Lajkó Károly

Kalkulus I.

mobiDIÁK könyvtár

Lajkó Károly

Kalkulus I.

mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

Lajkó Károly

Kalkulus I.

egyetemi jegyzet
harmadik kiadás

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem
Matematikai Intézet

Lektor

Fazekas István
Losonczi László

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem
Informatikai Intézet
4010 Debrecen, Pf. 12
http://mobidiak.unideb.hu

A mű a *A mobiDIÁK önszervező mobil portál* (IKTA, OMFB-00373/2003) és a *GNU Iterátor, a legújabb generációs portál szoftver* (ITEM, 50/2003) projektek keretében készült.

Tartalomjegyzék

I. fejezet
Halmazok, relációk, függvények

Jelölések

Itt (és a későbbiekben is) a definíciók, állítások és bizonyítások tömör leírására használjuk a matematikai logika (középiskolából is ismert) jelöléseit.

Így, annak leírására, hogy

- az „A kijelentésből következik a B kijelentés” az $A \Longrightarrow B$;
- az „A kijelentés egyenértékű a B kijelentéssel” („A akkor és csak akkor teljesül, ha B”) az $A \Longleftrightarrow B$;
- a „van olyan” („létezik”) kijelentésre a $\exists$;
- a „minden” („bármely”) kijelentésre a $\forall$;
- a „definíció szerint egyenlő” kijelentésre a $\doteq$

szimbólumokat használjuk.

1. Halmazelméleti alapfogalmak

Ebben a részben az úgynevezett naiv halmazelmélet legfontosabb fogalmait tárgyaljuk.

A ***halmaz*** és a ***halmaz eleme*** fogalmát adottnak (matematikai absztrakciónak) tekintjük. A halmazokat általában nagybetűkkel ($A, B, C, \dots$; $X, Y, Z, \dots$; $A_1, A_2, \dots$), elemeiket kisbetűkkel ($a, b, c, \dots$; $x, y, z, \dots$; $a_1, a_2, \dots$) jelöljük.

Azt például, hogy a eleme az A halmaznak az $a \in A$, míg azt, hogy a nem eleme az A halmaznak az $a \notin A$ szimbólummal jelöljük.

Egy ***halmaz adott***, ha minden dologról egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy eleme, vagy sem.

A ***halmazokat megadhatjuk*** az elemeik felsorolásával: $\{a, b, c, x, y, z, \alpha, \beta\}$, vagy valamilyen ismert halmaz elemeire való T tulajdonság (állítás) segítségével: az $\{x \mid x\ T \text{ tulajdonságú}\}$, $\{x \mid T(x)\}$, $\{x \in A \mid T(x)\}$ jelölésekkel.

1. definíció. Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, ***üres halmaz***nak nevezzük, és a $\emptyset$ szimbólummal jelöljük.

2. definíció. Az A és B ***halmazok egyenlők***, ha elemeik ugyanazok, azaz $x \in A \iff x \in B$. Ezt $A = B$, tagadását $A \neq B$ módon jelöljük.

Példa.
1. Ha $A = \{a, b, c, d\}$ és $B = \{d, b, c, a\}$, akkor $A = B$.
2. Ha $A = \{a, b, c, d\}$ és $B = \{b, c, e\}$, akkor $A \neq B$.

1. megjegyzés. A 2. definíció adja, hogy csak egy üres halmaz létezik.

3. definíció. Az A ***halmaz részhalmaza (része) a*** B ***halmaznak***, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$ is teljesül (azaz $x \in A \implies x \in B$). Ennek jelölése: $A \subset B$, vagy $B \supset A$.

Példa. Ha $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ és $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, akkor $A \subset B$.

4. definíció. Az A halmaz ***valódi része*** a B halmaznak, ha $A \subset B$, de $A \neq B$.

Példa. Ha $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ és $B = \{\beta, \gamma, \alpha\}$, akkor $A \subset B$, de A nem valódi részhalmaza B-nek, mert $A = B$.

2. megjegyzés. $A = B \iff A \subset B$ és $B \subset A$.

3. megjegyzés. Szokásos az is, hogy $A \subset B$, illetve $B \subset A$ azt jelöli, hogy A valódi része B-nek; ilyenkor azt, hogy A részhalmaza B-nek $A \subseteq B$ vagy $B \subseteq A$ jelöli.

5. definíció. ***Halmazrendszer*** (vagy halmazcsalád) alatt olyan nemüres halmazt értünk, amelynek elemei halmazok.

6. definíció. Egy A halmaz összes részhalmazaiból álló halmazt az A ***hatványhalmaz***ának nevezzük, és 2^A-val jelöljük.

7. definíció. Ha $I \neq \emptyset$ egy (úgynevezett) indexhalmaz, és bármely $i \in I$ esetén adott egy A_i halmaz, akkor az $\{A_i \mid i \in I\}$ módon jelölt halmazt ***I-vel indexelt halmazrendszer***nek nevezzük.

8. definíció. Az A és B ***halmazok egyesítésén*** (***unióján***) azt az $A \cup B$-vel jelölt halmazt értjük, amely mindazokból az elemekből áll, melyek az A és B halmazok közül legalább az egyikhez hozzátartoznak.

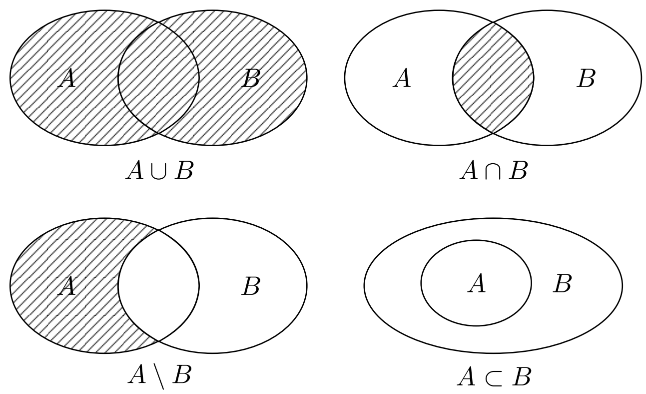
Az A és B ***halmazok közös részén*** (***metszetén***) azt az $A \cap B$-vel jelölt halmazt értjük, amely mindazokból az elemekből áll, amelyek mind az A, mind B halmaznak elemei.

Az A és B ***halmazok különbségén*** azt az $A \setminus B$-vel jelölt halmazt értjük, amely az A halmaz azon elemeiből áll, amelyek nem elemei a B halmaznak.

Tömörebb írásmódban:

$$A \cup B \doteq \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\},$$
$$A \cap B \doteq \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\},$$
$$A \setminus B \doteq \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$$

A halmazok közötti műveletek és relációk jól szemléltethetőek úgynevezett ***Venn-diagram***okkal.



1.1. ábra. Venn-diagramok

Egy $\mathcal{R}$ ***halmazrendszer egyesítésén***, illetve ***közös részén*** az

$$\bigcup \mathcal{R} \doteq \{a \mid \exists\ A \in \mathcal{R},\ a \in A\}, \qquad \bigcap \mathcal{R} \doteq \{a \mid \forall\ A \in \mathcal{R}\text{-ra } a \in A\}$$

halmazokat értjük.

Ha $\mathcal{R} = \{A_i \mid i \in I\}$ egy indexelt halmazrendszer, akkor egyesítését, illetve közös részét az $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, illetve $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ szimbólumokkal jelöljük.

Példa. Ha $A = \{a, \alpha, \beta, b, c\}$ és $B = \{a, \alpha, b, d, e\}$, akkor

$$A \cup B = \{a, \alpha, \beta, b, c, d, e\},$$
$$A \cap B = \{a, \alpha, b\},$$
$$A \setminus B = \{\beta\},$$
$$B \setminus A = \{d, e\}.$$

1. tétel. *Ha A, B, C tetszőleges halmazok*

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A$$

(kommutativitás);

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(asszociativitás);

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(disztributivitás);

$$A \backslash B = A \backslash (A \cap B), \qquad (A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash B,$$
$$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C), \qquad A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C),$$
$$A \cup B = B \iff A \subset B, \qquad A \cap B = B \iff A \supset B,$$
$$A \backslash B = \emptyset \iff A \subset B.$$

Bizonyítás. A definíciókból közvetlenül adódik. Szemléltessük Venn-diagrammal! □

9. definíció. Az A és B halmazok ***diszjunktak*** (***idegenek***), ha $A \cap B = \emptyset$. Ha egy $\mathcal{R}$ halmazrendszer bármely két különböző halmaza diszjunkt, akkor ***páronként diszjunktnak*** nevezzük.

Példa.

1. Ha $A = \{\alpha, \beta, a, b\}$, $B = \{\gamma, \delta, e\}$, akkor $A \cap B = \emptyset$, így A és B diszjunktak.
2. Ha $A = \{\alpha, \beta, b\}$, $B = \{a, \beta, d\}$, akkor $A \cap B = \{\beta\} \neq \emptyset$, így A és B nem diszjunktak.

10. definíció. Ha X adott halmaz és $A \subset X$, akkor a

$$C_X A (= A^c = \overline{A} = CA) \doteq X \setminus A$$

halmazt az A ***halmaz*** X ***halmazra vonatkozó komplementeré***nek nevezzük.

Példa. Ha $X = \{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma\}$, $A = \{a, \beta, \gamma\}$, akkor $C_X A = \{b, c, \alpha\}$.

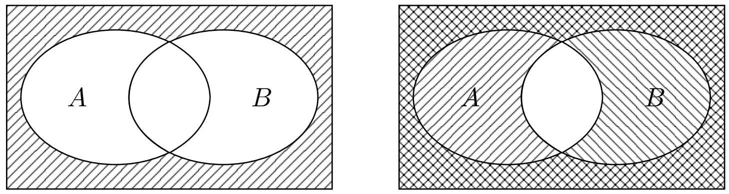
2. tétel. *Ha $A, B \subset X$, akkor*

$$A \cup \overline{A} = X, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset, \quad \overline{\emptyset} = X, \quad \overline{X} = \emptyset \quad \overline{\overline{A}} = A,$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

*Az előző két összefüggést **de Morgan-féle azonosság**nak nevezzük. A de Morgan-féle azonosságok érvényesek tetszőlegesen sok halmaz esetén is:*

$$\overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \overline{A_\gamma} \qquad \text{és} \qquad \overline{\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{A_\gamma}\ .$$

Bizonyítás. A definíciókból közvetlenül adódik. Szemléltessük Venn-diagrammal is! □



$\overline{A \cup B}$ $\overline{A} \cap \overline{B}$

1.2. ábra. de Morgan-azonosság Venn-diagramokkal

2. Relációk (leképezések)

1. definíció. Az a és b elemekből készített ***rendezett elempár***on egy (a, b) szimbólumot értünk, amelyre igaz, hogy $(a, b) = (c, d) \iff a = c$ és $b = d$.

1. megjegyzés. Az $(a, b) \doteq \{\{a\}, \{a, b\}\}$ definíció is lehetséges. Ekkor bizonyítható, hogy teljesül $(a, b) = (c, d) \iff a = c$ és $b = d$.

2. definíció. Az A és B halmazok ***Descartes-szorzat***án az

$$A \times B \doteq \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

halmazt értjük.

Példa. Ha $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z\}$, akkor az

	1	2	3	4
x	$(1, x)$	$(2, x)$	$(3, x)$	$(4, x)$
y	$(1, y)$	$(2, y)$	$(3, y)$	$(4, y)$
z	$(1, z)$	$(2, z)$	$(3, z)$	$(4, z)$

	x	y	z
1	$(x, 1)$	$(y, 1)$	$(z, 1)$
2	$(x, 2)$	$(y, 2)$	$(z, 2)$
3	$(x, 3)$	$(y, 3)$	$(z, 3)$
4	$(x, 4)$	$(y, 4)$	$(z, 4)$

táblázatok mutatják, hogy

$$\begin{aligned} A \times B = \{\, &(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z), \\ &(3, x), (3, y), (3, z), (4, x), (4, y), (4, z)\,\}; \\ B \times A = \{\, &(x, 1), (x, 2), (x, 3), (x, 4), (y, 1), (y, 2), (y, 3), (y, 4), \\ &(z, 1), (z, 2), (z, 3), (z, 4)\,\}. \end{aligned}$$

1. tétel. *Ha A, B és C tetszőleges halmazok, akkor*

a) $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$,

b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
d) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
e) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
f) $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$,
g) $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$,
h) $B \subset C \implies A \times B \subset A \times C$.

2. megjegyzés. $A \times B$ általában nem egyenlő $B \times A$, ahogy azt a 2. definíció utáni példa is mutatja.

3. definíció. Az $A \times B$ halmaz egy F részhalmazát A ***és*** B ***közötti*** (***binér***) ***reláció***nak, vagy más szavakkal A***-ból*** B***-be*** való ***leképezés***nek nevezzük. Ha $A = B$, akkor azt mondjuk, hogy F reláció A-n.

Példa. Ha $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z\}$, akkor

$$F = \{(1, x), (1, y), (2, z), (3, y), (3, z)\} \subset A \times B$$

binér reláció A és B között,

$$G = \{(x, 3), (y, 1), (z, 1), (z, 3)\} \subset B \times A$$

binér reláció B és A között.

3. megjegyzés. Az $(a, b) \in F$ tartalmazást szokás aFb-vel is jelölni és így olvassuk: a az F relációban van b-vel (vagy F a-hoz b-t rendeli).

4. definíció. A

$$D_F \doteq \{x \in A \mid \exists\, y \in B,\ (x, y) \in F\} , \quad R_F \doteq \{y \in B \mid \exists\, x \in A,\ (x, y) \in F\}$$

halmazokat az F reláció (leképezés) ***értelmezési*** (ős-) ***tartomány***ának, illetve ***értékkészlet***ének (képtartományának) nevezzük.

Példa. Az előbbi F és G relációkra

$$D_F = \{1, 2, 3\} \neq A , \quad R_F = \{x, y, z\} = B ,$$
$$D_G = \{x, y, z\} = A , \quad R_G = \{1, 3\} \neq A .$$

4. megjegyzés. $D_F = A$, úgy A-nak B-be; ha $R_F = B$, úgy A-ból B-re; ha $D_F = A$ és $R_F = B$, úgy A-nak B-re való leképezéséről beszélünk.

Példa. Az előbbi F leképezés A-ból B-re való leképezés, míg a G leképezés B-nek A-ba való leképezése.

5. definíció. Ha $F \subset A \times B$ adott reláció és $C \subset A$, akkor az

$$F(C) \doteq \{y \in B \mid \exists\, x \in C,\ (x,y) \in F\}$$

halmazt a C ***halmaz*** F***-re vonatkozó képé***nek nevezzük.

Az egyelemű $\{x\} \subset A$ $(x \in A)$ halmaz képét jelölje $F(x)$, azaz ha $(x,y) \in F$, akkor az $y = F(x)$ jelölés is lehetséges. Ekkor $F(x)$-et F x-beli értékének is nevezzük. ($F(x)$ nem feltétlenül egyértelműen meghatározott!)

Példa. Ha A és B és F az előbbi, továbbá $C = \{1,3\} \subset A$, akkor $F(C) = \{x,y,z\} = B = R_F$ a C F-re vonatkozó képe. $(1,x) \in F$, így $x = F(1)$ az F 1-beli képe, de $(1,y) \in F$, így $y = F(1)$ is az F 1-beli képe, azaz $F(1)$ nem egyértelműen meghatározott.

6. definíció. Ha $F \subset A \times B$ adott reláció (leképezés), $C \subset D_F$, akkor

$$F|_C \doteq \{(x,y) \in F \mid x \in C\}$$

az F reláció (leképezés) C***-re való leszűkítése.***

Példa. Ha A, B, C és F az előbbi, úgy $C \subset D_F$ és

$$F|_C = \{(1,x),(1,y),(3,y),(3,z)\}$$

az F C-re való leszűkítése.

7. definíció. Az $F \subset A \times B$ reláció (leképezés) ***inverzé***n az

$$F^{-1} \doteq \{(y,x) \in B \times A \mid (x,y) \in F\}$$

halmazt értjük.

Példa. Ha A, B, F az előbbi, úgy

$$F^{-1} = \{(x,1),(y,1),(y,3),(z,2),(z,3)\} \subset B \times A\ .$$

5. megjegyzés. E definícióból könnyen következik, hogy

$$D_{F^{-1}} = R_F, \qquad R_{F^{-1}} = D_F, \qquad (F^{-1})^{-1} = F, \qquad F^{-1}(B) = D_F.$$

Példa. Az előbbi példák alapján

$$D_{F^{-1}} = \{x,y,z\} = R_F\ , \quad R_{F^{-1}} = \{1,2,3\} = D_F\ ,$$
$$(F^{-1})^{-1} = \{(1,x),(1,y),(2,z),(3,y),(3,z)\} = F\ ,$$
$$F^{-1}(B) = \{1,2,3\} = D_F\ .$$

8. definíció. Legyenek $A,\ B,\ C$ adott halmazok, $F \subset A \times B$ és $G \subset B \times C$ adott relációk. F ***és*** G ***kompozícióján*** (összetételén) a

$$G \circ F \doteq \{(x,z) \mid \exists\, y \in B,\ (x,y) \in F,\ (y,z) \in G\}$$

relációt értjük. (Nyilván $G \circ F$ A és C közötti reláció.)

Példa. Ha $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{y, z\}$, $C = \{\alpha, \beta\}$ továbbá $F = \{(1, y), (1, z), (3, y)\} \subset A \times B$ és $G = \{(y, \alpha), (z, \alpha), (z, \beta)\} \subset B \times C$ relációk, akkor a $G \circ F = \{(1, \alpha), (1, \beta), (3, \alpha)\} \subset A \times C$ reláció az F és G kompozíciója.

2. tétel. *A 8. definíció jelölései mellett* $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$. *Ha* $H \subset C \times D$ *egy harmadik reláció (*D *tetszőleges halmaz), akkor*

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F\ .$$

Példa. Az előbbi példa halmazait és relációit tekintve
$(G \circ F)^{-1} = \{(\alpha, 1), (\alpha, 3), (\beta, 1)\}$, továbbá
$F^{-1} = \{(y, 1), (y, 3), (z, 1)\}$ és $G^{-1} = \{(\alpha, y), (\alpha, z), (\beta, z)\}$
miatt $F^{-1} \circ G^{-1} = \{(\alpha, 1), (\alpha, 3), (\beta, 1)\}$.
Így $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$.

A rendezési reláció a számok közötti „kisebb vagy egyenlő" viszony elvont megfogalmazása.

9. definíció. Legyen adott az A halmaz. Az $R \subset A \times A$ relációt ***rendezési relációnak***, vagy rendezésnek nevezzük az A halmazon, ha $\forall\ x, y, z \in A$ esetén

a) xRx (vagyis $(x, x) \in R$) (reflexív),
b) ha xRy és yRx, akkor $x = y$ (antiszimmetrikus),
c) ha xRy és yRz, akkor xRz (tranzitív),
d) xRy vagy yRx teljesül (lineáris vagy teljes).

Ekkor az (A, R) párt, vagy az A halmazt ***rendezett halmaz***nak nevezzük. Ha csak a), b) és c) teljesül, akkor R-t ***parciális rendezés***nek nevezzük. R-t általában $\leq$-vel jelöljük és pl. az $x \leq y$-t úgy olvassuk, hogy x kisebb vagy egyenlő, mint y.

Ha $x \leq y$, de $x \neq y$, akkor ezt úgy jelöljük, hogy $x < y$ (x kisebb, mint y). A $<$ reláció nem rendezés. Szokásos még $x \leq y$, illetve $x < y$ helyett az $y \geq x$, $y > x$ jelölést is használni.

Példa. Ha $A = 1, 2, 3$, akkor

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}\ .$$

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\} \subset A \times A$ parciális rendezés A-n.
$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\} \subset A \times A$ esetén (A, R_2), illetve A rendezett halmaz.

10. definíció. Legyen A egy rendezett halmaz. Egy $B \subset A$ részhalmazt ***felülről korlátos***nak nevezünk, ha $\exists\ a \in A$, hogy $\forall\ b \in B$ esetén $b \leq a$. Az

a-t a B halmaz ***felső korlát***jának nevezzük. Hasonlóan definiálható az ***alulról korlátos*** halmaz, illetve az ***alsó korlát*** is. Egy halmazt ***korlátos***nak nevezünk, ha alulról és felülről is korlátos.

Egy $\alpha \in A$ elemet a B halmaz ***pontos felső korlát***jának nevezünk, ha

- α felső korlátja B-nek
- a B halmaz bármely β felső korlátjára $\alpha \leq \beta$ teljesül.

Ha létezik pontos felső korlátja B-nek, úgy azt $\sup B$-vel jelöljük (supremum B). Hasonlóan értelmezhető a ***pontos alsó korlát*** is.

Példa. Az előbbi példa szerint A R_2-vel rendezett halmaz.
A $B = \{1, 2\} \subset A$ halmaznak 2 és 3 felső, míg 1 alsó korlátja. B pontos felső korlátja 2, pontos alsó korlátja 1.

11. definíció. Egy olyan rendezett halmazt, amelyben minden nem üres felülről korlátos részhalmaznak van pontos felső korlátja, ***teljes***nek nevezzük.

Példa. Az előbbi A halmazra, az R_2 rendezéssel, nyilván teljesül, hogy minden nem üres B részhalmazának van pontos felső korlátja, így A teljes.

A függvény fogalmának kialakítását az motiválja, hogy „többértékű” függvények ne jöhessenek szóba.

3. Függvények

1. definíció. Legyenek A és B adott halmazok. Az $f \subset A \times B$ relációt ***függvény***nek nevezzük, ha $(x, y) \in f$ és $(x, z) \in f$ esetén $y = z$ teljesül (azaz $\forall\, x \in A$ esetén legfeljebb egy olyan $y \in B$ létezik, amelyre $(x, y) \in f$).

Példa. Ha $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z\}$, akkor
1. az $f = \{(1, x), (1, y), (2, z), (3, y), (3, z)\} \subset A \times B$ reláció nem függvény, mert $(1, x) \in f$ és $(1, y) \in f$ és $x \neq y$,
2. az $f = \{(1, x), (2, z), (3, y)\} \subset A \times B$ reláció függvény.

1. megjegyzés. Minden függvény reláció, így az értelmezési tartomány, értékkészlet, kép, leszűkítés definíciója megegyezik a 4., 5. és 6. definíciókkal, és a jelölések is változatlanok.

2. megjegyzés. A függvény definíciója így is megfogalmazható: $f \subset A \times B$ reláció függvény, ha $\forall\, x \in D_f$ esetén pontosan egy $y \in B$ létezik, hogy $(x, y) \in f$.

3. megjegyzés. Ha f jelöli a függvényt, akkor $(x, y) \in f$ esetén $y = f(x)$ jelöli az x ***elem képét***, vagy az f ***függvény*** x ***helyen felvett értékét*** (helyettesítési értékét), $f : A \to B$ azt, hogy f A-t B-be képezi, míg $\{(x, f(x))\}$ az f ***gráf***ját jelenti.

4. megjegyzés. A függvény megadásánál szokásosak az alábbi jelölések is:

$$y = f(x),\ x \in A\ (x \in D_f)\ ; \qquad x \mapsto f(x)\ x \in A\ (x \in D_f)\ ;$$

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}\ .$$

2. definíció. Az $f \subset A \times B$ függvény ***invertálható***, ha az f^{-1} reláció is függvény. Ekkor f^{-1}-et az f ***inverz függvény***ének (inverzének) nevezzük (az invertálható függvényt kölcsönösen egyértelmű, vagy egy-egyértelmű leképezésnek is nevezzük).

Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{x, y, z\}$, akkor
1. az $f = \{(1, x), (2, z), (3, y)\} \subset A \times B$ függvény esetén
   $f^{-1} = \{(x, 1), (z, 2), (y, 3)\} \subset B \times A$ is függvény, így f invertálható.
2. a $g = \{(1, x), (2, z), (3, x)\} \subset A \times B$ függvény esetén
   $g^{-1} = \{(x, 1), (z, 2), (x, 3)\} \subset B \times A$ nem függvény, mert $(x, 1) \in g^{-1}$ és $(x, 3) \in g^{-1}$, de $1 \neq 3$, így g nem invertálható.

1. tétel. *Az $f : A \to B$ függvény akkor és csak akkor invertálható, ha minden $x, y \in A$, $x \neq y$ esetén $f(x) \neq f(y)$ (vagyis $\forall\ x, y \in A$ esetén $f(x) = f(y) \implies x = y$).*

Bizonyítás. Gyakorlaton (feladat). □

Az összetett függvény értelmezéséhez lényeges a következő:

2. tétel. *Legyenek $f \subset A \times B$ és $g \subset B \times C$ függvények. Ekkor $g \circ f$ is függvény, és $\forall\ x \in D_{g\circ f}$-re $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Példa. Legyenek adottak az $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{x, y\},\ C = \{u, v\}$ halmazok és az $f = \{(1, x), (2, x), (3, y)\} \subset A \times B,\ g = \{(x, u), (y, u)\} \subset B \times C$ függvények. Ekkor $g \circ f = \{(1, u), (2, u), (3, u)\}$ függvény, és például $(g \circ f)(1) = u,\ g(f(1)) = g(x) = u \implies (g \circ f)(1) = g(f(1))$.

3. definíció. Legyen adott az f és g függvény. A $g \circ f$ függvényt ***összetett függvény***nek, az f-et belső, a g-t külső függvénynek nevezzük.

5. megjegyzés. A definíció adja, hogy

$$D_{g\circ f} \subset D_f; \qquad D_{g\circ f} = D_f \iff \text{ha } R_f \subset D_g;$$
$$g \circ f = \emptyset \iff \text{ha } R_f \cap D_g = \emptyset\ .$$

Példa. A 2. tételt követő példában:

$$D_{g\circ f} = \{1,2,3\} = D_f \quad \Longrightarrow \quad D_{g\circ f} \subset D_f \text{ igaz.}$$
$$R_f = \{x,y\} \subset D_g = \{x,y\}) \quad \Longrightarrow \quad D_{g\circ f} = D_f \ .$$

4. definíció. Az A halmaz ***identikus függvény***én az

$$\mathrm{id}_A : A \to A \ , \quad \mathrm{id}_A(x) = x$$

függvényt értjük.

Két halmazról el tudjuk dönteni azt, hogy elemeik száma egyenlő-e, ha a két halmaz elemeit „párba állítjuk”. Ez a gondolat motiválta a halmazok ekvivalenciájának fogalmát.

5. definíció. Az M és N ***halmazok ekvivalensek***, ha $\exists\ f : M \to N$ (M-et N-re képező) invertálható függvény.

6. definíció. Legyen A tetszőleges halmaz. Egy $f : A \times A \to A$ függvényt (***binér***) ***művelet***nek nevezünk A-ban.

II. fejezet
Számok

Bevezetés

Az iskolában megtanultuk a számolás szabályait, megismertük a számok „tulajdonságait”. Az alábbi axiómarendszer nem más, mint ezen tulajdonságok közül a legfontosabbak rögzítése. A testaxiómák az összeadás és a szorzás szabályait, a rendezési axiómák a $\leq$ reláció tulajdonságait rögzítik, a teljesség pedig valami olyasmit fejez ki, hogy a számegyenes „nem lyukas”.

Az axiómák jelentősége azonban messze túlnő a szabályok egy összességének rögzítésén. Az alábbi axiómákkal ugyanis levezethető minden más szabály és tulajdonság. Sőt valójában az axiómákat teljesítő objektum az, amit valós számoknak nevezünk.

A fejezet további részében az axiómákkal levezetjük a valós számok néhány tulajdonságát. Az elmélet teljes felépítésére nem vállalkozunk, de az olvasó megnyugtatására leszögezzük, hogy az iskolában a tizedestörtekről és a számegyenesről kialakított kép megfelel az axiómákon nyugvó elméletnek.

1. A valós számok axiómarendszere

Az $\mathbb{R}$ halmazt a ***valós számok halmazá***nak nevezzük, ha teljesíti az alábbi axiómákat.

Testaxiómák
Értelmezve van $\mathbb{R}$-ben két művelet, az

$$f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x + y \doteq f_1(x, y) \text{ összeadás és az}$$
$$f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \cdot y \doteq f_2(x, y) \text{ szorzás,}$$

amelyek kielégítik a következő, úgynevezett testaxiómákat:

1) $x + y = y + x\ ,\ x \cdot y = y \cdot x \ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ (kommutativitás),
2) $(x + y) + z = x + (y + z),\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ (asszociativitás),
3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \ \ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ (disztributivitás),

4) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$, hogy $x + 0 = x \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$ ($\exists$ zérus, vagy nullelem),
5) $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén $\exists\, -x \in \mathbb{R}$, hogy $x + (-x) = 0$ ($\exists$ additív inverz),
6) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$, hogy $1 \neq 0$ és $1 \cdot x = x \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$ ($\exists$ egységelem),
7) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ esetén $\exists\, x^{-1} \in \mathbb{R}$, hogy $x \cdot x^{-1} = 1$ ($\exists$ multiplikatív inverz).

Rendezési axiómák
Értelmezve van az $\mathbb{R}$ testben egy $\leq \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ rendezési reláció (az I.2.9. definíció szerinti négy tulajdonsággal), melyekre teljesül még, hogy

(i) ha $x, y \in \mathbb{R}$ és $x \leq y$, akkor $x + z \leq y + z \;\; \forall\, z \in \mathbb{R}$,
(ii) ha $x, y \in \mathbb{R}$, $0 \leq x$ és $0 \leq y$, akkor $0 \leq x \cdot y$

(az összeadás és a szorzás monotonitása). Ekkor $\mathbb{R}$-et rendezett testnek nevezzük.

Teljességi axióma
Az $\mathbb{R}$ rendezett test (mint rendezett halmaz) teljes, azaz $\mathbb{R}$ bármely nemüres, felülről korlátos részhalmazának létezik pontos felső korlátja.

Összefoglalva
Az $\mathbb{R}$ halmazt a valós számok halmazának nevezzük, ha $\mathbb{R}$ teljes rendezett test.

Megjegyzés. Megmutatható, hogy létezik ilyen halmaz, és bizonyos értelemben egyértelmű. A lehetséges modellekről később még röviden beszélünk.

2. Kiegészítések a valós számfogalomhoz

a) A testaxiómák fontosabb következményei

A továbbiakban a szorzást jelentő pontot nem írjuk ki (ez általában nem zavaró), továbbá az összeadás és a szorzás asszociativitása lehetővé teszi, hogy $(x+y)+z$ és $x+(y+z)$ helyett $x+y+z$-t, míg $(xy)z$ és $x(yz)$ helyett xyz-t írjunk.

1. tétel. *$\mathbb{R}$-ben (de általában minden testben) a **zérus** és az **egységelem egyértelmű**en meghatározott.*

Bizonyítás. Ha pl. $\mathbb{R}$-ben 0 és $0'$ is zéruselem, akkor az 1. és 4. testaxióma miatt

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

tehát $0 = 0'$. Hasonlóan látható be 1 egyértelműsége. $\square$

2. tétel. *Ha $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén $x + y = x + z$, akkor $y = z$, ha még $x \neq 0$, akkor $xy = xz \implies y = z$ (**egyszerűsítési szabály**).*

Bizonyítás. A testaxiómák és az $x + y = x + z$ feltétel adja, hogy

$$y = 0 + y = (-x + x) + y = -x + (x + y) = -x + (x + z) = \\ = (-x + x) + z = 0 + z = z \ ,$$

illetve

$$y = 1 \cdot y = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot (x \cdot z) = (x^{-1} \cdot x) \cdot z = 1 \cdot z = z \ ,$$

tehát $y = z$ mindkét esetben. □

3. tétel. *Bármely $\mathbb{R}$-beli elemnek **pontosan egy additív inverze**, és bármely $\mathbb{R}$-beli, 0-tól különböző elemnek **pontosan egy multiplikatív inverze van**.*

Bizonyítás. Ha x-nek y és z additív, vagy $x \neq 0$-ra multiplikatív inverze, úgy $x + y = 0 = x + z$, illetve $xy = 1 = xz$, és az előbbi tétel (az egyszerűsítési szabály) adja, hogy $y = z$ mindkét esetben, tehát a tétel állítása igaz. □

4. tétel. *Legyen $x, y \in \mathbb{R}$, akkor pontosan egy $z_1 \in \mathbb{R}$ létezik, hogy $y + z_1 = x$; ha még $y \neq 0$, akkor pontosan egy $z_2 \in \mathbb{R}$ létezik, hogy $yz_2 = x$ (**kivonási**, illetve **osztási feladat**).*

Bizonyítás. $z_1 = x - y$, illetve $z_2 = xy^{-1}$ esetén nyilvánvaló, hogy $y + z_1 = x$, $yz_2 = x$. Az egyértelműség az $y + z_1 = x = y + z_1'$, illetve $yz_2 = x = yz_2'$ egyenlőségekből a 2. tétel segítségével adódik, hiszen $z_1 = z_1'$ és $z_2 = z_2'$ igaz. □

1. definíció. A 4. tétel szerint egyértelműen létező z_1 illetve z_2 valós számokat (melyekre tehát $y + z_1 = x$, illetve $y \neq 0$ esetén $yz_2 = x$ teljesül) az x ***és*** y valós számok ***különbségé***nek, illetve ***hányadosá***nak nevezzük és $x - y$-nal, illetve $\dfrac{x}{y}$-nal jelöljük. $\dfrac{x}{0}$-t nem értelmezzük.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy $x - y = x + (-y)$, illetve $\dfrac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$, hiszen

$$y + (x + (-y)) = y + ((-y) + x) = (y + (-y)) + x = 0 + x = x \ ,$$

illetve

$$y \cdot (x \cdot y^{-1}) = y \cdot (y^{-1} \cdot x) = (y \cdot y^{-1}) \cdot x = 1 \cdot x = x$$

teljesül. Speciálisan $\dfrac{1}{y} = y^{-1}$.

5. tétel. *Bármely* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $-(-x) = x$, $\forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x \ , \quad \textit{azaz} \quad \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \ .$$

Bizonyítás. Az 5. testaxiómában x helyére $-x$-et illetve a 7. testaxiómában x helyére x^{-1}-et írva kapjuk a megfelelő állításokat. $\square$

6. tétel. *Legyen* $x, y \in \mathbb{R}$. $x \cdot y = 0 \iff x = 0$ *vagy* $y = 0$.

b) Természetes, egész, racionális és irracionális számok (mint $\mathbb{R}$ részhalmazai)

1. definíció. Az $\mathbb{R}$ azon $\mathbb{N}$ részhalmazát, melyre

(i) $1 \in \mathbb{N}$,
(ii) ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $n + 1 \in \mathbb{N}$,
(iii) ha $M \subset \mathbb{N}$ olyan, hogy $1 \in M$ és $n \in M$-ből következik, hogy $n + 1 \in M$, akkor $M = \mathbb{N}$

teljesül, a ***természetes számok halmazá***nak nevezzük.

Az (i)-(ii)-(iii) tulajdonságokat a természetes számok ***Peano-féle axiómái***nak nevezzük. A (iii), úgynevezett indukciós axióma biztosítja a teljes indukciós bizonyítások létjogosultságát.

2. definíció. Egy $x \in \mathbb{R}$ számot ***egész szám***nak nevezünk, ha léteznek $n, m \in \mathbb{N}$, hogy $x = m - n$. A $\mathbb{Z} = \{m - n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ halmazt pedig az egész számok halmazának nevezzük.

1. megjegyzés. Könnyen belátható, hogy $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{n \mid -n \in \mathbb{N}\}$, ahol az $\{n \mid -n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^-$ halmazt a negatív egész számok halmazának nevezzük.

2. megjegyzés. $\forall\, x, y \in \mathbb{Z} \implies x + y, x - y, xy \in \mathbb{Z}$. Azaz az egész számok halmazából nem vezet ki az összeadás, a kivonás és a szorzás.

3. definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$, úgy

$$x^1 \doteq x, \qquad x^n \doteq x^{n-1}x \quad (n \in \mathbb{N},\ n \neq 1)$$

szerint definiáljuk x ***természetes kitevőjű hatványait***. Továbbá

$$x^0 \doteq 1 \ , \qquad x^{-n} \doteq \frac{1}{x^n} \quad (x \neq 0,\ n \in \mathbb{N})$$

szerint a ***0, illetve negatív egész kitevőjű hatványt***.

Több elem összeadásának, illetve szorzásának pontos definíciója, és ezek elegáns jelölése a következő.

4. definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \doteq a_1, \quad \text{ha } n = 1, \qquad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + a_n, \quad \text{ha } n > 1,$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \doteq a_1, \quad \text{ha } n = 1, \qquad \text{és} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cdot a_n, \quad \text{ha } n > 1.$$

3. megjegyzés. Az első n természetes szám szorzata $n! \doteq 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (az $n!$ jelőlést „n faktoriális"-nak olvassuk). 0! alatt 1-et értünk.
$\binom{n}{k} \doteq \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ a binomiális együttható ($n, k \in \mathbb{N}$). Az $\binom{n}{k}$ jelölést „n alatt a k"-nak olvassuk.
Belátható, hogy $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \cdots + \\ &\quad + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y \binom{n}{n} x^n = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad \text{(binomiális tétel).}\end{aligned}$$

5. definíció. Egy $x \in \mathbb{R}$ számot ***racionális***nak nevezünk, ha létezik $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, hogy $x = \dfrac{p}{q}$. Ellenkező esetben x-et irracionálisnak nevezzük. A

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R} \text{ és } \exists\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ \text{hogy } x = \frac{p}{q} \right\}$$

halmazt a ***racionális számok***, míg az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmazt az ***irracionális*** számok halmazának nevezzük.

4. megjegyzés.
- Adott x esetén p és q nem egyértelműen meghatározott.
- Ha $x, y \in \mathbb{Q}$, akkor $x + y, x - y, xy \in \mathbb{Q}$, és ha még $y \neq 0$, akkor $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ is teljesül. Azaz a racionális számok halmazából nem vezet ki a a négy alapművelet.
- $\mathbb{Q}$ rendezett test.
- Belátható, hogy $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Azaz van irracionális szám.

c) A rendezési axiómák fontosabb következményei

6. definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ha $0 < x$, akkor x-et ***pozitív***nak, ha $0 \leq x$, akkor ***nem negatív***nak, ha $x < 0$, akkor ***negatív***nak; ha $x \leq 0$, akkor ***nem pozitív***nak nevezzük.
Az $\{x \mid x > 0\}$, $\{x \mid x \geq 0\}$, $\{x \mid x < 0\}$ és $\{x \mid x \leq 0\}$ halmazokat pedig $\mathbb{R}$-beli pozitív, nem negatív, negatív, nem pozitív számok halmazának nevezzük.

7. tétel. *Ha $x, y, z, u, v \in \mathbb{R}$, akkor*

a) $x < y \implies x + z < y + z$;
b) $0 < x \implies -x < 0$; $x < 0 \implies 0 < -x$;
c) $0 < x \wedge 0 < y \implies 0 < xy$;
d) $0 \leq x^2$; $0 < 1$;
e) $0 < x \wedge y < 0 \implies xy < 0$; $x < 0 \wedge y < 0 \implies 0 < xy$;
f) $0 < xy \wedge 0 < x \implies 0 < y$; $0 < \dfrac{1}{x}$; $0 < x \implies 0 < \dfrac{1}{x}$;
g) $x \leq y \wedge z \leq u \implies x + z \leq y + u$;
$x < y \wedge z \leq u \implies x + z < y + u$;
$(0 \leq x \wedge 0 \leq y \implies 0 \leq x + y; \quad 0 < x \wedge 0 \leq y \implies 0 < x + y)$;
h) $x < y \wedge 0 < z \implies xz < yz; \quad x < y \wedge z < 0 \implies yz < xz$;
i) $0 < y < x \wedge 0 < z < v \implies yz < xv$;
j) $0 < x < y \wedge n \in \mathbb{N} \implies 0 < x^n < y^n$;
k) $0 < x < y \implies 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$;
l) $n \in \mathbb{N} \implies n \geq 1$;
m) $\forall\, k \in \mathbb{Z}$ *esetén* $\nexists\, l \in \mathbb{Z}$, *hogy* $k < l < k + 1$.

7. definíció. Az $x \in \mathbb{R}$ ***abszolút értékén*** az

$$|x| \doteq \begin{cases} x\ , & \text{ha } 0 \leq x, \\ -x\ , & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

nem negatív számot értjük.

8. tétel. *Ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor*

a) $|-x| = |x|$;
b) $|xy| = |x||y|$;
c) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$;
d) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
e) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Bizonyítás. a), b) és c) nyilvánvaló.

d) Az abszolút érték definíciója miatt

$$x \le |x|\ , \quad y \le |y|\ , \quad -x \le |x|\ , \quad -y \le |y|\ ,$$

így

$$x + y \le |x| + |y|\ , \quad -x - y \le |x| + |y|\ ,$$

amiből $|x + y| \le |x| + |y|$.

e) A d) állítás miatt

$$|x| = |x - y + y| \le |x - y| + |y|,$$
$$|y| = |y - x + x| \le |y - x| + |x| = |x - y| + |x|,$$

így

$$|x| - |y| \le |x - y|$$

és

$$|y| - |x| \le |x - y|,$$

ami adja az állítást. □

8. definíció. Ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor a $d(x, y) \doteq |x - y|$ számot az x ***és*** y ***távolságá***nak nevezzük.
Azaz a $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény távolság (metrika) $\mathbb{R}$-ben.

9. tétel. *Ha $x, y, z \in \mathbb{R}$, akkor*

1) $d(x, y) \ge 0\ , \qquad d(x, y) = 0 \iff x = y\ ;$
2) $d(x, y) = d(y, x)$ *(szimmetrikus);*
3) $d(x, y) \le d(x, z) + d(y, z)$ *(háromszög egyenlőtlenség).*

Bizonyítás. Az abszolútérték tulajdonságai alapján igen egyszerű. □

9. definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Az

$$]\,a, b\,[\ \doteq \{x \mid a < x < b\}\ ;$$
$$[\,a, b\,] \doteq \{x \mid a \le x \le b\};$$
$$]\,a, b\,] \doteq \{x \mid a < x \le b\};$$
$$[\,a, b\,[\ \doteq \{x \mid a \le x < b\}$$

halmazokat ***nyílt***, ***zárt***, ***félig nyílt*** (***zárt***) ***intervallumok***nak nevezzük $\mathbb{R}$-ben.

10. definíció. Az $a \in \mathbb{R}$ valós szám r (> 0) sugarú ***nyílt gömbkörnyezet***én a $K(a, r) \doteq \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, a) < r\}$ halmazt értjük.
Valójában $K(a, r)$ az a középpontú, $2r$ hosszúságú nyílt intervallum, azaz $K(a, r) =]\,a - r, a + r\,[$.

d) A teljességi axióma fontosabb következményei

10. tétel. *Az $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ (a természetes számok halmaza) felülről nem korlátos.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbb{N}$ felülről korlátos az $\mathbb{R}$ rendezett halmazban. Ekkor a teljességi axióma miatt $\exists\ \alpha = \sup \mathbb{N}$. Így $\alpha - 1$ $(< \alpha)$ nem felső korlátja $\mathbb{N}$-nek, azaz $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy $\alpha - 1 < n$, amiből $\alpha < n + 1$ következik. Ugyanakkor $n + 1 \in \mathbb{N}$ miatt ez azt jelenti, hogy α nem felső korlátja $\mathbb{N}$-nek, ami ellentmondás. $\square$

11. tétel. *Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik $l \in \mathbb{Z}$, hogy $l \leq x < l + 1$. l egyértelműen meghatározott.*

12. tétel (Archimedesi tulajdonság). *Bármely $x \in \mathbb{R}_+$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén létezik $n \in \mathbb{N}$, hogy $y < nx$.*

Bizonyítás. Az 10. tétel miatt $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy $\dfrac{y}{x} < n$ (hiszen $\dfrac{y}{x}$ sem lehet felső korlátja $\mathbb{N}$-nek), ami adja, hogy $y < nx$. $\square$

11. definíció. Legyen $I = \{[a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \mid i \in \mathbb{N}\}$ zárt intervallumok olyan rendszere, melyre $a_i \leq a_{i+1} \leq b_{i+1} \leq b_i\ \ \forall\, i \in \mathbb{N}$ (azaz $[a_{i+1}, b_{i+1}] \subset [a_i, b_i]$), akkor ezt egymásba skatulyázott zárt intervallum rendszernek nevezzük.

13. tétel (Cantor-féle metszettétel). *Legyen $I = \{[a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \mid i \in \mathbb{N}\}$ egymásba skatulyázott zárt intervallumok rendszere. Ekkor*

$$\bigcap I = \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset\ .$$

Bizonyítás. Az egymásba skatulyázottság adja, hogy $\forall\ i, j \in \mathbb{N}$-re $a_i \leq b_j$, így $\forall\ j \in \mathbb{N}$-re b_j az $A \doteq \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ halmaznak felső korlátja, melyre $\alpha = \sup A \leq b_j$ teljesül. Így α alsó korlátja a $B = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ halmaznak, ezért $\alpha \leq \inf B = \beta$.

Mivel $[\alpha, \beta] \subset [a_i, b_i]\ \forall\ i \in \mathbb{N}$-re, ezért $\bigcap I = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \supset [\alpha, \beta] \neq \emptyset$, ami adja az állítást. $\square$

Tételünk tehát azt állítja, hogy egymásba skatulyázott zárt intervallumok metszete nem üres.

Megjegyzés. Szokásos az is, hogy a Cantor-tételt választják teljességi axiómának. Ekkor a mi teljességi axiómánkat kell bizonyítani.

12. definíció. A $H \subset \mathbb{R}$ halmazt $\mathbb{R}$-ben mindenütt sűrűnek nevezzük, ha bármely $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ esetén létezik $h \in H$, melyre $x < h < y$ teljesül.

14. tétel. *A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza sűrű $\mathbb{R}$-ben. Azaz bármely két valós szám között van racionális szám.*

Megjegyzés. Belátható, hogy $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (az irracionális számok halmaza) is sűrű $\mathbb{R}$-ben.

15. tétel. *Bármely x nem negatív valós szám és $n \in \mathbb{N}$ esetén pontosan egy olyan y nem negatív valós szám létezik, melyre $y^n = x$.*

13. definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$ nem negatív és $n \in \mathbb{N}$. Azt (az előbbi tétel alapján egyértelműen létező) $y \in \mathbb{R}$ ***nem negatív számot, melyre*** $y^n = x$ ***teljesül az*** x ***szám*** n***-edik gyökének nevezzük***, és rá az $\sqrt[n]{x}$, vagy $x^{\frac{1}{n}}$ jelölést használjuk ($\sqrt[2]{x}$ helyett $\sqrt{x}$-et írunk).

14. definíció. Ha n páratlan természetes szám és $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$, akkor $\sqrt[n]{x} \doteq x^{\frac{1}{n}} \doteq -\sqrt[n]{-x}$. (Erre teljesül, hogy $(\sqrt[n]{x})^n = x$.)

15. definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{Q}$ és $r = \dfrac{m}{n}$ (ahol $m \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{N}$). Ekkor x r-edik hatványa: $x^r \doteq x^{\frac{m}{n}} \doteq \sqrt[n]{x^m}$.

Megjegyzések.
1. A racionális kitevőjű hatvány értéke független az r előállításától.
2. A hatványozás azonosságai racionális kitevőjű hatványokra is igazolhatók.

e) A bővített valós számok halmaza

16. definíció. Ha $S \subset \mathbb{R}$ felülről nem korlátos, akkor legyen $\sup S = +\infty$.
Ha $S \subset \mathbb{R}$ alulról nem korlátos, akkor legyen $\inf S = -\infty$.
Az $\mathbb{R}_b = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ halmazt a bővített valós számok halmazának nevezzük.

Megjegyzések.
1. Meg akarjuk őrizni $\mathbb{R}_b$-ben $\mathbb{R}$ eredeti rendezését, ezért legyen $-\infty < x < +\infty \;\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén.
2. Ekkor $+\infty$ felső korlátja $\mathbb{R}_b$ bármely részhalmazának, és minden nem üres részhalmaznak van $\mathbb{R}_b$-ben pontos felső korlátja. Ilyen megjegyzés fűzhető az alsó korlátokhoz is.
3. $\mathbb{R}_b$ nem test.

4. Megállapodunk az alábbiakban:

$$\begin{array}{ll}
\forall\ x \in \mathbb{R} \text{ esetén} & x + (+\infty) = +\infty\ ;\ x - (+\infty) = -\infty\ ; \\
 & \dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0\ ; \\
\forall\ 0 < x \in \mathbb{R} \text{ esetén} & x \cdot (+\infty) = +\infty\ ;\ x \cdot (-\infty) = -\infty\ ; \\
\forall\ y \in \mathbb{R},\ y < 0 \text{ esetén} & y \cdot (+\infty) = -\infty\ ;\ y \cdot (-\infty) = +\infty\ ;
\end{array}$$

továbbá

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty\ ;\ (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty\ ;\ (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty\ .$$

Nem értelmezzük ugyanakkor a következőket:

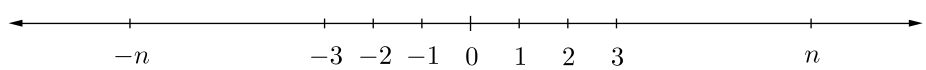
$$0 \cdot (+\infty)\ ;\ 0 \cdot (-\infty)\ ;\ (+\infty) - (+\infty)\ ;\ (-\infty) - (-\infty)\ .$$

f) A valós számok egy modellje – a számegyenes

Tekintsünk a síkban egy egyenest és rajta a 0 pontot, majd a 0 által meghatározott egyik félegyenesen az 1 pontot.

A 0-ból 1-be vezető szakaszt 1-ből indulva mérjük fel ebben az irányban, majd a kapott pontból folytassuk az eljárást. A $\overline{01}$ szakasz n-szeri felvétele után kapott ponthoz rendeljük az $n \in \mathbb{N}$ számot $\forall\ n \in \mathbb{N}$ esetén:

Így a természetes számokat az egyenes bizonyos pontjaiként ábrázoljuk. Az eljárást 0-ból ellenkező irányban elvégezve elhelyezzük (ábrázoljuk) a $-1, -2, \ldots, -n, \ldots$ $(n \in \mathbb{N})$ negatív egészeket is.



2.1. ábra. A természetes számok elhelyezése a számegyenesen

Ha $m \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor egyértelműen megadható egy x pont az egyenesen, hogy a 0-ból x-be vezető szakaszt n-szer felmérve éppen az m pontot kapjuk (egyszerűsítve: $\exists\ x,\ nx = m$). Az így nyert (szerkesztett) x ponthoz az $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ számot rendeljük.

Ezzel még nem rendeltünk valós számot az egyenes minden pontjához. Ha például a $\overline{01}$ szakaszt egy négyzet oldalának tekintjük és annak átlóját felmérjük 0-ból valamelyik irányban, a kapott pontban nincs racionális szám (ez olyan c szám, melyre $c^2 = 2$, azaz $c = \sqrt{2}$, vagy $c = -\sqrt{2}$, melyek nem racionálisak).

Az egyenes összes még megmaradó pontjához rendelt számok az irracionális számok. Azt, hogy ez az egyenes, mint számegyenes nem „lyukas" a teljességi axióma, vagy a Cantor-féle metszettétel biztosítja.

Megadhatóak a műveletek geometriai jelentései, vizsgálhatók tulajdonságaik, bevezethető a rendezés és bizonyíthatók annak tulajdonságai. Szemléletes az intervallum, abszolút érték, távolság fogalma.

Bebizonyítható, hogy $\mathbb{R}$ és az egyenes pontjai között kölcsönösen egyértelmű a megfeleltetés és az ezt biztosító bijekció lényegében egyértelmű.

g) Nevezetes egyenlőtlenségek

16. tétel (Bernoulli-egyenlőtlenség). *Ha $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ és $x \geq -1$, akkor*

$$(1+x)^n \geq 1+nx \ .$$

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $n=1$ vagy $x=0$.

Bizonyítás. Teljes indukcióval.
$n=1$-re az állítás nyilván igaz. Ha n-re igaz, akkor $1+x \geq 0$ miatt

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x \ ,$$

így az állítás minden természetes számra igaz. □

17. definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$; $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$A_n \doteq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \doteq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \ ;$$

Továbbá $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ esetén

$$G_n \doteq \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n} \doteq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \ .$$

Az A_n és G_n számokat az $x_1, \ldots, x_n$ számok ***számtani*** (aritmetikai), illetve ***mértani*** (geometriai) ***közep***ének nevezzük.

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség az alábbi.

17. tétel (Cauchy). *Ha $n \in \mathbb{N}$ és $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ akkor*

$$G_n \leq A_n \ ,$$

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

18. tétel (Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség).
Legyenek $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$*, ekkor*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) .$$

19. tétel (Minkowski-egyenlőtlenség).
Legyenek $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$*, ekkor*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} .$$

Bizonyítás. A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség alapján. □

3. (Szám)halmazok számossága

1. definíció. Az A ***és*** B ***halmazok egyenlő számosságúak***, ha ekvivalensek, azaz $\exists\ f : A \to B$ invertálható függvény, hogy $B = f(A)$ (tehát $\exists\ f : A \to B$ bijekció). Az A ***halmaz számossága nagyobb, mint a*** B ***halmaz számossága***, ha A és B nem egyenlő számosságú és $\exists\ C \subset A$, hogy C és B számossága megegyezik.

2. definíció. Az A ***halmaz véges*** (számosságú), ha $A = \emptyset$ vagy $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy A ekvivalens az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazzal. Az A ***halmaz végtelen*** (számosságú), ha nem véges. Az A ***halmaz megszámlálhatóan végtelen*** (számosságú), ha ekvivalens a természetes számok halmazával. Az A ***halmaz megszámlálható***, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

Megjegyzések.

1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ megszámlálhatóan végtelen, mert az
$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f((m, n)) = 2^{m-1}(2n - 1)$$
függvény bijekció.
2. Ha $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ olyan halmazrendszer, hogy Γ nem üres, megszámlálható, $\forall\ A_\gamma$ megszámlálható, akkor az $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ is megszámlálható.

1. tétel. *A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen.*

Bizonyítás. Ha $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re $A_n \doteq \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}\}$, úgy $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Q}$. Másrészt $\mathbb{Z}$, és így A_n is megszámlálhatóan végtelen, és ekkor (az előbbi megjegyzés 2. része miatt) $\mathbb{Q}$ is az. □

2. tétel. *A valós számok számossága nagyobb, mint* $\mathbb{N}$ *számossága.*

Bizonyítás. Feladat. □

3. definíció. A valós számok halmazát és a vele ekvivalens halmazokat kontinuum számosságú halmazoknak nevezzük.

4. $\mathbb{R}$ topológiája

1. definíció. Legyen adott az $E \subset \mathbb{R}$ halmaz. Azt mondjuk, hogy

- $x \in E$ ***belső pontja*** E-nek, ha $\exists\ K(x,r)$, hogy $K(x,r) \subset E$;
- $x \in \mathbb{R}$ ***külső pontja*** E-nek, ha belső pontja E komplementerének, CE-nek
  (azaz $\exists\ K(x,r),\ K(x,r) \cap E = \emptyset$);
- $x \in \mathbb{R}$ ***határpontja*** E-nek, ha nem belső és nem külső pontja (azaz $\forall\ K(x,r)$-re $K(x,r) \cap E \neq \emptyset\ \wedge\ K(x,r) \cap CE \neq \emptyset$).

E belső pontjainak halmazát E ***belsejé***nek, a határpontjainak halmazát E ***határá***nak nevezzük. E belsejét E° jelöli.

Példa. Legyen $E =]0,1[\subset \mathbb{R}$.
$x = \dfrac{1}{2}$ belső pontja E-nek, mert $K(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) =]0,1[\subset E$.
$x = 5$ külső pontja E-nek, mert $K(5,1) =]4,6[\subset CE$ miatt belső pontja CE-nek.
$x = 1$ határpontja E-nek, mert $\forall\ K(1,r) \not\subset E$ miatt nem belső pontja és $\forall\ K(1,r) \not\subset CE$ miatt nem külső pontja E-nek.

2. definíció. Az $E \subset \mathbb{R}$ halmazt ***nyílt***nak nevezzük, ha minden pontja belső pont; ***zárt***nak nevezzük, ha CE nyílt.

Példa.

1. $E =]0,1[\subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, mert $\forall\ x \in]0,1[$ esetén $K(x,r) \subset]0,1[$, ha $r = \inf\{x, 1-x\}$, azaz E minden pontja belső pont.
2. $E = [0,+\infty[\subset \mathbb{R}$ zárt halmaz, mert $CE =]-\infty,0[$ nyílt halmaz, hiszen $\forall\ x \in CE$ esetén $K(x,|x|) \subset CE$, azaz CE minden pontja belső pont.

1. tétel. $\mathbb{R}$*-ben igazak a következők:*

1) $\mathbb{R}$ *és* $\emptyset$ *nyílt halmazok,*
2) *tetszőlegesen sok nyílt halmaz egyesítése nyílt,*
3) *véges sok nyílt halmaz metszete nyílt,*

illetve

4) *$\mathbb{R}$ és $\emptyset$ zárt halmazok,*
5) *tetszőlegesen sok zárt halmaz metszete zárt,*
6) *véges sok zárt halmaz egyesítése zárt.*

Bizonyítás.
– 1) és 4) a definíció alapján nyilvánvaló.
– 2) igaz, mert E_γ $(\gamma \in \Gamma)$ nyílt $\implies$ bármely $x \in \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ -ra létezik γ_0, melyre $x \in E_{\gamma_0} \implies \exists\ K(x,r) \subset E_{\gamma_0} \implies K(x,r) \subset \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma \implies \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ nyílt.
– 3) is igaz, mert ha E_i $(i = 1,\dots,n)$ nyílt, akkor $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i \implies x \in E_i$ $(i = 1,\dots,n) \implies \exists\ K(x,r_i) \subset E_i$ $(i = 1,\dots,n) \implies 0 < r < r_i$ $(i = 1,\dots,n)$-re $K(x,r) \subset E_i$ $(i = 1,\dots,n) \implies K(x,r) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i \implies x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$ belső pont $\implies \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$ nyílt.
– 5) és 6) a

$$C\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} CE_\gamma \quad \text{és} \quad C\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} CE_i$$

de-Morgan-azonosságokból jön a zártság definíciója, illetve 2) és 3) teljesülése miatt. □

3. definíció. Legyen adott az $E \subset \mathbb{R}$ halmaz. Az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontot az E halmaz ***torlódási pont***jának nevezzük, ha bármely $r > 0$ esetén a $K(x_0, r)$ környezet tartalmaz x_0-tól különböző E-beli pontot, azaz $(K(x_0,r)\setminus\{x_0\}) \cap E \neq \emptyset$.
$x_0 \in E$ ***izolált pont***ja E-nek, ha nem torlódási pontja, azaz létezik $r > 0$, hogy $(K(x_0,r)\setminus\{x_0\}) \cap E = \emptyset$.
E torlódási pontjainak halmazát E'-vel jelöljük.

Példa.
1. Az $E = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ halmaznak $0 \in \mathbb{R}$ $(0 \notin E)$ torlódási pontja, mert bármely $K(0,r)$ környezetben van eleme E-nek, hiszen $\forall\ r \in \mathbb{R}_+$-ra – mert $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos – $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy $n > \frac{1}{r}$, azaz $0 < \frac{1}{n} < r$.
2. Az $E = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ halmaz minden pontja izolált pont, mert $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re $(K(n,1) \setminus \{n\}) \cap E = \emptyset$.

2. tétel. *Az $E \subset \mathbb{R}$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha $E' \subset E$ (azaz tartalmazza minden torlódási pontját).*

Bizonyítás.

a) E zárt $\Longrightarrow CE$ nyílt $\Longrightarrow \forall\, x \in CE \quad \exists\, K(x,r) \subset CE \Longrightarrow \forall\, x \in CE$-re $x \notin E' \implies E' \subset E$.

b) Legyen $E' \subset E$. $x \notin E \implies x \notin E' \implies \exists\, K(x,r)$, melyre $(K(x,r)\backslash\{x\}) \cap E = \emptyset$. Másrészt $x \notin E$ miatt $\{x\} \cap E = \emptyset$. Tehát $x \notin E \implies \exists\, K(x,r) \subset CE$. Azaz CE nyílt, így E zárt. $\square$

Megjegyzés. $\mathbb{R}_b$-ben a $+\infty$ és $-\infty$ környezetén az $(r,+\infty)$ és $(-\infty,r)$ $(r \in \mathbb{R})$ intervallumokat értjük. Így definiálható az is, hogy a $+\infty$ és $-\infty$ mikor torlódási pont.

3. tétel (Bolzano-Weierstrass). *Bármely $S \subset \mathbb{R}$ korlátos, végtelen halmaznak létezik torlódási pontja.*

Bizonyítás.

– S korlátos $\Longrightarrow \exists\, [a,b] \subset \mathbb{R},\ S \subset [a,b]$,

– Definiáljuk az I_n $(n \in \mathbb{N})$ zárt intervallumok egymásba skatulyázott rendszerét a következő módon. Legyen

$$I_1 \doteq [a_1,b_1] \doteq \begin{cases} \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right] \ , & \text{ha } \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right] \cap S \quad \text{végtelen halmaz,} \\ \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right] \ , & \text{ha } \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right] \cap S \quad \text{végtelen halmaz.} \end{cases}$$

Ha $I_n = [a_n,b_n]$ halmaz adott, akkor legyen

$$I_{n+1} \doteq [a_{n+1},b_{n+1}] \doteq$$
$$\doteq \begin{cases} \left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right], & \text{ha } \left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right] \cap S \quad \text{végtelen,} \\ \left[\dfrac{a_n+b_n}{2}, b_n\right], & \text{ha } \left[\dfrac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] \cap S \quad \text{végtelen.} \end{cases}$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$-re $I_n \cap S$ végtelen, és $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

– A Cantor-tétel miatt $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = [\alpha,\beta]$, továbbá

$$0 \le \beta - \alpha \le b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ami az archimedesi tulajdonság miatt csak $\alpha = \beta = x_0$ esetén lehetséges, továbbá $x_0 \in I_n$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$.

– $\forall\ r > 0$ esetén (az archimedesi tulajdonság miatt)

$$\exists\ n \in \mathbb{N},\ \frac{b-a}{r} < n \implies \exists\ n \in \mathbb{N},\ \frac{b-a}{n} < r \implies$$
$$\implies b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n} < r \implies$$

$\implies I_n \subset K(x_0, r) \implies$ (I_n konstrukciója miatt) $\forall\ K(x_0, r)$ végtelen sok S-beli elemet tartalmaz $\implies$ x_0 torlódási pontja S-nek. □

4. definíció. Nyílt halmazok egy o rendszere az $S \subset \mathbb{R}$ halmaznak egy ***nyílt lefedése***, ha $S \subset \bigcup o$.

Példa. Az $\mathbb{N}$ halmaznak a $\{K(n,1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmazrendszer egy nyílt lefedése, hiszen $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re $n \in K(n,1)$, és így $n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} K(i,1)$, továbbá $K(i,1)$ nyílt halmaz.

5. definíció. A $K \subset \mathbb{R}$ ***halmazt kompakt***nak nevezzük, ha minden nyílt lefedéséből kiválasztható véges sok halmaz, mely lefedi K-t.

Példa.
1. $\mathbb{N}$ nem kompakt, mert $\forall\ K(n,1)$ elhagyásával az $n \in \mathbb{N}$-t a maradék halmazok nem fedik le, így létezik olyan nyílt lefedése $\mathbb{N}$-nek, melyből nem választható ki véges lefedés.
2. $K = \{1,2,3,4,5\} \subset \mathbb{R}$ kompakt, mert $\forall\ o$ nyílt lefedőrendszer esetén – $K \subset o$ miatt – az $1,2,3,4,5$ elemekhez léteznek o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 nyílt halmazok, hogy $i \in o_i,\ i = 1,2,3,4,5$ és így $K \subset \bigcup_{i=1}^{5} o_i$, azaz $\forall\ o$ lefedésből kiválasztható véges lefedés.

4. tétel (Heine-Borel). *Egy $K \subset \mathbb{R}$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Példa.
1. $\{1,2,3,4,5\} \subset \mathbb{R}$ kompakt, valamint korlátos és zárt is.
2. $\mathbb{N}$ nem korlátos és nem kompakt halmaz.

III. fejezet
Sorozatok

1. Alapfogalmak és kapcsolatuk

1. definíció. Egy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt $\mathbb{R}$-beli ***sorozat***nak nevezünk. $f(n)$-et a sorozat n-edik elemének nevezzük.
A sorozat n***-edik elem***ét $f(n) = a_n$ vagy $f(n) = x_n$ jelöli. A sorozat elemeinek halmazára az $\{a_n\}$ vagy $\{x_n\}$ jelölést használunk. Magát a sorozatot az $f \doteq \langle a_n \rangle$, vagy $f \doteq \langle x_n \rangle$ szimbólummal jelöljük.

Példa. $\langle \frac{1}{n} \rangle$, $\langle n \rangle$ sorozatok $\mathbb{R}$-ben, n-edik tagjuk $\frac{1}{n}$, illetve n, elemeik halmaza $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, illetve $\mathbb{N}$.

2. definíció (korlátosság). Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli ***sorozat***ot ***korlátos***nak nevezzük, ha $\{x_n\}$ korlátos. Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat alulról (felülről) korlátos, ha $\{x_n\}$ alulról (felülről) korlátos.

Példa.
1. Az $\langle \frac{1}{n} \rangle$ sorozat korlátos, mert egyrészt $0 < \frac{1}{n}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, így alulról korlátos, másrészt $n \geq 1$ miatt $\frac{1}{n} \leq 1\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ esetén, így felülről korlátos.
2. Az $\langle n \rangle$ sorozat alulról korlátos, mert $0 < n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, de felülről nem korlátos, mert $\{n\} = \mathbb{N}$ felülről nem korlátos, így $\langle n \rangle$ nem korlátos.

3. definíció (monotonitás). Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli ***sorozat***ot ***monoton*** növekvőnek (csökkenőnek) nevezzük, ha bármely $n \in \mathbb{N}$-re $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n \geq x_{n+1})$; szigorúan monoton növekvő (csökkenő) ha $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$ teljesül.

Példa.
1. $\langle \frac{1}{n} \rangle$ szigorúan monoton csökkenő, mert $0 < n < n + 1$ miatt
   $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.
2. $\langle n \rangle$ szigorúan monoton növelvő, mert $n < n + 1\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.
3. $\langle (-1)^n n \rangle$ nem monoton növekvő, mert $a_1 = -1 < 2 = a_2$,
   de $a_2 = 2 > -3 = a_3$. Hasonlóan belátható, hogy a sorozat nem monoton csökkenő.

A kalkulus legfőbb eszközeit – a differenciálhányadost és az integrált – a határérték segítségével definiálják. Egy sorozat határértékeként olyat számot szeretnénk érteni, melyet a sorozat „tetszőleges pontossággal megközelít”.

4. definíció (konvergencia). Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli ***sorozat***ot ***konvergens***nek nevezzük, ha létezik $x \in \mathbb{R}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n \geq n(\varepsilon)$-ra ($n \in \mathbb{N}$) $d(x, x_n) < \varepsilon$ teljesül. Az $x \in \mathbb{R}$ számot $\langle x_n \rangle$ határértékének nevezzük. Azt, hogy $\langle x_n \rangle$ konvergens és határértéke x, így jelöljük: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ vagy $x_n \to x$.

Példa.

1. Az $\langle \frac{1}{n} \rangle$ sorozat konvergens és határértéke 0, mert $\forall\ \varepsilon > 0$-ra (mivel $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos) $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$, azaz $\frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$, így $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$-ra $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$, tehát $d(0, \frac{1}{n}) < \varepsilon$.
2. A $\langle c \rangle$ konstans sorozat konvergens, és határértéke c, mert $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\forall\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ esetén $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$-ra $d(c, c) = 0 < \varepsilon$.

Megjegyzések.

1. A környezet fogalmát felhasználva a konvergencia ún. „környezetes” definícióját kapjuk: az $\langle x_n \rangle$ sorozat konvergens, ha $\exists\ x \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\ K(x, \varepsilon)$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$-ra $x_n \in K(x, \varepsilon)$ teljesül.
2. Egyszerűen belátható, hogy $x_n \to x \iff \forall\ K(x, \varepsilon)$-re $x_n \in K(x, \varepsilon)$ legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével.
3. Ha $\langle x_n \rangle$ olyan sorozat, hogy $x_n \to 0$, akkor nullsorozatnak nevezzük.

5. definíció (divergencia). Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli ***sorozat***ot ***divergens***nek nevezzük, ha nem konvergens, azaz ha bármely x esetén létezik $\varepsilon > 0$ (vagy $K(x, \varepsilon)$), hogy bármely $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$-re létezik $n \geq n(\varepsilon)$, hogy $d(x, x_n) \geq \varepsilon$ (vagy $x_n \notin K(x, \varepsilon)$).

Példa. $\langle (-1)^n \rangle$ divergens.
$x = +1$ és $x = -1$ nem lehet határérték, mert $\varepsilon = 1$ választással $(-1)^n \neq K(1, 1)$, ha n páratlan és $(-1)^n \neq K(-1, 1)$, ha n páratlan.
Ha $x \neq +1$ és $x \neq -1$ is teljesül, akkor $\varepsilon = \inf\{d(x, 1), d(x, -1)\}$ esetén $x_n \neq K(x, \varepsilon)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.
Így a definíció adja az állítást.

6. definíció. Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat $+\infty$-hez (illetve $-\infty$-hez) konvergál, ha $\forall\ M \in \mathbb{R}$-hez $\exists\ n(M) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geq n(M)$-re $x_n > M$ (illetve $x_n < M$) teljesül.

Példa.

1. Az $\langle n\rangle$ sorozat $+\infty$-hez konvergál, mert $\forall\ M \in \mathbb{R}$-re (mivel $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos) $\exists\ n(M) \in \mathbb{N}$, hogy $n(M) > M$, így $\forall\ n \geq n(M)$-re $n > M$, ami adja a definíció teljesülését.
2. A $\langle -n\rangle$ sorozat $-\infty$-hez konvergál, mert $\forall\ M \in \mathbb{R}$-re (mivel $\{-n\}$ alulról nem korlátos) $\exists\ n(M) \in \mathbb{N}$, hogy $-n(M) < M$, így $\forall\ n \geq n(M)$-re $-n \leq -n(M)$, ami ($-n(M) < M$ miatt) adja, hogy $-n < M$, azaz teljesül a definíció.

1. tétel (a határérték egyértelműsége). *Ha $\langle x_n\rangle$ $\mathbb{R}$-beli konvergens sorozat, akkor egy határértéke van (azaz $x_n \to a$ és $x_n \to b$ esetén $a = b$).*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x_n \to a$ és $x_n \to b$ és $a \neq b$. Ekkor $a \neq b$ miatt

$$K\left(a, \frac{d(a,b)}{2}\right) \cap K\left(b, \frac{d(a,b)}{2}\right) = \emptyset\ .$$

Továbbá az $x_n \to a$ és $x_n \to b$ miatt $\exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\forall\ n > n(\varepsilon)$-ra $x_n \in K\left(a, \frac{d(a,b)}{2}\right)$ és $x_n \in K\left(b, \frac{d(a,b)}{2}\right)$, ami lehetetlen. Tehát $a = b$. □

Megjegyzés. A tétel akkor is igaz, ha $x_n \to +\infty$ (vagy $x_n \to -\infty$).

2. tétel (konvergencia és korlátosság). *Ha az $\langle x_n\rangle$ sorozat konvergens, akkor korlátos.*

Bizonyítás. Ha $x_n \to x$ és $\varepsilon > 0$ adott, akkor $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ ($n \in \mathbb{N}$)-re $d(x, x_n) < \varepsilon$. Legyen $r = \sup\{\varepsilon,\ d(x, x_1), \ldots, d(x, x_{n(\varepsilon)-1})\}$. Ekkor $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re

$$d(x, x_n) \leq r\ ,$$

így $\{x_n\}$ korlátos $\Longrightarrow$ $\langle x_n\rangle$ korlátos. □

Megjegyzés. Egy sorozat korlátosságából általában nem következik a konvergenciája.

Példa. A $\langle(-1)^n\rangle$ sorozat korlátos, mert $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ teljesül $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re (azaz alulról és felülről is korlátos), de – ahogy ezt már bizonyítottuk – nem kovergens.

3. tétel (monotonitás és konvergencia). *Ha az $\langle x_n\rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat monoton növekvő (illetve csökkenő) és felülről (illetve alulról) korlátos, akkor konvergens és $x_n \to \sup\{x_n\}$ (illetve $x_n \to \inf\{x_n\}$).*

Bizonyítás. Legyen $\langle x_n\rangle$ monoton növekvő és felülről korlátos. Ekkor $\exists\ x = \sup\{x_n\}$ A szuprénum definíciója miatt $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $x_{n(\varepsilon)} > x - \varepsilon$, azaz $x_{n(\varepsilon)} \in K(x, \varepsilon)$. A monoton növekedés miatt $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ ($n \in \mathbb{N}$)

esetén $x_{n(\varepsilon)} \leq x_n < x$. Tehát $x_n \in K(x, \varepsilon)$, így $x_n \to x$.
A másik eset ($\langle x_n \rangle$ monoton csökkenő és alulról korlátos) bizonyítása analóg módon történik. $\square$

Példa. Az $\langle 1-\frac{1}{n} \rangle$ sorozat monoton növekvő az alábbi miatt. $1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{n+1} \iff -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} \iff \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \iff n < n+1$. Az utolsó egyenlőség teljesül $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re.

A sorozat felülről korlátos: $1-\frac{1}{n} < 1 \iff -\frac{1}{n} < 0 \iff \frac{1}{n} > 0$, ami igaz. Így $\langle 1-\frac{1}{n} \rangle$ konvergens.

$\sup\{1-\frac{1}{n}\} = 1$, ugyanis $\beta = 1-\varepsilon < 1$ $(\varepsilon > 0)$ nem lehet felső korlát, mert akkor $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re $1-\frac{1}{n} \leq 1-\varepsilon$ teljesülne, ami ekvivalens a $-\frac{1}{n} \leq -\varepsilon$, illetve $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$ és végül az $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$ egyenlőtlenséggel, $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re, ami $\mathbb{N}$ felülről korlátosságát jelentené, és ez ellentmondás.

Így az $\{1-\frac{1}{n}\}$ halmaz $\forall\, \beta$ felső korlátjára $\beta \geq 1$ teljesül, ezért az 1 felső korlát a pontos felső korlát.

Tehát $1-\frac{1}{n} \to 1$.

2. Sorozatok és műveletek, illetve rendezés

Definíció. Ha $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozatok, $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor az

$$\langle x_n \rangle + \langle y_n \rangle \doteq \langle x_n + y_n \rangle \; ; \qquad \lambda \langle x_n \rangle \doteq \langle \lambda x_n \rangle$$

szerint definiált sorozatokat az adott ***sorozatok összeg***ének illetve ***λ-szorosá***nak nevezzük.
Ha $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozatok, akkor az

$$\langle x_n \rangle \cdot \langle y_n \rangle \doteq \langle x_n \cdot y_n \rangle \; ; \qquad \frac{\langle x_n \rangle}{\langle y_n \rangle} \doteq \left\langle \frac{x_n}{y_n} \right\rangle \quad (y_n \neq 0)$$

szerint definiált sorozatokat az adott ***sorozatok szorzatá***nak, illetve ***hányadosá***nak nevezzük.

Az alábbi tételek szerint a négy alapművelet és a határérték képzés sorrendje felcserélhető

1. tétel. *Legyen $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat, $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges úgy, hogy $x_n \to x$ és $y_n \to y$. Ekkor $\langle x_n \rangle + \langle y_n \rangle$ és $\lambda \langle x_n \rangle$ konvergensek és $x_n + y_n \to x + y$, $\lambda x_n \to \lambda x$.*

Bizonyítás.

a) Ha $x_n \to x$ és $y_n \to y$, úgy $\forall \varepsilon > 0$-ra $\dfrac{\varepsilon}{2}$-höz $\exists\ n\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, hogy $\forall\ n \geq n\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén $d(x, x_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ és $d(y, y_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ezért $\forall\ n \geq n\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$-re

$$d(x+y, x_n+y_n) = |(x+y)-(x_n+y_n)| = |(x-x_n)+(y-y_n)| \leq$$

$$\leq |x-x_n| + |y-y_n| = d(x, x_n) + d(y, y_n) < \varepsilon\ ,$$

azaz $x_n + y_n \to x + y$.

b) Ha $\lambda = 0$, akkor $\lambda\langle x_n\rangle = \langle \lambda x_n\rangle = \langle 0\rangle$ konvergens és $\lambda x_n = 0 \to 0 \in \mathbb{R}^n$. Ha $\lambda \neq 0$, akkor $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$-hoz $\exists\ n\left(\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}\right)$, hogy $\forall\ n \geq n\left(\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén $d(x, x_n) < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Ekkor $\forall\ n \geq n\left(\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}\right)$-ra

$$d(\lambda x, \lambda x_n) = |\lambda| d(x, x_n) < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon\ ,$$

azaz $\lambda x_n \to \lambda x$. □

Példa.

1. Az $\langle 1 + \frac{1}{n}\rangle$ sorozat konvergens, mert az $\langle 1\rangle$ sorozat konvergens és határértéke 1, az $\langle \frac{1}{n}\rangle$ sorozat is konvergens és határértéke 0, így a tétel miatt sorozatunk is konvergens és határértéke $1 + 0 = 1$.
2. Az $\langle \frac{5}{n}\rangle$ sorozat konvergens és határértéke 0, mert $\frac{1}{n} \to 0$ miatt $\frac{5}{n} = 5 \cdot \frac{1}{n} \to 5 \cdot 0 = 0$.

2. tétel. *Legyenek $\langle x_n\rangle$ és $\langle y_n\rangle$ olyan $\mathbb{R}$-beli sorozatok, hogy $x_n \to x$ és $y_n \to y$. Ekkor $\langle x_n\rangle \cdot \langle y_n\rangle$ és $y, y_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén $\dfrac{\langle x_n\rangle}{\langle y_n\rangle}$ is konvergens és $x_n \cdot y_n \to x \cdot y$, $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{x}{y}$.*

Példa.

1. Az $\left\langle \dfrac{1}{n^2}\right\rangle$ sorozat konvergens és határértéke 0, mert $\left\langle \dfrac{1}{n^2}\right\rangle = \left\langle \dfrac{1}{n}\right\rangle \cdot \left\langle \dfrac{1}{n}\right\rangle$ és $\dfrac{1}{n} \to 0$, így $\dfrac{1}{n^2} \to 0 \cdot 0 = 0$.

2. A $\left\langle \dfrac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}} \right\rangle$ sorozat konvergens és határértéke $\dfrac{3}{2}$, mert $3+\dfrac{1}{n} \to 3$, $2+\dfrac{1}{n^2} \to 2$, így $\dfrac{3+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \to \dfrac{3}{2}$.

3. tétel. *Ha $\langle x_n \rangle$ korlátos, $\langle y_n \rangle$ pedig nullsorozat $\mathbb{R}$-ben, akkor $\langle x_n \rangle \cdot \langle y_n \rangle$ nullsorozat ($x_n \cdot y_n \to 0$).*

Példa. A $\langle (-1)^n \frac{1}{n} \rangle$ sorozat nullsorozat, mert $\langle (-1)^n \frac{1}{n} \rangle = \langle (-1)^n \rangle \langle \frac{1}{n} \rangle$, továbbá $\langle (-1)^n \rangle$ korlátos $\langle \frac{1}{n} \rangle$ pedig nullsorozat.

4. tétel. *Ha $\langle x_n \rangle$ olyan $\mathbb{R}$-beli sorozat, hogy*

a) $|x_n| \to +\infty$ *és* $x_n \neq 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, *akkor* $\dfrac{1}{x_n} \to 0$;

b) $x_n \to 0$, $x_n \neq 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, *akkor* $\left| \dfrac{1}{x_n} \right| \to \infty$.

Példa.

1. $\langle n^2+1 \rangle$ konvergál a $+\infty$-hez, mert ha $M < 1$, úgy $n^2+1 > 1 > M \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, míg ha $m \geq 1$, akkor $-\, n \to +\infty$ miatt $-\, \sqrt{M-1}$-hez $\exists\, n_1(\sqrt{M-1})$, hogy $\forall\, n \geq n(M)$-re $n > \sqrt{M-1} \iff n^2 > M-1 \iff n^2+1 > M$. Így a tétel a) része miatt $\dfrac{1}{n^2+1} \to 0$.
2. $\dfrac{n^2}{n+2} = \dfrac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$ és $\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} \to 0$, így a tétel b) része miatt $\dfrac{n^2}{n+2} \to +\infty$.

5. tétel. *Ha $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ olyan $\mathbb{R}$-beli sorozatok, hogy $x_n \to x$ és $y_n \to y$ és*

a) $x_n \leq y_n$ *(vagy $x_n < y_n$) $\forall\, n > N_0 \in \mathbb{N}$-re, akkor $x \leq y$;*

b) $x < y$, *akkor $\exists\, N_0$, hogy $\forall\, n > N_0$-ra $x_n < y_n$.*

Bizonyítás.

a) Tegyük fel, hogy $x > y$ és legyen $\varepsilon = \dfrac{|x-y|}{2} > 0$. Ekkor $\exists\, n_1(\varepsilon)$ és $n_2(\varepsilon)$, hogy $x_n \in K(x,\varepsilon) \ \ \forall\, n \geq n_1(\varepsilon)$ és $y_n \in K(y,\varepsilon) \ \ \forall\, n \geq n_2(\varepsilon)$. A $K(x,\varepsilon) \cap K(y,\varepsilon) = \emptyset$ miatt ebből adódik, hogy $y_n < x_n \ \forall\, n > n(\varepsilon) = \sup\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. Ez pedig ellentmondás, így csak $x \leq y$ lehetséges.

b) $\varepsilon = \dfrac{|x-y|}{2} > 0$-ra $\exists\, n_1(\varepsilon)$ és $n_2(\varepsilon)$, hogy $x_n \in K(x,\varepsilon)$, ha $n \geq n_1(\varepsilon)$, valamint $y_n \in K(y,\varepsilon)$, ha $n \geq n_2(\varepsilon)$. Így $K(x,\varepsilon) \cap K(y,\varepsilon) = \emptyset$ miatt $x_n < y_n$, ha $n > N_0 = \sup\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. $\square$

6. tétel (rendőr-tétel). *Ha $\langle x_n \rangle$, $\langle y_n \rangle$, $\langle z_n \rangle$ olyan $\mathbb{R}$-beli sorozatok, hogy $x_n \to x$ és $y_n \to x$ és $x_n \le z_n \le y_n$, akkor $z_n \to x$.*

Bizonyítás. A feltételek miatt $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n_1(\varepsilon)$ és $n_2(\varepsilon)$, hogy $x_n \in K(x, \varepsilon)$, ha $n \ge n_1(\varepsilon)$ és $y_n \in K(x, \varepsilon)$, ha $n \ge n_2(\varepsilon)$. Így $x_n, y_n \in K(x, \varepsilon)$, ha $n \ge n(\varepsilon) = \sup\{n_1, n_2\}$, ezért az $x_n \le z_n \le y_n$ feltételből $z_n \in K(x, \varepsilon)$, ha $n \ge n(\varepsilon)$. Tehát $z_n \to x$. □

Példa. $0 < \dfrac{n+1}{n^3+1} < \dfrac{n+1}{n^3} \le \dfrac{2n}{n^3} = \dfrac{2}{n^2}$ miatt a tétel adja, hogy $\dfrac{n+1}{n^3+1} \to 0$.

3. Részsorozatok

1. definíció. Legyen $\langle a_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat. Ha $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő és $b_n = a_{\varphi(n)}$, akkor $\langle b_n \rangle$-t az $\langle a_n \rangle$ ***részsorozat***ának nevezzük.

Példa. Az $\left\langle \dfrac{1}{2n} \right\rangle$ sorozat és az $\left\langle \dfrac{1}{n^2+2} \right\rangle$ sorozat is részsorozata az $\left\langle \dfrac{1}{n} \right\rangle$ sorozatnak.

1. tétel. *Ha az $\langle a_n \rangle$ konvergens és határértéke a akkor $\forall\ \langle b_n \rangle$ részsorozatára $b_n \to a$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha $b_n = a_{\varphi(n)}$, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő, akkor teljes indukcióval kapjuk, hogy $\varphi(n) \ge n$ $(n \in \mathbb{N})$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, akkor $a_n \to a$ miatt $\exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$-re $a_n \in K(a, \varepsilon)$. Így $\varphi(n) \ge n$ miatt $b_n \in K(a, \varepsilon)$ $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$, azaz $b_n \to a$. □

Példa. A tétel és az $\left\langle \dfrac{1}{n} \right\rangle$ nullsorozat volta miatt az $\left\langle \dfrac{1}{2n} \right\rangle$ és az $\left\langle \dfrac{1}{n^2+2} \right\rangle$ sorozatok is nullsorozatok.

Megjegyzés. A tétel megfordítása nem igaz, de ha egy sorozat két diszjunkt részsorozatra bontható, melyek határértéke ugyanaz, akkor az a sorozatnak is határértéke.

2. tétel (Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel). *Ha az $\langle a_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat korlátos, akkor létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Ha $\langle a_n \rangle$ értékkészlete véges, akkor $\exists\ a \in \mathbb{R}$, hogy $a_n = a$ végtelen sok természetes számra, így az $A = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = a\}$ halmaz megszámlálhatóan végtelen, így $\exists\ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő sorozat, melynek

értékkészlete A. Mivel $a_{\varphi(n)} = a \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$, tehát $\langle a_{\varphi(n)} \rangle$ konvergens.
Ha $\{a_n\}$ végtelen halmaz, mely korlátos, akkor a II.4.3. tétel miatt $\exists\, a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja, így $\exists\, \varphi(1) \in \mathbb{N}$, hogy $a_{\varphi(1)} \in K(a, 1)$. Ha $\varphi(n)$-t meghatároztuk $n \in \mathbb{N}$-re, akkor $\exists\, \varphi(n+1) \in \mathbb{N}$, melyre $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ és $a_{\varphi(n+1)} \in K\left(a, \dfrac{1}{n+1}\right)$. $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő és $b_n = a_{\varphi(n)} \in K\left(a, \dfrac{1}{n}\right) \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$, azaz $d(a, a_{\varphi(n)}) = d(a, b_n) < \dfrac{1}{n} \; \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor ($\frac{1}{n} \to 0$ miatt) $\exists\, n(\varepsilon)$, $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$-re $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, így $d(a, b_n) < \varepsilon$. Tehát $b_n \to a$. □

2. definíció. Legyen A az $\langle a_n \rangle$ korlátos ($\mathbb{R}$-beli) sorozat konvergens részsorozatai határértékeinek halmaza. A $\sup\{A\}$ és $\inf\{A\}$ (létező) számokat az $\langle a_n \rangle$ ***felső*** illetve ***alsó határérték***einek vagy ***limesz szuperior***jának illetve ***limesz inferior***jának nevezzük. Jelölés: $\overline{\lim}\; a_n$, $\underline{\lim}\; a_n$ (limsup a_n, liminf a_n).
Ha $\langle a_n \rangle$ felülről (vagy alulról) nem korlátos, akkor $\overline{\lim}\; a_n = +\infty$ (illetve $\underline{\lim}\; a_n = -\infty$).

Példa. Az $\langle a_n \rangle = \langle (-1)^n \rangle$ sorozat konvergens részsorozatai a $\langle b_n \rangle = \langle 1 \rangle$ és $\langle b_n \rangle = \langle -1 \rangle$ konstans sorozatok, illetve azon $\langle b_n \rangle$ sorozatok, melyekben $b_n = 1$ véges sok n kivételével, vagy $b_n = -1$ véges sok n kivételével.
Ezek határértéke 1 vagy -1, így $\overline{\lim}\; a_n = 1$, $\underline{\lim}\; a_n = -1$.

Megjegyzések.
1. $\sup\{A\}, \inf\{A\} \in A$.
2. Ha $\overline{\lim}\; a_n = \underline{\lim}\; a_n = a$, akkor $a_n \to a$.

4. Cauchy-sorozatok

1. definíció. Az $\langle a_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozatot ***Cauchy-sorozat***nak nevezzük, ha $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, p, q \geq n(\varepsilon)$ $(p, q \in \mathbb{N})$ esetén $d(a_p, a_q) < \varepsilon$.

A határérték definíciója azt jelenti, hogy a sorozat tagjai „közel kerülnek” a határértékhez. A Cauchy-tulajdonság viszont azt, hogy a sorozat tagjai „közel kerülnek” egymáshoz.

1. tétel (Cauchy-féle konvergencia kritérium). *Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás.

a) Ha $\langle x_n \rangle$ konvergens, akkor $\exists\, x \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\frac{\varepsilon}{2}$-re $\exists\, n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ úgy, hogy $\forall\, p, q \geq n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$-re $d(x, x_p) < \frac{\varepsilon}{2}$ és $d(x, x_q) < \frac{\varepsilon}{2}$. Így $\forall\, p, q \geq n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$-re

$$d(x_p, x_q) \leq d(x, x_p) + d(x, x_q) < \varepsilon,$$

azaz Cauchy-sorozat.

b) Legyen $\langle x_n \rangle$ Cauchy-sorozat $\mathbb{R}$-ben.
   - $\langle x_n \rangle$ korlátos, mert $\varepsilon = 1$-hez $\exists\, n(1)$, hogy $\forall\, p, q \geq n(1)$-re $d(x_p, x_q) < 1$. Legyen $q \geq n(1)$ rögzített, $p \geq n(1)$ tetszőleges, akkor

$$d(0, x_p) \leq d(0, x_q) + d(x_p, x_q) < d(0, x_q) + 1 \ ,$$

   így, ha $r > \sup\{d(0, x_1), \ldots, d(0, x_{n(1)-1}), d(0, x_q) + 1\}$, akkor $d(0, x_n) < r \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
   - Mivel $\langle x_n \rangle$ korlátos, így $\exists \langle x_{\varphi(n)} \rangle$ konvergens részsorozata (lásd a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tételt).
   - Legyen $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{\varphi(n)}$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor $\frac{\varepsilon}{2}$-höz $\exists\, n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$, hogy $\varphi(n) \geq n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén $d(x_{\varphi(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Másrészt $\langle x_n \rangle$ Cauchy-sorozat, így $\exists\, n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, hogy $\forall\, p, q \geq n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$-re $d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ezért $\forall\, n \geq n(\varepsilon) = \sup\{n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\}$-re

$$\varphi(n) \geq n \quad \text{és} \quad d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x) < \varepsilon \ ,$$

   azaz $x_n \to x$. □

Megjegyzések.

1. A tétel segítségével eldönthető egy sorozat konvergenciája a határérték ismerete nélkül is, a divergenciát pedig bizonyos esetekben könnyebben tudjuk bizonyítani, mint a definíció alapján.
2. Szokás a Cauchy-féle konvergencia kritériumot teljességi axiómának választani (ami ugyancsak biztosítja, hogy a számegyenes nem „lyukas”), s ekkor az általunk adott teljességi axióma tétel lesz.

Példák.

1. Az $\left\langle \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right\rangle$ sorozat konvergens.
   Ha $p, q \in \mathbb{N}$, és például $p > q$, akkor
$$\begin{aligned} |a_p - a_q| &= \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+2)^2} + \cdots + \frac{1}{p^2} < \\ &< \frac{1}{q(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots + \frac{p-1}{p} = \\ &= \frac{1}{q} - \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+1} - \frac{1}{q+2} + \cdots + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} = \\ &= \frac{1}{q} - \frac{1}{p} < \frac{1}{q} \end{aligned}$$
   és az archimedeszi axióma nevű tétel miatt $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$ és akkor $\forall\ q \geq n(\varepsilon)$-re $\frac{1}{q} < \varepsilon$, így $\forall\ q \geq n(\varepsilon)$ (és $\forall\ p \in \mathbb{N}$) esetén $|a_p - a_q| < \frac{1}{q} < \varepsilon$, ami adja azt is, hogy $\forall\ p, q \geq n(\varepsilon)$-ra $|a_p - a_q| < \varepsilon$, azaz a sorozat teljesíti a Cauchy-féle konvergencia kritériumot, ezért konvergens.
2. Az $\left\langle \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right\rangle$ sorozat divergens.
   Ugyanis $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re
$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$
   így $\varepsilon = \frac{1}{2}$-hez egyetlen $n(\varepsilon)$ küszöbszám sem jó, így nem teljesíti a Cauchy-féle kritérium feltételét.

5. Nevezetes sorozatok

Az alábbi tételek bizonyítását a Kalkulus I. példatár tartalmazza.

1. tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$, $\langle a_n \rangle = \langle a^n \rangle$. Ekkor*

1. $|a| < 1$ *esetén* $a^n \to 0$;
2. $|a| > 1$ *esetén* $\langle a^n \rangle$ *divergens;* $a > 1$*-re* $a^n \to +\infty$;
3. $a = 1$ *esetén* $a^n \to 1$; $a = -1$ *esetén* $\langle a^n \rangle$ *divergens.*

2. tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ rögzített, akkor $n^k \to +\infty$, $\sqrt[k]{n} \to +\infty$ és $n^p \to +\infty$, ha $p = \frac{k}{l}$ $(k, l \in \mathbb{N})$.*

3. tétel. *Legyen* $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. *Ekkor* $\sqrt[n]{a} \to 1$.

4. tétel. $\sqrt[n]{n} \to 1$.

5. tétel. *Ha* $a \in \mathbb{R},\ a > 1$, *akkor* $a_n = \dfrac{a^n}{n!} \to 0$.

6. tétel. $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

7. tétel. *Ha* $a > 1$, *akkor* $\dfrac{n^k}{a^n} \to 0\ \forall\ k \in \mathbb{N}$ *rögzített számra.*

8. tétel. *Az* $\left\langle \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \right\rangle$ *sorozat konvergens. (Határértékét e-vel jelöljük.)*

IV. fejezet
Sorok

1. Alapfogalmak és alaptételek

Egy $\langle a_k \rangle$ sorozat tagjai összeadásával formálisan felírhatjuk a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ „végtelen sok tagú” összeget. Ezen formális összeg mikor jelent egy számot? Erre a kérdésre a $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ részletösszegek konvergenciája segítségével fogunk válaszolni. Ki fog az is derülni, hogy a tényleges (numerikus, számítógépes) számítások gyakran ilyen sorok alapján adnak (közelítő) értéket a konkrét feladatok megoldására.

1. definíció. Ha adott egy $\langle a_n \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat, akkor azt az $\langle S_n \rangle$ sorozatot, melynél $S_n \doteq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ***végtelen sor***nak nevezzük és $\sum a_n$ (vagy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$-nel jelöljük. S_n-t a sor ***n-edik részletösszeg***ének, a_n-t a sor ***n-edik tag***jának nevezzük. Ha adott még az $a_0 \in \mathbb{R}$ szám is, úgy azt az $\langle S_n \rangle$ sorozatot, melynél $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ is végtelen sornak nevezzük és rá a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jelölést használjuk.

2. definíció. A $\sum a_n$ sort ***konvergens***nek mondjuk, ha $\langle S_n \rangle$ konvergens, és a $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ számot a sor összegének nevezzük.

Ezen összeget jelölheti a $\sum a_n$, illetve a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (ha az összegzés a_0-tól indul, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$) szimbólum is.
A $\sum a_n$ sor ***divergens***, ha nem konvergens.

Példák.

1. A $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ sornál $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1\ , \end{aligned}$$

   így a sor konvergens és összege 1.

2. Legyen $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ úgynevezett mértani (vagy geometriai) sor konvergens, mert

$$S_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \to \frac{1}{1-q}\ ,$$

   így összege $\dfrac{1}{1-q}$.

3. A $\sum \dfrac{1}{n}$ úgynevezett harmonikus sor divergens, mert

$$\langle S_n \rangle = \left\langle 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right\rangle ,$$

   és korábban beláttuk, hogy az $\left\langle 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right\rangle$ sorozat divergens.

Megjegyzés. $\sum a_n$ sor konvergenciája éppen azt jelenti, hogy $\exists\ S \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\forall n \geq n(\varepsilon)$ esetén $|S_n - S| < \varepsilon$.

1. tétel (Cauchy-féle konvergencia kritérium sorokra).
A $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n, m \in \mathbb{N},\ n > m \geq n(\varepsilon)$ esetén

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon\ .$$

Bizonyítás. A $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens (definíció szerint), ha $\langle S_n \rangle$ konvergens, ami (a sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritérium miatt) akkor és csak akkor igaz, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n, m \geq n(\varepsilon)$ $(n > m)$ esetén

$$\varepsilon > |S_n - S_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n|\ .$$

amit bizonyítani kellet. □

1. következmény. *A* $\sum a_n$ *sor akkor és csak akkor konvergens, ha* $\forall\ \varepsilon > 0$*-hoz* $\exists\ n(\varepsilon)$*, hogy* $\forall\ m \geq n(\varepsilon)$ *és* $p \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+p}| < \varepsilon \ .$$

Bizonyítás. Mint az előbb, csak $n = m + p > m \geq n(\varepsilon)$ választással. □

2. következmény (a sor konvergenciájának szükséges feltétele). *Ha* $\sum a_n$ *konvergens, akkor* $a_n \to 0$.

Bizonyítás. Ha az 1. tételben $m = n - 1$, úgy azt kapjuk, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén $|a_n| < \varepsilon$, ami azt jelenti hogy $a_n \to 0$. □

Példa.

1. A $\sum \frac{1}{n}$ sornál $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, de (ahogy azt láttuk) a sor maga nem konvergens.
2. A $\sum \frac{1}{n^2}$ sornál $a_n = \frac{1}{n^2} \to 0$ és (mint azt láttuk) a sor konvergens.

3. definíció. A $\sum a_n$ ***abszolút konvergens***, ha $\sum |a_n|$ konvergens. A $\sum a_n$ ***feltételesen konvergens***, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

2. tétel. *Egy abszolút konvergens sor konvergens is.*

Bizonyítás. A $\sum |a_n|$ konvergenciája miatt $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ m, n \in \mathbb{N},\ n > m \geq n(\varepsilon)$-re

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \right| < \varepsilon \quad \text{és így} \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \right| < \varepsilon \ ,$$

ami az 1. tétel miatt adja $\sum a_n$ konvergenciáját. □

3. tétel. *Ha* $\sum a_n$ *és* $\sum b_n$ *konvergens sorok, és* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *tetszőlegesek, akkor a* $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ *sor is konvergens, és összege* $\lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Bizonyítás. $\sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ miatt a $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ sor n-edik részletösszege a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok n-edik részletösszegének a λ, μ számokkal képzett lineáris kombinációja, így a sorozatok műveleti tulajdonságai miatt jön az állítás. □

2. Konvergenciakritériumok

1. tétel (nemnegatív tagú sorokra). *Legyen $\sum a_n$ nemnegatív tagokból álló sor. $\sum a_n$ akkor és csak akkor konvergens, ha részletösszegeinek $\langle S_n\rangle$ sorozata korlátos.*

Bizonyítás.
a) $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ alapján $\langle S_n\rangle$ monoton növekvő. Ha még korlátos is, akkor konvergens, így $\sum a_n$ konvergens.
b) $\sum a_n$ konvergens $\Longrightarrow$ $\langle S_n\rangle$ konvergens $\Longrightarrow$ $\langle S_n\rangle$ korlátos. □

Példa. A $\sum \frac{1}{n^2}$ nem negatív tagú sor esetén $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} =$$
$$= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2 \ ,$$

azaz $\langle S_n\rangle$ korlátos, így a sor konvergens.

2. tétel (összehasonlító kritérium). *Legyen $\sum a_n$ egy sor és $\sum b_n$ egy nemnegatív tagú sor.*

a) *Ha $|a_n| \leq b_n \ \ \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ esetén, és $\sum b_n$ konvergens, akkor a $\sum a_n$ abszolút konvergens (majoráns kritérium).*
b) *Ha $|a_n| \geq b_n \ \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ esetén és $\sum b_n$ divergens, akkor a $\sum a_n$ nem abszolút konvergens (minoráns kritérium).*

Bizonyítás.
a) $\sum b_n$ konvergenciája miatt $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \geq n_0$, hogy $\forall\ n, m \geq n(\varepsilon)$ $(n > m)$ esetén

$$|b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_n| < \varepsilon \ ,$$

így

$$||a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n|| = |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n| \leq$$
$$\leq b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_n = |b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_n| < \varepsilon$$

is igaz. Tehát (a Cauchy-kritérium miatt) $\sum a_n$ abszolút konvergens.
b) Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens lenne, akkor az a) rész miatt $\sum b_n$ is konvergens lenne, ami ellentmondás, így $\sum a_n$ nem abszolút konvergens. □

Példa.
1. A $\sum \dfrac{1}{n^2+10}$ sor konvergens, mert $\dfrac{1}{n^2+10} < \dfrac{1}{n^2} \ \forall\ n \in \mathbb{N}$, és a $\sum \dfrac{1}{n^2}$ sor konvergens.

2. A $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ sor divergens, mert $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, és a $\sum \frac{1}{n}$ sor divergens.

3. tétel (Leibniz-féle kritérium). *Legyen $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ és az $\langle a_n \rangle$ sorozat monoton csökkenően tartson a 0-hoz. Ekkor a $\sum(-1)^{n+1}a_n$ (úgynevezett jelváltó, vagy alternáló) sor konvergens.*

Példa. A $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ úgynevezett Leibniz-féle sor konvergens, mert $a_n = \frac{1}{n} > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, és $\langle \frac{1}{n} \rangle$ monoton csökkenően tart 0-hoz.

4. tétel (Cauchy-féle gyökkritérium). *Legyen $\sum a_n$ egy sor.*

a) *Ha $\exists\, 0 < q < 1$ és $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n_0$-ra $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.*

b) *Ha valamely $n_0 \in \mathbb{N}$ esetén $\forall\, n \geq n_0$-ra $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, akkor $\sum a_n$ divergens.*

Bizonyítás.

a) Ha $\forall n \geq n_0$-ra $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, akkor $|a_n| \leq q^n$ $(n \geq n_0)$. Így a $\sum b_n = |a_1| + \ldots + |a_{n_0-1}| + \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} q^n$ sorra, mely $|q| < 1$ miatt konvergens, teljesül, hogy $|a_n| \leq b_n$. Tehát (az összehasonlító kritérium miatt) $\sum a_n$ abszolút konvergens.

b) $\forall\, n \geq n_0$-ra: $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \implies |a_n| \geq 1 \implies \langle a_n \rangle$ nem tart 0-hoz $\implies \sum a_n$ nem konvergens. $\square$

Példa. A $\sum \frac{n}{3^n}$ sor konvergens, mert $\sqrt[n]{n} \to 1$ miatt $\forall\, q \in \left]\frac{1}{3}, 1\right[$ esetén $\exists\, n_0$, hogy $\forall\, n \geq n_0$-ra $\sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{3} < q < 1$.

Következmény (a Cauchy-féle gyökkritérium átfogalmazása). *Legyen $\sum a_n$ egy sor.*

a) *Ha $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = A < 1$, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.*

b) *Ha $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = A > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens.*

Példa. Az előbbi sorra

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \overline{\lim} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1\ ,$$

így konvergens.

5. tétel (D'Alembert-féle hányadoskritérium). *Legyen $\sum a_n$ egy sor, melyre $a_n \neq 0$.*

a) *Ha $\exists\, 0 < q < 1$ és $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n_0$-ra $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.*

b) *Ha $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n_0$-ra $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, akkor a $\sum a_n$ sor divergens.*

Bizonyítás.

a) $n \geq n_0$-ra $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \implies \forall\, m \in \mathbb{N}$-re $|a_{n_0+m}| \leq |a_{n_0}|q^m \implies$
$\implies \sum b_n = \sum\limits_{k=1}^{n_0} |a_k| + \sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty} |a_{n_0}|q^{k-n_0}$ konvergens sorra $|a_n| \leq b_n \implies$
(az összehasonlító kritérium miatt) $\sum a_n$ abszolút konvergens.

b) $n \geq n_0$-ra $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \implies |a_{n+1}| \geq |a_n|$ $(n \geq n_0) \implies |a_n| \geq |a_{n_0}| > 0$ $(\forall\, n \geq n_0) \implies |a_n|$ nem tart 0-hoz $\implies a_n$ nem tart 0-hoz $\implies \sum a_n$ divergens. ☐

Példa. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ sorra

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\text{-re},$$

ami $\frac{2}{n+1} \to 0$ miatt adja, hogy $\forall\, 0 < q < 1$ esetén $\exists\, n_0$, hogy $\forall\, n \geq n_0$-ra $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1$, így a hányados kritérium miatt a sor konvergens.

Hasonlóan belátható, hogy a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ sor $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergens, mert ekkor $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{x}{n+1} \to 0$.

Következmény (a D'Alembert-féle hányadoskritérium átfogalmazása). *Ha $\sum a_n$ egy sor, melyre $a_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor*

a) $\overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \implies \sum a_n$ *abszolút konvergens;*

b) $\overline{\lim} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \implies \sum a_n$ *divergens.*

Megjegyzések.

1. A $\sum \dfrac{1}{n}$ és $\sum \dfrac{1}{n^2}$ soroknál nem alkalmazható a 4. és 5. tétel.
   A $\sum \dfrac{1}{n}$ sor divergens. De $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1$, ha $n > 2$, így a gyökkritérium („b)" része) nem használható. Másrészt $\frac{1}{n+1} \,/\, \frac{1}{n} < 1$, azaz a hányadoskritérium („b)" része) sem alkalmazható.
   A $\sum \dfrac{1}{n^2}$ sor konvergens. De $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$, így a gyökkritérium („a)" része) nem alkalmazható. Másrészt $\frac{1}{(n+1)^2} \,/\, \frac{1}{n^2} \to 1$, így a hányadoskritérium („a)" része) sem alkalmazható.
2. A Cauchy-féle gyökkritérium erősebb, mint a D'Alembert-féle hányadoskritérium, azaz ha a konvergencia vagy divergencia az utóbbival eldönthető, akkor az előbbivel is, de megadható olyan sor, melynek konvergenciája a Cauchy-féle gyökkritériummal eldönthető, de a D'Alembert-féle hányadoskritériummal nem. Például:

$$\sum a_n \ , \quad \text{ha} \quad a_n = \begin{cases} 5^{-n} & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 2^{-n} & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

6. tétel (Cauchy-féle kondenzációs tétel). *Legyen $\sum a_n$ egy monoton csökkenő és nemnegatív tagú sor. $\sum a_n$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\sum 2^n a_{2^n}$ konvergens.*

Példa. A $\sum \dfrac{1}{n^p}$ sor (ahol $p > 0$ fix) akkor és csak akkor konvergens, ha $p > 1$. (Ezért például a $\sum \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens.) Ha $p > 0$, akkor a $\sum \dfrac{1}{n^p}$ sor nemnegatív tagú, $\left\langle \dfrac{1}{n^p} \right\rangle$ monoton csökkenő, így a 3.6. tétel miatt akkor és csak akkor konvergens, ha $\sum 2^n \dfrac{1}{(2^n)^p}$, azaz a $\sum \left(\dfrac{1}{2^{p-1}} \right)^n$ geometriai sor konvergens, ami akkor és csak akkor teljesül, ha $\dfrac{1}{2^{p-1}} < 1$, azaz ha $p > 1$.

3. Műveletek sorokkal

1. definíció. Legyen $\sum a_n$ adott sor, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ invertálható leképzése $\mathbb{N}$-nek $\mathbb{N}$-re, $b_n = a_{\varphi(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor a $\sum b_n = \sum a_{\varphi(n)}$ sort a $\sum a_n$ ***átrendezett sor***ának nevezzük.

1. tétel. *Egy abszolút konvergens sor bármely átrendezett sora is konvergens, és összege az eredeti sor összege.*

Bizonyítás. $\sum a_n$ abszolút konvergens, így $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$-hoz $\exists\ n_0 = n\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, hogy $\forall n > m > n_0$ természetes számokra

$$|a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha φ és b_n az 1. definíció szerinti, és $S_n = a_1 + \ldots + a_n,\ s_n = b_1 + \ldots + b_n$, továbbá $n(\varepsilon) = \sup\{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n_0)\}$, akkor $\forall\ n > n(\varepsilon)$-ra $|S_n - s_n| < \varepsilon$, amiből jön, hogy $S_n - s_n \to 0$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. □

2. tétel (Riemann-féle átrendezési tétel). *Ha $\sum a_n$ egy feltételesen konvergens sor, $s, S \in \mathbb{R}_b,\ s \le S$, akkor a $\sum a_n$ sornak létezik olyan $\sum b_n$ átrendezett sora, melyre az $s_n = b_1 + \ldots + b_n,\ (n \in \mathbb{N})$ jelöléssel $\underline{\lim}\ s_n = s$ és ugyanakkor $\overline{\lim}\ s_n = S$.*

2. definíció. Legyen adott a $\sum a_n$ sor. Ha $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő, $b_1 = a_1 + \ldots + a_{\varphi(1)}, \ldots, b_n = a_{\varphi(n-1)+1} + \ldots + a_{\varphi(n)},\ (n > 1)$, akkor a $\sum b_n$ sort a $\sum a_n$ sor ***zárójelezett*** (***csoportosított***) ***sor***ának nevezzük.

3. tétel. *Egy konvergens sor tetszőlegesen zárójelezhető a konvergencia és az összeg megváltozása nélkül.*

Bizonyítás. Jelölje S_n a $\sum a_n$, σ_n a $\sum b_n$ zárójelezett sor n-edik részletösszegét. Nyilván $\sigma_n = S_{\varphi(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$, azaz $\langle \sigma_n \rangle$ részsorozata $\langle S_n \rangle$ -nek, így $\langle S_n \rangle$ konvergenciája adja $\langle \sigma_n \rangle$ konvergenciáját, míg a $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ egyenlőség az összegek azonosságát. □

Megjegyzés. A $\sum(-1)^n$ sor divergens, de van olyan zárójelezése, mely konvergens. Például a $(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 0+0+\cdots$ zárójelezett sor összege 0, míg a $-1 + (1-1) + (1-1) + \cdots = -1 + 0 + 0 + \cdots$ zárójelezett sor összege -1.

3. definíció. $\sum a_n$ és $\sum b_n$ ***sorok szorzatá***nak nevezünk minden olyan sort, melynek tagjai $a_i b_j$ alakúak és minden ilyen szorzat pontosan egyszer fordul elő tagként.

Megjegyzés. A különböző szorzatok egymásból csoportosításokkal és átrendezésekkel kaphatók. Értelmezünk két speciális szorzatot.

4. definíció. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ ***sorok téglányszorzata*** az a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ sor, melyben

$$c_n = (a_0 + \ldots + a_{n-1})b_n + a_n(b_0 + \ldots + b_{n-1}) + a_n b_n \ .$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & \cdots \\
\hline
b_0 & a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 & \cdots & a_nb_0 & \\
b_1 & a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_nb_1 & \\
b_2 & a_0b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 & \cdots & a_nb_2 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
b_n & a_0b_n & a_1b_n & a_2b_n & \cdots & a_nb_n & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}$$

3.1. ábra. Sorok téglányszorzata

4. tétel. *Ha a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *és* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *sorok téglányszorzata, akkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) \ .$$

Bizonyítás. Ha S_n^c, S_n^a és S_n^b a $\sum c_n$, $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok n-edik részletösszegei, úgy $S_n^c = S_n^a \cdot S_n^b$, ami adja az állítást. □

5. definíció. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ ***sorok Cauchy-szorzata*** az a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ sor, melyben

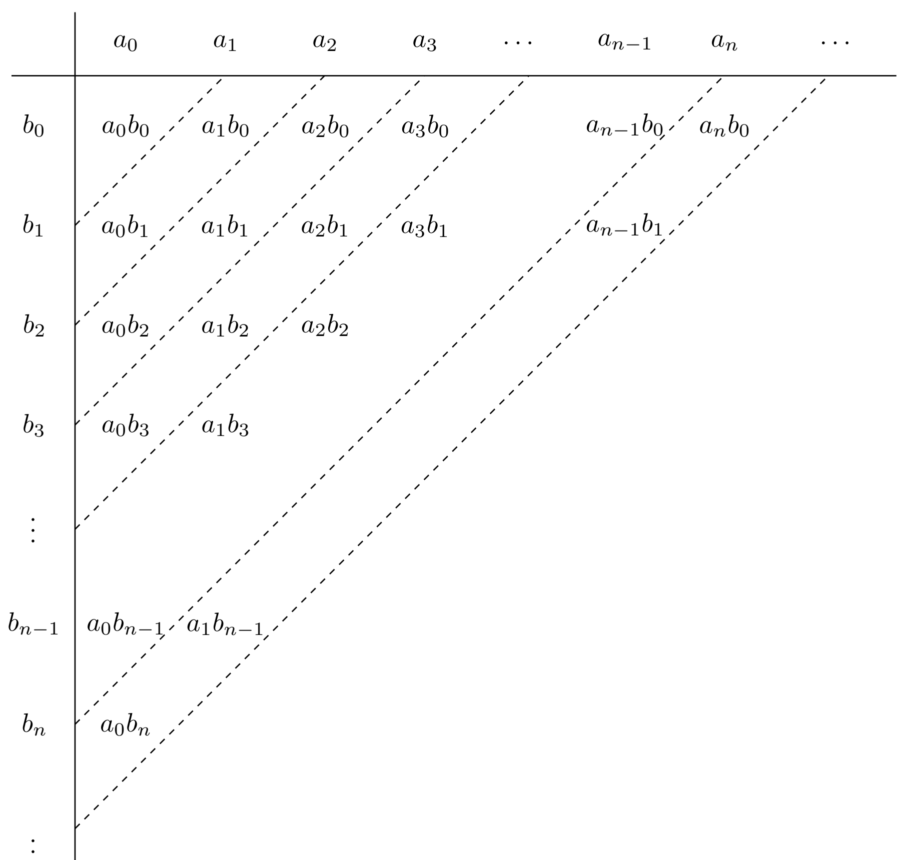
$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 \ .$$

Példa. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{y^n}{n!}$ – egyébként, mint az láttuk $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ esetén konvergens – sorok Cauchy-szorzata a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\ \frac{1}{(n-k)!}\ x^k y^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\ x^k y^{n-k} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

sor (itt felhasználtuk a binomiális tételt).



3.2. ábra. Sorok Cauchy-szorzata

5. tétel (Mertens). *Ha a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens sorok egyike abszolút konvergens, akkor Cauchy-szorzatuk konvergens, és összege: $(\sum a_n)\cdot(\sum b_n)$.*

Példa. Az előbbi példa alapján a tétel adja, hogy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}$$

4. Tizedes törtek

1. tétel. *Legyen $A=\{0,1,\ldots,9\}$. Ekkor $\forall\ x\in(0,1)$ valós számhoz egy és csak egy olyan $\langle a_n\rangle:\mathbb{N}\to A$ sorozat létezik, hogy $x=\sum\frac{a_n}{10^n}$, és nem létezik olyan $m\in\mathbb{N}$, hogy $a_m<9$ és $a_k=9\ \forall k\in\mathbb{N},\ k>m$ esetén.*

Definíció. A tételben szereplő $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ sor összegét

$$0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$$

módon is jelöljük és $x\in(0,1)$ ***tizedestört-alakjá***nak nevezzük.
Ha $\exists\ k\in\mathbb{N}$, hogy $a_k\neq 0$ és $a_n=0\ \forall\ n>k$ természetes számra, akkor ***véges tizedes tört***ről beszélünk és

$$0,a_1a_2\ldots a_k$$

módon jelöljük.
Ha léteznek olyan $k,l\in\mathbb{N}$ számok, hogy $a_{k+n}=a_{k+l+n}$ $(n=0,1,\ldots)$, akkor ***szakaszos tizedes tört***ről beszélünk és azt

$$0,a_1\ldots a_{k-1}\overline{a_k\ldots a_{k+l-1}}$$

módon is jelöljük.

Megjegyzések.
1. Belátható, hogy $x\in(0,1)$ akkor és csak akkor racionális, ha szakaszos tizedestört.
2. Ha $y\in\mathbb{R}$, akkor $\exists\ x\in(0,1)$ és $l\in\mathbb{Z}$, hogy $y=l+x$. Ekkor y előállítása $y=l,a_1a_2\ldots a_n\ldots$ módon jelölhető.
3. Ha $y\in\mathbb{R}$, akkor $\exists\ x\in]0,1[$ és $l\in\mathbb{Z}$, hogy $y=l+x$. Ekkor y előállítása $y=l,a_1a_2\ldots a_n\ldots$ módon jelölhető, ha $x=0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$. Nyilván $y\in\mathbb{R}$ akkor és csak akkor racionális, ha a tizedestört része szakaszos. Egyébként y irracionális.

4. A tizedes törtekre (mint végtelen sorokra) értelmezhetők a műveletek, megadható rendezés, bizonyíthatók ezek tulajdonságai, érvényes a teljességi axióma is, ezért ez is egy modellje (reprezentációja) lehet a valós számoknak. Ez a tizedestört modell. Ennek elemeivel – bizonyos egyszerűsítésekkel – középiskolában is találkozhattunk.

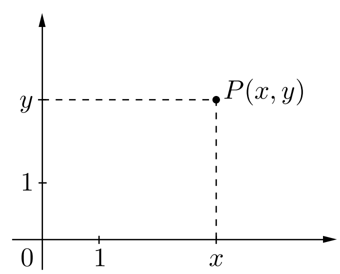
V. fejezet
Függvények folytonossága

1. Alapfogalmak

1. definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvényeket ***valós függvény***eknek nevezzük.

A valós függvények olyan speciális relációk, melyek $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ részhalmazai. Ezek szemléltetését, illetve gráfjuk (grafikonjuk) ábrázolását biztosítja a Descartes-féle koordinátarendszer bevezetése, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ modelljének (reprezentációjának) alábbi megadása.

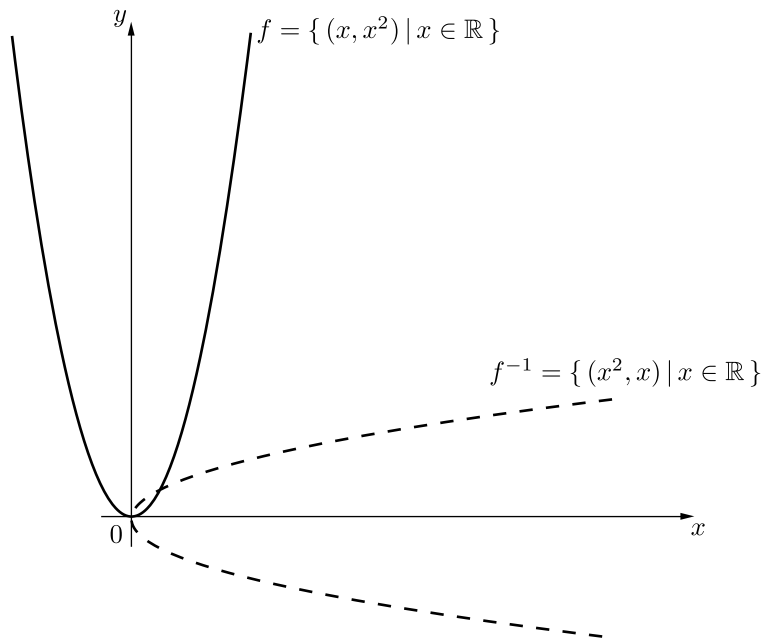
Tekintsünk két, egymásra merőleges egyenest a síkban, mint két olyan számegyenest, melynek 0-pontja a metszéspont és az 1 pont mindkét egyenesen azonos távolságra van 0-tól, akkor a sík pontjaihoz az $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ rendezett párokat bijektíven lehet hozzárendelni oly módon, hogy a P ponthoz rendelt x és y koordináta a P-ből az első és a második egyenesre bocsájtott merőleges talppontjának megfelelő szám legyen a kérdéses egyenesen.



1.1. ábra. Descartes-féle koordinátarendszer

A koordinátarendszer felvétele után a sík pontjai valós számpárokkal, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ elemeivel jellemezhetők, ekkor „sík”-on az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazt értjük.

Az $\{(x, x^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\} = f$ reláció függvény lesz, mert $(x, y), (x, z) \in f$ esetén $y = x^2 = z$ teljesül. Ezt $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ módon is jelölhetjük. Ezen f függvény (mint reláció) inverze az $f^{-1} = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ reláció, ami nem függvény, így f nem invertálható. Ha az f $f|_{[0,+\infty[}$ leszűkítését tekintjük, úgy $(f|_{[0,+\infty[})^{-1}$ már függvény, így $f|_{[0,+\infty[}$ invertálható.



1.2. ábra. Nem invertálható függvény

2. definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***függvény korlátos***, ha $f(E)$ korlátos.
Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***függvény alulról*** (***felülről***) ***korlátos***, ha $f(E)$ alulról (felülről) korlátos.
A $\sup(f(E))$, $\inf(f(E))$ számokat az f pontos felső, illetve pontos alsó korlátjának (***supremum***ának, illetve ***infimum***ának) nevezzük E-n.

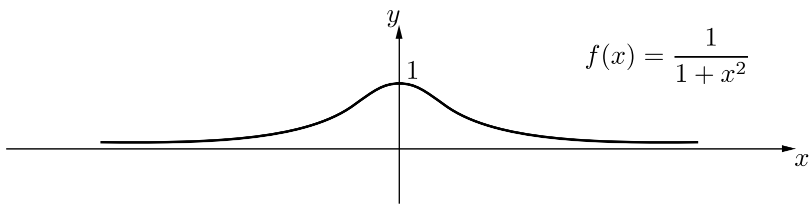
3. definíció. Ha az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén létezik $x_1, x_2 \in E$, hogy

$$\sup f(E) = f(x_1), \quad \inf f(E) = f(x_2) \ ,$$

akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik ***abszolút maximum***a, illetve ***minimum***a E-n.
Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in E$-ben ***helyi*** (***lokális***) ***maximum***a, illetve ***minimum***a van, ha létezik $K(x_0, \delta)$, hogy $x \in K(x_0, \delta) \cap E$-re $f(x) \leq f(x_0)$, illetve $f(x) \geq f(x_0)$ teljesül.

Példa. Az $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény teljesíti az alábbiakat.

– *Alulról korlátos*, mert $0 < \dfrac{1}{1+x^2}$, hiszen ez, $1+x^2>0$ miatt ekvivalens a $0<1$ igaz egyenlőtlenséggel $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén.



1.3. ábra. Korlátos függvény

– *Felülről korlátos*, mert $\dfrac{1}{1+x^2} \le 1$, hiszen ez az $1 \le 1+x^2$, illetve $0 \le x^2$ igaz egyenlőtlenséggel ekvivalens $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén.
– Így f korlátos függvény.
– $\inf f(E) = 0$. Egyrészt 0 alsó korlátja f-nek. Másrészt f minden alsó korlátja ≤ 0. Tegyük fel ellenkezőleg, hogy $\exists\ \varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$ alsó korlátja $f(E)$-nek. Belátjuk, hogy ez nem lehetséges. Ekkor ugyanis $\exists\ x \in \mathbb{R}$, hogy

$$\frac{1}{1+x^2} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < 1 + x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} < |x| \ ,$$

utóbbi igaz $\forall\ |x| > \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}$-re (kihasználtuk, hogy az $\varepsilon < 1$ feltevés miatt $\frac{1}{\varepsilon} - 1 > 0$).
– $\sup f(E) = 1$ hasonlóan belátható.
– $\nexists\ x \in \mathbb{R}$, hogy $\dfrac{1}{1+x^2} = 0$, mert ha létezne, úgy $1 = 0$ adódna, ami lehetetlen. Így f-nek nem létezik abszolút minimuma.
– $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 \iff x = 0$, így f-nek 0-ban abszolút maximuma van, és ez 1.
– $x = 0$-ban f-nek lokális maximuma van, ami 1. De $\nexists\ x_0 \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, hogy ott lokális minimuma lenne.

4. definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***függvény monoton növekvő*** (***csökkenő***), ha $\forall\ x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$-re $f(x_1) \le f(x_2)$, (illetve $f(x_1) \ge f(x_2)$) teljesül (szigorú monotonitásnál $f(x_1) < f(x_2)$, illetve $f(x_1) > f(x_2)$).
Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $x_0 \in E$-n növekvően (csökkenően) halad át,

ha létezik $K(x_0, \delta)$, hogy $\forall\ x < x_0,\ x \in K(x_0, \delta) \cap E$ esetén

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0))$$

és $x > x_0,\ x \in K(x_0, \delta) \cap E$-re

$$f(x) \ge f(x_0) \qquad (f(x) \le f(x_0))$$

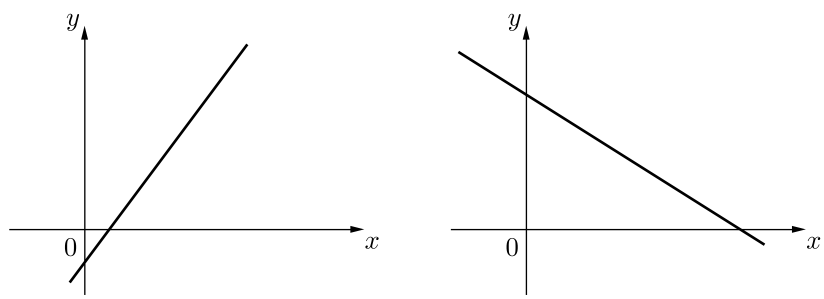
teljesül.

Példa. Az $f(x) = ax + b$ $(x \in \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R},\ a \ne 0)$ függvény

– $a > 0$ esetén szigorúan monoton növekvő, mert $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2$ esetén

$$ax_1 < ax_2\ , \quad \text{amiből} \quad f(x_1) = ax_1 + b < ax_2 + b = f(x_2)$$

(az egyenlőtlensége ismert tulajdonságai alapján);



1.4. ábra. Monoton növekvő és csökkenő függvények

– $a < 0$ esetén szigorúan monoton csökkenő, mert $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2$ esetén

$$ax_1 > ax_2\ , \quad \text{amiből} \quad f(x_1) = ax_1 + b > ax_2 + b = f(x_2)\ .$$

2. A folytonosság fogalma

Az f függvény x_0 pontbeli folytonossága azt a szemléletes tartalmat ragadja meg, hogy $f(x)$ tetszőlegesen kicsit tér el $f(x_0)$-tól, ha x elég közel van x_0-hoz.

1. definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $x_0 \in E$ ***pontban folytonos***, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\ x \in E,\ |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény ***folytonos*** az $A \subseteq E$ ***halmazon***, ha A minden pontjában folytonos.

Megjegyzések.

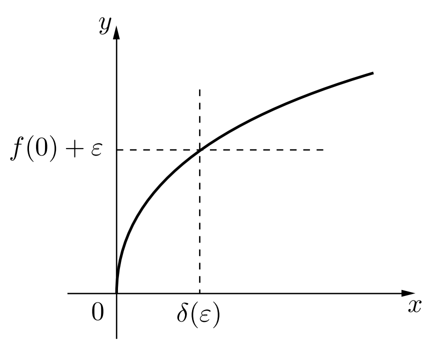
1. A definíció ***környezetes átfogalmazás***a:
   Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $x_0 \in E$ pontban folytonos, ha $\forall$ $K(f(x_0), \varepsilon)$-hoz $\exists$ $K(x_0, \delta(\varepsilon))$, hogy $\forall$ $x \in E$, $x \in K(x_0, \delta(\varepsilon))$ esetén $f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$.
2. A folytonosság pontbeli (lokális) tulajdonság, amely globálissá tehető (a definíció második része szerint).

Példa.

1. Egy $f : \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény (sorozat) folytonos $\mathbb{N}$-en.

2.1. ábra.

   Megmutatjuk, hogy $\forall$ $n_0 \in \mathbb{N}$ esetén folytonos, ugyanis $\forall$ $\varepsilon > 0$ esetén legyen $\delta(\varepsilon) = \dfrac{1}{2}$, ekkor az $|n - n_0| < \dfrac{1}{2}$ egyenlőtlenség csak $n = n_0$-ra teljesül, és ezért $|f(n) - f(n_0)| = |f(n_0) - f(n_0)| = 0 < \varepsilon$.
2. Az $f(x) = c$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény folytonos $\mathbb{R}$-en. Ugyanis $\forall$ $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban $\forall$ $\varepsilon > 0$ esetén például $\delta(\varepsilon) = 1$-et választva, ha $x \in \mathbb{R}$ és $|x - x_0| < 1$, akkor $|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.
3. Az $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény folytonos $\mathbb{R}$-en. Hiszen $\forall$ $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban $\forall$ $\varepsilon > 0$-hoz $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$-t választva, ha $x \in \mathbb{R}$ és $|x - x_0| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$, akkor $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$.



2.2. ábra.

4. Az $f(x) = \sqrt[n]{x}$ $(x \geq 0)$ függvény folytonos $x_0 = 0$-ban. Ugyanis $\forall\, \varepsilon > 0$-ra, ha $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^n$, akkor $\forall\, x \geq 0,\ |x - 0| = x < \varepsilon^n$ esetén $|f(x) - f(0)| = |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}| = \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{\varepsilon^n} = \varepsilon$.
5. Az
$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0\,, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$
(Dirichlet-függvény) sehol sem folytonos. Hiszen $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$ esetén $\varepsilon = 1$-hez $\forall\, \delta(\varepsilon) > 0$-t választva (felhasználva, hogy $\forall\, K(x_0, \delta(\varepsilon))$-ban van racionális és irracionális szám is) $\exists\, x$, hogy $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ és $|f(x) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1$, ha $x_0 \in \mathbb{Q}$, illetve $|f(x) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1$, ha $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. tétel (átviteli elv). *Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor, és csak akkor folytonos az $x_0 \in E$ pontban, ha minden x_0-hoz konvergáló E-beli $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén az $\langle f(x_n) \rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

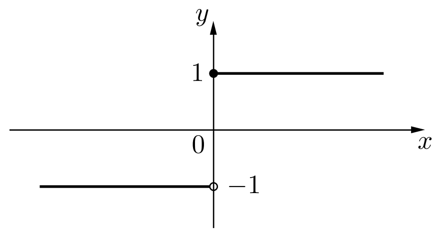
Bizonyítás.

a) Legyen f folytonos $x_0 \in E$-ben. Ekkor $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\, x \in E \cap K(x_0, \delta(\varepsilon))$ esetén $f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$. Legyen $\langle x_n \rangle$ olyan, hogy $x_n \in E,\ x_n \to x_0$. Ekkor $\delta(\varepsilon)$-hoz $\exists\, n(\delta(\varepsilon))$, hogy $\forall\, n \geq n(\delta(\varepsilon))$-ra $x_n \in K(x_0, \delta(\varepsilon)) \cap E$, és így $f(x_n) \in K(f(x_0), \varepsilon)$, azaz $f(x_n) \to f(x_0)$.

b) Tegyük fel, hogy $\forall\, x_n \to x_0$ $(x_n \in E)$ esetén $f(x_n) \to f(x_0)$. Feltesszük, hogy f nem folytonos $x_0 \in E$-ben, azaz $\exists\, \varepsilon > 0$, hogy $\forall\, \delta(\varepsilon) > 0$-ra, így $\delta(\varepsilon) = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$-re is $\exists\, x_n \in E$, hogy
$$d(x_0, x_n) < \frac{1}{n}\,, \quad \text{de} \quad d(f(x_0), f(x_n)) \geq \varepsilon.$$
Ez azt jelenti, hogy $d(x_0, x_n) \to 0$, azaz $x_n \to x_0$, de $f(x_n)$ nem tart $f(x_0)$-hoz, ami ellentmondás. Tehát f folytonos x_0-ban. □

Megjegyzés. A folytonosság itt megadott ekvivalens megfogalmazását sorozatos vagy Heine-féle definíciójának nevezik.

Példa. Az
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \geq 0, \\ -1\,, & x < 0, \end{cases}$$
függvény nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban. Mert ha $\langle x_n \rangle$ olyan sorozat, hogy $x_n < 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ és $x_n \to 0$, akkor $f(x_n) = -1$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ és így $f(x_n) \to -1 \neq 1 = f(0)$.



2.3. ábra.

2. definíció. Az $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény ***balról*** (***jobbról***) ***folytonos*** az $x_0 \in E$ pontban, ha az f-nek $(-\infty, x_0] \cap E$-re (illetve $[x_0, +\infty) \cap E$-re) való leszűkítése folytonos x_0-ban.

Megjegyzések.

1. A definíció adja, hogy f akkor és csak akkor balról (illetve jobbról) folytonos x_0-ban, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in E,\ x_0 - \delta(\varepsilon) < x \leq x_0$ (illetve $x_0 \leq x < x_0 + \delta(\varepsilon)$) esetén $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.
2. Megfogalmazható a sorozatos változat is.

Példa. Az előbbi példa függvénye $x_0 = 0$-ban jobbról folytonos, mert leszűkítése $E = [0, +\infty[$-re konstans, így folytonos E-n. Ugyanakkor a függvény balról nem folytonos $x_0 = 0$-ban, amit az előbbi példa bizonyításának ismétlésével láthatunk be.

2. tétel. *Az $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor folytonos az x_0-ban, ha ott jobbról és balról is folytonos.*

3. tétel (jeltartás). *Ha az $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $x_0 \in E$-ben és $f(x_0) \neq 0$, akkor $\exists\ K(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}$, hogy $\forall\ x \in K(x_0, \delta) \cap E$ esetén* $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f(x)$.

Bizonyítás. A folytonosság miatt $\varepsilon = \dfrac{1}{2}|f(x_0)|$-hoz $\exists\ K(x_0, \delta)$, hogy $\forall\ x \in K(x_0, \delta) \cap E$ esetén $f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$, azaz $|f(x)| > \dfrac{1}{2}|f(x_0)|$. Tehát $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f(x)$, ha $x \in K(x_0, \delta) \cap E$. □

3. definíció. Az $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény ***egyenletesen folytonos*** az $E_1 \subset E$ halmazon, ha $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall\ x, y \in E_1,\ |x - y| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Megjegyzések.

1. Ha f az E_1-en egyenletesen folytonos, akkor ott folytonos is. A megfordítás nem igaz.

2. Az $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény nem egyenletesen folytonos az $E_1 \subset E$ halmazon, ha $\exists\ \varepsilon > 0,\ \forall\ \delta(\varepsilon) > 0\ \ \exists\ x, y \in E_1,\ |x-y| < \delta(\varepsilon)$, de $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

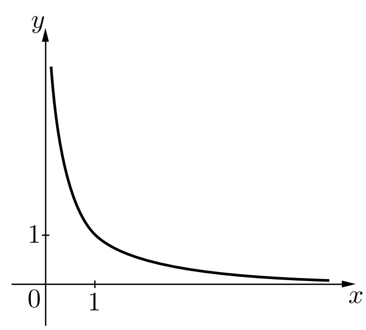
Példa. Legyen $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$.
f egyenletesen folytonos az $E_1 = [1, +\infty[\subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ intervallumon, mert

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{|xy|} \leq |x-y| \qquad (x, y \in E_1)$$

miatt $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ választással $\forall\ x, y \in E_1$ és $|x-y| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ következik.
f nem egyenletesen folytonos az $E_2 =]0, 1] \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ intervallumon, mert ha $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, akkor $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$-ra $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy $\dfrac{1}{n} < \delta(\varepsilon)$ és $x = \dfrac{1}{n}$, $y = \dfrac{1}{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén

$$|x - y| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right| = \frac{1}{n(n-1)} < \frac{1}{n} < \delta(\varepsilon)\ ,$$

de $|f(x) - f(y)| = |n - (n-1)| = 1 > \dfrac{1}{2}$.



2.4. ábra.

3. Folytonosság és műveletek

1. tétel. *Ha az $f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $x_0 \in E$-ben, akkor az $f + g$ és λf $(\lambda \in \mathbb{R})$ is folytonosak x_0-ban.*

Bizonyítás. Az átviteli elv szerint f, g akkor és csak akkor folytonosak x_0-ban, ha $\forall\ x_n \to x_0$ $(x_n \in E)$ esetén $f(x_n) \to f(x_0)$, $g(x_n) \to g(x_0)$. Tehát

(a sorozatokról tanultak szerint)

$$f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0)\ .$$

Azaz (ismét használva az átviteli elvet) $f + g$ folytonos x_0-ban.
A másik állítás hasonlóan bizonyítható. $\square$

2. tétel. *Ha az $f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $x_0 \in E$-ben, akkor az $f \cdot g$, és $g(x) \neq 0$ ($x \in E$) esetén, $\dfrac{f}{g}$ is folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás. Mint az előbb. $\square$

Példa.

1. Az $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$ pontban folytonos, mert $f(x) = x^2 = x \cdot x$ miatt két, x_0-ban folytonos függvény szorzata.
2. Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) függvény $\forall\ x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pontban folytonos, mert az $f_1(x) = 1$ és $f_2(x) = x \neq 0$, x_0-ban folytonos függvények hányadosa.

3. tétel (az összetett függvény folytonossága). *Legyenek $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : f(E) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvények. Ha f folytonos az $x_0 \in E$ pontban, g folytonos az $y_0 = f(x_0)$-ban, akkor a $h = g \circ f$ függvény folytonos az x_0-ban.*

Bizonyítás. g folytonossága miatt: $\forall\ K(g(y_0), \varepsilon)$-hoz $\exists\ K(y_0, \delta_1(\varepsilon))$, hogy
$\forall\ y \in K(y_0, \delta_1(\varepsilon)) \cap f(E)$ esetén $g(y) \in K(g(y_0), \varepsilon)$;
f folytonossága miatt: $K(y_0 = f(x_0), \delta_1(\varepsilon))$-hoz $\exists\ K(x_0, \delta(\varepsilon))$, hogy
$\forall\ x \in K(x_0, \delta(\varepsilon)) \cap E$ esetén $f(x) = y \in K(y_0, \delta_1(\varepsilon))$,
így $g(f(x)) \in K(g(f(x_0)), \varepsilon)$, azaz $g \circ f$ függvény folytonos az x_0-ban. $\square$

Példa. A $h(x) = \sqrt{x^2 + x}$ ($x \geq 0$) függvény folytonos az $x_0 = 0$-ban. Hiszen $f(x) = x^2 + x$ ($x \geq 0$) és $g(x) = \sqrt{x}$ választással $h = g \circ f$, továbbá f folytonos $x_0 = 0$-ban (hiszen két folytonos függvény összege), g folytonos $f(0) = 0$-ban (az $\sqrt[n]{x}$ 0-beli folytonossága miatt), így alkalmazható tételünk.

4. Folytonosság és topologikus fogalmak

1. tétel (a folytonosság topologikus megfelelője). *Az $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor folytonos E-n, ha bármely $B \subset \mathbb{R}$ nyílt halmazra*
$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ nyílt.

2. tétel (kompaktság és folytonosság). *Legyen $E \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, $f : E \to \mathbb{R}$ folytonos függvény E-n, akkor $f(E)$ kompakt.*
(Röviden: kompakt halmaz folytonos képe kompakt.)

Bizonyítás. Legyen $\{o_v\}$ tetszőleges nyílt lefedése $f(E)$-nek. Ekkor az $f^{-1}(o_v)$ halmazok nyíltak, és $\{f^{-1}(o_v)\}$ nyílt lefedése E-nek. De E kompakt, így léteznek az $f^{-1}(o_1), \ldots, f^{-1}(o_n)$ nyílt halmazok, hogy $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} f^{-1}(o_i) \implies$ $f\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} f^{-1}(o_i)\right) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} o_i$ lefedi $f(E)$-t, tehát $f(E)$ kompakt. □

Következmények.

1. $f(E)$ korlátos és zárt.
2. f felveszi E-n az abszolút minimumát és maximumát (mert $\sup f(E)$ és $\inf f(E)$ is eleme $f(E)$-nek, ha $f(E)$ zárt és korlátos).

3. tétel (kompaktság és egyenletes folytonosság (Heine)).
Legyen $E \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, $f : E \to \mathbb{R}$ folytonos függvény E-n, akkor f egyenletesen folytonos E-n.
(Röviden: kompakt halmazon folytonos függvény egyenletesen folytonos.)

Példa. Az $f(x) = ax^2 + bx + c,\ x \in [-1, 5],\ (a, b, c \in \mathbb{R})$ függvény egyenletesen folytonos a $[-1, 5]$ intervallumon, mert – folytonos függvények összegeként – folytonos, és $E = [-1, 5]$ kompakt halmaz (hiszen korlátos és zárt).

VI. fejezet
Függvények határértéke

1. Alapfogalmak és tételek

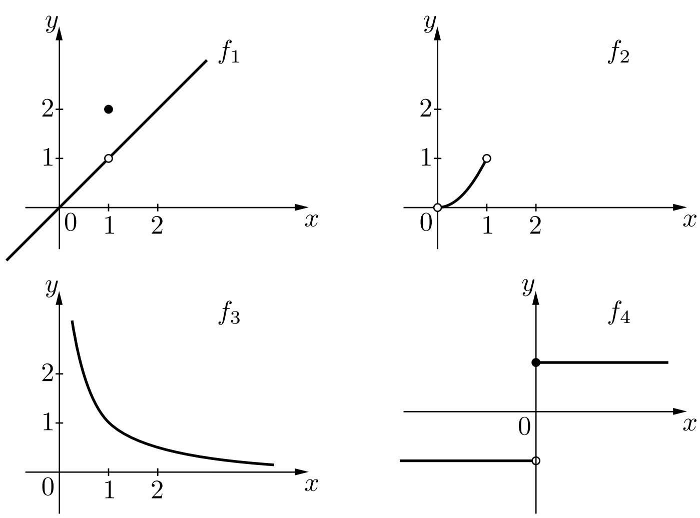
KÉRDÉS: Hogyan „viselkednek” a következő függvények a megadott pont, vagy pontok környezetében?

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_1(x) = \begin{cases} x\ , & x \neq 1 \\ 2\ , & x = 1 \end{cases}, \qquad x_0 = 0, 1, +\infty, -\infty\ ;$$

$$f_2 :]0,1[\to \mathbb{R}, \qquad f_2(x) = x^2\ , \qquad x_0 = 0, 1\ ;$$

$$f_3 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \qquad f_3(x) = \frac{1}{x}\ , \qquad x_0 = 0, 2, +\infty\ ;$$

$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_4(x) = \begin{cases} 1\ , & x \geq 0 \\ -1\ , & x < 0 \end{cases}, \qquad x_0 = 0\ .$$



1.1. ábra.

Megállapítások.

1. x_0 minden esetben torlódási pontja az értelmezési tartománynak (de nem mindig eleme).
2. $\exists\ A \in \mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{R}_b$), hogy $x_n \to x_0$ esetén $f(x_n) \to A$. (Kivétel f_4, ekkor $x_n \to 0$ ($x_n > 0$ vagy $x_n < 0$) esetén $f_4(x_n) \to 1$ vagy $f_4(x_n) \to 0$).
3. A nem feltétlenül egyenlő $f(x_0)$ (f_4 esetén nem is létezik).

1. definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***függvény***nek az $x_0 \in E'$ pontban létezik ***határértéke***, ha létezik $A \in \mathbb{R}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$,

$$x \in E,\ 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon\ .$$

A-t az f függvény x_0-beli határértékének nevezzük, és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ vagy $f(x) \to A$, ha $x \to x_0$, jelöléseket használjuk.

Megjegyzések.

1. Fontos megjegyezni, hogy egyrészt csak az értelmezési tartomány x_0 torlódási pontjában beszélünk határértékről, másrészt a definícióban az f függvény x_0-ban felvett értéke nem játszik szerepet. Az első feltétel azért kell, mert így x_0-at meg tudjuk közelíteni tőle különböző (értelmezési tartománybeli) pontokkal. A második dolog miatt pedig az x_0-ban „elrontott" (lásd f_1-et az $x_0 = 1$ pont esetén), vagy x_0-ban nem is definiált függvény határértékére is „értelmes" fogalmat kapunk.
2. Megfogalmazható a környezetes változat is:
   Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in E'$ pontban $\exists$ határértéke, ha $\exists\ A \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\ K(A, \varepsilon)$-hoz $\exists\ K(x_0, \delta(\varepsilon))$, $\forall\ x \in K(x_0, \delta(\varepsilon)) \setminus \{x_0\}$, $x \in E$ esetén $f(x) \in K(A, \varepsilon)$.
3. A határérték létezése pontbeli tulajdonság.
4. Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$-ben ***nem létezik határértéke***, ha $x_0 \notin E'$, vagy $x_0 \in E'$ és $\forall\ A \in \mathbb{R}$, $\exists\ \varepsilon > 0$, $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$ esetén $\exists\ x \in E,\ x \in K(x_0, \delta(\varepsilon)) \setminus \{x_0\},\ f(x) \notin K(A, \varepsilon)$.
5. A határérték (ha létezik) egyértelműen meghatározott (ez indirekt bizonyítással – hasonlóan, mint a sorozatoknál – egyszerűen belátható).

Példa.

1. Az $f(x) = c$ ($x \in \mathbb{R}$) függvénynek $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$-ben a határértéke c. Hiszen x_0 torlódási pontja $\mathbb{R}$-nek, és $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$ esetén, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, akkor $|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ következik.
2. Az $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$) függvénynek $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$-ben a határértéke x_0. Ugyanis x_0 torlódási pont, és $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$ esetén, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$, akkor $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$ következik.

3. Az előző példabeli f_1 függvénynek $x_0 = 1$-ben létezik határértéke és az 1. Hiszen $x_0 = 1$ torlódási pontja $\mathbb{R}$-nek, és $\forall\ \varepsilon > 0$-ra, ha $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, akkor $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $0 < |x-1| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ esetén $|f(x)-1| = |x-1| < \varepsilon$ következik.

2. definíció. Legyen $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény, és x_0 torlódási pontja $[x_0, +\infty) \cap E$-nek (vagy $(-\infty, x_0] \cap E$)-nek). Az f függvénynek az x_0-ban $\exists$ ***jobb-*** (vagy ***bal-***) ***oldali határérték***e, ha
$\exists\ A \in \mathbb{R},\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall\ x \in E,\ x_0 < x < x_0 + \delta(\varepsilon)$ (vagy $x_0 - \delta(\varepsilon) < x < x_0) \implies |f(x) - A| < \varepsilon$.
A-t f jobb- (illetve bal-) oldali határértékének nevezzük x_0-ban, és a

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = A = f(x_0 + 0) \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \to x_0-0} f(x) = A = f(x_0 - 0)$$

jelölést használjuk.

Megjegyzések.

1. A definíció a leszűkítés segítségével is megfogalmazható. Például: Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény, és x_0 torlódási pontja $[x_0, +\infty[\cap E$-nek. Az f függvénynek az x_0-ban létezik jobboldali határértéke, ha az $f|_{[x_0,+\infty[\cap E}$ függvénynek létezik határértéke x_0-ban.
2. A környezetes átfogalmazás is megadható.
3. Könnyen belátható a következő:
   Legyen $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény, és x_0 torlódási pontja $[x_0, +\infty) \cap E \wedge (-\infty, x_0] \cap E$-nek. Az f függvénynek x_0-ban akkor, és csak akkor létezik határértéke, ha létezik $f(x_0 - 0)$ és $f(x_0 + 0)$ és $f(x_0 - 0) =$
   $= f(x_0 + 0) = A$ (f határértéke x_0-ban).

Példa. A fenti f_4 függvénynek $x_0 = 0$-ban a jobboldali határértéke 1, mert 0 torlódási pontja a $[0, +\infty[$-nek és $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$ esetén $\forall\ x \in]0, +\infty[$-re $|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$ következik.
f_4-nek $x_0 = 0$-ban a baloldali határértéke -1, mert 0 torlódási pontja a $]-\infty, 0]$-nak és $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$ esetén $\forall\ x \in]-\infty, 0[$-ra $|f(x)-(-1)| =$ $|-1-(-1)| = 0 < \varepsilon$ következik.
Az f_4 függvény jobb-, és balodali határértéke különbözik $x_0 = 0$-ban, így ott nem létezik határértéke.

3. definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények $x_0 \in E'$-ben a ***határérték***e $+\infty$ (vagy $-\infty$), ha $\forall\ K$-hoz $\exists\ \delta(K) > 0,\ \forall\ x \in E,\ 0 < |x - x_0| < \delta(K)$ esetén $f(x) > K$ (vagy $f(x) < K$).

Megjegyzések.

1. A definíció környezetekkel is megfogalmazható.
2. A $+\infty$ (vagy $-\infty$) egyoldali határértékként is megfogalmazható.

3. Az $x = x_0$ egyenest az f függvény ***függőleges aszimptotá***jának nevezzük, ha f határértéke (vagy egyoldali határértéke) x_0-ban $+\infty$ vagy $-\infty$.

Példa. A fenti f_3 függvénynek az $x_0 = 0$-ban a határértéke $+\infty$, mert 0 torlódási pontja $\mathbb{R}_+$-nak és $\forall$ K-hoz

$$\delta(K) = \begin{cases} K^{-1} & \text{, ha } K > 0 \\ \\ \text{tetszőleges} & \text{, ha } K \leq 0 \end{cases}$$

választással, ha $x \in \mathbb{R}_+$ és $|x - 0| = x < \dfrac{1}{K}$, illetve $|x - 0| = x < \delta\varepsilon$, akkor $f(x) = \dfrac{1}{x} > K$, illetve $f(x) > 0 \geq K$ következik.

4. definíció. Legyen $E \subseteq \mathbb{R}$ felülről (alulról) nem korlátos halmaz, $f : E \to \mathbb{R}$ adott függvény. Az f függvénynek $+\infty$ (vagy $-\infty$)***-ben*** létezik ***határérték***e, ha $\exists\ A \in \mathbb{R}$, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M \in \mathbb{R}$, $\forall\ x \in E \wedge x > M$ $(\vee x < M)$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$. Ekkor A-t f $+\infty$ (vagy $-\infty$)-beli határértékének nevezzük, és rá a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \vee \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ jelölést használjuk.

Megjegyzések.

1. A definíció környezetes alakban is megfogalmazható.
2. Az $l(x) = ax + b$ $(x \in \mathbb{R})$ lineáris függvény gráfját (egyenest) az $f :]c, +\infty[\to \mathbb{R}$ (illetve $f :] - \infty, c[\to \mathbb{R}$) függvény aszimptotájának nevezzük $+\infty$-ben (illetve $-\infty$-ben), ha $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - l(x)] = 0$ (illetve $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - l(x)] = 0$). Speciálisan, ha $a = 0$, úgy az $l(x) = b$ $(x \in \mathbb{R})$ egyenest vízszintes aszimptotának nevezzük, ha $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (illetve $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$) teljesül.
3. A példatárban megmutatjuk, hogy az $f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvénynek $x_0 = 0$-ban függőleges aszimptotája van. Az $y = x$ egyenes pedig aszimptótája a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben.
4. Az $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvénynek az $x = 0$ egyenletű egyenes (az y-tengely) függőleges, míg az $y = 0$ egyenes (az x-tengely) vízszintes aszimptotája (mindkettő $-\infty$-ben és $+\infty$-ben is).
5. Ha egy $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt tekintünk, akkor megfogalmazható az is, hogy f határértéke $+\infty$ (vagy $-\infty$)-ben $+\infty$ (vagy $-\infty$), azaz a végtelenben vett végtelen határérték.

Példa. Az f_3 függvénynek $+\infty$-ben a határértéke 0, mert $\mathbb{R}_+$ felülről nem korlátos (hiszen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ nem korlátos felülről), továbbá $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\delta(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}$ esetén, ha $x > \delta(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}$, akkor $|f(x) - 0| = \dfrac{1}{x} < \varepsilon$ következik.

1. tétel (átviteli elv). *Az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in E'$ pontban akkor, és csak akkor létezik határértéke, ha bármely x_0-hoz konvergáló $\langle x_n \rangle : \mathbb{N} \to E \backslash \{x_0\}$ sorozat esetén létezik $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.*

Bizonyítás. Úgy, mint a folytonosságnál, csak az ottani $K(f(x_0), \varepsilon)$ helyett $K(A, \varepsilon)$-t és az x_0-beli folytonosság helyett x_0-beli határértéket kell mondani. □

Példa. Az, hogy a fejezet elején definiált f_4 függvénynek $x_0 = 0$-ban nem létezik határértéke, az átviteli elvvel könnyen bizonyítható.
Ha $\langle x_n \rangle$ olyan sorozat, hogy $x_n \to 0$ és $x_n > 0$, akkor $\langle f_4(x_n) \rangle = \langle 1 \rangle$ konstans sorozat, melynek határértéke 1.
Ha $\langle x_n \rangle$ olyan sorozat, hogy $x_n \to 0$ és $x_n < 0$, akkor $\langle f_4(x_n) \rangle = \langle -1 \rangle$ konstans sorozat, melynek határértéke -1.
$1 \neq -1$, így igaz a példa állítása.

2. Határérték és műveletek illetve egyenlőtlenségek

A határérték képzése és az alapműveletek „felcserélhetők”.

1. tétel. *Legyenek $f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvények úgy, hogy $x_0 \in E'$-ben $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Ekkor*

a) $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$;
b) $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda f)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \lambda f(x) = \lambda A$, $\quad (\lambda \in \mathbb{R})$;
c) $\lim\limits_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$;
d) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, *ha* $g \neq 0,\ B \neq 0$.

Bizonyítás. Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján. □

Példa. Az $f(x) = 3x^2+2x+5$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénynek $x_0 = 0$-ban a határértéke 5, mert 0 torlódási pontja $\mathbb{R}$-nek és a $g(x) = x$, $h(x) = 5$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények határértéke 0-ban 0, illetve 5, így az $x \to 3x^2$ és $x \to 2x$ határértéke is 0, végül az előbbieket felhasználva f-nek 0-ban a határértéke 5.

2. tétel. *Legyen $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in E'$. Ekkor*

a) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$;

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0,\ f \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{|f(x)|} = +\infty$;

Bizonyítás. Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján. □

Példa. Az $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvény határértéke $x_0 = 0$-ban $+\infty$, mert 0 torlódási pontja $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-nak, $\exists \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, így a tétel b) része miatt $\exists \lim\limits_{x\to 0} \left|\dfrac{1}{x^2}\right| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ $(x^2 \neq 0$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Az alábbi tétel azt mutatja, hogy a különböző sorozatok közötti nagyságviszony megfelel a határértékek közötti nagyságviszonynak.

3. tétel. *Legyenek $f, g, h : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvények és $x_0 \in E'$. Ekkor, ha*

a) $\{ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \} \wedge \{ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \} \wedge \{ \exists\, K(x_0, \delta),\ f(x) \leq g(x)$ $\forall\, x \in [K(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}] \cap E \} \Longrightarrow \{ A \leq B \}$;

b) $\{ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \} \wedge \{ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \} \wedge \{ A < B \} \Longrightarrow$ $\{ \exists\, K(x_0,\delta),\ f(x) < g(x)\ \forall\, x \in [K(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}] \cap E \}$;

c) $\{ K(x_0,\delta),\ f(x) \leq h(x) \leq g(x)\ \forall\, x \in [K(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}] \cap E \}$ $\wedge \{ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \} \Longrightarrow \{ \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A \}$.

Bizonyítás. Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján. □

Megjegyzések.

1. A tétel megfogalmazható $+\infty$ (illetve $-\infty$)-ben vett határértékre is.
2. Ha a b) részben $g = 0$ vagy $f = 0$, akkor a jeltartási-tétel adódik. Azaz, ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, akkor van az x_0-nak olyan környezete, melyben $f(x) > 0$; pontosabban $\exists\, K(x_0,\delta),\ f(x) < 0$ vagy $f(x) > 0$ $\forall\, x \in [K(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}] \cap E$.

4. tétel (az összetett függvény határértéke). *Legyenek adottak az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : f(E) \to \mathbb{R}$ függvények, továbbá $x_0 \in E'$, $y_0 \in (f(E))'$ olyan, hogy $x \neq x_0$ esetén $f(x) \neq y_0$. Létezzen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ és $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = A$. Ekkor $\exists \lim\limits_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = A$.*

Bizonyítás. Mint a folytonosságra vonatkozó megfelelő tételnél, csak $K(g(f(x_0)), \varepsilon)$ helyett $K(A, \varepsilon)$ és $K(f(x_0), \delta_1(\varepsilon))$ helyett $K(y_0, \delta_1(\varepsilon))$, míg a folytonoság helyett a határérték létezése használandó. □

3. A határérték és a folytonosság kapcsolata

Tétel. *Legyen $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény és $x_0 \in E$, $x_0 \in E'$. f akkor és csak akkor folytonos x_0-ban, ha $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Bizonyítás.

a) Ha f folytonos x_0 torlódási pontban, akkor a folytonosság definíciója adja, hogy $\exists\ A = f(x_0)$ határértéke x_0-ban.

b) Ha $\exists\ A = f(x_0)$ határérték, akkor a határérték definíciója miatt $\forall\ K(f(x_0), \varepsilon)$-hoz $\exists\ K(x_0, \delta(\varepsilon))$, hogy $\forall\ x \in E$, $x \in K(x_0, \delta(\varepsilon)) \setminus \{x_0\}$ esetén $f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$. Másrészt $f(x_0) \in K(f(x_0), \varepsilon)$. Így $\forall x \in K(x_0, \delta(\varepsilon))$ és $x \in E$ esetén $f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$, azaz f folytonos x_0-ban. □

Példa. A korábban vizsgált f_1 függvénynek létezik határértéke az $x_0 = 1$-ben és az 1-gyel egyenlő, másrészt $f(1) = 2 \neq 1$, így tételünk szerint f_1 nem folytonos $x_0 = 1$-ben.

Definíció. Ha az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény nem folytonos az $x_0 \in E$ pontban, akkor azt mondjuk, hogy x_0 ***f-nek szakadási helye***, vagy hogy f-nek x_0-ban szakadása van.
Ha $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény és $x_0 \in E^0$ (azaz x_0 belső pont E-ben), és x_0 szakadási helye f-nek, továbbá $\exists \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ és $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$, akkor azt mondjuk, f-nek x_0-ban ***elsőfajú szakadás***a van. Ha még $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, akkor azt mondjuk, hogy ***a szakadás megszüntethető***.
Ha f-nek x_0-ban szakadása van és az nem elsőfajú, akkor azt ***másodfajú szakadás***nak nevezzük.

Példa.

1. f_1 az előbbi példa alapján nem folytonos $x_0 = 1$-ben, így ott szakadása van. $\lim\limits_{x \to 1+0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} f_1(x) = 1$, így a szakadása megszüntethető (változtassuk meg $f_1(1)$ értékét 2-ről 1-re és folytonos lesz).
2. A korábbi f_4 függvény nem folytonos 0-ban, így ott szakadása van, $\lim\limits_{x \to 0+0} f_4(x) = 1 \neq -1 = \lim\limits_{x \to 0-0} f_4(x)$, ezért a szakadás elsőfajú.

3. Belátható, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \text{ ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényre $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$, 0-ban szakadása van, e szakadás másodfajú.

4. Monoton függvények

1. tétel (monotonitás és invertálhatóság). *Ha az $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton E-n, akkor invertálható, és f^{-1} ugyanolyan értelemben szigorúan monoton $f(E)$-n.*

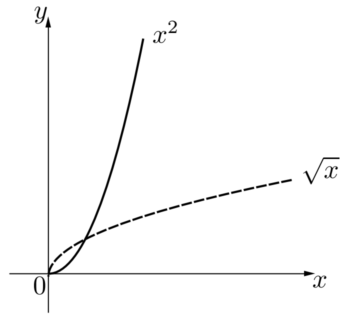
Bizonyítás. f^{-1} is függvény, mert ha nem, úgy $\exists\ x_1 \neq x_2$, hogy $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, amiből $(x_1, y), (x_2, y) \in f$, azaz $f(x_1) = f(x_2)$, ellentétben f szigorú monotonitásával.
Legyen például f szigorúan monoton növekvő és $y_1, y_2 \in f(E)$-re $y_1 < y_2$. Ekkor egyrészt $\exists\ x_1, x_2 \in E$, hogy $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$. Másrészt, ha feltesszük, hogy $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, akkor

$$x_1 = f^{-1}(f(x_1)) \geq f^{-1}(f(x_2)) = x_2$$

következne, ami azt adná (f szigorú monotonitása miatt), hogy $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$, ami ellentmondás. Így $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, azaz f^{-1} szigorúan monoton növekvő. □

Példa.

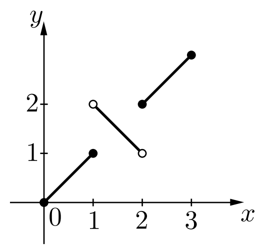
1. Az $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény szigorúan monoton növekedő $[0, +\infty[$-en, mert (az egyenlőtlenségek ismert tulajdonsága alapján) $\forall\ x_1, x_2 \in [0, +\infty[$, $x_1 < x_2 \implies x_1^2 < x_2^2$. Így a tétel miatt létező inverze, az $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ függvény is szigorúan monoton növekvő $[0, +\infty[$-en.



4.1. ábra.

2. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x\ , & \text{ha } x \in [0,1] \ \vee \ [2,3]\ , \\ 3-x\ , & \text{ha } x \in]1,2[\ . \end{cases}$$



4.2. ábra.

Belátható, hogy az $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ függvény invertálható és $f^{-1}(x) = f(x)$ $(x \in [0,3])$. De nem szigorúan monoton növekedő $[0,3]$-on (hiszen $\frac{1}{2} < 1$ és $f(\frac{1}{2}) < f(1)$, viszont $\frac{4}{3} < \frac{5}{3}$ és $f(\frac{4}{3}) > f(\frac{5}{3})$).

Megjegyzés. Az 1. tétel megfordítása nem igaz általában. De igaz a következő:

2. tétel. *Ha az $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény invertálható és folytonos $\langle a,b\rangle$-n, akkor szigorúan monoton $\langle a,b\rangle$-n. (Itt $\langle a,b\rangle$ lehet nyílt, zárt, félig nyílt, félig zárt intervallum is.)*

3. tétel. *Ha az $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és szigorúan monoton, akkor f^{-1} folytonos.*

Megjegyzés. Egy $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ monoton függvény szakadási helyeinek halmaza megszámlálható.

VII. fejezet

Függvénysorozatok és függvénysorok, elemi függvények

1. Függvénysorozatok és függvénysorok konvergenciája

1. definíció. Legyenek adottak az $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ függvények. Az $\langle f_n \rangle$ sorozatot ***függvénysorozat***nak, míg ha

$$S_n = f_1 + ... + f_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $\langle S_n \rangle$-t ***függvénysor***nak nevezzük (az utóbbi esetben a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, vagy $\sum f_n$ jelöléseket használjuk).
Ha még adott az $f_0 : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény is, úgy azt az $\langle S_n \rangle$ függvénysorozatot, melynél $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ is függvénysornak nevezzük és rá a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ vagy $\sum f_n$ jelöléseket használjuk.

2. definíció. Az $\langle f_n \rangle$ ***függvénysorozat az*** $x \in E$***-ben konvergens***, ha az $\langle f_n(x) \rangle$ számsorozat konvergens. Az $\langle f_n \rangle$ ***függvénysorozat pontonként konvergens az*** $E_1 \subset E$ ***halmazon***, ha az $\langle f_n(x) \rangle$ számsorozat $\forall\ x \in E_1$ esetén konvergens. Ekkor az

$$f(x) \doteq \lim_{n \to \infty} f_n(x) \qquad (x \in E_1)$$

szerint értelmezett függvényt az $\langle f_n \rangle$ függvénysorozat ***határfüggvény***ének nevezzük és azt mondjuk, hogy az $\langle f_n \rangle$ pontonként konvergál E_1-n az f függvényhez. Azon pontok halmazát, melyekre $\langle f_n(x) \rangle$ konvergens a függvénysorozat ***konvergencia tartomány***ának is nevezzük.
A $\sum f_n$ függvénysor az $x \in E$-ben konvergens, illetve az $E_1 \subset E$ halmazon pontonként konvergens, ha az $\langle S_n(x) \rangle$ számsorozat $x \in E$, illetve

$\forall\ x \in E_1$ esetén konvergens. Ekkor az

$$f(x) \doteq \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{n=0\vee 1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in E_1)$$

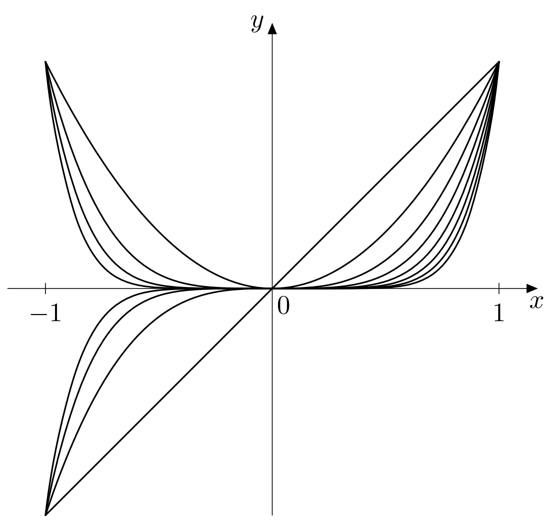
szerint értelmezett függvényt a $\sum f_n$ függvénysor ***összegfüggvény***ének nevezzük és azt mondjuk, hogy $\sum f_n$ pontonként konvergál E_1-en az f függvényhez. Azon pontok halmazát, melyekre $\sum f_n(x)$ konvergens a függvénysor ***konvergencia tartomány***ának nevezzük.

Példa.

1. Legyen $f_n(x) = x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, akkor az $\langle x^n \rangle$ függvénysorozat (a nevezets sorozatok fejezet 1. tétele szerint) akkor konvergens, ha $x \in]-1, 1]$, továbbá határfüggvénye az

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{ha } x \in]-1, 1[\ , \\ 1\ , & \text{ha } x = 1\ , \end{cases}$$

függvény.



1.1. ábra.

2. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ függvénysor (a soroknál tanultak szerint) konvergens, ha $|x| < 1$ $(x \in \mathbb{R})$ és összege az $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ függvény.

Megjegyzés. A $\sum f_n$ függvénysor pontonkénti konvergenciája egy $E_1 \subseteq E$ halmazon azt jelenti, hogy $\forall\ x \in E_1$-re $\exists\ f(x) \in \mathbb{R}$, $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon, x)$, hogy $\forall\ n \geq n(\varepsilon, x)$ esetén $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. (Ekkor $f : E_1 \to \mathbb{R}$ nyilván az összegfüggvény E_1-en.) Látható, hogy az $n(\varepsilon, x)$ küszöbszám függ x-től is (a konvergencia „nem egyenletes").

3. definíció. Az $\langle f_n \rangle$ ***függvénysorozat*** (illetve a $\sum f_n$ függvénysor) ***egyenletesen konvergál az*** $E_1 \subseteq E$ ***halmazon*** az $f : E_1 \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (illetve $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$) $\forall\ x \in E_1$-re. Ilyenkor $\langle f_n \rangle$-et (illetve $\sum f_n$-et) egyenletesen konvergensnek nevezzük E_1-en.

Példa. Az $\langle x^n \rangle$ függvénysorozat az $E_1 = [-r, r]$ $(0 < r < 1)$ halmazon egyenletesen konvergál az $f :]-r, r[\to \mathbb{R},\ f(x) = 0$ függvényhez. Ugyanis egyrészt $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = |x^n| \leq |r^n|$ $(x \in E_1)$, másrészt $r \in]0, 1[$ miatt $\langle r^n \rangle$ nullsorozat, így $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ esetén $|r^n| < \varepsilon$, és ezt az előbbi egyenlőtlenséggel összevetve kapjuk, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ esetén $|x^n - 0| < \varepsilon\ \forall\ x \in E_1$, ami az egyenletes konvergencia definíciója szerint adja az állítást.

1. tétel (Cauchy-féle konvergencia kritérium függvénysorozatok egyenletes konvergenciájára). *Legyen $\langle f_n \rangle$ $(f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ függvények egy sorozata, $E_1 \subseteq E$ nemüres halmaz. Az $\langle f_n \rangle$ függvénysorozat akkor és csak akkor egyenletesen konvergens E_1-en, ha $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\forall\ n, m \geq n(\varepsilon)$ $(n > m)$ esetén $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, $\forall\ x \in E_1$.*

Következmény (Cauchy-féle konvergencia kritérium függvénysorok egyenletes konvergenciájára). Legyen $\sum f_n$ egy függvénysor $(f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R})$, $E_1 \subset E$ nemüres halmaz. A $\sum f_n$ függvénysor akkor és csak akkor egyenletesen konvergens E_1-en, ha $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\forall\ n, m \geq n(\varepsilon)$ $(n > m)$ esetén $|S_n(x) - S_m(x)| = \left| \sum\limits_{i=m+1}^{n} f_i(x) \right| < \varepsilon\ \ \forall\ x \in E$.

2. tétel (Weierstass elegendő feltétele függvénysorok egyenletes konvergenciájára). *Legyenek adottak az $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ függvények. Legyen továbbá $\sum a_n$ egy olyan nemnegatív tagú konvergens számsor, hogy $|f_n(x)| \leq a_n$ $(\forall\ x \in E,\ n \in \mathbb{N})$. Ekkor a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens E-n.*

Bizonyítás. A sorokra és függvénysorokra vonatkozó Cauchy-kritériumok alapján. A $\sum a_n$ konvergenciája miatt $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n(\varepsilon)$, hogy $\forall\ n, m \geq n(\varepsilon)$

$(n > m)$ esetén

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \le \sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon \ , \quad \text{ha } x \in E$$

$\Longrightarrow \ \sum f_n$ egyenletesen konvergens. □

3. tétel (az összegfüggvény folytonosságának elegendő feltétele). *Legyenek $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ folytonos függvények, tegyük fel, hogy a $\sum f_n$ sor egyenletesen konvergál E-n az $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényhez. Ekkor f folytonos E-n.*
(Röviden: folytonos függvények egyenletesen konvergens sorának összegfüggvénye folytonos.)

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in E$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges.
$\sum f_n$ egyenletesen konvergens $\Longrightarrow$ $\dfrac{\varepsilon}{3} > 0$-hoz $\exists\ n\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$, $\forall\ n \ge n\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$, és $x \in E$-re $|S_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Az $S_n : E \to \mathbb{R}$ függvény tetszőleges, de rögzített $n \ge n\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$ értékre folytonos x_0-ban $\Longrightarrow$ $\exists\ \delta_0\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$, $\forall\ x \in E,\ |x - x_0| < \delta_0\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$-ra $|S_n(x) - S_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Most $\forall\ \varepsilon > 0$-ra legyen $\delta(\varepsilon) = \delta_0\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$, akkor $\forall\ x \in E,\ |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$-ra

$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$,

ami adja f folytonosságát $\forall\ x_0$-ban, azaz E-n. □

Példa. Ha $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$,
úgy $\forall\ x \in \mathbb{R},\ x \ne 0$ esetén $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ egy $0 < \dfrac{1}{1+x^2} < 1$ kvóciensű mértani sor, továbbá $f_n(0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$, így $\sum f_n$ konvergens $\forall\ x \in \mathbb{R}$, és összegfüggvénye az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1 - \dfrac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2 \ , & \text{ha } x \ne 0, \\ 0 \ , & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény.
A függvénysor nem lehet egyenletesen konvergens, mert $\forall\ f_n$ folytonossága

miatt, tételünk szerint f folytonos lenne, de az összegfüggvény nem folytonos $x = 0$-ban (ugyanis $x_n \to 0$, de $x_n \neq 0$ esetén $f(x_n) \to 1 \neq 0 = f(0)$).

2. Hatványsorok

1. definíció. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (a_n, x, x_0 \in \mathbb{R})$ függvénysort x_0 ***középpontú hatványsor***nak nevezzük.

1. tétel (Cauchy-Hadamard). *Legyen adott a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *valós hatványsor és*

$$\varrho \doteq \begin{cases} 0\ , & \textit{ha } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty\ , \\ +\infty\ , & \textit{ha } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0\ , \\ \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}\ , & \textit{egyébként}\ . \end{cases}$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *abszolút konvergens, ha* $|x - x_0| < \varrho$*; divergens, ha* $|x - x_0| > \varrho$.

Bizonyítás. Ha $|x - x_0| < \varrho$, akkor $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$ (hiszen $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \implies \varrho = 0$ és akkor $|x - x_0| < \varrho$ nem lehetséges), továbbá

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 < 1\ , & \text{ha } \varrho = +\infty, \\ \dfrac{|x - x_0|}{\varrho} < 1\ , & \text{egyébként}\ , \end{cases}$$

ami a sorokra vonatkozó Cauchy-féle gyökkritérium miatt adja a hatványsor abszolút konvergenciáját.
Ha $|x - x_0| > \varrho$, akkor $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 0$ (hiszen $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \implies \varrho = +\infty$, és akkor $|x - x_0| > \varrho$ nem lehetséges), továbá

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} +\infty > 1\ , & \text{ha } \varrho = 0, \\ \dfrac{|x - x_0|}{\varrho} > 1\ , & \text{egyébként}\ , \end{cases}$$

ami a sorokra vonatkozó Cauchy-féle gyökkritérium miatt adja a hatványsor divergenciáját. □

2. definíció. A Cauchy-Hadamard tételben definiált ϱ-t a ***hatványsor konvergencia sugará***nak nevezzük.

Megjegyzések.

1. $\varrho = 0$ esetén a hatványsor csak x_0-ban, míg $\varrho = +\infty$ esetén $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens.
2. Ha $0 < \varrho < +\infty$, akkor a $K(x_0, \varrho)$ nyílt környezet része a hatványsor konvergencia tartományának.

2. tétel. *Legyen ϱ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ hatványsor konvergencia sugara. Ha $0 < \varrho_0 < \varrho$, akkor a hatványsor egyenletesen konvergens $K(x_0, \varrho_0)$-n, az összegfüggvénye pedig folytonos $K(x_0, \varrho_0)$-on.*

Bizonyítás.

a) Ha $x \in K(x_0, \varrho_0)$, akkor $|a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n|\varrho_0^n$. De $\sum |a_n|\varrho_0^n$ konvergens számsor (a Cauchy-féle gyökkritérium miatt), így a Weierstrass-feltétel miatt kapjuk az egyenletes konvergenciát $K(x_0, \varrho_0)$-n.

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ tehát egyenletesen konvergens $\forall\ K(x_0, \varrho_0)$ $(0 < \varrho_0 < \varrho)$ körlapon, az $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények folytonosak $K(x_0, \varrho_0)$-n, így az előző paragrafus 3. tétele miatt az összegfüggvény folytonos $\forall\ K(x_0, \varrho_0) \subset K(x_0, \varrho)$ körlapon. □

Következmény. *A*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

hatványsorok konvergencia sugara $\varrho = +\infty$, összegfüggvényük folytonos $\mathbb{R}$-en.

Bizonyítás. Mivel $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$, $\sqrt[n]{(2n)!} \to +\infty$, $\sqrt[n]{(2n+1)!} \to +\infty$ is igaz, kapjuk, hogy $\varrho = +\infty$ minden esetben. Ezután a folytonosság $\mathbb{R}$-en jön a 2. tételből. □

3. Elemi függvények

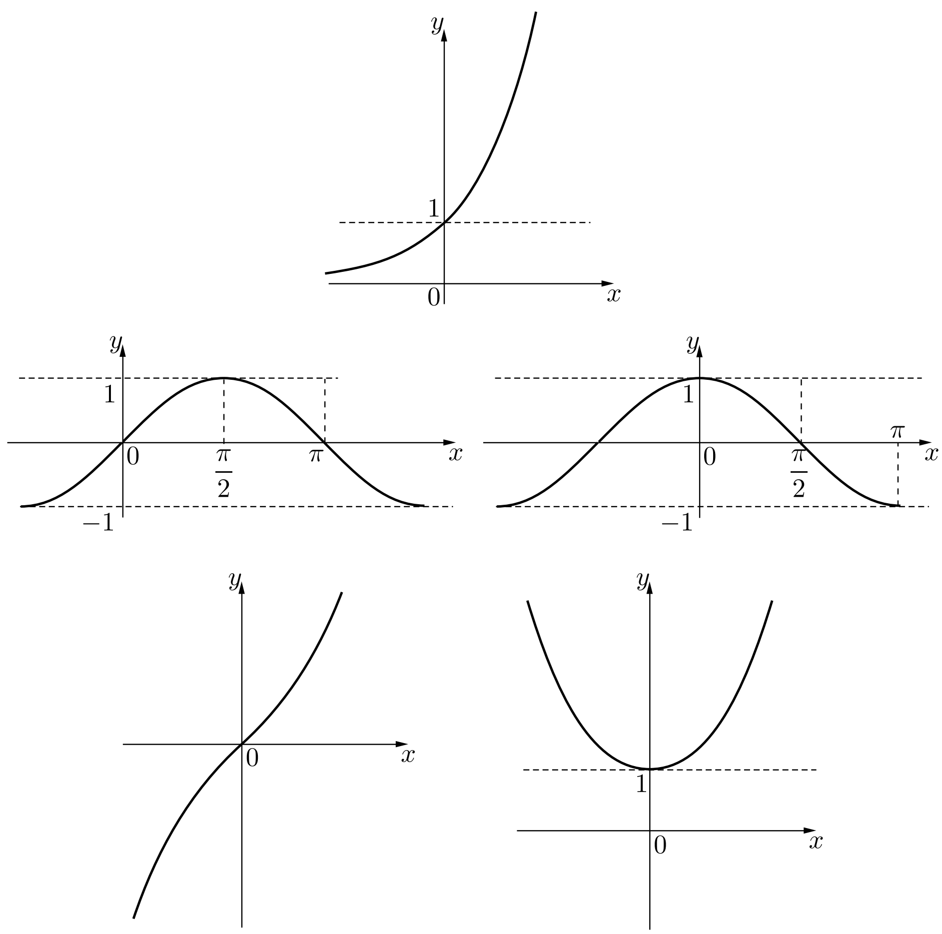
1. definíció. Az előbbi következményben szereplő hatványsorok konvergensek $\mathbb{R}$-n, ezért $\forall\ x \in \mathbb{R}$-re az

$$\exp(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ ,$$

$$\cos(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ , \qquad \sin(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,$$

$$\mathrm{ch}(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ , \qquad \mathrm{sh}(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

szerint értelmezett függvényeket rendre valós ***exponenciális***, ***cosinus***, ***sinus***, ***cosinus hiperbolicus***, ***sinus hiperbolicus*** függvényeknek nevezzük és exp, cos, sin, ch, sh módon jelöljük. (Valamennyien folytonosak $\mathbb{R}$-en.)



3.1. ábra. Az exp, sin, cos, sh és ch függvények

Megjegyzés. Az $\exp(x)$ függvényt közelítsük sorának N-edik részletösszegével: $\exp(x) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$. Különböző N-eket választva, végezzük el a tényleges számítógépes számítást! Ábrázoljuk $\exp(x)$-et! Ugyanezt végezzük el $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{ch}(x)$-re.

1. tétel. *Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}\ , \qquad \operatorname{ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}\ ,$$
$$\exp(x) = \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x)\ ,$$

teljesül.

Bizonyítás. A sorok műveleti tulajdonságai alapján valamennyi egyszerű számolás. □

2. tétel. *Bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén*

a) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ *;*
b) $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ *;*
$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ *;*
c) $\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$ *;*
$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$

(addiciós tételek). Továbbá:

d) $\exp(x)\exp(-x) = 1$;
$\cos(-x) = \cos(x)$; $\sin(-x) = -\sin(x)$;
$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x)$; $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x)$;
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$*;*
$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1 \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás.
a) A fejezet 5. tételét követő példa és az exp függvény definíciója miatt

$$\exp(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + y)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \exp(x)\exp(y)\ .$$

b) és c) azonnal jön az a) rész és az 1. tétel felhasználásával.

d) egyszerű számolás. □

3. tétel. *Az $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre igazak:*

a) $\exp(x) \neq 0\ (x \in \mathbb{R})$ *;*
b) $\exp(x) \geq 1\ (x \geq 0)$; $0 < \exp(x) < 1\ (x < 0)$ *;*
c) $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ *;*

d) *szigorúan monoton növekvő* $\mathbb{R}$*-en;*
e) $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ \quad$ (*azaz* $R_{\exp} = \mathbb{R}_+$) *;*
f) $\forall\, r \in \mathbb{Q}$ *esetén* $\exp(r) = e^r$ *.*

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I. feladatgyűjtemény. □

2. definíció. A szigorúan monoton és folytonos $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény inverzét valós ***természetes alapú logaritmus függvény***nek nevezzük és az ln (vagy log) szimbólummal jelöljük.

4. tétel. *Az* ln *függvényre teljesül:*
a) $D_{\ln} = \mathbb{R}_+,\ R_{\ln} = \ln(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$*;*
b) *folytonos és szigorúan monoton;*
c) $\ln(1) = 0,\ \ln(x) < 0\ (0 < x < 1),\ \ln(x) > 0\ (x > 1)$ *;*
d) $\exp(\ln(x)) = x\ (x \in \mathbb{R}_+),\ \ln(\exp(x)) = x\ (x \in \mathbb{R})$ *;*
e) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)\ (x, y \in \mathbb{R}_+)$.

Bizonyítás. A definícióból, a monoton függvényeknél tanultakból és az exp függvény tulajdonságaiból egyszerűen jönnek az állítások (lásd Kalkulus I. feladatgyűjtemény). □

3. definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}_+$ adott, akkor az

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = \exp(x \ln a)$$

szerint definiált függvényt a***-alapú valós exponenciális függvény***nek nevezzük.

5. tétel. *Legyeb* $a \in \mathbb{R}_+$*. Az* $\exp_a$ *függvényre teljesülnek:*
a) $\exp_e = \exp$ *;*
b) $D_{\exp_a} = \mathbb{R},\ R_{\exp_a} = \mathbb{R}_+\ (a \neq 1)$ *;*
c) $\exp_a(x + y) = \exp_a(x)\exp_a(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$,
$\exp_a(-x) = [\exp_a(x)]^{-1} \quad (x \in \mathbb{R})$ *;*
d) *szigorúan monoton növekvő, ha* $a > 1$ *;*
szigorúan monoton csökkenő, ha $0 < a < 1$ *;*
e) *folytonos;*
f) $\exp_a(r) = a^r\ (r \in \mathbb{Q})$.

Bizonyítás. A definíció, az exp és ln függvények tulajdonságai alapján egyszerű (lásd Kalkulus I. feladatgyűjtemény). □

Az előző tétel f) pontjában szereplő a^x ($x \in \mathbb{Q}$) a II. fejezet 2.14. definíciójában bevezetett racionális kitevőjű hatványt jelentette. Viszont kiderült, hogy az $\exp_a(x)$ folytonos és monoton függvény minden x racionális számra megegyezik a^x-szel. Ez az alapja az a^x tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetére vonatkozó alábbi definíciójának.

4. definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}_+$ és $x \in \mathbb{R}$. Az a ***x-edik hatványa***:

$$a^x = \exp_a(x) = \exp(x \ln a) \ .$$

5. definíció. Legyen $1 \neq a \in \mathbb{R}_+$. Az $\exp_a^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt ***a-alapú valós logaritmus függvény***nek nevezzük és a $\log_a$ szimbólummal jelöljük.

6. tétel. *A* $\log_a$ *függvényre teljesülnek:*

a) $\log_e = \ln, \quad \log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \ (x \in \mathbb{R}_+, \ 1 \neq a \in \mathbb{R}) \ ;$
b) $D_{\log_a} = \mathbb{R}_+, \quad R_{\log_a} = \mathbb{R},$
$\log_a(a) = 1, \quad \log_a(1) = 0 \ ;$
c) *szigorúan monoton növekvő, ha* $a > 1$*;*
szigorúan monoton csökkenő, ha $0 < a < 1$*;*
d) $\exp_a[\log_a(x)] = x \ (x \in \mathbb{R}_+), \quad \log_a[\exp_a(x)] = x \ (x \in \mathbb{R});$
e) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \ \ (x, y \in \mathbb{R});$
f) $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \ \ (x \in \mathbb{R}, \ 1 \neq a, b \in \mathbb{R}_+);$
g) $\log_a(x^r) = r \log_a(x) \ \ (1 \neq x \in \mathbb{R}_+, \ r \in \mathbb{Q}).$

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I. feladatgyűjtemény. □

Az exponenciális függvény esetén a változó a kitevőben szerepel (az alap rögzített), míg a hatványfüggvény változója az alap (a kitevő pedig rögzített).

6. definíció. Legyen $\mu \in \mathbb{R}$ adott, az

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^\mu = \exp(\mu \ln(x))$$

függvényt μ-kitevőjű valós ***hatványfüggvény***nek nevezzük. (Ha $\mu \in \mathbb{R}_+$, akkor $f(0) = 0$-val $f : \mathbb{R}_+ \cup 0 \to \mathbb{R}$.)

7. tétel. *Az* $f(x) = x^\mu = \exp(\mu \ln(x))$*-re teljesülnek:*

a) *folytonos függvény;*
b) $R_f = \mathbb{R}_+$*, ha* $\mu \neq 0$*;* $R_f = \{1\}$*, ha* $\mu = 0$ *;*
c) *szigorúan monoton növekvő, ha* $\mu > 0$*;*
szigorúan monoton csökkenő, ha $\mu < 0$*;*
d) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ *és* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$*, ha* $\mu > 0$*,*
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ *és* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$*, ha* $\mu < 0$*;*
e) $x^\mu x^\nu = x^{\mu+\nu}, \quad \dfrac{x^\mu}{x^\nu} = x^{\mu-\nu}, \quad (xy)^\mu = x^\mu y^\mu,$
$\left(\dfrac{x}{y}\right)^\mu = \dfrac{x^\mu}{y^\mu}, \quad (x^\mu)^\nu = x^{\mu\nu} \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+, \ \mu, \nu \in \mathbb{R}).$

Bizonyítás. A definíció és a korábbi tételek alapján egyszerű (lásd Kalkulus I. feladatgyűjtemény). $\square$

VIII. fejezet
Differenciálszámítás

1. Valós függvények differenciálhányadosa

1. definíció. Legyen $\langle a, b\rangle$ egy nyílt vagy zárt intervallum, $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ valós függvény. A

$$\varphi(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (x \neq x_0,\ x, x_0 \in \langle a, b\rangle) \tag{1}$$

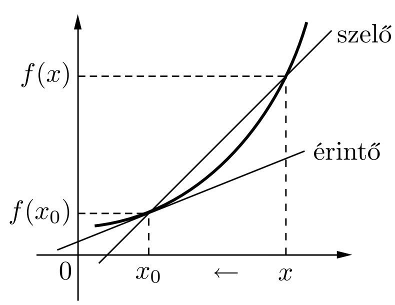
által definiált φ függvényt az f függvény x, x_0-hoz tartozó ***differenciahányados függvény***ének nevezzük.

2. definíció. Az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény ***differenciálható*** az $x_0 \in \langle a, b\rangle$ pontban, ha létezik a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \tag{2}$$

(véges) határérték. Ezt – az $f'(x_0)$-lal jelölt – határértéket az f függvény x_0-beli ***differenciálhányados***ának (vagy ***derivált***jának) nevezzük.

Geometriai interpretáció. Az $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ differenciahányados az f függvény szelőjének meredeksége.



1.1. ábra.

$x \to x_0$ esetén a szelő határhelyzete az f függvény görbéjéhez az x_0 pontban húzott érintő.
A differenciálhányados geometriai jelentése: ezen érintő meredeksége.

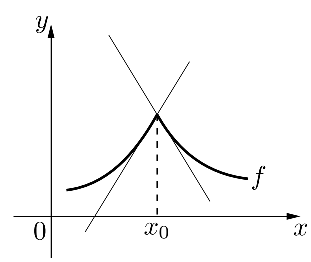
3. definíció. Ha f az $\langle a, b\rangle$ minden pontjában differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy differenciálható $\langle a, b\rangle$-n.
A (2) szerint definiált $f' : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvényt az f függvény differenciálhányados függvényének (vagy derivált függvényének) nevezzük.

Megjegyzések.

1. Geometriai interpretáció:
   Definíció. Ha az $f : \langle a, b\rangle \to R$ függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor az

   $$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

   egyenest az f függvény görbéje $(x_0, f(x_0))$-beli érintőjének nevezzük. ($f'(x_0)$ így az $(x_0, f(x_0))$ pontbeli érintő iránytangense.)
2. Egyoldali differenciálhányados is értelmezhető, ha a (2)-ben jobb-, illetve baloldali határértéket tekintünk. (Jelölés: $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$.) Továbbá bizonyítható, hogy f akkor és csakis akkor differenciálható $x_0 \in (a, b)$-ben, ha létezik $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ és egyenlőek.
   Speciálisan, ha $f'_+(x_0)$ és $f'_-(x_0)$ létezik, de nem egyenlő, az geometriailag azt jelenti, hogy az f gráfjának x_0-ban „töréspontja” van. Ekkor f x_0-ban nem differenciálható.



1.2. ábra.

3. Egy fizikai jelentés: az $s(t)$ útfüggvény differenciálhányadosa a $v(t)$ sebességfüggvény. Ugyanis a (t_0, t) időintervallumban $\dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ az átlagsebesség, és ennek $t \to t_0$ esetén a határértéke a t_0 időpillanatbeli sebesség.
4. Közgazdaságtani alkalmazás. A $Q(L)$ termelési függvény deriváltja az MP_Lhatártermék: $MP_L = Q'(L)$. Itt L a munkát jelenti, $Q(L)$ pedig az L munkával előállított mennyiség. Az MP_L határtermék tehát a

megtermelt mennyiség változási sebessége (a munka mennyiségének megváltozása esetén).

Példa.

1. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = c$ függvényre $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$-ben
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 0 = 0\ ,$$
azaz $\exists\ f'(x_0) = 0$, így $f'(x) = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
2. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$ függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban differenciálható és
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 1 = 1\ ,$$
így $f'(x) = 1\ (x \in \mathbb{R})$.
3. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n\ (n \in \mathbb{N})$ függvény differenciálható, mert
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n-x_0^n}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} (x^{n-1} + x^{n-1}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1}\ ,$$
így $f'(x) = nx^{n-1}\ (x \in \mathbb{R})$.
4. Az $f(x) = |x|\ (x \in \mathbb{R})$ függvény nem differenciálható az $x_0 = 0$ pontban, mert
$$\varphi(x,0) = \frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1\ , & \text{ha } x > 0\ , \\ \dfrac{-x}{x} = -1\ , & \text{ha } x < 0\ , \end{cases}$$
így
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+0} \varphi(x,0) = 1\ , \qquad f'_-(0) = \lim_{x\to 0-0} \varphi(x,0) = -1\ ,$$
azaz $f'_+(0) \neq f'_-(0)$.
Ha $x_0 \neq 0$, akkor
$$\exists\ f'(x_0) = \begin{cases} 1\ , & \text{ha } x_0 > 0\ , \\ -1\ , & \text{ha } x_0 < 0\ , \end{cases}$$
mert $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x,x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} 1 = 1$, ha $x_0 > 0$,
míg $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x,x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} -1 = -1$, ha $x_0 < 0$.

2. Differenciálhatóság és folytonosság

Tétel. *Ha az $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in \langle a,b\rangle$ pontban, akkor folytonos is x_0-ban.*

Bizonyítás. x_0 torlódási pontja $\langle a,b\rangle$-nek, így elegendő megmutatni, hogy $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ és $= f(x_0)$.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right] =$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

igaz, ami adja, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, és ezt kellett bizonyítani. □

Megjegyzés. A fenti tétel nem fordítható meg. Hiszen például $f(x) = |x|$ az $x_0 = 0$-ban folytonos, de nem differenciálható.

3. Differenciálhatóság és lineáris approximálhatóság

Definíció. Az $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvényt lineárisan approximálhatónak mondjuk az $x_0 \in \langle a,b\rangle$ pontban, ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$ konstans és $\omega : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $\lim\limits_{x\to x_0}\omega(x) = \omega(x_0) = 0$ és

$$(L) \qquad f(x)-f(x_0) = A\cdot(x-x_0)+\omega(x)\cdot(x-x_0) \qquad (x\in\langle a,b\rangle)$$

teljesül.

Tétel. *Az $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény akkor, és csakis akkor differenciálható az $x_0 \in \langle a,b\rangle$ pontban, ha lineárisan approximálható. Továbbá $A = f'(x_0)$.*

Bizonyítás.
a) $(\Rightarrow)$ Ha f differenciálható x_0-ban, akkor legyen

$$\omega(x) \doteq \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\ , & x\in\langle a,b\rangle\setminus\{x_0\},\\ 0\ , & x = x_0\ . \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy $\lim\limits_{x\to x_0}\omega(x) = \omega(x_0) = 0$, és $A = f'(x_0)$-lal kapjuk (L)-et is, azaz f lineárisan approximálható.

b) $(\Leftarrow)$ Ha f lineárisan approximálható x_0-ban, akkor (L)-ből jön, hogy

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A+\omega(x) \qquad (x\in\langle a,b\rangle\setminus\{x_0\})$$

így $\lim\limits_{x\to x_0} \omega(x) = 0$ adja f differenciálhatóságát és hogy $f'(x_0) = A$ is teljesül. $\square$

4. Differenciálhatóság és műveletek

1. tétel. *Ha az $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók az $x_0 \in \langle a, b\rangle$-ben, akkor az $f+g$, $f \cdot g$ és $g(x_0) \neq 0$ esetén az $\dfrac{f}{g}$ függvény is differenciálható x_0-ban, és*

a) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$;

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Bizonyítás.

a) Az állítás az

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

egyenlőségből, $f'(x_0)$ és $g'(x_0)$ létezése miatt, az $x \to x_0$ határátmenettel következik.

b) Az

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

egyenlőség, $f'(x_0)$ és $g'(x_0)$ létezése – határátmenettel – adja az állítást. (Felhasználjuk azt is, hogy g folytonos x_0-ban.)

c) A bizonyítás hasonló az előbbiekhez. $\square$

Következmények.

1. Ha $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható x_0-ban, $c \in \mathbb{R}$, akkor $c \cdot f$ is differenciálható, és
$$(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$
2. Ha $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálhatók x_0-ban, akkor $f - g$ is, és
$$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$
3. Ha $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $f(x_0) \neq 0$, és $\exists\ f'(x_0)$, akkor
$$\exists\ \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

4. Ha az $f_i : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ $(i = 1,\dots,n)$ függvények differenciálhatók $x_0 \in \langle a,b\rangle$-ben, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,\dots,n)$, akkor $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f_i$ is differenciálható x_0-ban, és
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f_i\right)'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f_i'(x_0).$$
5. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ $(a_k \in \mathbb{R})$ függvény differenciálható, és
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}.$$
6. Legyenek $P_n(x)$ és $Q_m(x)$ polinom függvények és $Q_m(x_0) \neq 0$. Ekkor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ differenciálható x_0-ban.

Példa. Az
$$f(x) = \frac{5x^2 + 2x + 3}{x^4 + x^2 + 1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
függvény $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén differenciálható. A számláló – mint az x^2, x, 1 differenciálható függvények lineáris kombinációja – differenciálható, továbbá hasonló okok miatt a nevező is differenciálható és 0-tól különböző $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén, így az 1. tétel miatt f valóban differenciálható, és
$$f'(x) = \frac{(10x+2)(x^4+x^2+1) - (5x^2+2x+3)(4x^3+2x)}{(x^4+x^2+1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. tétel (az összetett függvény differenciálhatósága).
Legyenek $g : \langle c,d\rangle \to \mathbb{R}$, $f : \langle a,b\rangle = g(\langle c,d\rangle) \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy g differenciálható az $x_0 \in \langle c,d\rangle$-ben, f differenciálható az $y_0 = g(x_0) \in \langle a,b\rangle$-ben. Akkor az $F = f \circ g$ függvény is differenciálható x_0-ban, és

(ÖD) $$F'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Példa. Az $F(x) = (3x^4 + 5x^2 + 8)^{100}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén differenciálható, mert $F = f \circ g$, ahol $g(x) = 3x^4 + 5x^2 + 8$ $(x \in \mathbb{R})$ és $f(y) = y^{100}$ $(y \in \mathbb{R})$ differenciálható függvények, azaz teljesülnek a 2. tétel feltételei. Továbbá $F'(x) = 100(3x^4 + 5x^2 + 8)^{99}(12x^3 + 10x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

3. tétel (az inverz függvény differenciálhatósága). *Ha $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton, folytonos $\langle a,b\rangle$-n és $x_0 \in \langle a,b\rangle$-ben létezik $f'(x_0)$ és*

$f'(x_0) \neq 0$, akkor f^{-1} differenciálható $f(x_0)$-ban és

(ID) $$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \ ,$$

illetve

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \qquad (y_0 = f(x_0)).$$

5. Hatványsorok differenciálhatósága

Tétel. *Legyen a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ hatványsor konvergencia sugara ϱ, akkor az*

(1) $$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \ , \qquad x \in (-\varrho, \varrho)$$

szerint definiált $f : (-\varrho, \varrho) \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható és

(2) $$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} \ , \qquad x \in (-\varrho, \varrho)$$

teljesül.
A hatványsor összegfüggvénye a konvergencia tartományának belsejében differenciálható, és a deriváltja a hatványsor tagonkénti deriválásával számítható.

Bizonyítás.

a) A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ hatványsor konvergencia sugara is ϱ. Ugyanis a sor konvergencia tartományában

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^n$$

teljesül, így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^n$ hatványsor konvergencia sugarát kell meghatározni, melyre

$$\varrho' = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|n \cdot a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} = \varrho \ .$$

b) (1) differenciálható és (2) teljesül. Ehhez elég megmutatni, hogy

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0 \qquad \forall \ x_0 \in (-\varrho, \varrho) \ .$$

Felhasználva az (1) és (2) hatványsorok abszolút konvergenciáját $\forall\ x, x_0 \in (-\varrho, \varrho)$ esetén és hogy $\exists\ r > 0$, amire $|x_0| < r < \varrho$, így $|x| < r$ esetén:

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x_0^n}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x_0^{n-1}\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \left[\frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} - n x_0^{n-1}\right]\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \left[x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1} - n x_0^{n-1}\right]\right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x^{n-1} - x_0^{n-1} + x_0 \cdot (x^{n-2} - x_0^{n-2}) + \cdots + x_0^{n-1} \cdot (1-1)| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x - x_0| \left|\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot x^{n-k-1} \cdot x_0^{k-1}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x-x_0| \cdot r^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k = |x-x_0| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot r^{n-2} =$$

$$= s \cdot \frac{|x-x_0|}{2}\ ,$$

ahol s a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n(n-1) \cdot r^{n-2}$ (a gyökkritérium alapján konvergens) sor összege.

Ebből $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{s}{2} \cdot |x - x_0| = 0$ miatt adódik az állítás. □

Példa. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ hatványsor konvergencia sugara $\varrho = +\infty$, így a VII.3.1. definícióban általa definiált $\exp(x) \doteq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ (exponenciális) függvény differenciálható és

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül.

6. Elemi függvények differenciálhatósága

1. tétel. *Az* exp, sin, cos, sh, ch *függvények differenciálhatók és*

$$\exp' = \exp\ , \quad \sin' = \cos\ , \quad \cos' = -\sin\ , \quad \mathrm{sh}' = \mathrm{ch}\ , \quad \mathrm{ch}' = \mathrm{sh}\ .$$

Bizonyítás. A hatványsorok differenciálhatósági tétele adja a differenciálhatóságot és a derivált függvényeket is (a számolás egyszerű, ahogy azt az előbbi példa mutatja). □

2. tétel. *Az* $\exp_a$, $\log_a$, ln, x^μ *függvények differenciálhatók és*

a) $\exp_a'(x) = \exp_a(x) \cdot \ln a \quad (x \in \mathbb{R})$;
b) $\log_a'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad (x \in \mathbb{R}_+)$;
c) $\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}_+)$;
d) $(x^\mu)' = \mu \cdot x^{\mu-1} \quad (x \in \mathbb{R}_+)$.

Bizonyítás.
a) Az $\exp_a(x) \doteq \exp(x \cdot \ln a)$ definíció, $\exp'(y) = \exp(y)$ és $(x \cdot \ln a)' = \ln a$, valamint az összetett függvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel adja az állítást.
b) A $\log_a \doteq \exp_a^{-1}$ definíció, az $\exp_a$ függvény differenciálhatósága, szigorú monotonitása, az inverz függvény differenciálhatósági tétele alapján:

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\exp_a'[\log_a(x)]} = \frac{1}{\exp_a[\log_a(x)] \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}\ .$$

c) $a = e \Longrightarrow \log_e a = \ln e = 1 \Longrightarrow \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
d) Az $x^\mu \doteq \exp(\mu \cdot \ln x)$ definíció és az összetett függvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel alapján

$$(x^\mu)' = [\exp(\mu \cdot \ln x)]' = \exp(\mu \cdot \ln x) \cdot \frac{\mu}{x} = x^\mu \cdot \frac{1}{x} \cdot \mu = \mu \cdot x^{\mu-1}\ .$$

□

Megjegyzés. $f(x) = \sqrt[n]{x} \doteq x^{\frac{1}{n}} \doteq \exp(\frac{1}{n} \ln x)$ $(x > 0)$ és a 2. tétel adja, hogy $\exists\ f'(x) = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \dfrac{1}{n} \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $(x > 0)$.
Speciálisan az $f(x) = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ függvényre $\exists\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

Ugyanakkor a $g(x) = \sqrt[n]{x}$ $(x \geq 0)$ függvény nem differenciálható az $x_0 = 0$-ban, mert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = +\infty$$

(ugyanis g folytonossága miatt $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[n]{x} = 0$, így $\lim\limits_{x \to 0} (\sqrt[n]{x})^{n-1} = 0$).

7. A sin és cos függvény további tulajdonságai

1. tétel.

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}) \ ;$$
$$|\sin(x)| \leq 1, \quad |\cos(x)| \leq 1 \qquad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Bizonyítás. Gyakorlaton. □

2. tétel.

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (\forall\ x, y \in \mathbb{R}) \ ;$$
$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (\forall\ x, y \in \mathbb{R}) \ .$$

Bizonyítás. Egyszerű az addíciós tételek alapján. □

3. tétel. *A* $[0, 2]$ *intervallumban egyetlen* x *szám van, melyre* $\cos(x) = 0$.

Definíció. Jelöljük π-vel (pi-vel) azt a valós számot, melyre $0 < \frac{\pi}{2} < 2$ és $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

4. tétel.

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \ , \quad \cos \pi = -1 \ , \quad \sin \pi = 0 \ , \quad \sin 2\pi = 0 \ , \quad \cos 2\pi = 1 \ ;$$
$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \ , \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítás. Gyakorlaton (pl. $\sin^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 \implies \sin \frac{\pi}{2} = 1$). □

5. tétel. *A* sin *függvény monoton növekvő a* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *intervallumon.*
A cos *függvény monoton csökkenő a* $[\,0, \pi\,]$ *intervallumon.*

Bizonyítás. Gyakorlaton. □

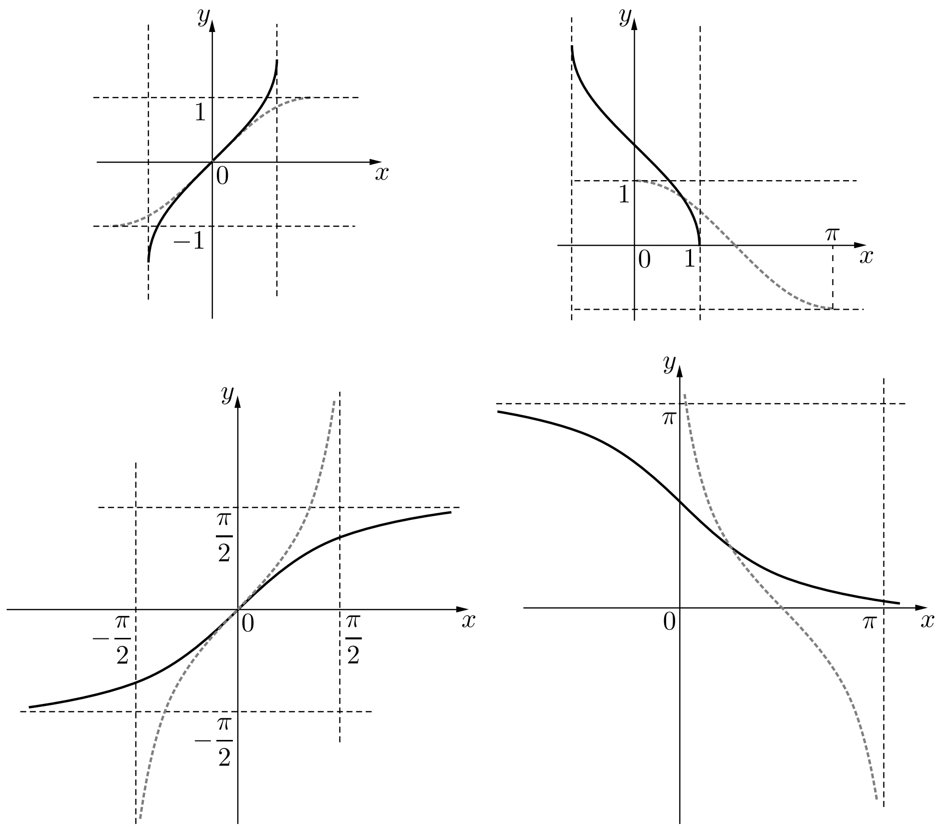
8. További elemi függvények

a) A tg és ctg függvények. A

$$\mathrm{tg}: \mathbb{R}\backslash\{(k+\frac{1}{2})\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}\ , \qquad \mathrm{tg}(x) \doteq \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ ;$$

$$\mathrm{ctg}: \mathbb{R}\backslash\{k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}\ , \qquad \mathrm{ctg}(x) \doteq \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

szerint definiált függvényeket tangens, ill. cotangens függvényeknek nevezzük. Legfontosabb tulajdonságaikat gyakorlaton vizsgáljuk.



8.1. ábra. Az arcus függvények

b) Az arcus függvények definíciója.

Az $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$ folytonos és szigorúan monoton növekedő függvény inverzét arcsin (arkusz-szinusz) függvénynek nevezzük.

Ez folytonos, szigorúan monoton növekedő és
arcsin : $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

A $g : [0,\pi] \to \mathbb{R},\ g(x) = \cos(x)$ folytonos és szigorúan monoton csökkenő függvény inverze az arccos (arkusz-koszinusz) függvény, mely folytonos, szigorúan monoton csökkenő és
arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$.

Az $F : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ F(x) = \operatorname{tg}(x)$ folytonos és szigorúan monoton növekedő függvény inverzét arctg (arkusz-tangens) függvénynek nevezzük. Ez folytonos, szigorúan monoton növekedő és
arctg : $\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

A $G : (0,\pi) \to \mathbb{R},\ G(x) = \operatorname{ctg}(x)$ folytonos és szigorúan monoton csökkenő függvény inverzét arcctg (arkusz-cotangens) függvénynek nevezzük. Ez folytonos, szigorúan monoton csökkenő és
arcctg : $\mathbb{R} \to (0,\pi)$.

1. tétel. *A* tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg *függvények differenciálhatók és*

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}\ , \qquad \operatorname{ctg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}\ ,$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \neq \pm 1), \qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \neq \pm 1),$$

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}\ , \qquad \operatorname{arcctg}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}\ .$$

Bizonyítás.

– $\operatorname{tg}(x) \doteq \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{(k+\frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})$, a sin és cos függvények differenciálhatók, $\cos(x) \neq 0$, ha $x \in D_{\operatorname{tg}}$, így a korábban tanult tételeket felhasználva

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos(x)\sin'(x)}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}\ .$$

– $\operatorname{ctg}(x)$ differenciálhatósága és $\operatorname{ctg}'(x)$ meghatározása ugyanígy megy.

– Az arcsin : $[-1,1] \to \mathbb{R}$ függvény az $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$ függvény inverze, mely szigorúan monoton és folytonos $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$-n

$\exists\ f'(x) = \cos(x)\ \forall\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén, továbbá $f'(x) \neq 0$, ha $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, így az inverz függvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel szerint

$$\exists\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \\ = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,$$

ha $x \in]-1, 1[$ (itt felhasználtuk azt is, hogy $\cos(t) > 0$, ha $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$). Belátható, hogy az arcsin függvény nem differenciálható, ha $x = -1$, vagy $x = 1$.

– Az arccos, arctg, arcctg függvények differenciálhatósága és deriváltjuk meghatározása az előbbihez hasonlóan történik. □

c) Értelmezhetők a $\text{th} \doteq \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$, $\text{cth} \doteq \frac{\text{ch}}{\text{sh}}$ tangens-hiperbolikusz és cotangens-hiperbolikusz függvények, és vizsgálhatók tulajdonságaik.

d) sh, ch, th, cth inverzeiként értelmezzük az arsh, arch, arth, arcth area-függvényeket és vizsgálhatjuk tulajdonságaikat.

Megjegyzés. A th, cth és az area függvények differenciálási szabálya is egyszerűen bizonyítható (lásd gyakorlaton).

9. Magasabbrendű deriváltak

Az f függvény $f' = f^{(1)}$ deriváltfüggvényét is deriválhatjuk, ekkor megkapjuk az $f'' = f^{(2)}$ második deriváltat. Ezt pedig deriválva kapjuk az $f''' = f^{(3)}$ harmadik deriváltat. Az n-edik derivált (rekurzióval történő) pontos definíciója az alábbi.

Definíció. Legyen $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ adott függvény. f 0-adik deriváltja: $f^{(0)} \doteq f$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $f^{(n-1)} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ értelmezett és differenciálható függvény, akkor f n-edik deriváltja az $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ függvény.
Ha $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re $\exists\ f^{(n)}$, akkor azt mondjuk, hogy f akárhányszor differenciálható.

Példa.

1. $f(x) = x^2+3x+2\ (x \in \mathbb{R}) \implies \exists\ f'(x) = 2x+3\ (x \in \mathbb{R}) \implies \exists\ f''(x) = 2\ (x \in \mathbb{R}) \implies \exists\ f'''(x) = 0\ (x \in \mathbb{R}) \implies \exists\ f^{(n)}(x) = 0\ (x \in \mathbb{R})\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$-re $\implies$ f akárhányszor differenciálható.

2. Teljes indukcióval bizonyítható, hogy $k, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(x^n)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{k-n} \ (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{ha } k < n;$$
$$(x^n)^{(n)} = n! \ (x \in \mathbb{R});$$
$$(x^n)^{(k)} = 0 \ (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{ha } k > n.$$

3. $\exists \ \exp^{(n)} = \exp$ (azaz $(e^x)^{(n)} = e^x, \ x \in \mathbb{R}$) $\forall \ n \in \mathbb{N}$, tehát exp akárhányszor differenciálható.

1. tétel. *Ha $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ n-szer differenciálható, akkor $c \cdot f$, $f + g$, $f \cdot g$ is n-szer differenciálható és $\forall \ x \in \langle a, b\rangle$ esetén*

$$(c \cdot f)^{(n)}(x) = c \cdot f^{(n)}(x) \ ;$$
$$(f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \ ;$$
$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x) \cdot g^{(n-i)}(x) \quad \textit{(Leibniz-szabály).}$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval egyszerű. □

Példa. A $h(x) = (x^2 + 2x)e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény az $f(x) = x^2 + 2x$ $(x \in \mathbb{R})$ és a $g(x) = e^x$ akárhányszor differenciálható függvények szorzata, így a Leibniz-szabály miatt $n = 100$ esetén $\forall \ x \in \mathbb{R}$-re

$$h^{(100)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x^2 + 2x)^{(i)} (e^x)^{(n-i)} =$$
$$= \binom{100}{0}(x^2 + 2x)e^x + \binom{100}{1}(2x + 2)e^x + \binom{100}{2} 2e^x \ .$$

2. tétel. *Az $f(x) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ $(x \in \,]-\varrho, \varrho\,[)$ hatványsor összegfüggvénye akárhányszor differenciálható és*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1) \cdot a_k \cdot x^{k-n} \qquad (x \in (-\varrho, \varrho)),$$

továbbá $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $\quad (n = 0, 1, \dots)$.

Bizonyítás. A hatványsorok differenciálhatósági tétele alapján, teljes indukcióval, illetve $x = 0$ helyettesítéssel egyszerű. □

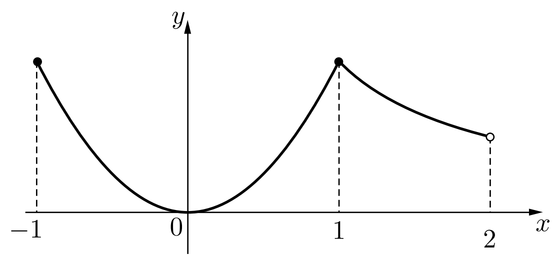
10. Differenciálható függvények vizsgálata

a) A lokális szélsőérték szükséges feltétele

Példa. Az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ , & \text{ha } x \in [-1,1], \\ \dfrac{1}{x} \ , & \text{ha } x \in \,]\,1,2\,[\,. \end{cases}$$

függvény szélsőérték helyei: $-1,\ 0,\ 1$. Ezek közül a 0-ban „vízszintes éritője van”. Ezt a pont, amelyben egyrészt differenciálható, másrészt az értelmezési tartományának belső pontja.



10.1. ábra.

1. tétel. *Legyen $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Ha f-nek az $x_0 \in\,]\,a,b\,[$-ben lokális maximuma (minimuma) van és $\exists\ f'(x_0)$, akkor $f'(x_0) = 0$.*

Bizonyítás. Ha például f-nek x_0-ban lokális minimuma van, akkor $\exists\ K(x_0,\delta) \subset\,]\,a,b\,[\,$, hogy $f(x) - f(x_0) \geq 0$ $(x \in K(x_0,\delta))$, így

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} \leq 0 \ , & \text{ha } x_0 - \delta < x < x_0, \\ \geq 0 \ , & \text{ha } x_0 < x < x_0 + \delta. \end{cases}$$

Ezért

$$f'(x_0) = \left\{ \begin{array}{l} f'_-(x_0) = \displaystyle\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \\ f'_+(x_0) = \displaystyle\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow f'(x_0) = 0.$$

□

Megjegyzés. A feltétel általában nem elégséges, ahogy ezt például az $f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény az $x_0 = 0$-ban mutatja. Ekkor $\exists\ f'(0) = 0$, de $x^3 > 0$, ha $x > 0$ és $x^3 < 0$, ha $x < 0$, így $\nexists\ K(0,\delta)$, hogy $\forall\ x \in K(0,\delta)$-ra $x^3 \geq 0$ vagy $x^3 \leq 0$ teljesülne, így $x_0 = 0$-ban nincs lokális maximuma és minimuma sem.

Példa. Az $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénynek az $x_0 = 0$ pontban lokális minimuma van (hiszen $x^2 \geq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$) és $\exists\ f'(x_0) = f'(0) = 0$.

b) Középértéktételek

2. tétel (Cauchy). *Ha az $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak $[a,b]$-n, differenciálhatóak $]\,a,b\,[$-n, akkor $\exists\ x \in\,]\,a,b\,[$, hogy*

(C–K) $$[f(b) - f(a)] \cdot g'(x) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(x)\ .$$

Bizonyítás.

– A $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $h(t) \doteq [f(b) - f(a)] \cdot g(t) - [g(b) - g(a)] \cdot f(t)$ függvény folytonos $[a,b]$-n, differenciálható $]\,a,b\,[$-n, $h(a) = h(b)$.

– h folytonossága és $[a,b]$ kompaktsága miatt h felveszi $[a,b]$-n szélsőértékeit, így $\exists\ u, v \in [a,b]$, hogy $h(v) \leq h(x) \leq h(u)$ $(x \in [a,b])$.

– $\{u,v\} = \{a,b\}$ esetén $h(a) = h(b)$ és az előbbi egyenlőtlenség adja, hogy h konstans, és így $h'(x) = 0$ $(x \in [a,b])$. Ez pedig h differenciálásával adja az állítást.

– Ha $\{u,v\} \neq \{a,b\}$, akkor u vagy $v \in (a,b)$, ezért $h'(u) = 0$ vagy $h'(v) = 0$, ami $x = u$ vagy $x = v$ mellett h differenciálásával adja az állítást. □

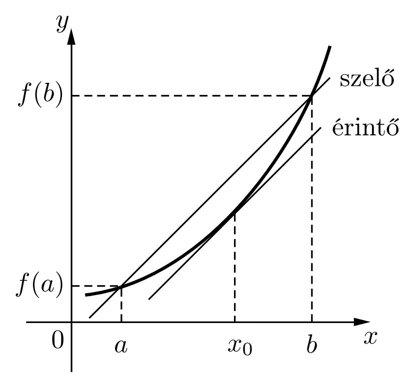
Az alábbiakban a Cauchy-tétel néhány következményét tárgyaljuk.

3. tétel (Lagrange). *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n, differenciálható $]\,a,b\,[$-n, akkor $\exists\ x \in\,]\,a,b\,[$, hogy*

(L–K) $$f(b) - f(a) = f'(x)(b-a)\ .$$

Bizonyítás. Következik (C-K)-ból $g(x) = x$ választással. □

A Lagrange-tétel geometriai jelentése: az $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ pontokat összekötő szelővel párhuzamos az x-beli érintő.



10.2. ábra.

Példa. Bizonyítsuk be a $|\sin(x) - \sin(y)| \le |x - y|$ $(x, y \in \mathbb{R})$ egyenlőtlenséget.
A $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $\forall\ [x, y]$-on teljesíti a Lagrange-tétel feltételeit, így $\exists\ t \in]x, y[$, hogy

$$\sin(y) - \sin(x) = \sin'(t)(y - x) = \cos(t)(y - x) \ ,$$

amiből $|\cos(t)| \le 1$ miatt kapjuk a

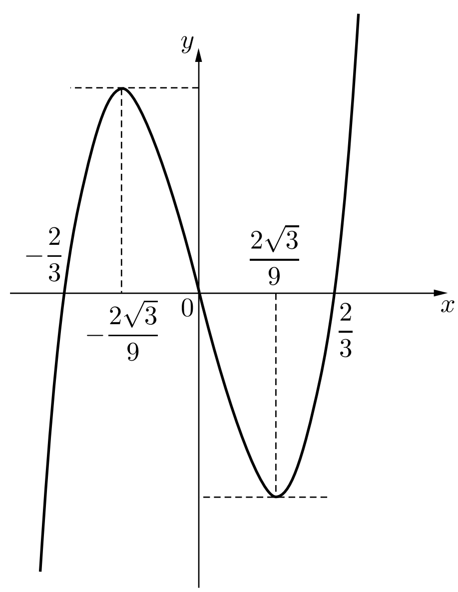
$$|\sin(x) - \sin(y)| = |\cos(t)|\,|x - y| \le |x - y| \ ,$$

illetve a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

4. tétel (Rolle). *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$-n, differenciálható $]\,a, b\,[$-n, $f(a) = f(b)$, akkor $\exists\ x \in]\,a, b\,[$, hogy $f'(x) = 0$.*

Bizonyítás. Következik (L-K)-ból $f(a) = f(b)$ miatt. □

Példa. Az $f(x) = 9x^3 - 4x$ függvény a $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ intervallumon teljesíti a Rolle-tétel feltételeit, mert (mint polinom függvény) differencálható, $f\left(-\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, így $\exists\ x \in \left]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right[$, hogy $f'(x) = 27x^2 - 4 = 0$. Ez akkor igaz, ha $x = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Könnyen ellenőrízhető, hogy mindkét érték benne van a $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ intervallumban.



10.3. ábra.

Következmény. Ha $g'(x) \neq 0$ $(x \in]\,a,b\,[)$, akkor $g(b) \neq g(a)$ (hiszen ellenkező esetben (C-K) miatt $\exists\ x \in]\,a,b\,[,\ g'(x) = 0)$. Ekkor (C-K) írható az

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

alakban.

5. tétel (a monotonitás elegendő feltétele). *Ha $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható, akkor*

a) $f' \geq 0 \implies f$ *monoton növekedő;*
b) $f' \leq 0 \implies f$ *monoton csökkenő;*
c) $f' = 0 \implies f = c$*, azaz konstans.*

Bizonyítás. A Lagrange-tétel segítségével.
Legyen $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ tetszőleges. Az f $[x_1, x_2]$-re való leszűkítése teljesíti a Lagrange-tétel feltételeit, így $\exists\ x \in\ [\,x_1, x_2\,[$, hogy

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(x)\ ,$$

így bármely fenti $x_1,\ x_2$-re

a) $f' \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1) \implies f$ monoton növekedő;
b) $f' \leq 0 \implies f(x_2) \leq f(x_1) \implies f$ monoton csökkenő;
c) $f' = 0 \implies f(x_2) = f(x_1) \implies f = c$, azaz konstans. □

6. tétel (a monotonitás szükséges és elegendő feltétele). *Legyen $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, akkor*

a) f *monoton növekvő (csökkenő) $\langle a, b\rangle$-n* $\iff f' \geq 0$ $(f' \leq 0)$*;*
b) f *szigorúan monoton növekvő (csökkenő) $\langle a, b\rangle$-n* $\iff$
$f' \geq 0$ $(f' \leq 0)$ *és* $\nexists\ \langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$*, hogy* $f'(x) = 0$*, ha* $x \in \langle c, d\rangle$*.*

Bizonyítás.

a) Az elégségesség jön a 4. tételből. A szükségességhez legyen például f növekvő és $x \in \langle a, b\rangle$ teszőleges, h olyan, hogy $x + h \in \langle a, b\rangle$, akkor

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \implies f' \geq 0\ .$$

b) *Elégségesség:* Ha például $f' \geq 0$, akkor a) miatt f növekvő. Tegyük fel, hogy nem szigorúan monoton növekvő, akkor $\exists\ x, y \in \langle a, b\rangle,\ x < y$, hogy $f(x) = f(y)$, de akkor (f monotonitása miatt) $f(t) = c$, ha $t \in [x, y] \subset \langle a, b\rangle$, ami ellentmondás.

Szükségesség: Ha például f szigorúan monoton növekvő, akkor a) miatt $f' \geq 0$. Ha $\exists\ \langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$, hogy $f'(x) = 0$ $(x \in \langle c, d\rangle)$, akkor

$f(x) = \text{const}$ $(x \in \langle c, d \rangle)$, így f nem szigorúan monoton növekvő, ami ellentmondás. $\square$

Példa. Az $f(x) = 2 + x - x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény differenciálható, $f'(x) = 1 - 2x$ $(x \in \mathbb{R})$, így $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$. Továbbá $f'(x) = 1 - 2x > 0 \iff x < \frac{1}{2}$, ezért f szigorúan monoton növekvő $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$-en. Másrészt $f'(x) = 1 - 2x < 0 \iff x > \frac{1}{2}$. Így f szigorúan monoton növekvő $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$-en.

7. tétel (a szélsőérték egy elégséges feltétele).
Legyen $f :]\, x_0 - r, x_0 + r\, [\to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha

a) $f'(x) \geq 0 \quad (x \in]\, x_0 - r, x_0\, [), \quad f'(x) \leq 0 \quad (x \in]\, x_0, x_0 + r\, [)$, *akkor f-nek x_0-ban lokális maximuma van;*
b) $f'(x) \leq 0 \quad (x \in]\, x_0 - r, x_0\, [), \quad f'(x) \geq 0 \quad (x \in]\, x_0, x_0 + r\, [)$, *akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van.*

Bizonyítás. Az 6. Tétel miatt f növekedő az $]\, x_0 - r, x\, [$ intervallumon, viszont csökkenő az $]\, x_0, x - r\, [$ intervallumon, így x_0-ban maximuma van. A minimum hasonlóan bizonyítható. $\square$

Példa. Az előbbi példa $f(x) = 2 + x - x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ differenciálható függvényére azt kapjuk, hogy $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ és $f'(x) \geq 0$, ha $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$, $f'(x) \leq 0$, ha $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, így a tétel miatt f-nek lokális maximuma van az $x = \frac{1}{2}$ helyen.

c) Taylor-sorok, Taylor-polinom

Definíció. Legyen az $f :]\, p, q\, [\to \mathbb{R}$ függvény akárhányszor differenciálható. A

$$\text{(TS)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x - a)^k \qquad (x, a \in]\, p, q\, [)$$

hatványsort az f függvény a-hoz tartozó Taylor-sorának, míg n-edik részletösszegét, a

$$\text{(TP)} \qquad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x - a)^k \qquad (x, a \in]\, p, q\, [)$$

polinomot az f függvény a-hoz tartozó Taylor-polinomjának nevezzük.
Ha $0 \in]\, p, q\, [$, akkor az $a = 0$-hoz tartozó Taylor-sort f Maclaurin-sorának nevezzük.

Megjegyzések.

1. Minden konvergens hatványsor összegfüggvényének Taylor-sora (lásd: exp, sin, ...).
2. Fontos kérdés: Mikor állítható elő egy függvény Taylor-sorával?

Tétel (Taylor). *Legyen* $f : K(a,r) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *és* $\exists\, f^{(n)}$, *akkor* $\forall\, x \in K(a,r)$ *esetén* $\exists\, \xi(x) \in K(a,r)\setminus\{a\}$, *hogy*

$$\text{(T)} \qquad f(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!} \cdot (x-a)^n \qquad (x \in K(a,r)) \, .$$

Megjegyzések.

1. $n = 1$-re a Taylor-tétel a Lagrange-tétel.
2. Az
$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!} \cdot (x-a)^n \qquad (x \in K(a,r))$$
szerint definiált R_n függvény a Taylor-formula Lagrange-féle maradéktagja.
3. Ha $\exists\, M$, hogy $\forall\, x \in K(a,r)$, $n \in \mathbb{N}$ esetén $|f^{(n)}(x)| \le M$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, ezért
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k \qquad (x \in K(a,r)),$$
így az f függvény Taylor-sorának összege.
4. Az
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$
függvényre $\exists\, f^{(n)}(0) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, így az f függvény 0-hoz tartozó Taylor-sorának összege a 0 függvény, ami nyilván $\neq f$.
5. A Taylor-tétel alapján becsülhető f és T_{n-1} eltérése, például:
$$\left|\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)\right| =$$
$$= \left|\frac{\sin^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \cdot x^{2n}\right| \le \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \, .$$
6. Az $\ln(1+x) = f(x)$ $(x \in (-1,\infty))$ függvényre például

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{(n-1)} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \, ,$$

amiből $x = 1$ választással és határátmenettel

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \cdots ,$$

ahol a jobboldal az ismert Leibniz-féle sor.

d) A szélsőérték általános feltétele

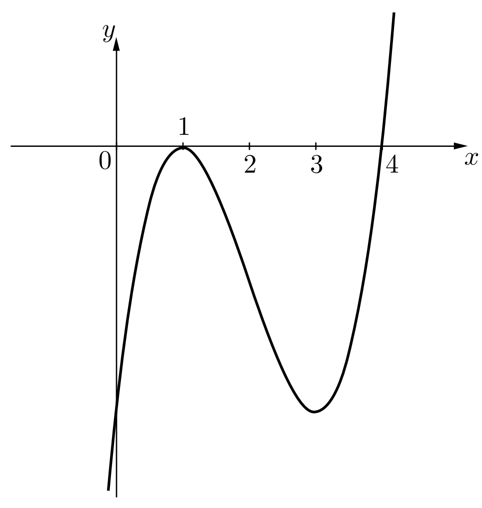
Tétel. *Ha $f : K(a, r) \to \mathbb{R}$ $(k-1)$-szer differenciálható $(k \geq 2)$, $f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0$ és $\exists\ f^{(k)}(a) \neq 0$, akkor*

a) *ha k páratlan, úgy $f(a)$ nem szélsőérték;*
b) *ha k páros, úgy $f(a)$ szélsőérték, továbbá*
  – *$f^{(k)}(a) > 0$ esetén $f(a)$ szigorú lokális minimum,*
  – *$f^{(k)}(a) < 0$ esetén $f(a)$ szigorú lokális maximum.*

Példa. Az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ kétszer differenciálható, és $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$. $f'(x) = 0 \iff x = 1$ vagy $x = 3$, így e két helyen lehet lokális szélsőértéke:

– $f''(1) = -6 < 0 \implies f$-nek $x = 1$-ben lokális maximuma van, értéke $f(1) = 0$;

– $f''(3) = 6 > 0 \implies f$-nek $x = 3$-ben lokális minimuma van, értéke $f(3) = 4$.



10.4. ábra.

e) Konvex függvények

1. definíció. Az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvényt ***konvex***nek (illetve ***konkáv***nak) nevezzük $\langle a, b\rangle$-n, ha $\forall\ x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ és $\forall\ p, q \in [0, 1],\ \ p + q = 1$ esetén

$$f(p \cdot x_1 + q \cdot x_2) \le p \cdot f(x_1) + q \cdot f(x_2) \tag{K}$$

(illetve (K)-ban $\geq$) teljesül. f szigorúan konvex (konkáv), ha (K)-ban szigorú egyenlőtlenség van.

Megjegyzés. Ha $x_1 < x_2$, legyen (K)-ban

$$p \doteq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \qquad q \doteq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (x \in]\, x_1, x_2\, [)\ ,$$

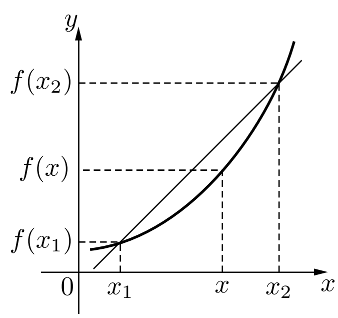
akkor $p, q \in [0, 1],\ \ p + q = 1,\ \ px_1 + qx_2 = x$, így

$$f(x) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1) \qquad (x \in]\, x_1, x_2\, [), \tag{1}$$

vagy más elrendezésben

$$f(x) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_2) + f(x_2) \qquad (x \in]\, x_1, x_2\, [) \tag{2}$$

következik.
Ez azt jelenti, hogy egy konvex f függvény gráfjának pontjai az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontokon áthaladó szelő alatt vannak ($\forall\ x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle,\ \ x_1 < x_2$ esetén).



10.5. ábra. Konvex függvény

(1) és (2) adja, hogy

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}\ , \tag{3}$$

Másrészt, ha (3) teljesül $\forall\ x_1, x_2, x \in \langle a, b\rangle,\ \ x_1 < x < x_2$ esetén, akkor legyen $t, s \in \langle a, b\rangle,\ \ t < s,\ \ \lambda \in\ ]0, 1[$ adott.

Ha $x_1 = t,\ x_2 = s,\ x = \lambda t + (1-\lambda)s$, akkor egyszerűen adódik (3)-ból, hogy

$$\frac{f(\lambda t + (1-\lambda)s) - f(t)}{(1-\lambda)(s-t)} \le \frac{f(s)-f(t)}{s-t} \le \frac{f(s) - f(\lambda t + (1-\lambda)s)}{\lambda(s-t)}\ ,$$

amiből pedig

$$f(\lambda t + (1-\lambda)s) \le \lambda f(t) + (1-\lambda) f(t)$$

következik, mely $\lambda = 0$ és $\lambda = 1$ esetén is teljesül, tehát f konvex.

8. tétel. *Az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény akkor és csak akkor konvex, ha az $f' : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény monoton növekvő.*

Bizonyítás.

a) Ha f konvex, akkor (3)-ból $x \to x_1$ ill. $x \to x_2$ határátmenettel jön, hogy $f'(x_2) \ge f'(x_1)\ \ \forall\ x_1 < x_2$ esetén, azaz f' monoton növekvő.

b) Ha f' monoton növekvő, akkor $\forall\ x_1 < x < x_2$ esetén (a Lagrange-tétel miatt) $\exists\ z_1 \in (x_1, x),\ z_2 \in (x, x_2)$, hogy

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(z_1) \le f'(z_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

melyből az előző megjegyzés második része szerint következik, hogy f konvex. □

Megjegyzések.

1. Hasonló állítás igaz konkáv függvényekre is.
2. f szigorúan konvex $\iff f'$ szigorúan monoton növekvő.
3. Ha $\exists\ f''$, úgy: f konvex $\iff f'' \ge 0$; $\ f$ konkáv $\iff f'' \le 0$.

2. definíció. Az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x \in]a, b[$ inflexiós helye, $(x, f(x))$ pedig inflexiós pontja, ha $\exists\, r > 0$, hogy f konvex (konkáv) $]x-r, x]$-en és konkáv (konvex) $[x, x+r[$-en.

Tehát az inflexiós helyen a függvény vagy konvexből konkávba vált, vagy konkávból konvexbe.

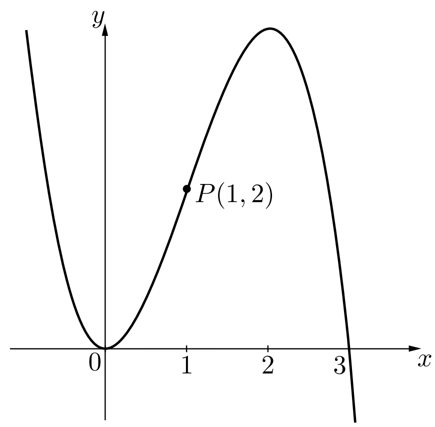
9. tétel. *Az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek az $x \in]a, b[$ akkor és csak akkor inflexiós helye, ha szélsőértékhelye f'-nek.*

Bizonyítás.

a) Ha $x \in]\,a, b\,[$ inflexiós hely, akkor a definíció szerint $\exists\ r > 0$, hogy f konvex (konkáv) $]x-r, x]$-en, konkáv (konvex) $[x, x+r[$-en $\Longrightarrow\ f'$ monoton növekvő (csökkenő) $]x-r, x]$-en, csökkenő (növekvő) $[x, x+r[$-en $\Longrightarrow\ x$ szélsőértékhelye f'-nek.

b) Ha $x \in]\,a,b\,[$ szélsőértek helye f'-nek, akkor $\exists\ r > 0$, hogy f növekvő (csökkenő) $]x-r,x]$-en, csökkenő (növekvő) $[x,x+r[$-en $\Longrightarrow$ f konvex (konkáv) $]x-r,x]$-en, konkáv (konvex) $[x,x+r[$-en $\Longrightarrow$ x inflexiós helye f-nek. $\square$

Példa. Az $f(x) = 3x^2 - x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény kétszer differenciálható: $f'(x) = 6x - 3x^2$, $f''(x) = 6 - 6x$. Így $f''(x) = 0 \iff x = 1$.
$f''(x) = 6 - 6x \geq 0 \iff x \leq 1$. Tehát f szigorúan konvex $]-\infty, 1[$-en.
$f''(x) = 6 - 6x \leq 0 \iff x \geq 1$. Tehát f szigorúan konkáv $[1, +\infty[$-en.
$x = 1$-ben konvex és konkáv ív találkozik, így $x = 1$ inflexiós hely, $(1,2)$ pedig inflexiós pont.



10.6. ábra.

f) L'Hospital-szabály

Alapprobléma.
Ha $f,g : K(a,r) \to \mathbb{R}$ adottak és $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, akkor létezik-e $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, és hogyan számítható ki? (Lehet egyoldali határérték is.)

10. tétel (L'Hospital-szabály). *Legyenek $f,g :]a,a+r[\to \mathbb{R}$ differenciálható függvények, hogy $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $g(x)\cdot g'(x) \neq 0$. Ha létezik a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték, akkor létezik a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ határérték is, és a kettő egyenlő egymással.*

Megjegyzések.
1. Hasonló igaz $]a-r,a[$-ra vagy $K(a,r)\setminus\{a\}$-n értelmezett függvények esetén.

2. Ha $f(a) = g(a) = 0$; f, g differenciálhatók a-ban, és $g'(a) \neq 0$, akkor
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \ .$$
3. Ha f és g értelmezési tartománya felülről, illetve alulról nem korlátos, akkor például
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to 0+0} f\left(\frac{1}{y}\right), \quad \text{illetve} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{y\to 0-0} g\left(\frac{1}{y}\right)$$
miatt a L'Hospital-szabály végtelenben vett határértékre is érvényes.
4. A L'Hospital szabály akkor is érvényes, ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.
5. Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, akkor az $f(x)\cdot g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ egyenlőség jobb oldalára alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt.

Példa.
1. Az $f(x) = \sin(x)$ és $g(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények differenciálhatók, $f'(x) = \cos(x)$, $g'(x) = 1 \neq 0$ $(x \in \mathbb{R})$, $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{1} = 1$. Így a L'Hospital-szabály szerint $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.
2. Az $f(x) = x$ és $g(x) = e^{2x} \neq 0$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények differenciálhatók, $f'(x) = 1$, $g'(x) = 2e^{2x} \neq 0$ $(x \in \mathbb{R})$, $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2e^{2x}} = 0$. Így a 3. és 4. megjegyzések miatt $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^{2x}} = 0$.

g) Függvények vizsgálata, ábrázolása

Egy f függvény teljes vizsgálatánál meghatározzuk:
1. a D_f értelmezési tartományt;
2. hogy f páros, páratlan, periódikus függvény-e;
3. f zérushelyeit, D_f azon részhalmazait, ahol f előjele állandó;
4. f határértékeit D_f határpontjaiban;
5. f szakadási helyeit, folytonossági intervallumait;
6. f derivált függvényét (függvényeit): f', f'';
7. D_f azon részintervallumait, ahol f monoton növekedő (csökkenő);
8. f szélsőérték helyeit és szélsőértékeit;

9. D_f azon részintervallumait, ahol f konvex (konkáv), az inflexiós helyeket (pontokat);
10. az esetleges aszimptotákat – olyan $y = ax + b$ egyenletű egyeneseket, melyekre $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax - b) = 0$, illetve $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - ax - b) = 0$; $a = \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ \vee\, x\to-\infty}} \dfrac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ \vee\, x\to-\infty}} (f(x) - ax)$;
11. ábrázoljuk az f függvényt (megrajzoljuk a gráfját);
12. f R_f értékkészletét.

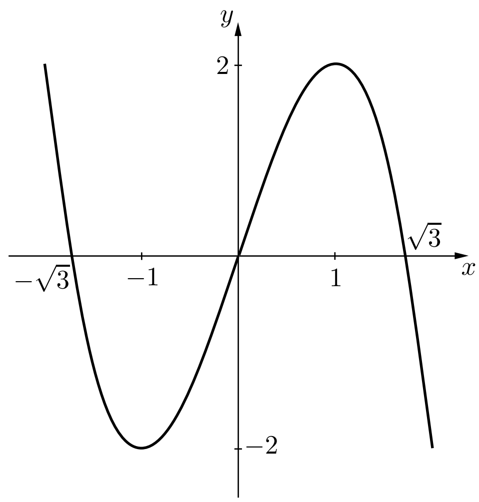
Példa. Végezzük el a teljes függvényvizsgálatot és ábrázoljuk az $f(x) = 3x - x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt!

1. $D_f = \mathbb{R}$;
2. $f(-x) = 3(-x) - (-x)^3 = -[3x - x^3] = -f(x)$, tehát f páratlan;
3. $3x - x^3 = x(3 - x^2) = 0 \iff x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$, tehát f zérushelyei $x = 0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$;
   $f(x) > 0$, ha $x \in]-\infty, -\sqrt{3}[\;\vee\; x \in]0, \sqrt{3}[$,
   $f(x) < 0$, ha $x \in]-\sqrt{3}, 0[\;\vee\; x \in]\sqrt{3}, +\infty[$;
4. D_f határpontjai: $-\infty, +\infty$;
   $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x - x^3) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3\left(-\frac{3}{x^2} + 1\right) = +\infty$;
   $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x - x^3) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^3\left(-\frac{3}{x^2} + 1\right) = -\infty$;
5. f folytonos $\mathbb{R}$-en (mert két folytonos függvény különbsége), így szakadási helye nincs;
6. f differenciálható $\mathbb{R}$-en (mert differenciálható függvények különbsége), és $f'(x) = 3 - 3x^2$ $(x \in \mathbb{R})$, továbbá $f''(x) = -6x$ $(x \in \mathbb{R})$;
7. $f'(x) = 3 - 3x^2 \geq 0 \iff 1 \geq x^2 \iff |x| \leq 1$, tehát f szigorúan monoton növekvő a $[-1, 1]$ intervallumon;
   $f'(x) \leq 0 \iff |x| \geq 1$, tehát f szigorúan monoton csökkenő a $]-\infty, -1]$ és $[1, +\infty[$ intervallumokon;
8. $f'(x) = 0 \iff x = -1 \vee x = 1$, tehát ezen helyeken lehet lokális szélsőértéke:
   $x = -1$-ben f' előjelet vált, negatívról pozitívra, tehát $x = -1$ lokális maximum hely,
   $x = 1$-ben f' előjelet vált, pozitívról negatívra, tehát $x = 1$ lokális minimum hely,
   (a lokális minimum és maximum értéke -2, illetve 2); globális szélsőértéke nincs;

9. $\exists\ f''(x) = -6x$: $f''(x) \geq 0 \iff x \leq 0$, $f''(x) \leq 0 \iff x \geq 0$, tehát f konvex a $]-\infty, 0]$, konkáv a $[0, +\infty[$ intervallumokon, $x = 0$ inflexiós hely (a $(0, 0)$ inflexiós pont);

10. aszimptota nincs;

11.



10.7. ábra.

12. $R_f = \mathbb{R}$ (mert f folytonos és $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$).

Irodalomjegyzék

[1] Császár Á., *Valós analízis I-II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

[2] Lajkó K., *Analízis I-II.*, Egyetemi jegyzet, DE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 2002-2003.

[3] Lajkó K., *Kalkulus I.*, Egyetemi jegyzet, DE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 2002.

[4] Lang, S., *A First Course in Calculus*, Springer-Verlag, 1986.

[5] Leindler L. – Schipp F., *Analízis I.*, Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.

[6] Makai I., *Bevezetés az analízisbe*, Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

[7] Makai I., *Differenciál és integrálszámítás*, Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.

[8] Rimán J., *Matematikai analízis I. kötet*, EKTF, Liceum Kiadó, Eger, 1998.

[9] Száz Á., *Hatványozás és elemi függvények*, Egyetemi jegyzet, KLTE, Debrecen, 1994

Névjegyzék

Archimedes (syracuse-i) (görög, i.e. 287–i.e. 212)
Bernoulli, Jacques (svájci, 1654–1705)
Bolzano, Bernard Placidus (cseh, 1781–1848)
Borel, Felix Eduard Émile (francia, 1871–1956)
Bunykovszkij, Viktor Jakovlevics (orosz, 1804–1889)
Cantor, Georg (német, 1845–1918)
Cauchy, Augustin-Louis (francia, 1789–1857)
D'Alambert, Jean le Rond (francia, 1717–1783)
De Morgan, Augustus (angol, 1806–1871)
Descartes, René (francia, 1596–1650)
Dirichlet, Peter Gustav Lejenne (német, 1805–1859)
Hadamard, Jacques (francia, 1865–1963)
Heine, Eduard (német, 1821–1881)
Lagrange, Joseph Louis (olasz-francia, 1736–1813)
Leibniz, Gottfried Wilhelm (német, 1646–1716)
L'Hospital, Guillaume Francois (francia, 1661–1704)
Maclaurin, Colin (skót, 1698–1746)
Mertens, Franz (osztrák, 1840–1927)
Minkowski, Herman (orosz-német, 1864–1909)
Peano, Giuseppe (olasz, 1858–1932)
Riemann, Georg Friedrick Bernhard (német, 1826–1866)
Rolle, Michel (francia, 1652–1719)
Schwarcz, Hermann Amandus (német, 1843–1921)
Taylor, Brook (angol, 1685–1731)
Venn, John (angol, 1843–1923)
Weierstrass, Karl (német, 1815–1897)

Tárgymutató