $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$ Riemann-integrált.

   Az $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ $(x \in [0,1])$ függvény folytonos.
   Legyen $g(t) = \log t$ $(t \in [1,e])$, ekkor $g([1,e]) = [0,1],\ 0 = g(1),\ 1 = g(e)$ és g $(g'(t) = \frac{1}{t}$ miatt) folytonosan differenciálható, ezért a (H*-R) szerint

$$\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx = \int\limits_{\log 1}^{\log e} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx = \int\limits_1^e \frac{e^{\log t}}{1+e^{2\log t}} \frac{1}{t}\, dt = \int\limits_1^e \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \left[\operatorname{arctg} t\right]_1^e = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}\ .$$

10. Improprius Riemann-integrál

1. definíció. Legyen $a \in \mathbb{R},\ a < b \leq +\infty,\ f : [a,b[\to \mathbb{R}$ minden $[a,t] \subset [a,b[$ intervallumon korlátos és Riemann-integrálható függvény. Tegyük fel továbbá, hogy $b = +\infty$ vagy $\exists\ \varepsilon > 0$, hogy f nem korlátos a $[b-\varepsilon, b[$ intervallumban. Ha létezik a

$$\lim_{t\to b-0} \int\limits_a^t f \doteq \int\limits_a^b f \tag{1}$$

véges határérték, akkor azt az f függvény ***improprius Riemann-integrál***jának nevezzük $[a,b[$-n. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_a^b f$ ***improprius integrál konvergens***. Ha (1) nem létezik, akkor az improprius integrált divergensnek mondjuk.

2. definíció. Ha $a \in \mathbb{R}$, $-\infty \leq c < a$, $f :]c,a] \to \mathbb{R}$ minden $[t,a] \subset]c,a]$ intervallumon korlátos és Riemann-integrálható, $c = -\infty$ vagy $\exists\ \varepsilon > 0$, hogy f nem korlátos $]c, c+\varepsilon]$-on. Ha létezik a

$$\lim_{t\to c+0} \int\limits_t^a f \doteq \int\limits_c^a f \tag{2}$$

véges határérték, akkor azt az f ***improprius Riemann-integrál***jának nevezzük $(c,a]$-n. (A konvergencia illetve a divergencia az előzőekhez hasonló.)

3. definíció. Legyen $-\infty \leq a < b \leq +\infty, f :]\,a,b\,[\to \mathbb{R}\ \forall\ [x,y] \subset]\,a,b\,[$ intervallumon korlátos és Riemann-integrálható, továbbá $a = -\infty$ vagy $b = +\infty$ (vagy mindkettő) vagy létezik $\varepsilon > 0$, hogy f nem korlátos az $]\,a, a+\varepsilon] \cup [b-\varepsilon, b\,[$ intervallmon. Akkor a

$$\lim_{\substack{x\to a+0\\ y\to b-0}} \int\limits_x^y f \doteq \int\limits_a^b f$$

véges határértéket (ha létezik) $f\ \ [\,a,b\,]$ ***feletti improprius Riemann-integrál-já***nak nevezzük.

Példák.

1. Konvergens-e az $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha\,dx$ improprius integrál, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ rögzített? Legyen $a = 1,\ b = +\infty$, ekkor az $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = x^\alpha$ függvény bármely $[1,t] \subset [1,+\infty[$ intervallumon korlátos és Riemann-integrálható (hiszen folytonos) és

$$\int\limits_1^t x^\alpha\,dx = \begin{cases} \left[\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^t = \dfrac{1}{\alpha+1}(t^{\alpha+1}-1) & \text{, ha } \alpha \neq -1, \\ \left[\ln\alpha\right]_1^t = \ln t & \text{, ha } \alpha = -1. \end{cases}$$

Továbbá

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\alpha+1} = \begin{cases} 0 & \text{, ha } \alpha < -1, \\ +\infty & \text{, ha } \alpha > -1, \end{cases} \qquad \lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty\ .$$

Ezért az 1. definíció szerint

$$\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha\,dx = \begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{\alpha+1}(t^{\alpha+1}-1) = -\dfrac{1}{\alpha+1} & \text{, ha } \alpha < -1, \\ +\infty & \text{, ha } \alpha \geq -1 \text{ (divergens).} \end{cases}$$

2. Konvergens-e az $\int\limits_0^{+\infty} e^{\alpha x}\,dx$ improprius integrál, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ rögzített?

Legyen $a = 0,\ b = +\infty$, ahol az $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = e^{\alpha x}$ függvény bármely $[0, t] \subset [0, +\infty[$ intervallumon korlátos és Riemann-integrálható, mert folytonos, és

$$\int\limits_0^t e^{\alpha x}\,dx = \left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\right]_0^t = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) \qquad \text{ha } \alpha \neq 0,$$

illetve

$$\int\limits_0^t e^{0x}\,dx = \int\limits_0^t 1\,dx = t\ .$$

Mivel

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\alpha t} = \begin{cases} 0 & , \text{ha } \alpha < 0, \\ +\infty & , \text{ha } \alpha > 0 \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \lim_{t\to+\infty} t = +\infty\ ,$$

így

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{\alpha x}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha} & , \text{ha } \alpha < 0, \\ +\infty & , \text{ha } \alpha \geq 0. \end{cases}$$

X. fejezet

Vekotorterek, euklideszi terek

1. Vektortér, euklideszi tér fogalma

1. definíció. Legyen adott egy V halmaz (elemeit ***vektor***oknak nevezzük). Tegyük fel, hogy értelmezve van két ***művelet***:

– a ***vektorok összeadása***, melyet $x, y \in V$-re $x + y$,
– a ***skalárral való szorzás***, melyet $x \in V \wedge \lambda \in \mathbb{R}$ esetén λx jelöl.

V-t e két művelettel ***vektortér***nek, (vagy ***lineáris tér***nek) nevezzük, ha bármely $x, y, z \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén

1) $x + y = y + x$ (kommutativitás),
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (asszociativitás),
3) $\exists\ 0 \in V,\ x + 0 = x$ (nullelem létezése),
4) $\forall\ x \in V,\ \exists\ -x \in V,\ x + (-x) = 0$ (inverzelem létezése),
5) $1 \cdot x = x$,
6) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,
7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (disztributivitás).

2. definíció. Ha V egy vektortér, akkor a $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ függvényt ***skaláris***, vagy ***belsőszorzat***nak nevezzük, ha $\forall\ x, y, z \in V$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén

1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
2) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,
3) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$,
4) $\langle x, x\rangle \geq 0,\ \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

teljesül.

3. definíció. Egy V vektorteret, rajta egy skaláris (vagy belső) szorzattal, ***belsőszorzattér***nek, vagy (néha csak valós értékű skaláris szorzat esetén) ***euklideszi tér***nek nevezünk.

4. definíció. Ha V belsőszorzattér, akkor az $x \in V$ vektor hosszán, vagy ***euklideszi normá***ján az $\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x\rangle}$ számot értjük.

1. tétel. *Az euklideszi normára teljesül:*

1) $\|x\| \geq 0, \ \|x\| = 0 \iff x = 0, \qquad \forall\, x \in V$,
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \ \|x\| \qquad \forall\, x \in V, \ \lambda \in \mathbb{R}$,
3) $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \, \|y\|^2$,
4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall\, x, y \in V$.

Megjegyzés. Minden, az 1)-4) tulajdonságot teljesítő $\|\,.\,\| : V \to \mathbb{R}$ függvényt normának nevezünk V-n.

5. definíció. Ha V belsőszorzattér (vagy euklideszi tér) akkor az $x, y \in V$ vektorok ***euklideszi távolság***án a $d(x, y) \doteq \|x - y\|$ számot értjük és azt mondjuk, hogy a $d : V \times V \to \mathbb{R}$ függvény távolság, vagy ***metrika*** V-ben.

2. tétel. *A V-beli euklideszi távolságra teljesül:*

1) $d(x, y) \geq 0$, $\quad d(x, y) = 0 \iff x = y$, $\qquad \forall\, x, y \in V$,
2) $d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall\, x, y \in V$,
3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \qquad \forall\, x, y, z \in V$.

Bizonyítás.
1) $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$, és $d(x, y) = 0 \iff = 0$, ha $x = y$;
2) $d(x, y) = \|x - y\| = \| - (y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x)$;
3) $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| =$
$= d(x, y) + d(y, z)$. □

2. Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér

1. definíció. Legyen $\mathbb{R}^1 \doteq \mathbb{R}$, és ha $n \in \mathbb{N}$-re már $\mathbb{R}^n$ értelmezett, akkor $\mathbb{R}^{n+1} \doteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. $\mathbb{R}^n$ elemeit $(x_1, \ldots, x_n)$-nel jelöljük és ***rendezett valós szám*** n***-es***eknek nevezzük, ahol

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \iff x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n \ .$$

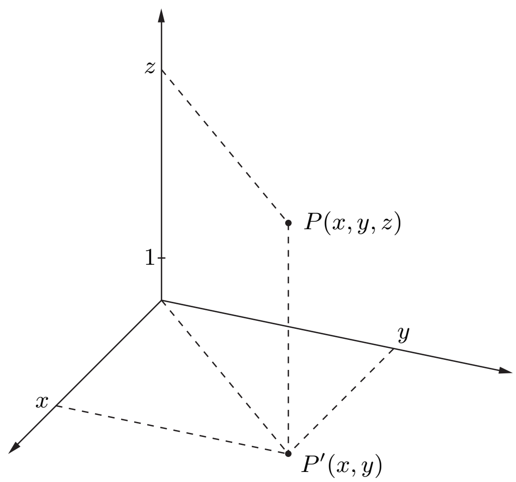
Ha $x \doteq (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor az x_i-ket az x ***koordinátái***nak, $\mathbb{R}^n$ elemeit pontoknak, vagy vektoroknak is nevezzük.

Szokásos az $\mathbb{R}^n \doteq \overset{1}{\mathbb{R}} \times \cdots \times \overset{n}{\mathbb{R}}$ jelölés is és azt is mondjuk, az $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$ önmagával vett n-szeres Descartes-szorzata.

Megjegyzés. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ egy modelljét (reprezentációját) már megadtuk, mint a síkbeli Descartes-féle koordinátarendszert.

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ egy modellje (reprezentációja) az alábbi módon bevezetett térbeli Descartes-féle koordinátarendszer.

Ha adott a síkbeli Descartes-féle koordinátarendszer, úgy annak $(0, 0)$ koordinátájú pontjában állítsunk merőleges egyenest, mely egy olyan számegyenes, melynek 0 pontja a $(0, 0)$ döféspont, az egységet pedig úgy jelöljük ki, hogy onnan a síkra „nézve” az y-tengely pozitív forgással vihető át az x-tengelybe. Az új tengelyt z-tengelynek is nevezhetjük.



A tér pontjaihoz az $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ rendezett számhármasokat bijektíven lehet hozzárendelni úgy, hogy egy P ponthoz rendelt z koordináta a P-ből a z tengelyre bocsájtott merőleges talppontjának megfelelő szám a z számegyenesen, míg ha P' a P pont merőleges vetülete a síkra, úgy x és y a P' koordinátái a síkbeli Descartes-féle koordinátarendszerben.

Ekkor a tér pontja valós számhármasokkal, $\mathbb{R}^3$ elemivel jellemezhetők, és fordítva.

2. definíció. Legyen adott az $\mathbb{R}^n$ halmaz és értelmezzük benne az ***összeadás*** és ***skalárral való szorzás*** műveletét

$$x + y \doteq (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \text{illetve} \quad \lambda x \doteq (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

szerint, ha $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \ \wedge \ \lambda \in \mathbb{R}$.

1. tétel. *$\mathbb{R}^n$ a most értelmezett két művelettel vektortér (vagy lineáris tér).*

Bizonyítás. A vektortér 1)-7) tulajdonságai egyszerűen ellenőrizhetők. A nullelem: $0 \doteq (\overset{1}{0}, \ldots, \overset{n}{0})$. □

2. tétel. *Ha $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, úgy*

$$\langle x, y \rangle \doteq x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

skaláris (vagy belső) szorzat $\mathbb{R}^n$-ben.

Bizonyítás. A belsőszorzat 1)-4) tulajdonságának ellenőrzésével. □

3. tétel. *Ha* $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *akkor az*

$$\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x\rangle} \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \textit{illetve} \quad d(x,y) \doteq \|x-y\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

szerint definiált norma, illetve távolság (metrika) teljesíti a norma, illetve metrika tulajdonságait.

Bizonyítás. Egyszerű (feladat). □

Megjegyzések.

1. A 2., 3. tételben definiált skaláris (belső) szorzattal, normával, illetve távolsággal (metrikával) $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér, euklideszi normával és metrikával. $(\mathbb{R}^n, d)$-t n-dimenziós euklideszi térnek is nevezik.
2. Ha $n = 1$, úgy a $d(x,y) \doteq |x-y|$ $(x, y \in \mathbb{R})$ távolság $(\mathbb{R}^1, d) = (\mathbb{R}, d)$-ben, hiszen d teljesíti a távolság 3 tulajdonságát.
3. Az $a \in \mathbb{R}^n$ pont (vektor) r sugarú nyílt gömbkörnyezete a
$$K(a,r) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) < r\}$$
halmaz, ahol d az $\mathbb{R}^n$-beli euklideszi távolság.

3. $\mathbb{R}^n$ topológiája

1. definíció. Legyen adott $E \subset (\mathbb{R}^n, d)$ halmaz. Azt mondjuk, hogy

– $x \in E$ ***belső pont***ja E-nek, ha $\exists\ K(x,r)$, hogy $K(x,r) \subset E$;

– $x \in \mathbb{R}^n$ ***külső pont***ja E-nek, ha belső pontja CE-nek (azaz $\exists\ K(x,r),\ K(x,r) \cap E = \emptyset$);

– $x \in \mathbb{R}^n$ ***határpont***ja E-nek, ha nem belső és nem külső pontja (azaz $\forall\ K(x,r)$-re $K(x,r) \cap E \neq \emptyset\ \wedge\ K(x,r) \cap CE \neq \emptyset$).

A belső pontok halmazát E ***belsejé***nek, a határpontok halmazát E ***határá***nak nevezzük.

Példa. Legyen $E =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$.
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ belső pontja E-nek, mert például $K((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{1}{4})$ (az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pont $\frac{1}{4}$ sugarú környezete) teljesíti, hogy $K((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{1}{4}) \subset]0,1[\times]0,1[$.
$(3,0)$ külső pontja E-nek, mert $K((3,0),1) \cap E = \emptyset$ miatt $K((3,0),1) \subset C_{\mathbb{R}^2}E$, azaz $(3,0)$ belső pontja $C_{\mathbb{R}^2}E$-nek.
$(1,0)$ határpontja E-nek, mert $\forall\ r > 0$ esetén $K((1,0),r) \not\subset E$ (hiszen $(1 + \frac{r}{2}, 0) \in K((1,0),r)$, de $(1 + \frac{r}{2}, 0) \notin E$) miatt nem belső és $K((1,0),r) \not\subset CE$ (hiszen $(1 - \frac{r}{2}, 0) \in E$) miatt nem külső pontja E-nek.

2. definíció. Az $E \subset (\mathbb{R}^n, d)$ halmazt ***nyílt***nak nevezzük, ha minden pontja belső pont; ***zárt***nak nevezzük, ha CE nyílt.

Példák.

1. $E =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, mert $\forall\ (x,y) \in E$ esetén, ha $r = \min\{x, 1-x, y, 1-y\}$, akkor $K((x,y),r) \subset E$.
2. $E = [0,+\infty[\times]-\infty,+\infty[$ zárt halmaz, mert $\forall\ (x,y) \in CE$ esetén, ha $r = \frac{|x|}{2}$, akkor $K((x,y),\frac{|x|}{2}) \subset CE$, azaz (x,y) külső pont és így CE nyílt, tehát E zárt.

1. tétel. *Az $(\mathbb{R}^n, d)$ metrikus térben igazak a következők:*

1) $\mathbb{R}^n \wedge \emptyset$ *nyílt halmazok,*
2) *nyílt halmazok egyesítése nyílt,*
3) *véges sok nyílt halmaz metszete nyílt,*

illetve

1) $\mathbb{R}^n \wedge \emptyset$ *zárt halmazok,*
2) *zárt halmazok metszete zárt,*
3) *véges sok zárt halmaz egyesítése zárt.*

3. definíció. Legyen adott $E \subset (\mathbb{R}^n, d)$. Az $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pontot az E halmaz ***torlódási pont***jának nevezzük, ha $\forall\ K(x_0,r)$ ($\mathbb{R}^n$-beli) környezet tartalmaz x_0-tól különböző E-beli pontot, azaz $(K(x_0,r)\setminus\{x_0\}) \cap E \neq \emptyset$. E torlódási pontjainak halmazát szokás E'-vel jelölni.
$x_0 \in E$ ***izolált pont***ja E-nek, ha nem torlódási pontja, azaz $\exists\ K(x_0,r)$, hogy $(K(x_0,r)\setminus\{x_0\}) \cap E = \emptyset$.

Példák.

1. Az $E = \{(\frac{1}{n}, 0) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$ halmaznak a $(0,0)$ pont torlódási pontja ($(0,0) \notin E$), mert $\forall\ K((0,0),r)$-ben van eleme E-nek, hiszen $\forall\ r > 0$-ra – mert $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos – $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy $n > \frac{1}{r}$, azaz $0 < \frac{1}{n} < r$, így $(0, \frac{1}{n}) \in K((0,0),r)$.
2. Az $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$ halmaz minden pontja izolált pont, mert $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re $(K((n,n),1) \setminus (n,n)) \cap E = \emptyset$.

2. tétel. *Az $E \subset (\mathbb{R}^n, d)$ akkor és csak akkor zárt, ha $E' \subset E$ (azaz tartalmazza minden torlódási pontját).*

3. tétel (Bolzano-Weierstrass). *Bármely $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos végtelen halmaznak létezik torlódási pontja.*

4. definíció. Nyílt halmazok egy $\{o_\nu\}$ rendszere az $S \subset \mathbb{R}^n$ halmaznak egy ***nyílt lefedés***e, ha $S \subset \bigcup\limits_{\nu} o_\nu$.

Példa. Az $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset \mathbb{R}^2$ halmaznak a $\{K((n,n),1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmazrendszer egy nyílt lefedése, mert bármely $n \in \mathbb{N}$-re $(n,n) \in K((n,n),1)$, így $(n,n) \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K((i,i),1)$, azaz $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K((i,i),1)$.

5. definíció. A $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz ***kompakt***, ha minden nyílt lefedéséből kiválasztható véges sok halmaz, mely lefedi K-t.

Példák.

1. $E = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ nem kompakt, mert bármely $K((n,n),1)$ elhagyásával az előbbiekben adott nyílt lefedés maradék halmazai már nem fedik le E-t, így közülük véges sok sem fedheti le.
2. $K = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ kompakt halmaz, mert K bármely o nyílt lefedése esetén $K \subset o$ miatt létezik $o_1,\ o_2,\ o_3,\ o_4$ nyílt halmazok o-ból, hogy $(i,i) \in o_i$ $(i = 1,2,3,4)$, így $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{4} o_i$, azaz bármely o-ból kiválasztható véges lefedés.

4. tétel (Heine-Borel). *Egy $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Példák.

1. A $K = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ halmaz kompakt, mert korlátos (például $K \subset K((0,0),10)$) és zárt (mert nincs torlódási pontja).
2. $E = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ nem kompakt, mert nem korlátos, ugyanis $d((1,1),(n,n)) = (n-1)\sqrt{2}$ és $\mathbb{N}$ felülről nem korlátossága miatt nem létezik $r > 0$, hogy $d((i,i),(j,j)) < r$ teljesülne bármely $i,j \in \mathbb{N}$-re.

XI. fejezet

Sorozatok $\mathbb{R}^k$-ban

A fejezet fogalmai és eredményei szoros analógiát mutatnak a számsorozatoknál tanultakkal.

1. Alapfogalmak és kapcsolatuk

1. definíció. Egy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$ függvényt $\mathbb{R}^k$***-beli sorozat***nak nevezünk. A sorozat n-edik elemét $f(n)$, a_n, x_n (vagy más) jelöli. A sorozat elemeinek halmazára az $\{a_n\}$ vagy $\{x_n\}$ (vagy más) jelölést használunk. Magát a sorozatot az $f \doteq \langle a_n \rangle$, vagy $f \doteq \langle x_n \rangle$ (vagy más) szimbólummal jelöljük.

Példa. Az $\left\langle \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n} \right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozat, n-edik tagja $\left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n} \right)$, az elemeinek halmaza $\left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n} \right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

2. definíció (korlátosság). Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat korlátos, ha $\{x_n\}$ korlátos.

Példa. Az $\left\langle \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n} \right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozat korlátos, mert elemeinek $\left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n} \right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ halmaza korlátos. A II. 2.4. megjegyzés miatt elegendő megmutatni, hogy létezik $r > 0$, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$-re

$$d_{\mathbb{R}^2}\left((0,0), \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n} \right) \right) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n} \right)^2} = \sqrt{\frac{n^2 + 4n + 5}{n^2}} < r \;.$$

Mivel

$$\sqrt{\frac{n^2 + 4n + 5}{n^2}} < \sqrt{\frac{2n^2 + 8n + 8}{n^2}} = \sqrt{2}\,\frac{n+2}{n} \leq 3\sqrt{2} \;,$$

egyszerűen belátható bármely $n \in \mathbb{N}$-re, így $r = 3\sqrt{2}$ jó lesz.

3. definíció (konvergencia). Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat konvergens, ha $\exists\ x \in \mathbb{R}^k$, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$-ra $d(x, x_n) = \|x - x_n\| < \varepsilon$ teljesül. Az $x \in \mathbb{R}^k$ számot (vektort, elemet) $\langle x_n \rangle$ határértékének nevezzük. Azt, hogy $\langle x_n \rangle$ konvergens és határértéke x, így jelöljük: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ vagy $x_n \to x$.

Példa. Az $\left\langle \left(\frac{1}{n}, 1 \right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozat konvergens és határértéke $(0,1) \in \mathbb{R}^2$. Ekkor azt kell megmutatni, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy bármely

$n \geq n(\varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén

$$d_{\mathbb{R}^2}\left(\left(\frac{1}{n}, 1\right), (0,1)\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + (1-1)^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon \ .$$

Ez pedig igaz az $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ valós számsorozat konvergenciája miatt.

Megjegyzések.

1. A környezet fogalmát felhasználva a konvergencia ún. „környezetes" definícióját kapjuk: az $\langle x_n \rangle$ sorozat konvergens, ha $\exists\, x \in \mathbb{R}^k$, hogy $\forall\, K(x, \varepsilon)$-hoz $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$-ra $x_n \in K(x, \varepsilon)$ teljesül.
2. Egyszerűen belátható, hogy $x_n \to x \iff \forall\, K(x, \varepsilon)$-re $x_n \in K(x, \varepsilon)$ legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével.

4. definíció (divergencia). Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat divergens, ha nem konvergens, azaz ha $\forall\, x$ esetén $\exists\, \varepsilon > 0$ $(\vee K(x, \varepsilon))$, hogy $\forall\, n(\varepsilon) \in N$-re $\exists\, n \geq n(\varepsilon)$, hogy $d(x, x_n) \geq \varepsilon$ $\ (\vee\ x_n \notin K(x, \varepsilon))$.

Példa. Az $\langle (n, 0) \rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozat divergens, ha megmutatjuk, hogy bármely $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén létezik $K((x, y), \varepsilon)$, hogy bármely $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$-re létezik $n \geq n(\varepsilon)$, hogy $(n, 0) \notin K((x, y), \varepsilon)$.

Ha $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, hogy $y \neq 0$, akkor nyilván $\varepsilon = \frac{|y|}{2}$-re $K\Big((x, y), \frac{|y|}{2}\Big)$ nem tartalmaz egyetlen elemet sem a $\langle (0, n) \rangle$ sorozatból (mert a környezet és az x-tengely metszete üres).

Ha $(x, y) = (x, 0)$, akkor $\varepsilon = 1$ esetén $n \geq x + 1$-re $(n, 0) \notin K((x, 0), 1)$.

1. tétel (a határérték egyértelműsége). *Ha $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli konvergens sorozat, akkor egy határértéke van (azaz $x_n \to a$ és $x_n \to b \implies a = b$).*

2. tétel (konvergencia és korlátosság). *Ha az $\langle x_n \rangle$ ($\mathbb{R}^k$-beli) sorozat konvergens, akkor korlátos.*

3. tétel. *Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat $\iff$ konvergens és határértéke $x \in \mathbb{R}^k$, ha $x_n = (x_{1n}, \dots, x_{kn})$ jelöléssel az $\langle x_{1n} \rangle, \dots, \langle x_{kn} \rangle$ (úgynevezett koordináta) sorozatok konvergensek és az $x = (x_1, \dots, x_k)$ jelöléssel $x_{in} \to x_i$ $(i = 1, \dots, k)$.*

Példa. Határozza meg az

$$\left\langle \left(\frac{n+1}{3n+2},\ \frac{1}{n^2+1} \right) \right\rangle$$

$\mathbb{R}^2$-beli sorozat határértékét! Korábbi tanulmányaink alapján

$$\frac{n+1}{3n+2} \to \frac{1}{3}\ , \qquad \frac{1}{n^2+1} \to 0\ ,$$

így tételünk adja, hogy

$$\left(\frac{n+1}{3n+2},\ \frac{1}{n^2+1} \right) \to \left(\frac{1}{3}, 0 \right)\ .$$

2. Sorozatok és műveletek, illetve rendezés

Definíció. Ha $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozatok, $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor az

$$\langle x_n \rangle + \langle y_n \rangle \doteq \langle x_n + y_n \rangle \; ; \qquad \lambda \langle x_n \rangle \doteq \langle \lambda x_n \rangle$$

szerint definiált sorozatokat az adott ***sorozatok összegé***nek illetve λ***-szorosá***nak nevezzük.

Tétel. *Legyen $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat, $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, hogy $x_n \to x$ és $y_n \to y$, akkor $\langle x_n \rangle + \langle y_n \rangle$ és $\lambda \langle x_n \rangle$ konvergensek és $x_n + y_n \to x + y$, $\lambda x_n \to \lambda x$.*

XII. fejezet

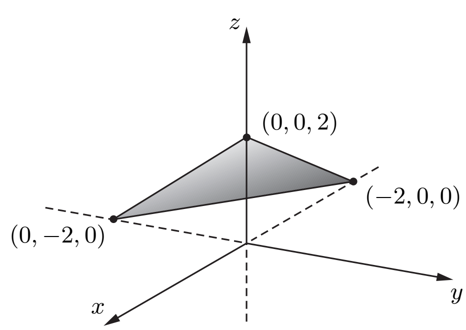
Többváltozós és vektorértékű függvények folytonossága, határértéke

E fejezet fogalmai és eredményei a valós függvények folytonosságát és határértékét tárgyaló, V. és VI. fejezetben bevezetett fogalmakkal és tételekkel mutatnak szoros analógiát.

1. Alapfogalmak

1. definíció. Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}$, $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$, típusú függvényeket valós értékű, illetve az $(\mathbb{R}^n, d)$ metrikus teret az $(\mathbb{R}^m, d)$) metrikus térbe képező függvénynek nevezzük.

Megjegyzés. Az $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvények olyan speciális relációk, melyek $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ részhalmazai, így azok szemléltetése (gráfjuk ábrázolása) a térbeli Descartes-féle koordinátarendszerben valósítható meg.



Példa. Az $f(x, y) = x + y + 2$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) függvény gráfja például a $z = x + y + 2$ sík (mely „áthalad” például a $(0, 0, 2)$, $(0, -2, 0)$ és $(-2, 0, 0)$ pontokon).

2. definíció. Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ ***függvény korlátos***, ha $f(E)$ korlátos. Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}$ függvény ***alulról*** (***felülről***) ***korlátos***, ha $f(E)$ alulról (felülről) korlátos.
A $\sup f(E)$, $\inf f(E)$ számokat az f pontos felső, illetve pontos alsó korlátjának (***supremum***ának, illetve ***infimum***ának) nevezzük E-n.

3. definíció. Ha az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}$ függvény esetén létezik $x_1, x_2 \in E$, hogy

$$\sup f(E) = f(x_1), \quad \inf f(E) = f(x_2) \ ,$$

akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik ***abszolút maximuma***, illetve ***minimuma*** E-n. Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in E$-ben ***helyi*** (***lokális***) ***maximuma***, illetve ***minimuma*** van, ha létezik $K(x_0, \delta)$, hogy $x \in K(x_0, \delta) \cap E$-re $f(x) \leq f(x_0)$, illetve $f(x) \geq f(x_0)$ teljesül.

Példa. Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ függvényre igazak a következők:
- f alulról korlátos, mert nyilván $x^2 + y^2 \geq 0 \ \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$-re.
- $\inf f(\mathbb{R}^2) = 0$, mert az előbbiek miatt 0 alsó korlát, másrészt tetszőleges $\varepsilon > 0$ sem lehet alsó korlát, mert $f(0, 0) = 0 < \varepsilon$, így minden k alsó korlátra $k \leq 0$.
- $f(x, y) = x^2 + y^2 = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$, így 0 abszolút minimum, melyet csak a $(0, 0)$-ban vesz fel f.
- f felülről nem korlátos, mert $\forall \ K$-ra $\exists \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$, hogy $f(x, y) > K$.
  Ha $K < 0$, akkor ez nyilván igaz.
  Ha $K > 0$, úgy $f(x, 0) = x^2 > K \iff |x| > \sqrt{K}$, ami igaz például minden olyan $(x, 0)$-ra, melyre $x > \sqrt{K}$.

2. A folytonosság fogalma

Definíció. Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény az $x_0 \in E$ ***pontban folytonos***, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy bármely $x \in E$, $d(x, x_0) = \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon)$ esetén

$$d(f(x), f(x_0)) = \|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon \ .$$

Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény ***folytonos az*** $A \subseteq E$ ***halmazon***, ha A minden pontjában folytonos.

Megjegyzések.
1. Megfogalmazható az úgynevezett környezetes változat is:
   Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény az $x_0 \in E$ pontban folytonos, ha $\forall \ K_{\mathbb{R}^m}(f(x_0), \varepsilon)$-hoz $\exists \ K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta(\varepsilon))$, hogy $\forall \ x \in E$, $x \in K_{\mathbb{R}^n})(x_0, \delta(\varepsilon)) \implies f(x) \in K_{\mathbb{R}^m}(f(x_0), \varepsilon)$.
2. A folytonosság pontbeli (lokális) tulajdonság, amely globálissá tehető.

Példák.
1. Az $f(x, y) = c$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény folytonos $\mathbb{R}^2$-en, mert bármely $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban $\forall \ \varepsilon > 0$ esetén $\forall \ \delta(\varepsilon) > 0$-t, így $\delta(\varepsilon) = 1$-et választva, ha $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ és $d((x, y), (x_0, y_0)) < 1$, akkor

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon \ .$$

2. Az $f(x,y) = x + y$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény folytonos a $(0,0) \in \mathbb{R}^2$-ben, mert ha $\varepsilon > 0$ adott, akkor

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |x+y| \le |x| + |y| \le$$
$$\le \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}\|(x,y),(0,0)\|_{\mathbb{R}^2}$$

$(\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2)$ miatt, ha $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, és $\|(x,y) - (0,0)\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, akkor $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$, ami a folytonosság definíciójának teljesülését jelenti.

3. Az

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ 0 & \text{, egyebként} \end{cases}$$

függvény sehol sem folytonos, mert $\forall\ (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén $\varepsilon = 1$-hez $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$-t választva (felhasználva, hogy $\forall\ K((x_0,y_0),\delta(\varepsilon))$-ban van olyan (x,y), melyre $x,y \in \mathbb{Q}$ és olyan is, hogy $x \notin \mathbb{Q}$ vagy $y \notin \mathbb{Q}$) létezik $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, hogy $\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta(\varepsilon)$ és $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = 1$, ami adja az állítást.

1. tétel (átviteli elv). *Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény akkor, és csak akkor folytonos az $x_0 \in E$ pontban, ha minden x_0-hoz konvergáló E-beli $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén az $\langle f(x_n) \rangle$ $(\mathbb{R}^m, d)$-beli sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Megjegyzések.

1. Az előbb vizsgált 3. feladat az átviteli elvvel is vizsgálható, s megmutatható, hogy például f nem folytonos a $(0,0)$ pontban, mert ha olyan $\langle (x_n,y_n) \rangle$ sorozat tekintsünk, melyre $(x_n,y_n) \to (0,0)$ és $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$, akkor $f(x_n,y_n) = 1 \to 1 \ne f(0,0)$.
2. A folytonosság itt megadott ekvivalens megfogalmazását sorozatos vagy Heine-féle definíciójának nevezik.

2. tétel. *Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}^m$ $(f = (f_1, \ldots, f_m),\ f_i : E \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m))$ függvény akkor és csak akkor folytonos az $x_0 \in E$-ben ha az f_i függvények mindegyike folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás. Az átviteli elv és a sorozatoknál kimondott tétel segítségével nyilvánvaló. ☐

3. tétel. *Az $f : E \subset \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény akkor és csak akkor folytonos az x_0-ban, ha ott jobbról és balról is folytonos.*

4. tétel (jeltartás). *Ha az $f : E \subset (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $x_0 \in E$-ben és $f(x_0) \ne 0$, akkor $\exists\ K(x_0, \delta) \subset (\mathbb{R}^n, d)$, hogy $\forall\ x \in K(x_0, \delta) \cap E$, akkor $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f(x)$.*

3. Folytonosság és műveletek

1. tétel. *Ha az $f, g : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}^m$ függvények folytonosak az $x_0 \in E$-ben, akkor az $f + g$ és λf $(\lambda \in \mathbb{R})$ is folytonosak x_0-ban.*

2. tétel. *Ha az $f, g : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $x_0 \in E$-ben, akkor az $f \cdot g$ és $g(x) \neq 0$ $(x \in E)$ esetén $\dfrac{f}{g}$ is folytonos x_0-ban.*

3. tétel (az összetett függvény folytonossága). *Legyenek $(\mathbb{R}^n, d)$, $(\mathbb{R}^m, d), (\mathbb{R}^k, d)$ metrikus terek; $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : f(E) \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ adott függvények. Ha f folytonos az $x_0 \in E$ pontban, g folytonos az $y_0 = f(x_0)$-ban, akkor a $h = g \circ f$ függvény folytonos az x_0-ban.*

Példa. A $h(x, y) = \sqrt[3]{x + y}$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény folytonos $(0, 0)$-ban, mert már beláttuk, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$ függvény folytonos $(0, 0)$-ban, a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ folytonos az $f(0, 0) = 0$ helyen, így teljesülnek tételünk feltételei.

4. Folytonosság és topologikus fogalmak

1. tétel (a folytonosság topologikus megfelelője).
Az $f : (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény akkor, és csak akkor folytonos $\mathbb{R}^n$-en, ha $\forall\, B \subset (\mathbb{R}^m, d)$ nyílt halmazra $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in B\}$ nyílt $(\mathbb{R}^n, d)_{\mathbb{R}^n}$-ben.

2. tétel (kompaktság és folytonosság). *Legyen $E \subset (\mathbb{R}^n, d)$ kompakt halmaz, $f : E \to (\mathbb{R}^m, d)$ folytonos függvény E-n, akkor $f(E)$ kompakt $(\mathbb{R}^m, d)$-ben. (Röviden: kompakt halmaz folytonos képe kompakt.)*

Következmények.
1. $f(E)$ korlátos és zárt.
2. Ha $m = 1$, akkor f felveszi E-n az abszolút minimumát és maximumát (mert $\sup f(E)$ és $\inf f(E)$ is eleme $f(E)$-nek, ha $f(E)$ zárt és természetesen korlátos).

5. A határérték fogalma

Definíció. Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvénynek az $x_0 \in E'$ ***pontban létezik határértéke***, ha $\exists\, A \in \mathbb{R}^m$, hogy $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$,

$$\forall\, x \in E, \quad 0 < d(x, x_0) = \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon)$$

esetén

$$d(f(x), A) = \|f(x) - A\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon\ .$$

A-t az f függvény x_0-beli határértékének nevezzük, és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ vagy $f(x) \to A$, ha $x \to x_0$ jelöléseket használjuk.

Megjegyzések.

1. Megfogalmazható a környezetes változat is:
   Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvénynek az $x_0 \in E'$ pontban $\exists$ határértéke, ha $\exists\ A \in \mathbb{R}^m$, hogy $\forall\ K_{\mathbb{R}^m}(A, \varepsilon)$-hoz $\exists\ K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta(\varepsilon))$,
   $\forall\ x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta(\varepsilon)) \backslash \{x_0\},\ x \in E$ esetén $f(x) \in K_{\mathbb{R}^m}(A, \varepsilon)$.
2. A határérték létezése pontbeli tulajdonság.
3. Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvénynek az $x_0 \in (\mathbb{R}^n, d)$-ben nem létezik határértéke, ha $x_0 \notin E'$, vagy $x_0 \in E'$ és $\forall\ A \in \mathbb{R}^m,\ \exists \varepsilon > 0$,
   $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$ esetén $\exists\ x \in E,\ x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta(\varepsilon)) \backslash \{x_0\},\ f(x) \notin K_{\mathbb{R}^m}(A, \varepsilon)$.
4. A határérték (ha létezik) egyértelműen meghatározott (ez indirekt bizonyítással – hasonlóan, mint a sorozatoknál – egyszerűen belátható).

Példák.

1. Az $f(x,y) = c,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ függvények $\forall\ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$-ben a határértéke c, mert (x_0, y_0) torlódási pontja $\mathbb{R}^2$-nek és $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$ esetén ha $0 < \|(x,y) - (x_0, y_0)\|_{\mathbb{R}^2} < \delta(\varepsilon)$, akkor $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ következik.
2. Az
   $$f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{, ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{, ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   függvénynek létezik határértéke a $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ pontban és az egyenlő 0-val, mert $(0,0)$ torlódási pontja $\mathbb{R}^2$-nek és ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor
   $$|f(x,y) - 0| = |x + y| \leq |x| + |y| \leq \\ \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}\|(x,y) - (0,0)\|_{\mathbb{R}}$$
   $(\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \neq (0,0))$ miatt, ha $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ és
   $0 < \|(x,y) - (0,0)\|_{\mathbb{R}^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, akkor $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$, azaz $A = 0$ mellett teljesül a határérték definíciója $(0,0)$-ban.

1. tétel (átviteli elv). *Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvénynek az $x_0 \in E'$ pontban akkor, és csak akkor létezik határértéke, ha $\forall\ x_0$-hoz konvergáló $\langle x_n \rangle : \mathbb{N} \to E \backslash \{x_0\}$ sorozat esetén $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.*

Bizonyítás. Úgy, mint a folytonosságnál, csak az ottani $K_{\mathbb{R}^m}(f(x_0), \varepsilon)$ helyett $K_{\mathbb{R}^m}(A, \varepsilon)$-t és az x_0-beli folytonosság helyett x_0-beli határértéket kell mondani. $\square$

Példa. Az $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$ függvénynek a $(0,0,0)$ pontban a határértéke 0, mert $(0,0,0)$ torlódási pontja $E = \mathbb{R}^3 \backslash (0,0,0)$-nak és $\forall\ \langle (x_n, y_n, z_n) \rangle$ E-beli sorozat esetén $(x_n, y_n, z_n) \to (0,0,0)$ akkor és csak akkor, ha $x_n \to 0,\ y_n \to 0,\ z_n \to 0 \implies x_n^2 \to 0,\ y_n^2 \to 0,\ z_n^2 \to 0 \implies x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 \to 0$, azaz teljesül az átviteli elv.

2. tétel. *Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}^m$ $(f = (f_1, \dots, f_m),\ f_i : E \to \mathbb{R})$ függvénynek, akkor és csak akkor létezik határértéke az $x_0 \in E'$-ben, ha az f_i függvényeknek létezik határértéke x_0-ban.*

Bizonyítás. Az átviteli elv és az $\mathbb{R}^m$-beli sorozatokra vonatkozó tételek alapján. □

6. Határérték és műveletek illetve egyenlőtlenségek

Tétel. *Legyenek $f, g : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}$ adott függvények, hogy az $x_0 \in E'$-ben $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \wedge \lim_{x \to x_0} g(x) = B$, akkor*

a) $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$;

b) $\lim_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lim_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda A$, $\quad (\lambda \in \mathbb{R} \vee \mathbb{C})$;

c) $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$;

d) $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, *ha* $g \neq 0,\ B \neq 0$.

Bizonyítás. Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján. □

Megjegyzés. a) és b) $\mathbb{R}^m$-beli értékű függvényrekre is megfogalmazható és bizonyítható.

7. A határérték és a folytonosság kapcsolata

Tétel. *Legyen $f : E \subset (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ adott függvény és $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^{n\prime}$. f akkor és csak akkor folytonos x_0-ban, ha $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Példa. Az

$$f(x,y) \begin{cases} x + y & , \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & , \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvényre beláttuk, hogy $\exists \lim_{(0,0) \to (0,0)} f(x,y) = 0$, de $f(0,0) = 2 \neq 0$, így f nem folytonos $(0,0)$-ban.

Definíció. Ha az $f : E \subset (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény nem folytonos az $x_0 \in E$ pontban, akkor azt mondjuk, hogy x_0 f-nek szakadási helye, vagy hogy f-nek x_0-ban szakadása van.

Példa. Az előbbi példa függvénye nem folytonos $(0,0)$-ban, így ott szakadása van.

XIII. fejezet

A Riemann-integrál egy alkalmazása, görbék ívhossza

1. definíció. Az $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvényt $\mathbb{R}^n$***-beli görbé***nek, $[a,b]$-t ***paraméter-intervallum***nak, $\underline{f}$-t a görbe egy ***paraméterelőállításá***nak nevezzük. $\underline{f}(a)$ és $\underline{f}(b)$ a ***görbe kezdő***, illetve ***végpont***jai.
Ha $\underline{f}(a) = \underline{f}(b)$, akkor $\underline{f}$ ***zárt görbe***. Ha $\underline{f}$ kölcsönösen egyértelmű, akkor ívnek nevezzük.

2. definíció. $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ***sima görbe***, ha $\underline{f}$ folytonosan differenciálható (azaz $\underline{f}' \doteq (f_1', \ldots, f_n') : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ folytonos) és

$$\sum_{i=1}^{n} f_i'^2(t) > 0 \qquad (t \in [a,b])$$

teljesül.

3. definíció. Az $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ***görbe képe*** a

$$\Gamma = \{(f_1(t), \ldots, f_n(t)) \mid t \in [a,b]\}$$

halmaz. (A képet – néha jelölésben is – azonosítjuk a görbével.) Γ egy pontja az $\underline{f}$ ***görbe többszörös pontja***, ha $\exists$ (legalább két) $t, t' \in [a,b]$, hogy $\underline{f}(t) = \underline{f}(t')$

Megjegyzések.

1. A $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ***egységkör*** egy ***paraméteres előállítása*** az $\underline{f} = (\cos, \sin) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ függvény. Belátható, hogy az egységkör sima, zárt görbe.
2. Ha $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \neq \underline{0}$ adott vektorok, akkor az

   $$E \doteq \{\underline{a}t + \underline{b} = (a_1 t + b_1, \ldots, a_n t + b_n) \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}\}$$

   ponthalmazt a $\underline{b}$-n áthaladó $\underline{a}$ irányú n***-dimenziós egyenes***nek nevezzük. (A $t \to \underline{a}t + \underline{b} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ leképezés az egyenes egy paraméteres előállítása.)
3. Legyen $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ és $\underline{x} \neq \underline{y}$. Az $\{\underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x}) \mid t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^n$ halmazt az $\underline{x}$-et és $\underline{y}$-t összekötő n***-dimenziós szakasz***nak nevezzük. (Természetesen $d(\underline{x}, \underline{y}) \doteq \|\underline{x} - \underline{y}\| \doteq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$, $d(\underline{x}, \underline{0}) \doteq \|\underline{x}\| \doteq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$).

4. definíció. Legyen $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ egy görbe $P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_m = b\}$ $[a,b]$ egy felosztása, $\|\underline{f}(t_i) - \underline{f}(t_{i-1})\|$ az $\underline{f}(t_i)$ és $\underline{f}(t_{i-1})$ pontokat összekötő szakasz hossza. Az

$$\ell(\underline{f}, P) = \sum_{i=1}^{m} \|\underline{f}(t_i) - \underline{f}(t_{i-1})\|$$

számot az $\underline{f}$ görbébe a P felosztása esetén beírt ***töröttvonal hosszá***nak nevezzük. (Belátható, hogy ha $P_1 \subset P_2$, akkor $\ell(\underline{f}, P_1) \le \ell(\underline{f}, P_2)$.)

5. definíció. Az $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ***görbe rektifikálható***, ha az $\{\ell(\underline{f}, P) \mid P$ tetszőleges felosztása $[a,b]$-nek$\}$ halmaz korlátos. Az ekkor létező

$$\ell(\underline{f}) = \sup_P \{\ell(\underline{f}, P)\} \big(= \ell(\underline{f}, [a,b])\big)$$

számot az $\underline{f}$ ***görbe ívhosszá***nak nevezzük.

Megjegyzések.

1. Az ívhossz nem függ a görbe paraméterelőállításától.
2. Az $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ pontokat összekötő szakasz ívhossza $\|\underline{x} - \underline{y}\|$, mert a 3. definíció utáni 3. megjegyzés miatt az $[x,y]$ $\mathbb{R}^n$-beli szakasz paraméteres előállítását az $\underline{f} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$,
$$\begin{aligned}\underline{f}(t) = \underline{x} + (\underline{y} - \underline{x})t = (x_1 + (y_1 - x_1)t, \dots, x_n + (y_n - x_n)t) =\\ = (f_1(t), \dots, f_2(t))\end{aligned}$$
függvény adja, így $[0,1]$ bármely $P = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_m = 1\}$ felosztására
$$\begin{aligned}\ell(\underline{f}, P) &= \sum_{i=1}^{m} \big\|\underline{x} + (\underline{y} - \underline{x})t_i - (\underline{x} + (\underline{y} - \underline{x})t_{i-1})\big\| = \\ &= \|y - x\| \sum_{i=1}^{m} |t_i - t_{i-1}| = \|x - y\| \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1}) = \\ &= \|x - y\|(1 - 0) = \|x - y\| \ ,\end{aligned}$$
így $\ell(\underline{f}) = \sup_P \ell(\underline{f}, P) = \|x - y\|$.
3. Ha $\underline{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ görbe, $c \in [a,b]$, $\underline{f}$ rektifikálható $[a,b]$-n, úgy
$$\ell(\underline{f}, [a,b]) = \ell(\underline{f}, [a,c]) + \ell(\underline{f}, [c,b]) \ .$$

Fontos a következő:

Tétel. *Legyen $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sima görbe, akkor rektifikálható, és ívhossza*

$$\ell(\underline{f}, [a,b]) = \int_a^b \|\underline{f}'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i'^2(t)} \, dt \ .$$

Következmények.

1. Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, akkor az $\underline{f} = (f_1, f_2) : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \quad (f_1(t) = t,\ f_2(t) = g(t),\ t \in [a, b])$ a g gráfjának (grafikonjának) egy paraméteres előállítása, melyre $\underline{f}'(t) = (1, g'(t))$ teljesül, így ha $\mathcal{G}$ jelöli a g által adott görbét, akkor ívhosszára

$$\ell(\mathcal{G}) = \int_a^b \sqrt{1 + g'^2(t)}\ dt$$

következik (1)-ből.

2. Tekintsük az $\underline{f} = (\cos, \sin) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ egységkört.
Legyen $s \in (0, 2\pi]$, $\underline{f}_s : [0, s] \to \mathbb{R}^2$ $\underline{f}$ $[0, s]$-re való leszűkítése. Ekkor $\underline{f}_s$ az egységkör egy íve. (1)-ből jön, hogy

$$\ell(\underline{f}_s) = \int_0^s \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)}\ dt = \int_0^s 1\ dt = s$$

az egységkör adott ívének hossza. Ha $s = 2\pi$, akkor $\ell(\underline{f}) = 2\pi$ az egységkör kerülete. Ez adja, hogy a mi π-nk megegyezik a középiskolás π-vel. s-t a P_0OP_s szög ívmértékének nevezzük. A $360°$-os szög ívmértéke 2π.

3. $\underline{f}_r = (f_1, f_2) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f_1(t) = r \cdot \cos t$, $f_2(t) = r \cdot \sin t$ $(t \in [0, 2\pi])$ az origó középpontú r sugarú kör. (1)-ből jön, hogy

$$\ell(\underline{f}_r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)}\ dt = \int_0^{2\pi} r\ dt = 2r\pi\ .$$

XIV. fejezet

Többváltozós függvények differenciálszámítása

1. A differenciálhatóság

A továbbiakban olyan $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvényekkel foglalkozunk, ahol D nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben.

Egy $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvényt akkor nevezünk differenciálhatónak az $x_0 \in \langle a, b\rangle$-ben, ha létezik a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

véges határérték, s ez nem vihető át $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények $x_0 \in D$-beli differenciálhatóságára.

Ugyanakkor a definíció így is megfogalmazható:
Létezik $A \in \mathbb{R}$, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A$, mellyel ekvivalensek a következők:

$$\begin{aligned}
& \exists\, A \in \mathbb{R}, && \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A = 0 \\
\iff\ & \exists\, A \in \mathbb{R}, && \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \\
\iff\ & \exists\, A \in \mathbb{R}, && \lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0\ .
\end{aligned}$$

Ez utóbbi már alkalmas az általánosításra.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ***függvény differenciálható az*** $x_0 \in D$ ***pontban***, ha létezik egy A vektor, hogy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - \langle A, x - x_0\rangle\,|}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}} = 0\ . \tag{1}$$

Ekkor $f'(x_0) \doteq A = (a_1, \ldots, a_n)$ az f ***függvény*** x_0***-beli differenciálhányadosa***, míg

$$df(x_0, x - x_0) \doteq \langle f'(x_0), x - x_0\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - x_{0i})$$

az f x_0-beli ***első differenciálja***.

Példa. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = B \cdot x + b$, ahol $B \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$. Bizonyítsa be, hogy f differenciálható és $f'(x) = B$.

1. tétel. *Ha az 1. definícióban* (1) *az $A = A_1$ és $A = A_2$ esetén is teljesül, úgy $A_1 = A_2$ (azaz a differenciálhányados egyértelműen meghatározott).*

2. tétel. *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, akkor ott folytonos is.*

Megjegyzés. A tétel megfordítása általában nem igaz. Például az

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban, de nem differenciálható, ahogy ezt később még bizonyítjuk.

2. Iránymenti és parciális derivált

1. definíció. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x_0 \in D$ és $e \in \mathbb{R}^n$ ($\|e\| = 1$) adott. A

$$D_e f(x_0) \doteq \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

értéket, ha létezik, az f ***függvény x_0-beli e iránymenti differenciálhányado-sá***nak nevezzük.

Példa. Számítsa ki az $f(x,y) = x^2 + y^2$ ($(x,y) \in \mathbb{R}^2$) függvény $e = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (e_1, e_2)$ iránymenti deriváltját $(1,1)$-ben. Ebben az esetben $n = 2$ és

$$\begin{aligned} D_e f(1,1) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(1 + te_1, 1 + te_2) - f(1,1)}{t} = \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2}{t} = \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{2\frac{2t}{\sqrt{2}} + 2\frac{t^2}{2}}{t} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{4}{\sqrt{2}} + t\right) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

1. tétel. *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, akkor bármely $e \in \mathbb{R}^n$ iránymenti deriváltja létezik és*

$$D_e f(x_0) = \langle f'(x_0), e \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i\,.$$

Megjegyzés. A tétel megfordítása általában nem igaz.

2. definíció. Ha $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x_0 \in D$ és
$e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$, akkor a

$$D_i f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \doteq D_{e_i} f(x_0)$$

($i = 1, \ldots, n$) számokat, ha léteznek az f i-edik változója szerinti ***parciális deriváltj***ainak nevezzük x_0-ban.

Megjegyzés. Ha $\varphi(t) \doteq f(x_{01}, \ldots, x_{0i-1}, t, x_{0i+1}, \ldots, x_{0n})$ ($|t| < \delta$), akkor $D_i f(x_0) = \varphi'(x_{0i})$.

Példák.

1. Ha $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$), úgy $m = 1,\ n = 2$, így $D_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}$-et és $D_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}$-t kell meghatározni, amihez be kell látni, hogy f differenciálható-e rögzített y mellett x szerint, illetve rögzített x mellett y szerint. A válasz nyilván igen (hiszen így egyváltozós másodfokú függvényeket kapunk) és
$$D_1 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y\ , \quad D_2 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + 2x\ .$$
2. Határozza meg $D_1 f(0, 0)$-t és $D_2 f(0, 0)$-t, ha
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ha } (x, y) = (0, 0)\ . \end{cases}$$
$m = 1,\ n = 2$, így
$$D_1 f(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0\ ,$$
$$D_2 f(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y - 0} = 0\ .$$

2. tétel. *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény az $x_0 \in D$ pontban differenciálható, akkor bármely $D_i f$ parciális derivált létezik és*

$$f'(x_0) = (D_1 f(x_0), \ldots, D_n f(x_0)).$$

Megjegyzés. A függvény differenciálhatóságának szükséges feltétele a parciális deriváltak létezése, s azok (ha differenciálható a függvény) megadják a deriváltvektort.

Példa. Az előbb beláttuk, hogy az

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ha } (x, y) = (0, 0)\ . \end{cases}$$

függvényre $\exists\ D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$, de nem differenciálható, mert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - (0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{x^2+y^2} \neq 0 \ ,$$

ugyanis ha $(x_n, x_n) \to (0,0)$, akkor $\dfrac{|x_n x_n|}{x_n^2 + x_n^2} = \dfrac{1}{2} \not\to 0$.

3. tétel. *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény bármely parciális deriváltja létezik az $x_0 \in D$ egy $K(x_0, \delta)$ környezetében és folytonosak x_0-ban, akkor f differenciálható x_0-ban.*

3. definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ***függvény folytonosan differenciálható*** D-n, ha

a) f differenciálható és f' folytonos D-n,

vagy

b) bármely $D_i f$ létezik és folytonos D-n

teljesül.

3. Differenciálási szabályok

1. tétel. *Ha az $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\lambda : D \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók $x_0 \in D$-ben, akkor az $f+g$, λf, $\dfrac{f}{\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$ függvények is differenciálhatók és*

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0), \\
(\lambda f)'(x_0) &= f(x_0)\lambda'(x_0) + \lambda(x_0) f'(x_0), \\
\left(\frac{f}{\lambda}\right)'(x_0) &= \frac{\lambda(x_0) f'(x_0) - f(x_0)\lambda'(x_0)}{\lambda^2(x_0)}
\end{aligned}$$

teljesül.

2. tétel (az összetett függvény differenciálhatósága).
Ha $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $g : E \subset f(D) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan, hogy f differenciálható $x_0 \in D$-ben és g differenciálható $f(x_0)$-ban, akkor az $F = g \circ f : D \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható x_0-ban és

$$\text{(ÖD)} \qquad F'(x_0) = \langle g'(f(x_0)), f'(x_0) \rangle = \sum_{i=1}^{n} D_j g(f(x_0)) f_j'(x_0) \ .$$

(D és E nyílt halmazok).

4. Magasabbrendű deriváltak, Young tétele

1. definíció. Akkor mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény ***kétszer differenciálható*** az $x_0 \in D$-ben, ha

– létezik $\delta > 0$, hogy f differenciálható $K(x_0, \delta) \subset D$-n,
– a $D_i f$ $(i = 1, \dots, n)$ függvények differenciálhatók x_0-ban.

Ekkor (a korábbiak szerint) léteznek a $D_j(D_i f)$ $(i, j = 1, \dots, n)$ parciális deriváltak x_0-ban és a

$$D_j(D_i f)(x_0)\Big(= D_j D_i f(x_0) = D_{ij} f(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = f_{x_i x_j}(x_0)\Big)$$

számokat az f függvény x_0-beli ***másodrendű***, i-edik és j-edik változó szerinti ***parciális deriváltjai***nak nevezzük.

Ha $D_1 \subseteq D$ jelöli azon x-ek halmazát, ahol létezik $D_j D_i f(x)$, akkor $D_j D_i f : D_1 \to \mathbb{R}$ az f i-edik és j-edik változó szerinti ***másodrendű parciális derivált függvénye*** D_1-en.

Példák.

1. Ha $f(x, y) = x^2 + y^2$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$, akkor $\exists\ D_x f(x, y) = 2x$ és $D_y f(x, y) = 2y$ és így

$$\exists \quad D_{xx} f(x, y) = 2, \quad D_{xy} f(x, y) = 0, \quad D_{yx} f(x, y) = 0, \quad D_{yy} f(x, y) = 2$$

bármely $(x, y) \in \mathbb{R}^2$-re.

2. Ha

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{, ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{, ha } (x, y) \neq (0, 0), \end{cases}$$

akkor

$$D_x f(x, y) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{2y(x^2 + y^2) - 2xy2y}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{2yx^2 + y^3 - 4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{, ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0 - 0}{x - 0} = 0 & \text{, ha } (x, y) \neq (0, 0), \end{cases}$$

így

$$\lim_{y \to 0} \frac{D_x f(0, y) - D_x f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{2y^3}{y^4} - 0}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{2}{y^2} = +\infty$$

miatt nem létezik $D_{xy} f(0, 0)$, de

$$\exists \quad D_{xx} f(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{D_x f(x, 0) - D_x f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0 \ .$$

Megjegyzés. Definiálhatók a ***magasabbrendű parciális deriváltak*** is:
Ha adott $i_1, \ldots, i_{r-1}$-re létezik $D_{i_1} \ldots D_{i_{r-1}} f \ (= D_{i_1 \ldots i_{r-1}} f) \ K(x_0, \delta)$-n, akkor

$$D_{i_1 \ldots i_r} f(x_0) \doteq D_{i_r}(D_{i_1 \ldots i_{r-1}} f)(x_0)$$

az f függvény $i_1, \ldots, i_r$ változók szerinti r***-edrendű parciális deriváltja*** x_0-ban.
Ha $i_1 = i_2 = \cdots = i_r = k$, úgy

$$D_k^r f \doteq D_k \ldots D_k f$$

a k-adik változó szerinti r-edrendű „tiszta" parciális deriváltat jelöli.

„Gyakran" igaz adott függvényre, hogy $D_k D_j f = D_j D_k f$, vagyis az úgynevezett vegyes parciálisok megegyeznek, de van ellenpélda is.

Példák.
1. Ha $f(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$, akkor

$$\begin{aligned} \exists \ \ D_x f(x, y) = 2x - 2y \quad &\Longrightarrow \quad \exists \ \ D_{xy} f(x, y) = -2 \ , \\ \exists \ \ D_y f(x, y) = -2x - 6y \quad &\Longrightarrow \quad \exists \ \ D_{yx} f(x, y) = -2 \ , \end{aligned}$$

így $D_{xy} f(x, y) = D_{yx} f(x, y)$ bármely $x \in \mathbb{R}^2$-re.
2. Ha

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \end{cases}$$

akkor

$$\exists \ D_x f(x, y) =$$
$$= \begin{cases} y \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - xy \dfrac{2x(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0 - 0}{x - 0} = 0 & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \end{cases}$$

így

$$\exists \ \ D_{xy} f(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{-\frac{y^3}{y^2} - 0 - 0}{y - 0} = -1 \ ,$$

továbbá

$$\exists \ D_y f(x, y) =$$
$$= \begin{cases} x \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - xy \dfrac{-2y(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2y}{(x^2 + y^2)^2} & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{0 - 0}{y - 0} = 0 & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \end{cases}$$

így

$$\exists \quad D_{yx}f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{x^2} - 0}{x - 0} = 1 \ .$$

Ezért $D_{xy}f(0,0) = -1 \neq 1 = D_{yx}f(0,0)$.

Most egy elegendő feltételt adunk a vegyes parciálisok egyenlőségére.

1. tétel (Young). *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az $a \in D$ pontban kétszer differenciálható, akkor*

$$D_k D_j f(a) = D_j D_k f(a)$$

bármely $1 \leq k, j \leq n$ esetén.

5. Lokális szélsőérték

Ismeretes a következő: akkor mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ pontban lokális maximuma (minimuma) van, ha $\exists\ \delta > 0$, hogy

$$\forall\ x \in K(x_0, \delta) \implies f(x) \leq f(x_0)\ (f(x) \geq f(x_0)).$$

Az egyváltozós esethez hasonlóan igaz a következő:

1. tétel (a lokális szélsőérték 1. szükséges feltétele).
Ha $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ (nyílt), f differenciálható x_0-ban és f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = (D_1 f(x_0), \ldots, D_n f(x_0)) = 0$.

Bizonyítás. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $\exists K(x_0, \delta) \subset D$, hogy

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)) \qquad \forall\ x \in K(x_0, \delta),$$

így ha e ($\|e\| = 1$) tetszőleges $\mathbb{R}^n$-ben és $|t| < \delta$, akkor

$$f(x_0 + te) - f(x_0) \leq 0\ (\geq 0),$$

így f x_0-beli differenciálhatósága miatt a 3.1. tétel adja, hogy

$$\langle f'(x_0), e\rangle = D_e f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} \begin{cases} \leq 0\ (\geq 0), & \text{ha } t \to 0 + 0 \\ \geq 0\ (\leq 0), & \text{ha } t \to 0 - 0\ , \end{cases}$$

ami csak úgy lehetséges, ha $\langle f'(x_0), e\rangle = 0$, melyből e tetszőleges volta miatt jön, hogy $f'(x_0) = 0$. $\square$

2. tétel (a lokális szélsőérték 2. szükséges feltétele).
Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek lokális szélsőértéke van $x_0 \in D$-ben és létezik $f_{x_i}(x_0)$, akkor $f_{x_i}(x_0) = 0$.

Bizonyítás. Ha f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van, úgy a

$$\varphi(t) = f(x_{01}, \ldots, x_{0i-1}, t, x_{0i+1}, \ldots, x_{0n})$$

függvénynek is $t = x_{0i}$-ben, így $f_{x_i}(x_0) = \varphi'(x_{0i}) = 0$. $\square$

Bizonyítható a következő, úgynevezett másodrendű (elegendő) feltétel a lokális szélsőérték létezésére.

3. tétel (a lokális szélsőérték elegendő feltétele).
Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $(x_0, y_0) \in D$ pontban, továbbá

a) *ha $\Delta_1 = f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, $\Delta_2 = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$, akkor f-nek (x_0, y_0)-ban szigorú lokális minimuma van;*
b) *ha $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, akkor f-nek (x_0, y_0)-ban szigorú lokális maximuma van;*
c) *ha $\Delta_2 < 0$, akkor nem létezik lokális szélsőérték;*
d) *ha $\Delta_2 = 0$, akkor lehet is és nem is lokális szélsőérték.*

Példák.

1. Vizsgálja a lokális szélsőértéket az

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvényre.

$$\exists \quad f_x(x, y) = 2x + y - 3 \ , \quad f_y(x, y) = x + 2y - 3 \ ,$$

így ott lehet lokális szélsőérték, ahol

$$2x + y - 3 = 0 \ , \qquad x + 2y - 3 = 0 \ .$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása az $x = 1$, $y = 1$, így az $(1, 1)$ pontban lehet lokális szélsőérték.
Belátható, hogy f kétszer differenciálható az $(1, 1)$ pontban, továbbá

$$f_{xx}(x, y) = 2 \ , \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 1 \ , \quad f_{yy}(x, y) = 2 \ ,$$

ezért

$$f_{xx}(1, 1) = 2 \ , \quad f_{xy}(1, 1) = f_{yx}(1, 1) = 1 \ , \quad f_{yy}(1, 1) = 2 \ ,$$

miatt

$$\Delta_1 = 2 > 0 \ , \qquad \Delta_2 = 3 > 0 \ ,$$

tehát f-nek $(1, 1)$-ben lokális minimuma van.

2. Vizsgálja az $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény lokális szélsőértékeit.

$$\exists \quad f_x(x, y) = 3x^2 - 3y \ , \quad f_y(x, y) = 3y^2 - 3x \ ,$$

és

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{aligned}\right\} \iff \quad (x, y) = (0, 0) \quad \text{vagy} \quad (x, y) = (1, 1),$$

így a $(0, 0)$ és az $(1, 1)$ pontokban lehet lokális szélsőérték. Belátható, hogy f kétszer differenciálható, továbbá

$$f_{xx}(x, y) = 6x \ , \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -3 \ , \quad f_{yy}(x, y) = 6y \ .$$

Így $(1,1)$-ben $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 36 - 9 > 0$, tehát f-nek $(1,1)$-ben lokális minimuma van.
$(0,0)$-ban $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -9 > 0$ miatt tételünk nem használható. Belátható (más módszerrel), hogy $(0,0)$-ban az $f(0,0) = 0$ nem lokális szélsőérték.

6. Feltételes szélsőérték

Definíció. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}$, $h = (h_1, \dots, h_n) : D \to \mathbb{R}^n$. Az f függvénynek az $x_0 \in D$ (D nyílt) pontban a

$$h(x) = 0 \qquad (h_1(x) = \dots = h_n(x) = 0)$$

feltétel mellett ***feltételes lokális szélsőérték***e van, ha

– $h(x_0) = 0 \quad (h_1(x_0) = \dots = h_n(x_0) = 0)$

és

– $\exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in K(x_0, \delta)\ \wedge\ h(x) = 0 \quad f(x) \le f(x_0)\ (f(x) \ge f(x_0))$

teljesül.

Tétel (a feltételes lokális szélsőérték szükséges feltétele). *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : D \to \mathbb{R}$. Ha az f függvénynek az $x_0 \in D$ (D nyílt) pontban a $h(x) = 0$ feltétel mellett feltételes lokális szélsőértéke van, továbbá f és h folytonosan differenciálhatók az x_0 egy környezetében, akkor*

– *vagy a $D_j h(x_0) = 0\, (j = 1, \dots, n)$*
– *vagy $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ szám, hogy a*

$$F : D \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = f(x) + \lambda h(x)$$

függvény minden parciális deriváltja zérus x_0-ban, azaz

$$D_j F(x_0) = 0 \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Megjegyzés. A tétel szerint a lehetséges feltételes szélsőérték helyek meghatározásához a

$$\begin{cases} D_j f(x) + \lambda D_j h(x) = 0 & j = 1, \dots, n \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

$n+1$ egyenletből álló $n+1$ ismeretlenes $(x_1, \dots, x_n, \lambda)$ egyenletrendszert kell megoldani.

Példa. Határozza meg az

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

függvény feltételes lokális szélsőérték helyeit és azok értékét a

$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

feltételre (azaz az $x_1^2 + x_2^2 = 1$ körvonalon).
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú, így a megjegyzés szerint, mivel

$$\begin{aligned} D_1 f(x_1, x_2) &= 1\ , & D_2 f(x_1, x_2) &= 2\ , \\ D_1 h(x_1, x_2) &= 2x_1\ , & D_2 h(x_1, x_2) &= 2x_2\ , \end{aligned}$$

az

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x_1 = 0 \\ 2 + 2\lambda x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásai (x_1, x_2)-re adják a lehetséges feltételes szélsőérték helyeket.
Egyszerű számolás adja, hogy ezek

$$\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{10}\right) \quad \text{és} \quad \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{10}\right).$$

Az $x_1^2 + x_2^2 = 0$ körvonal kompakt halmaz $\mathbb{R}^2$-ben, így azon f felveszi a maximumát és minimumát, melyek

$$f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{10}\right) = 2\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{illetve} \quad f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{10}\right) = -2\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

XV. fejezet

Riemann-integrál $\mathbb{R}^n$-ben

Bevezetés

Ebben a fejezetben először a (IX.2.–6. és 9. fejezetben tárgyalt) Riemann-integrál fogalmát és az arra vonatkozó bizonyos eredményeket általánosítjuk n-dimenziós tégla felett értelmezett korlátos függvényekre, kiegészítve az általánosabb Riemann-integrál kiszámítására vonatkozó tételekkel.

Ezt követően (a téglán definiált integrálra visszavezetve) értelmezzük az integrált korlátos $\mathbb{R}^n$-beli halmazokra, melyhez kapcsolódva $\mathbb{R}^n$-beli korlátos halmazok Jordan-mérhetőségét és mértékét, s a mérték fontosabb tulajdonságait is vizsgáljuk. Rámutatunk arra is, hogy például az $\mathbb{R}^2$-beli Jordan-mérték és az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény gráfja alatti terület egybeesik.

1. Riemann-integrál téglán

a) Riemann-integrál fogalma téglán

A Riemann-integrál fogalma (és ebből eredően tulajdonságai is) az $\mathbb{R}^n$ tégláin (intervallumain) szoros analógiát mutat (mutatnak) az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ típusú függvényekre felépített Riemann-integrállal.
Geometriai tartalma pedig a terület- és térfogatszámításhoz is kapcsolódik.

A továbbiakban legyen $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ egy ***tégla***, vagy ***n-dimenziós intervallum*** (ahol az $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ intervallumokat Q komponens-intervallumainak nevezzük), míg $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.

1. definíció. A $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ***tégla mértékén*** (***térfogatán***) a

$$V(Q) \doteq (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

valós számot értjük. (Speciálisan ez $n = 1$-re egy valós intervallum hossza, $n = 2$-re egy téglalap területe.)

2. definíció. Ha $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ adott tégla, úgy a $P = P_1 \times \cdots \times P_n$ halmazt Q ***egy felosztásá***nak nevezzük, ha $\forall\ j = 1, \ldots, n$-re P_j az $[a_j, b_j]$ intervallum egy (korábban már definiált) felosztása, azaz

$$P_j = \{x_{ji} \mid a_j = x_{j0} < x_{j1} < \cdots < x_{jk_j} = b_j\} \ .$$

Ha $\forall$ j-re $I_{ji} = [x_{ji-1}, x_{ji}]$ $(i = 1, \dots, k_j)$ jelöli az $[a_j, b_j]$ komponens-intervallum P_j által meghatározott részintervallumait, akkor a $T_{i_1 \dots i_n} = I_{1i_1} \times \cdots \times I_{ni_n}$ téglákat (ahol $i_1 = 1, \dots, k_1;\ \dots\ ; i_n = 1, \dots, k_n$) a Q tégla P felosztás által meghatározott ***résztéglái***nak (részintervallumainak), míg a

$$\|P\| = \sup_{i_1, \dots, i_n} \{\operatorname{diam} T_{i_1 \dots i_n}\}$$

számot (ahol $\operatorname{diam} T_{i_1 \dots i_n}$ a $T_{i_1 \dots i_n}$ tégla átmérője) a P ***felosztás finomságá***nak nevezzük.

3. definíció. Legyen P^1 és P^2 Q két felosztása. P^2 ***finomítása*** (továbbosztása) P^1-nek, ha $P^1 \subset P^2$. A $P = P^1 \cup P^2$ halmazt a P^1 és P^2 felosztások egyesítésének (illetve $P^1 \subset P^1 \cup P^2$ és $P^2 \subset P^1 \cup P^2$ miatt közös finomításának) nevezzük.

4. definíció. $\langle P^k \rangle$ ***normális felosztássorozat***a Q-nak, ha $\lim\limits_{k \to \infty} \|P^k\| = 0$ teljesül.

5. definíció. Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, P a Q egy felosztása és $T_{i_1 \dots i_n}$ e felosztás résztéglái, továbbá

$$m_{i_1 \dots i_n} \doteq \inf_{x \in T_{i_1 \dots i_n}} \{f(x)\} \qquad M_{i_1 \dots i_n} \doteq \sup_{x \in T_{i_1 \dots i_n}} \{f(x)\}$$

(ezek f korlátossága miatt léteznek).
A

$$s(f, P) \doteq \sum m_{i_1 \dots i_n} V(T_{i_1 \dots i_n}) \ , \qquad S(f, P) \doteq \sum M_{i_1 \dots i_n} V(T_{i_1 \dots i_n}) \ ,$$
$$\mathcal{O}(f, P) \doteq S(f, P) - s(f, P) = \sum (M_{i_1 \dots i_n} - m_{i_1 \dots i_n}) V(T_{i_1 \dots i_n})$$

számokat az f függvény P felosztáshoz tartozó ***alsó***, ***felső***, illetve ***oszcillációs összeg***einek, míg tetszőleges $t_{i_1 \dots i_n} \in T_{i_1 \dots i_n}$ pontokra a

$$\sigma(f, P) \doteq \sum f(t_{i_1 \dots i_n}) V(T_{i_1 \dots i_n})$$

számot az f függvény P felosztáshoz és $t_{i_1 \dots i_n}$ pontokhoz tartozó integrálközelítő összegének nevezzük, ahol az összegzés kiterjed a Q tégla P által meghatározott összes résztéglájára.

1. tétel. *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

a) *bármely P és bármely $\sigma(f, P)$-re: $s(f, P) \le \sigma(f, P) \le S(f, P)$;*
b) *bármely $P^1 \subset P^2$-re: $s(f, P^1) \le s(f, P^2)$, $\quad S(f, P^1) \ge S(f, P^2)$;*
c) *bármely P^1, P^2-re: $s(f, P^1) \le S(f, P^2)$.*

6. definíció. Legyen $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az

$$\underline{I} \doteq \underline{\int_Q} f \doteq \sup_P \{s(f, P)\} \qquad \bar{I} \doteq \overline{\int_Q} f \doteq \inf_P \{S(f, P)\}$$

(létező) számokat az f függvény Q feletti ***alsó***, illetve ***felső Darboux-integrál***jának nevezzük.

2. tétel. *Legyen $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

$$\underline{I}, \bar{I} \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \underline{I} \leq \bar{I}, \quad 0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq \mathcal{O}(f, P).$$

Példák.

1. Ha $f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, akkor $\underline{I} = \bar{I}$, mert Q bármely P feloszását választva, $m_{i_1 \dots i_n} = M_{i_1 \dots i_n} = c$ miatt
$$s(f, P) = S(f, P) = \sum cV(T_{i_1 \dots i_n}) = c(b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n),$$
ami adja, hogy
$$\underline{I} = \sup_P \{s(f, P)\} = c(b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n) = \inf_P \{S(f, P)\} = \bar{I}\ .$$
2. Ha $f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } x \text{ bármely koordinátája racionális,} \\ 0 & \text{, egyébként,} \end{cases}$$
akkor $\underline{I} \neq \bar{I}$, mert Q bármely P felosztására (mivel minden $T_{i_1 \dots i_n}$ résztéglában van csupa racionális koordinátájú és más típusú pont is)
$m_{i_1 \dots i_n} = 0$, $M_{i_1 \dots i_n} = 1$, így
$$s(f, P) = \sum 0 \cdot V(T_{i_1 \dots i_n}) = 0\ ,$$
$$S(f, P) = \sum 1 \cdot V(T_{i_1 \dots i_n}) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)\ ,$$
ezért
$$\underline{I} = \sup_P \{s(f, P)\} = 0 < (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n) = \inf_P \{S(f, P)\} = \bar{I}\ .$$

7. definíció. Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény ***Riemann-integrálható*** Q-n, ha $\underline{I} = \bar{I}$ és ezt a közös értéket az f függvény Q ***tégla feletti Riemann-integrál***jának nevezzük, és rá az I, $\int\limits_Q f$, vagy $\int\limits_Q f(x)dx$ jelöléseket használjuk.

Megjegyzések.

1. Az előző 1. példa függvénye Riemann-integrálható és
$I = c(b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$.
2. Létezik nem Riemann-integrálható függvény (a 2. példa függvénye).

b) A Darboux-tétel és következményei

1. tétel (Darboux-tétel). *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ ($Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla) korlátos függvény, akkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy Q bármely P felosztására, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$,*

$$S(f, P) - \bar{I} < \varepsilon \qquad \text{és} \qquad \underline{I} - s(f, P) < \varepsilon$$

teljesül.

2. tétel (A Darboux-tétel következménye). *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*
a) Q bármely $\langle P^k \rangle$ normális felosztássorozatára létezik

$$\lim_{k\to\infty} s(f, P^k) = \underline{I}\,, \quad \lim_{k\to\infty} S(f, P^k) = \bar{I}\,, \quad \lim_{k\to\infty} \mathcal{O}(f, P^k) = \bar{I} - \underline{I}\,;$$

b) Q bármely $\langle P^k \rangle$ normális felosztássorozatára léteznek $\langle \sigma^1(f, P^k) \rangle$ és $\langle \sigma^2(f, P^k) \rangle$ integrálközelítő összegsorozatok, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \sigma^1(f, P^k) = \underline{I}\,, \qquad \lim_{k\to\infty} \sigma^2(f, P^k) = \bar{I}\,.$$

c) A Riemann-integrálhatóság kritériumai és elegendő feltételei

1. tétel. *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható Q-n, ha létezik $I \in \mathbb{R}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy bármely olyan P felosztására Q-nak, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$,*
$|\sigma(f, P) - I| < \varepsilon$ teljesül bármely $\sigma(f, P)$-re.

2. tétel. *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható Q-n, ha bármely $\langle P^k \rangle$ normális felosztássorozathoz tartozó bármely $\langle \sigma(f, P^k) \rangle$ integrálközelítő összegsorozat konvergens.*

3. tétel (Riemann-kritérium). *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható Q-n, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik P felosztása Q-nak, hogy*

$$\mathcal{O}(f, P) = S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon\,.$$

4. tétel. *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható Q-n, ha Q bármely $\langle P^k \rangle$ normális felosztássorozata esetén $\langle \mathcal{O}(f, P^k) \rangle$ nullsorozat.*

5. tétel. *$f : Q \to \mathbb{R}$ folytonos függvény Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Mint valósban, csak $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ helyett $\dfrac{\varepsilon}{V(Q)}$-t használunk. (Lásd IX.4., 5. tétel bizonyítása.) □

d) A Riemann-integrál műveleti tulajdonságai, egyenlőtlenségek, középértéktételek

1. tétel. *Ha az $f, g : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvények Riemann-integrálhatók, $p, q \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok, akkor a $(p \cdot f + q \cdot g) : Q \to \mathbb{R}$ függvény is Riemann-integrálható és*

$$\int_Q (p \cdot f + q \cdot g) = p \cdot \int_Q f + q \cdot \int_Q g\,.$$

Bizonyítás. Lásd IX.6., 1. tétel bizonyítása. □

2. tétel. *Ha* $f : Q \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálható, akkor* f^2 *is, továbbá ha létezik* $c > 0$, *hogy* $|f(x)| \geq c$ *bármely* $x \in Q$, *akkor* $\dfrac{1}{f}$ *is Riemann-integrálható.*

3. tétel. *Ha az* $f, g : Q \to \mathbb{R}$ *függvények Riemann-integrálhatók, akkor* $f \cdot g$ *is, továbbá ha létezik* $c > 0$, *hogy* $|g(x)| > c$ *bármely* $x \in Q$*-ra, úgy* $\dfrac{f}{g}$ *is Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Lásd IX.6., 3. tétel bizonyítása. □

4. tétel. *Ha* $f : Q \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálható függvény, akkor* $|f|$ *is Riemann-integrálható.*

5. tétel. *Ha* $f, g : Q \to \mathbb{R}$ *korlátos függvények és* $f \leq g$, *akkor*

$$\underline{\int}_Q f \leq \underline{\int}_Q g \ \wedge \ \overline{\int}_Q f \leq \overline{\int}_Q g \ .$$

Ha továbbá f, g *Riemann-integrálhatók, akkor* $\int\limits_Q f \leq \int\limits_Q g$.

Bizonyítás. Lásd IX.7., 1. tétel bizonyítása. □

e) Az integrál kiszámítása

Cél: Az n-dimenziós tégla feletti integrál kiszámításának visszavezetése alacsonyabb dimenziójú integrálokra, az úgynevezett ismétléses integrálással.

1. tétel. *Ha* $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $B = [c, d] \subset \mathbb{R}$, $f : Q = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *korlátos és Riemann-integrálható függvény* Q*-n, azaz létezik*

$$\int\limits_Q f \doteq \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x, y)\ dxdy\ ,$$

és

$$\text{bármely} \quad x \in [a, b] \quad \text{létezik} \quad \int\limits_c^d f(x, y)\ dy$$

vagy

$$\text{bármely } y \in [c, d] \quad \text{létezik} \quad \int\limits_a^b f(x, y)\ dx$$

akkor

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x, y)\ dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x, y)\ dy \right]\ dx$$

vagy

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\ dx \right]\ dy$$

teljesül, azaz a kettős integrál kétszeres ismételt (valós Riemann) integrállal számítható.

2. tétel. *Legyen $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f : Q \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor*

$$\int_Q f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \cdots \right) dx_1$$

Példák.

1. A

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} xy\, dxdy$$

kettős integrál létezik, mert az $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$ függvény folytonos, így a Fubini-tétel 3. következménye miatt (felhasználva a Newton-Leibniz formulát is)

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} xy\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2}\, dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}\ .$$

2. A

$$\iiint_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} xy^2 \sqrt{z}\, dxdydz$$

hármas integrál létezik, mert az
$f : [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy^2\sqrt{z}$ függvény folytonos, így a Fubini-tétel 3. következményét és a Newton-Leibniz formulát felhasználva

$$\iiint\limits_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} xy^2\sqrt{z}\,dxdydz = \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 xy^2\sqrt{z}\,dz\right) dy\right] dx =$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[xy^2 \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{2}{3}xy^2\,dy\right) dx =$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{3}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{3} dx = \left[\frac{x^3}{9}\right]_0^1 = \frac{1}{9}\ .$$

2. Riemann-integrál korlátos $\mathbb{R}^n$-beli halmazon

Definíció. Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, $f : S \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, továbbá $f_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$f_S(x) = \begin{cases} f(x) & ,\ x \in S \\ 0 & ,\ x \in CS\ . \end{cases}$$

Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ olyan tégla, hogy $S \subset Q$.
Az f függvényt ***Riemann-integrálható***nak mondjuk S ***felett***, ha létezik $\int\limits_Q f_S$ és az

$$\int\limits_S f \doteq \int\limits_Q f_S$$

számot az f ***függvény*** S ***feletti Riemann-integrálójá***nak nevezzük.

Megjegyzés. Az itt definiált integrál független Q megválasztásától.

1. tétel (az integrál tulajdonságai). *Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, $f, g : S \to \mathbb{R}$ korlátos függvények.*
a) Ha f és g Riemann-integrálható S felett, akkor $\lambda f + \mu g$ is, és

$$\int\limits_S (\lambda f + \mu g) = \lambda \int\limits_S f + \mu \int\limits_S g \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

b) Ha f és g Riemann-integrálható S felett és $f(x) \leq g(x)$ $(x \in S)$, akkor $\int\limits_S f \leq \int\limits_S g$.

c) Ha f Riemann-integrálható S felett, akkor $|f|$ is Riemann-integrálható és $\left|\int\limits_S f\right| \leq \int\limits_S |f|$.

d) Legyen $T \subset S$. Ha $f \geq 0$ S-en és Riemann-integrálható T-n és S-en, akkor $\int\limits_T f \leq \int\limits_S f$.

Következmény. Ha $S \subset \mathbb{R}^n$, $f_i : S \to \mathbb{R}$, $(i = 1, \dots, k)$ korlátos függvények, melyek Riemann-integrálhatók S felett, akkor $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$ $(\lambda_i \in \mathbb{R})$ is Riemann-integrálható és

$$\int\limits_S \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int\limits_S f_i \ .$$

3. Jordan-mérhető halmazok $\mathbb{R}^n$-ben

1. definíció. Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Ha az $f(x) = 1$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ konstans függvény Riemann-integrálható S-en, akkor azt mondjuk, hogy S ***Jordan-mérhető*** $\mathbb{R}^n$-ben és az

$$m_J(S) \doteq \int\limits_S 1$$

számot S ***Jordan-mértéké***nek nevezzük.

Megjegyzések.

1. Ha $S = Q \subset \mathbb{R}^n$ egy tégla, akkor

$$m_J(Q) \doteq \int\limits_Q 1 = V(Q) \ ,$$

azaz egy Q tégla Jordan-mértéke éppen a korábban definiált térfogata.

2. Bizonyítható, hogy a ***Jordan-mérték transzláció (eltolás) -invariáns***, azaz egy S Jordan-mérhető halmaz S^* eltoltjára igaz, hogy létezik $m_J(S^*) = m_J(S)$.
3. A Jordan-mérték tehát egy nemnegatív, végesen additív, mozgásinvariáns mérték, melynél az egységkocka mértéke egy.

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nemnegatív, Riemann-integrálható függvény Riemann-integráljának geometriai (mértékelméleti) tartalmára mutat a következő:

1. tétel. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nemnegatív, Riemann-integrálható függvény, akkor az*

$$S \doteq \{(x, y) \mid x \in [a, b],\ y \in [0, f(x)]\} \subset \mathbb{R}^2$$

halmaz Jordan-mérhető és

$$m_J(S) = \int\limits_a^b f(x) dx$$

(a Riemann-integrál megadja a görbe alatti halmaz Jordan-mértékét).

2. definíció. Legyen $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt és mérhető halmaz, $\Phi, \Psi : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, hogy $\Phi(x) \leq \Psi(x)$ $(x \in K)$. Az

$$S = \{(x, y) \mid x \in K,\ \Phi(x) \leq y \leq \Psi(x)\}$$

halmazt ***egyszerű tartomány***nak nevezzük $\mathbb{R}^n$-ben.

Bizonyítható a következő:

2. tétel. *Az $S \subset \mathbb{R}^n$ egyszerű tartomány kompakt és Jordan-mérhető $\mathbb{R}^n$-ben.*

3. tétel (a Fubini tétel egyszerű tartományra). *Legyen S egyszerű tartomány, $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f integrálható S-en és*

$$\text{(F)} \qquad \int_S f = \int_{x \in K} \left[\int_{y=\Phi(x)}^{y=\Psi(x)} f(x, y) \right].$$

Példa. Számítsa ki a $\iint_S (x^2 + y) dx dy$ integrált, ha

$$S = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}.$$

$K = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz $\Phi(x) = x^2$, $\Psi(x) = \sqrt{x}$ $(x \in [0, 1])$ folytonos függvények, hogy $\Phi(x) \leq \Psi(x)$ $(x \in [0, 1])$ is teljesül, így a 2. definíció szerint S egyszerű tartomány $\mathbb{R}^2$-ben.

$f(x, y) = x^2 + y$ $((x, y) \in S)$ folytonos függvény, így tételünk szerint f integrálható S-en és (alkalmazva a Newton-Leibniz formulát is)

$$\iint_S (x^2 + y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{x}{2} - \frac{3}{2} x^4 \right) dx = \left[\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2} \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{33}{140}.$$

XVI. fejezet

Differenciálegyenletek

Bevezetés

Legyen adott az egyenesen mozgó pont v sebességfüggvénye, mely folytonos. A t_0 időpillanatban tartózkodjon a pont az S_0 helyen. Határozzuk meg a pont S útfüggvényét!

Megoldás: A sebesség definíciójából következik az

$$(1) \qquad S'(t) = v(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

egyenlet, ahol S az ismeretlen, v az ismert függvény.
Az egyenletben S' szerepel (ez nehézséget jelent), de (1) azt mutatja, hogy S primitív függvénye v-nek (ez viszont jó), így

$$(*) \qquad S(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau) d\tau + C$$

teljesül. Ugyanakkor a feladat szerint $S(t_0) = S_0$ is teljesül, így a probléma az

$$(2) \qquad S'(t) = v(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad S(t_0) = S_0$$

alakban fogalmazható meg, azaz (1)-et az $S(t_0) = S_0$ feltétel mellett kell megoldani, ami $(*)$ miatt adja, hogy $C = S_0$, így az

$$S(t) = S_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau) d\tau \qquad (t \in \mathbb{R})$$

szerint adott a feladat megoldása.

Mennyi ideig emelkedik egy $v_0 = 100\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sec}}$ kezdősebességgel függőlegesen felfelé lőtt rakéta?

Megoldás: Fizikából ismeretes, hogy a rakéta v sebességfüggvénye és deriváltja kielégíti a

$$v'(t) = -g - k\, v^2(t) \tag{3}$$

egyenletet. Ennek a megoldását kell keresni a $v(0) = 100$ feltétel mellett és meg kell határozni azt a T időpillanatot, amikor $v(T) = 0$.
A feladat tehát

$$v'(t) = -g - k\, v^2(t), \qquad v(0) = 100, \quad v(T) = 0 \tag{4}$$

megoldása. Látható, hogy itt a keresett v függvény és a v' deriváltfüggvénye is szerepel. A megoldás most nem nagyon „látszik”.

Az (1) és (3), illetve (2) és (4) általánosítása elvezet a differenciálegyenlet, illetve Cauchy-feladat fogalmához.

1. A differenciálegyenlet fogalma

Jelöljön y a továbbiakban egy keresett függvényt, $y(x)$ ennek a helyettesítési értékét x-ben. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adott, ekkor a

$$y' = f(x, y) \qquad \big(\text{illetve } y'(x) = f(x, y(x))\,\big) \tag{1.1}$$

egyenlet ***elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenlet***nek szokás nevezni.

Általánosabban:

1. definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény (ahol D általában egy nyílt halmaz vagy tartomány). Az

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big) \tag{1.2}$$

egyenletet ***n-edrendű közönséges explicit differenciálegyenlet***nek nevezzük, ennek speciális esete $n = 1$-re a (1.1) elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenlet.
Az $y : I \to \mathbb{R}$ (ahol $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, mely lehet nyílt, zárt, félig nyílt, egy félegyenes vagy a számegyenes is) függvény ***megoldása*** (1.2)-nek I-n, ha

1) y n-szer differenciálható,
2) $\big(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big) \in D, \quad \forall\, x \in I,$
3) $y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big), \quad \forall\, x \in I$ teljesül.

További általánosítás:

2. definíció. Legyen $F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvény. A

$$F\big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\big) = 0 \tag{1.3}$$

egyenletet ***közönséges*** ***n-edrendű differenciálegyenlet***nek nevezzük.
Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény ***megoldása*** a (1.3) differenciálegyenletnek az I intervallumon, ha

1) y n-szer differenciálható,
2) $\big(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) \in D, \quad \forall\, x \in I,$
3) $F\big(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) = 0 \quad \forall\, x \in I$

teljesül.

Megjegyzés. Ha (1.2), illetve (1.3)-ban f, illetve F az $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, illetve $y, y', \dots, y^{(n)}$ változóinak lineáris függvénye, akkor a (1.2), illetve (1.3) ***lineáris differenciálegyenlet***, egyébként ***nemlineáris***.

Példák.

1. Az $y' = 2xy^2 - 5$ differenciálegyenlet, melynél $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2xy^2 - 5$, egy elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenlet. f nem lineáris függvénye y-nak, így az egyenlet nemlineáris.
2. Az $y'' + 3y' - 4y - \sin(x) = 0$ differenciálegyenlet, ahol $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, y', y'') = y'' + 3y' - 4y - \sin(x)$, másodrendű közönséges implicit differenciálegyenlet. F lineáris függvénye y, y', y''-nek, így az egyenlet lineáris.
3. Az $y' = -\frac{y}{x}$ elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenlet, $f(x, y) = -\frac{y}{x}$, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ahol $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 0\}$ nyílt halmaz (az $x = 0$ egyenestől megfosztott sík).
   Az $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $y = \frac{c_1}{x}$ függvény bármely $c_1 \in \mathbb{R}$-re a $]0, +\infty[$-en, míg az $y :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$, $y = \frac{c_2}{x}$ függvény bármely $c_2 \in \mathbb{R}$-re a $]-\infty, 0[$ intervallumon megoldása a differenciálegyenletnek.
   Ez egy olyan görbesereg, melynek egyik görbéje sem metszi az y-tengelyt.
   Később belátjuk, hogy így az összes megoldást megadtuk.

2. Kezdeti érték probléma vagy Cauchy-feladat

Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $(x_0, y_{01}, \dots, y_{0n}) \in D$ rögzített. A

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \quad (i = 0, \dots, n-1) \tag{2.1}$$

problémát egy ***n-edrendű explicit közönséges differenciálegyenletre vonatkozó kezdeti érték problémá***nak vagy ***Cauchy-feladat***nak nevezzük (ez $n = 1$-re $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ alakú).
Az $y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1}$ $(i = 0, \dots, n-1)$ kikötéseket kezdeti feltételeknek nevezzük.
Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény megoldása (2.1) (n-KÉP)-nek, ha

1) y n-szer differenciálható,

2) $\big(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\big) \in D \quad \forall\, x \in I$,
3) $y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\big) \quad \forall\, x \in I$,
4) $y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \quad (i = 0, \dots, n-1)$

teljesül.

Megjegyzés. Hasonló a helyzet a nem explicit esetben is,
$F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ függvénnyel.

Példa. Az $y' = -\frac{y}{x}$, $y(1) = 1$ egy elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenletre vonatkozó Cauchy-feladat (kezdeti érték probléma).
Az $y' = -\frac{y}{x}$ differenciálegyenletnek az $y(x) = \frac{c}{x}$ $(x > 0)$ függvény megoldása, melyre $y(1) = 1$, ami adja, hogy $c = 1$ (hiszen $1 = y(1) = \frac{c}{1} = c$).
$y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ valóban megoldása a feladatunknak $]0, +\infty[$-en. Később megmutatjuk, hogy más megoldás nincs. A megoldás tehát az előbbi 3. feladat megoldását leíró görbesereg azon görbéje, mely áthalad az $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ ponton.

3. Elemi úton megoldható differenciálegyenlet-típusok

a) Szeparábilis differenciálegyenletek

1. definíció. Legyenek $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ $(g \neq 0)$ adott folytonos függvények. Az

(SZ) $$y' = f(x)g(y)$$

differenciálegyenletet ***szeparábilis*** (szétválasztható változójú) ***differenciálegyenlet***nek nevezzük.

1. tétel. *Az $y : [a, b] \to [c, d]$ differenciálható függvény akkor és csak akkor megoldása (SZ)-nek, ha*

(*SZMo*) $$\left(\left(\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)} dt\right) \circ y\right)(x) = \int_{x_0}^{x} f(t) dt$$

$\big(x, x_0 \in [a, b];\ y, y_0 \in [c, d]\big)$ *teljesül.*

Bizonyítás. f és $1/g$ folytonosak, így az

$$F(x) \doteq \int_{x_0}^{x} f(t) dt + C_1 \qquad \big(x, x_0 \in [a, b]\big),$$

$$G(y) \doteq \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)} dt + C_2 \qquad \big(y, y_0 \in [c, d]\big)$$

szerint definiált $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $G : [c, d] \to \mathbb{R}$ függvényekre $F' = f$,
$G' = 1/g$ teljesül.

a) Ha y teljesíti (SZMo)-t, akkor

$$G\big(y(x)\big) = F(x) + C_2 - C_1 \qquad \big(x \in [a,b]\big),$$

ami y, F, G differenciálhatósága miatt adja, hogy

$$G'\big(y(x)\big) \cdot y'(x) = F'(x) \qquad \big(x \in [a,b]\big),$$

azaz

$$y'(x) = f(x)g\big(y(x)\big) \qquad \big(x \in [a,b]\big)$$

teljesül, tehát y megoldása (SZ)-nek.

b) Ha y megoldása (SZ)-nek, akkor

$$f(x) = \frac{y'(x)}{g\big(y(x)\big)} \qquad (x \in [a,b])$$

és a helyettesítéses integrálás tétele miatt $\forall\ x, x_0 \in [a,b]$ esetén

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g\big(y(t)\big)}dt = \left(\left(\int_{y_0=y(x_0)}^{y} \frac{1}{g(t)}dt\right) \circ y\right)(x)$$

következik, azaz (SZMo) teljesül. □

Megjegyzések.

1. A tétel szerint $y(x_0) = y_0$ is teljesül, így az $y' = f(x)g(y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdeti érték probléma megoldását kaptuk meg.
2. A következő formális módszert gyakran használják:

$$\text{(SZ)} \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \quad (*),$$

amiből kapjuk (SZ) megoldását.
Az (x_0, y_0) ponton áthaladó megoldáshoz úgy kell megválasztani az integrációs konstansokat, hogy a $(*)$ egyenlőség teljesüljön $x = x_0$, $y = y_0$ mellett. Ez teljesül, ha

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt\ ,$$

ami adja, hogy y teljesíti (SZMo)-t.

3. Vizsgálható olyan eset is, amikor valamilyen $y_0 \in [c,d]$-re $g(y_0) = 0$ (ekkor $y(x) = y_0$ nyilván megoldás, de lehetnek más megoldások is).
4. (SZ) tekinthető $f :]a,b[\to]c,d[$ típusú függvényekkel is, tételünk és a megjegyzéseink ekkor is érvényesek.

Példák.

1. Az $y' = 2xy$ differenciálegyenlet szeparábilis, $f(x) = 2x$ $(x \in \mathbb{R})$, $g(y) = y$ $(y \in \mathbb{R})$.
   $y = 0$ nyilván megoldás $\mathbb{R}$-en (hiszen ekkor $y' = 0$ miatt teljesül az egyenlet $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén).
   Ha $y \neq 0$, úgy tekintsük az $y > 0$ és az $y < 0$ eseteket.
   $y > 0$ esetén, tételünk szerint $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ akkor és csak akkor megoldása egyenletünknek, ha
   $$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{y}\, dy = \int_{x_0}^{x} 2x\, dx \qquad (\forall\, x, x_0 \in \mathbb{R};\ y, y_0 \in \mathbb{R}_+),$$
   azaz
   $$\ln \frac{y}{y_0} = x^2 - x_0^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y = y_0\, e^{-x_0^2}\, e^{x^2}\ ,$$
   ami adja az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ponton áthaladó megoldást.
   Mivel bármely $c \in \mathbb{R}_+$-hoz létezik x_0, y_0, hogy $c = y_0\, e^{-x_0^2}$, így kapjuk, hogy $y = c\, e^{x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ megoldás bármely $c \in \mathbb{R}_+$-ra $\mathbb{R}$-en.
   $y < 0$ esetén a megoldás $y = y_0\, e^{-x_0^2} x^2$ $(x, x_0 \in \mathbb{R};\ y, y_0 \in \mathbb{R}_-)$, illetve $y = c\, e^{x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ alakú $c < 0$ mellett.
   Így az egyenlet minden megoldása $y = c\, e^{x^2}$ alakú $\mathbb{R}$-en.
2. Az $y' = -\frac{y}{x}$ differenciálegyenlet szeparábilis $f(x) = -\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ $g(y) = y$ $(y \in \mathbb{R})$ mellett. $y = 0$ nyilván megoldás $\mathbb{R}_+$-on és $\mathbb{R}_-$-on. Tételünk (illetve a 2. megjegyzés) adja, hogy y akkor és csak akkor megoldása a differenciálegyenletnek, ha
   $$\int \frac{1}{y}\, dy = -\int \frac{1}{x}\, dx \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{c_1}{x}\ \ (x > 0), \quad y = \frac{c_2}{x}\ \ (x < 0),$$
   ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

2. definíció. Legyenek $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények, $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható ismeretlen függvény. A

(LIH) $$y' = f(x)y + g(x)$$

differenciálegyenletet ***elsőrendű lineáris inhomogén***, míg az

(LH) $$y' = f(x)y$$

differenciálegyenletet ***elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenlet***nek nevezzük.

2. tétel. *Az $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor megoldása (LIH)-nek, ha $\exists\, c \in \mathbb{R}$, hogy*

(*LIHMo*) $$y(x) = c y_H(x) + y_P(x) \qquad (x \in [a, b]),$$

ahol $y_H : [a,b] \to \mathbb{R}$ *az* (*LH*) *differenciálegyenlet sehol el nem tűnő,* $y_P : [a,b] \to \mathbb{R}$ *pedig* (*LIH*) *egy* (***partikuláris***) ***megoldása***. *Továbbá, ha* $x_0 \in [a,b]$ *rögzített, akkor* $\forall\ x \in [a,b]$ *esetén*

$$(H) \qquad y_H(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right),$$

$$(P) \qquad y_P(x) = \left[\exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right)\right] \cdot \int_{x_0}^{x} g(\tau)\exp\left(-\int_{x_0}^{\tau} f(t)dt\right) d\tau \ .$$

Megjegyzések.

1. $]a,b[$ is választható.
2. $y = c \cdot y_H(x) = c\ \exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) \qquad (x, x_0 \in [a,b])$

   nyilván az (LH) általános megoldása, mely szeparábilis differenciálegyenlet.
3. (P)-t nem fontos megjegyezni, azt a ***konstansvariálás*** alábbi ***módszeré***vel minden feladatban megkapjuk:
   Keressük y_P-t (ha az (LH) megoldását már ismerjük) az

   $$(*) \qquad y_P(x) = c(x)\exp\left[\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right] \qquad (x, x_0 \in [a,b])$$

   alakban. Ekkor

   $$y_P'(x) = c'(x)\exp\left[\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right] + c(x)f(x)\exp\left[\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right]$$

   y_P és y_P' alakját (LIH)-be behelyettesítve, rendezés után azt kapjuk, hogy a $(*)$ alakú y_P megoldása (LIH)-nek, ha

   $$c'(x) = g(x)\exp\left[-\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right] \qquad (x, x_0 \in [a,b])$$

   azaz, ha

   $$c(x) = \int_{x_0}^{x} g(\tau)\exp\left[-\int_{x_0}^{\tau} f(t)\,d\tau\right],$$

   melyet $(*)$-ba behelyettesítve kapjuk (P)-t.
4. Használhatunk határozatlan integrált is.

Példa. Az $y' = -y\sin x + \sin^3 x$ lineáris differenciálegyenletnél a homogén egyenlet

$$y' = -y\sin x\ ,$$

melynek általános megoldása $y = c\,e^{\cos x}$ $(x \in \mathbb{R})$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. Keressük y_P-t (az inhomogén egyenlet egy megoldását) az

$$y_P(x) = c(x)\,e^{\cos x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban, ekkor

$$y_P'(x) = c'(x)\,e^{\cos x} - c(x)\sin x\,e^{\cos x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

melyet az eredeti egyenletbe helyettesítve (rendezés után)

$$c'(x) = \sin^3 x\,e^{-\cos x}\ ,$$

illetve

$$\begin{aligned} c(x) &= \int \sin^3 x\,e^{-\cos x}dx = \int \sin^2 x\ \sin x\,e^{-\cos x}dx = \\ &= \sin^2 x\,e^{-\cos x} - 2\int \cos x \sin x\,e^{-\cos x}dx = \\ &= \sin^2 x\,e^{-\cos x} - 2\left[\cos x\,e^{-\cos x} + \int \sin x\,e^{-\cos x}dx\right] = \\ &= \left[\sin^2 x - 2\cos x + 2\right]e^{-\cos x} \end{aligned}$$

következik, mely adja, hogy

$$y_P(x) = \sin^2 x - 2\cos x + 2\ ,$$

ezért

$$y = \sin^2(x) - 2\cos(x) + 2 + c\,e^{\cos x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

4. Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek

a) Az n-edrendű lineáris homogén differenciálegyenletek általános elmélete

1. definíció. Legyenek $a_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ adott folytonos függvények. A

$$(\mathsf{H}_n\mathsf{D}) \qquad y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)} = 0$$

egyenletet n***-edrendű lineáris homogén differenciálegyenlet***nek nevezzük.

Egyszerű számolással bizonyítható a következő tétel:

1. tétel. *Ha az $y_1, \ldots, y_k : I \to \mathbb{R}$ függvények megoldásai ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek I-n, akkor $\forall\ c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ esetén az*

$$y = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i$$

függvény is megoldás I-n.

2. definíció (lineáris függőség és függetlenség).
Az $y_1, \ldots, y_k : I \to \mathbb{R}$ függvények lineárisan függőek I-n, ha létezik $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ ($\sum_{i=1}^{k} c_i^2 > 0$) konstansrendszer, hogy

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(x) = 0 \qquad (\forall x \in I).$$

$y_1, \ldots, y_k : I \to \mathbb{R}$ lineárisan függetlenek, ha $(*)$ csak úgy teljesül, ha $c_i = 0$ ($i = 1, \ldots, k$).

3. definíció (alaprendszer). Az $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ függvények ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) alaprendszerét alkotják, ha megoldásai annak és lineárisan függetlenek.

2. tétel (($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) általános megoldása). *Legyen $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) alaprendszere I-n, akkor ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) bármely $y : I \to \mathbb{R}$ megoldása*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \qquad (x \in I)$$

alakú, ahol $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ konstansok.

Megjegyzések.
1. Az általános megoldáshoz így elég az alaprendszert meghatározni.
2. Belátható, hogy alaprendszer mindig létezik.
3. Az alaprendszer meghatározására nincs általános módszer.

Példa. Tekintsük a

$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$$

másodrendű differenciálegyenletet $2x+1 \neq 0$-ra és adjuk meg az általános megoldását. Ehhez ismernünk kellene két lineárisan független megoldást, az alaprendszert.

Az együtthatókat látva olyan „érzésünk” van, hogy valamilyen algebrai polinom, illetve e^{ax} alakú függvény lehet megoldás (ilyen alakú megoldást általában is kereshetünk).

Ha szerencsénk van már $y_1(x) = x+b$ ($x \neq -\frac{1}{2}$) alakú megoldás is van alkalmas b-vel.

Ekkor $y_1'(x) = 1,\ y_1''(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$). Ezeket az egyenletbe helyettesítve

$$(2x+1) \cdot 0 + 4x - 4(x+b) = 0 \qquad \left(x \neq -\frac{1}{2}\right)$$

kell, hogy teljesüljön, ami $-4b = 0$, azaz $b = 0$ esetén igaz.
$y_1(x) = x$ ($x \neq -\frac{1}{2}$) tehát megoldás.
A másik megoldást keressük $y_2(x) = e^{ax}$ ($x \neq -\frac{1}{2}$) alakban, melyből $y_2'(x) = ae^{ax},\ y_2''(x) = a^2e^{ax}$ következik. Ezeket az egyenletbe helyettesítve

$$a^2(2x+1)e^{ax} + 4axe^{ax} - 4e^{ax} = 0 \qquad \left(x \neq -\frac{1}{2}\right)$$

kell, hogy teljesüljön, ami $e^{ax} \neq 0$ miatt ekvivalens azzal, hogy

$$a^2(2x+1) + 4ax - 4 = 0 \ ,$$

illetve

$$2a(a+2)x + a^2 - 4 = 0 \ ,$$

$(x \neq -\frac{1}{2})$ ami csak akkor igaz, ha $2a(a+2) = 0$ és $a^2 - 4 = 0$ igaz, ez pedig $a = -2$-re teljesül.
$y_2(x) = e^{-2x}$ $\left(x \neq \frac{1}{2}\right)$ is megoldás.
Belátható, hogy y_1 és y_2 lineárisan függetlenek.
Így az egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 x + c_2 e^{-2x} \qquad \left(x \neq -\frac{1}{2}\right) .$$

3. tétel (D'Alembert-féle rendszámcsökkentő eljárás).
Legyen $y_1 : I \to \mathbb{R}$ $(y_1 \neq 0)$ *megoldása az*

$$(\mathsf{H}_2\mathsf{D}) \qquad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

differenciálegyenletnek. Az $y : I \to \mathbb{R}$ *függvény akkor, és csak akkor megoldása* ($\mathsf{H}_2\mathsf{D}$)*-nek, ha az*

$$u : I \to \mathbb{R} \qquad u \doteq \left(\frac{y}{y_1}\right)'$$

függvény megoldása az

$$(\mathsf{H}_1\mathsf{D}) \qquad u' + \left(a_1(x) + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right) u = 0$$

differenciálegyenletnek. Így ($\mathsf{H}_2\mathsf{D}$) *általános megoldása*

$$y = cy_1 \int \exp\left[-\int \left(a_1(x) + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right) dx\right] dx =$$
$$= cy_1 \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left[-\int a_1(x)dx\right] dx \ .$$

b) Konstansegyütthatós lineáris homogén differenciálegyenletek

4. definíció. Ha ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-ben

$$a_i(x) = a_i \in \mathbb{R} \qquad (x \in I),$$

akkor a kapott

$$(\mathsf{KH}_n\mathsf{D}) \qquad y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(n-i)} = 0$$

egyenletet n***-edrendű konstansegyütthatós lineáris homogén differenciál-egyenlet***nek nevezzük.
$(\mathsf{KH}_n\mathsf{D})$ ***karakterisztikus polinom***ja:

$$P(\lambda) \doteq \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{n-i}, \tag{KP}$$

míg ***karakterisztikus egyenlet***e:

$$\lambda^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{n-i} = 0. \tag{KE}$$

4. tétel. *Ha* $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ $p_1, \dots, p_k$ $(\in \mathbb{N})$*-szeres (különböző) gyökei* $(\mathsf{KH}_n\mathsf{D})$ *karakterisztikus egyenletének, hogy* $p_1 + \dots + p_k = n$*, akkor*

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \dots, & x^{p_1-1}e^{\lambda_1 x} \\ \vdots & & & \\ e^{\lambda_k x}, & xe^{\lambda_k x}, & \dots, & x^{p_k-1}e^{\lambda_k x} \end{cases} \tag{AR}$$

alaprendszere $(\mathsf{KH}_n\mathsf{D})$*-nek.*

Ha például $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $\left(i \doteq \sqrt{-1}\right)$ úgynevezett konjugált komplex gyökei (KE)-nek, hogy $p_1 = p_2 = p$-szeresek, akkor (AR) első két sora helyett

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & \dots, & x^{p-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, & \dots, & x^{p-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}$$

szerepel. (Hasonló a helyzet a további komplex gyökök esetén is.)

Következmény. Az

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{KH$_2$D}$$

karakterisztikus egyenlete a másodfokú

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{KE$_2$}$$

egyenlet, így ha ennek gyökei:

a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor $(\mathsf{KH}_2\mathsf{D})$ általános megoldása

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x};$$

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \in \mathbb{R}$, akkor $(\mathsf{KH}_2\mathsf{D})$ általános megoldása

$$y = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2\, x\, e^{\lambda_0 x};$$

c) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, akkor $(\mathsf{KH}_2\mathsf{D})$ általános megoldása

$$y = \left[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right] e^{\alpha x}.$$

Példa. Az $y''' - y' = 0$ harmadrendű konstansegyütthatós lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \ ,$$

melynek megoldásai

$$\lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

miatt $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$.
Tekintsük az

$$y_1(x) = e^{0x} = 1 \ , \qquad y_2(x) = e^x \ , \qquad y_3(x) = e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényeket. Ezek megoldásai lesznek differenciálegyenletünknek (ez egyszerű számolással adódik) és lineárisan függetlenek, tehát a differenciálegyenlet alaprendszerét alkotják.
Így a 2. tétel miatt az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

amiről meg is győződhetünk.

c) n-edrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek

5. definíció. Legyenek $a_i, b : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ adott folytonos függvények, akkor az

$$(\mathsf{IH}_n\mathsf{D}) \qquad y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)} = b(x)$$

differenciálegyenletet ***n-edrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet***nek nevezzük.

5. tétel. *Legyen y_p partikuláris megoldása ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-nek. Az y akkor, és csak akkor megoldása ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-nek, ha az*

$$y_H : I \to \mathbb{R}, \qquad y_H(x) = y(x) - y_p(x)$$

szerint definiált függvény megoldása az ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-ből képzett ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek.

Bizonyítás.

a) Ha y és y_p megoldásai ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-nek, akkor az y-ra és y_p-re felírt ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-t kivonva egymásból

$$(y - y_p)^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)(y - y_p)^{(n-i)} = 0$$

adódik, azaz $y - y_p \doteq y_H$ valóban megoldása ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek.

b) Ha y_p megoldása ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-nek és y_H megoldása ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek, akkor a két egyenlet összeadása adja, hogy $y \doteq y_H + y_p$ is megoldása ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-nek. □

Következmény. Ha y_p ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$) egy ***partikuláris megoldás***a, $y_1, \ldots, y_n$ pedig ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) alaprendszere, akkor ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$) általános megoldása

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i + y_p \ .$$

Hogyan határozható meg y_p?

6. tétel (a konstansvariálás módszere ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-re). *Ha $y_1, \ldots, y_n$ az ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-ből képzett ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) alaprendszere és a $c_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ függvények kielégítik a*

$$(\mathsf{C}) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(j)}(x) = 0 \quad (j = 0, \ldots, n-2), \quad \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = b(x)$$

egyenletrendszert I-n, akkor

$$(\mathsf{P}) \qquad y_p : I \to \mathbb{R}, \qquad y_p(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x)$$

megoldása ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-nek.

Megjegyzés. ($\mathsf{IH}_2\mathsf{D}$) esetén

$$(\mathsf{IH}_2\mathsf{D}) \qquad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x),$$

és ha $y_1,\ y_2$ alaprendszer, akkor (C)

$$(\mathsf{C}') \qquad \begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = b(x) \end{cases}$$

alakú. Ebből pedig c_1' és c_2', ezt követően pedig c_1 és c_2 meghatározhatóak. Továbbá ezen c_1 és c_2 függvényekkel a partikuláris megoldás

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \qquad (x \in I).$$

Példa. Az

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$$

($\mathsf{IH}_2\mathsf{D}$)-hez tartozó homogén egyenlet:

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \ .$$

Ennek karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \ ,$$

melynek megoldása $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3$, így általános megoldása:

$$y_H(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Tételünk, illetve a 2. megjegyzés szerint

$$y_P(x) = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{3x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

megoldása lesz (IH$_2$D)-nek, ha c_1' és c_2' teljesíti a

$$\begin{aligned} c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{3x} &= 0 \\ c_1'(x)(-e^{-x}) + c_2'(x)3e^{3x} &= e^{4x} \end{aligned}$$

lineáris inhomogén egyenletrendszert.Ebből kapjuk, hogy

$$c_1'(x) = -\frac{1}{4}\,e^{5x} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$c_2'(x) = \frac{1}{4}\,e^{x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ebből

$$c_1(x) = -\frac{1}{4}\int e^{5x}\,dx = -\frac{1}{20}\,e^{5x}\ ,$$

$$c_2(x) = \frac{1}{4}\int e^{x}\,dx = \frac{1}{4}\,e^{x}\ ,$$

tehát

$$y_P(x) = -\frac{1}{20}\,e^{5x}\,e^{-x} + \frac{1}{4}\,e^{x}\,e^{3x} = \frac{1}{5}\,e^{4x} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ami valóban megoldása (IH$_2$D)-nek.
(IH$_2$D) általános megoldása így

$$y(x) = c_1\,e^{-x} + c_2\,e^{3x} + \frac{1}{5}\,e^{4x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Irodalomjegyzék

[1] Császár Á., *Valós analízis I-II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

[2] Járai A., *Modern alkalmazott analízis*, Egyetemi jegyzet, KLTE, Debrecen, 1991.

[3] Lajkó K., *Analízis I-II.*, Egyetemi jegyzet, DE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 2002-2003.

[4] Lajkó K., *Analízis III.*, Egyetemi jegyzet, DE Matematikai Intézet, Debrecen, 2003.

[5] Lajkó K., *Kalkulus I.*, Egyetemi jegyzet, DE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 2002.

[6] Lajkó K., *Kalkulus II.*, Egyetemi jegyzet, DE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 2003.

[7] Lajkó K., *Differenciálegyenletek*, Egyetemi jegyzet, DE Matematikai Intézet, Debrecen, 2003.

[8] Lang, S., *A First Course in Calculus*, Springer-Verlag, 1986.

[9] Leindler L. – Schipp F., *Analízis I.*, Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.

[10] Makai I., *Bevezetés az analízisbe*, Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

[11] Makai I., *Differenciál és integrálszámítás*, Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.

[12] Pál J. – Schipp F. – Simon P., *Analízis II.*, Egyetemi jegyzet, Nemzeti tankönyvkiadó, Budapest, 1993.

[13] Rimán J., *Matematikai analízis I. kötet*, EKTF, Liceum Kiadó, Eger, 1998.

[14] Rudin, W., *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[15] Száz Á., *Hatványozás és elemi függvények*, Egyetemi jegyzet, KLTE, Debrecen, 1994

Névjegyzék

Archimedes (syracuse-i) (görög, i.e. 287–i.e. 212)
Bernoulli, Jacques (svájci, 1654–1705)
Bolzano, Bernard Placidus (cseh, 1781–1848)
Borel, Felix Eduard Émile (francia, 1871–1956)
Bunykovszkij, Viktor Jakovlevics (orosz, 1804–1889)
Cantor, Georg (német, 1845–1918)
Cauchy, Augustin-Louis (francia, 1789–1857)
D'Alambert, Jean le Rond (francia, 1717–1783)
Darboux, Jean Gaston (francia, 1842–1917)
De Morgan, Augustus (angol, 1806–1871)
Descartes, René (francia, 1596–1650)
Dirichlet, Peter Gustav Lejenne (német, 1805–1859)
Fubini, Guido (olasz, 1879–1943)
Hadamard, Jacques (francia, 1865–1963)
Heine, Eduard (német, 1821–1881)
Jordan, Camille (francia, 1838–1922)
Lagrange, Joseph Louis (olasz-francia, 1736–1813)
Leibniz, Gottfried Wilhelm (német, 1646–1716)
L'Hospital, Guillaume Francois (francia, 1661–1704)
Liouville, Joseph (francia, 1809–1882)
Lipschitz, Rudolf (német, 1832–1903)
Maclaurin, Colin (skót, 1698–1746)
Mertens, Franz (osztrák, 1840–1927)
Minkowski, Herman (orosz-német, 1864–1909)
Newton, Sir Isaac (francia, 1642–1727)
Peano, Giuseppe (olasz, 1858–1932)
Riemann, Georg Friedrick Bernhard (német, 1826–1866)
Rolle, Michel (francia, 1652–1719)

Schwarcz, Hermann Amandus (német, 1843–1921)
Sylvester, James Joseph (angol, 1814–1897)
Taylor, Brook (angol, 1685–1731)
Venn, John (angol, 1843–1923)
Weierstrass, Karl (német, 1815–1897)
Young, William Henry (angol, 1863–1942)

Tárgymutató