Lajkó Károly

# KALKULUS II. PÉLDATÁR

mobiDIÁK könyvtár

Lajkó Károly

# KALKULUS II. PÉLDATÁR

mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

Lajkó Károly

# KALKULUS II. PÉLDATÁR

Programozó és programtervező matematikus hallgatóknak

**mobiDIÁK könyvtár**
Debreceni Egyetem
Informatikai Intézet

Lektor

Dr. Fazekas István
Dr. Losonczi László



mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem
Informatikai Intézet
4010 Debrecen, Pf. 12
http://mobidiak.inf.unideb.hu


A mű *A mobiDIÁK önszervező mobil portál* (IKTA, OMFB-00373/2003) és a *GNU Iterátor, a legújabb generációs portál szoftver* (ITEM, 50/2003) projektek keretében készült.

# Tartalomjegyzék

# I. fejezet
# Integrálszámítás

## 1. Primitív függvény, határozatlan integrál

Alapintegrálok

**1.1. feladat.** Bizonyítsa be a Kalkulus II. jegyzet I. fejezete 1. paragrafusában az úgynevezett alapintegráloknak nevezett alábbi képleteket (formulákat):

a) $$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln(x) + C_1 & (x > 0) \\ \ln(-x) + C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

b) $$\int x^\mu\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \qquad (x \in \mathbb{R}_+,\ \mu \neq -1)$$

c) $$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1)$$

d) $$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

e) $$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

f) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C \qquad (x \in (-1,1))$$

g) $$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

h) $$\int \operatorname{sh}(x)\,dx = \operatorname{ch}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

i) $$\int \operatorname{ch}(x)\,dx = \operatorname{sh}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsh}(x) + C = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$

k) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arch}(x) + C = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C \qquad (x \in (1,\infty))$

l) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\operatorname{ctg}(x) + C_k \qquad (x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z})$

m) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \operatorname{tg}(x) + C_k \qquad (x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}),\ k \in \mathbb{Z})$

n) $\displaystyle\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (x \in (-\varrho, \varrho))$

*Megoldás.* A bizonyítások minden esetben a határozatlan integrál (primitív függvény) definícióján (a $F\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt a $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény határozatlan integráljának nevezzük, ha $F' = f$ teljesül) és az elemi függvények (Kalkulus I. VIII. fejezetében vizsgált) differenciálási szabályainak ismeretén alapulnak.
Belátjuk, hogy az $a) \dots n)$ képletek jobb oldalán szereplő $F$ függvények deriváltjai a baloldali integrálokban szereplő $f$ függvények.

a) $\exists\ (\ln(x) + C_1)' = \dfrac{1}{x}$, ha $x > 0$, míg $(\ln(-x) + C_2)' = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}$, ha $x < 0$, így az

$$F(x) = \begin{cases} \ln(x) + C_1 & (x > 0) \\ \ln(-x) + C_2 & (x < 0) \end{cases} \quad \text{függvényre}$$

$\exists\ F'(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, ami (az integrál definíciója miatt) adja az állítást.

b) A $F(x) = \dfrac{x^{\mu}+1}{\mu+1} + C \quad (x \in \mathbb{R}_+,\ \mu \neq -1)$ függvényre létezik

$$F'(x) = \frac{1}{\mu+1}(\mu+1)x^{\mu} = x^{\mu} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}_+ - \text{ra},$$

így igaz az állítás.

c) A $F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1)$ függvényre

$$\exists\ F'(x) = \frac{1}{\ln a} a^x \ln a = a^x \quad \forall\ x \in \mathbb{R} \text{ esetén},$$

ami adja az állítást.

d) $F(x) = -\cos(x) + C$ $(x \in \mathbb{R})$-re $\exists\ F'(x) = (-1)(-\sin(x)) = \sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, tehát igaz az állítás.

e) $, \dots,$ i) az előbbiekhez hasonlóan bizonyítható.

j) $\exists\ (\operatorname{arsh}(x) + C)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x \in \mathbb{R})$ és

$$\begin{aligned}\exists\ (\ln(x + \sqrt{x^2+1}))' &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (x \in \mathbb{R}),\end{aligned}$$

ami adja az állítást.

k) j)-hez hasonlóan bizonyítjuk.

l) és m) is azonnal jön a ctg és tg függvények differenciálási szabályainak ismeretében.

n) A hatványsorok differenciálására vonatkozó tétel miatt az

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (x \in ]-\varrho, \varrho[)$$

függvény differenciálható és

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (x \in ]-\varrho, \varrho[),$$

s ez adja az állítást.

## Alapintegrálokra visszavezethető feladatok

**1.2. feladat.** Számítsa ki a következő határozatlan integrálokat:

$$\int (3-x^2)^3\, dx\ ; \qquad \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx\ ; \qquad \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}\, dx\ ; \qquad \int \operatorname{tg}^2(x)\, dx\ ; \qquad \int \frac{x+a}{\sqrt{x}}\, dx\ ;$$

*Megoldás.* Használjuk az alapintegrálokat és a Kalkulus II. jegyzet I/1. fejezet 2. tételét (illetve annak általánosítását több függvényre), miután az integrál jele mögötti $f$ függvényekre egyszerű azonosságokat használunk.

1. $(3-x^2)^3 = 27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6 \quad (x \in \mathbb{R})$ miatt

$$\int (3-x^2)^3 \, dx = \int (27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6) \, dx =$$
$$= 27 \int 1 \, dx - 27 \int x^2 \, dx + 9 \int x^4 \, dx - \int x^6 \, dx + C =$$
$$= 27x - 27 \, \frac{x^3}{3} + 9 \, \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + C \qquad (x \in \mathbb{R}) \; ;$$

2. $\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 \quad (x \neq 0)$ miatt

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \, dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right) \, dx =$$
$$= \int x^{-2} \, dx - 2 \int \frac{1}{x} \, dx + \int 1 \, dx + C =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{x^{-1}}{-1} - 2\ln(x) + x + C_1 & (x > 0) \\ \dfrac{x^{-1}}{-1} - 2\ln(-x) + x + C_2 & (x < 0) \; . \end{cases}$$

3. $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$ miatt

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \, dx = \int 1 \, dx - \int \frac{1}{1+x^2} \, dx + C =$$
$$= x - \operatorname{arctg}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R}) \; ;$$

4. $$\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} = \frac{1}{(x(x \cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}} =$$
$$= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{8}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{8}}} = x^{-\frac{7}{8}} \qquad (x > 0)$$

miatt

$$\int \frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} \, dx = \int x^{-\frac{7}{8}} \, dx = \frac{x^{-\frac{7}{8}+1}}{-\frac{7}{8}+1} + C =$$
$$= \frac{x^{\frac{1}{8}}}{\frac{1}{8}} + C = 8\sqrt[8]{x} + C \qquad (x > 0).$$

5. $\operatorname{tg}^2(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)} - 1$
$\left(x \in \left]k\pi - \frac{\pi}{2},\ k\pi + \frac{\pi}{2}\right[\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right)$ felhasználásával

$$\int \operatorname{tg}^2(x)\ dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 1\right)\ dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)} - \int 1\ dx + C =$$
$$= \operatorname{tg}(x) - x + C_k \qquad \left(x \in \left]k\pi - \tfrac{\pi}{2},\ k\pi + \tfrac{\pi}{2}\right[\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right).$$

6. $\dfrac{x+a}{\sqrt{x}} = \dfrac{x}{\sqrt{x}} + \dfrac{a}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} + a \cdot x^{-\frac{1}{2}} \quad (x > 0)$ miatt

$$\int \frac{x+a}{\sqrt{x}}\ dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + a \cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)\ dx = \int x^{\frac{1}{2}}\ dx + a \int x^{-\frac{1}{2}}\ dx + C =$$
$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + a\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2a\sqrt{x} + C \qquad (x > 0).$$

## Egy egyszerű helyettesítés

**1.3. feladat.** Határozza meg az alábbi integrálokat:

$$\int \frac{1}{\cos^2(3x-5)}\ dx\ ; \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\ dx\ ; \qquad \int \sqrt[3]{1-3x}\ dx\ ;$$
$$\int \frac{1}{2+3x^2}\ dx\ ; \qquad \int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2}}\ dx\ ; \qquad \int \left(e^{-x} + e^{2x}\right)\ dx\ ;$$

*Megoldás.* Egyszerű számolás adja, hogy ha $\int f(x)\ dx = F(x) + C$, akkor $\int f(ax+b)\ dx = \dfrac{1}{a}\ F(ax+b) + C$. Azaz, ha ismerjük $x \to f(x)$ határozatlan integrálját, akkor egyszerűen kapjuk az $x \to f(ax+b)$ függvény határozatlan integrálját.

– Az

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \left(x \in \left]k\pi - \tfrac{\pi}{2},\ k\pi + \tfrac{\pi}{2}\right[\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right)$$

függvényre $F(x) = \operatorname{tg}(x)$ (lásd alapintegrálok), így az

$$f(3x-5) = \frac{1}{\cos^2(3x-5)} \qquad \left(3x - 5 \in \left]k\pi - \tfrac{\pi}{2},\ k\pi + \tfrac{\pi}{2}\right[,\ k \in \mathbb{Z}\right)$$

függvény határozatlan integráljára kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\cos^2(3x-5)}\, dx =$$
$$= \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}(3x-5) + C_k \qquad \big(3x-5 \in \left]\, k\pi - \tfrac{\pi}{2},\ k\pi + \tfrac{\pi}{2}\,\right[,\ k \in \mathbb{Z}\big).$$

– Tudjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \mathrm{arsh}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$-et előállíthatjuk, mint $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ valamilyen (lineáris) transzformáltja, úgy módszerünk alkalmazható. De

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}}\ ,$$

így

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}}\, dx = \frac{1}{\frac{1}{3}}\,\mathrm{arsh}\left(\frac{x}{3}\right) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

miatt

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}}\, dx = \frac{1}{3}\left(3\,\mathrm{arsh}\left(\frac{x}{3}\right) + C\right) =$$
$$= \mathrm{arsh}\left(\frac{x}{3}\right) + C_1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

– Az $x \to \sqrt[3]{1-3x}\quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt az $f(x) = \sqrt[3]{x}\quad (x \in \mathbb{R})$ függvényből az $x \to 1-3x\quad (x \in \mathbb{R})$ változó transzformációval kapjuk.
Másrészt

$$\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$\int \sqrt[3]{1-3x}\, dx = -\frac{1}{3}\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4} + C =$$
$$= -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4} + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

– Az

$$\frac{1}{2+3x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{3}{2}x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\;x\right)^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlőség és az $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C$ alapintegrál miatt

$$\int \frac{1}{2+3x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\;x\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\;x\right) + C\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\;x\right) + C_1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

– Az

$$\frac{1}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}} \qquad \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\;x > 1\right)$$

egyenlőség és az $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arch}(x) + C \quad (x>1)$ alapintegrál (és a módszer) adja, hogy

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\;x\right)^2-1}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\;\operatorname{arch}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\;x\right) + C\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\;\operatorname{arch}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\;x\right) + C_1 \qquad \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\;x > 1\right).$$

– A c) alapintegrál $a = e$ választással adja, hogy
$$\int e^x \, dx = e^x + C \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
ezért
$$\int e^{-x} \, dx = \frac{1}{-1}\, e^{-x} + C = -e^{-x} + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$
és
$$\int e^{-2x} \, dx = \frac{1}{-2}\, e^{-2x} + C \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
ezek szerint
$$\int (e^{-x} + e^{-2x}) \, dx = \int e^{-x} \, dx + \int e^{-2x} \, dx + C_1 =$$
$$= -e^{-x} - \frac{1}{2}\, e^{-2x} + C_2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

## Néhány speciális integrandus

**1.4. feladat.** Határozzuk meg az alábbi határozatlan integrálokat:

$$\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} \, dx \;; \qquad \int \operatorname{tg}(x) \, dx \;; \qquad \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \;;$$
$$\int \frac{x}{3-2x^2} \, dx \;; \qquad \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx \;; \qquad \int \frac{e^x}{2+e^x} \, dx \;;$$
$$\int \sin^5 x \cos x \, dx \;; \qquad \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} \, dx \;;$$

*Megoldás.* Egyszerűen belátható, hogy ha $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható, akkor
$$\exists \int f^\alpha(x) f'(x) \, dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$$
és
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln(f(x)) + C \qquad (f(x) > 0).$$
Továbbá (lásd helyettesítéses integrálás tétele), $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $g\colon \langle c,d\rangle \to \langle a,b\rangle$ olyanok, hogy $\exists\ g'\langle c,d\rangle \to \mathbb{R}$ és $\exists \int f$, akkor létezik $\int (f \circ g) g'$ és $\exists\ c \in \mathbb{R}$, hogy
$$\int f(g(x)) g'(x) \, dx = \left(\left(\int f\right) \circ g\right)(x) + C = \int f(t)dt|_{t=g(x)} + C$$
Az egyes integrálok ezen tételek valamelyikével számolhatók.

– Az

$$\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\;dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\sqrt[3]{1+x^3}\;dx = \\ = \frac{1}{3}\int 3x^2(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\;dx \qquad (x\in\mathbb{R})$$

egyenlőség mutatja, hogy $f(x) = 1 + x^3$-re $\exists\; f'(x) = 3x^2$, így $\alpha = \dfrac{1}{3}$ mellett alkalmazható az első formula, ezért

$$\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\;dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\sqrt[3]{1+x^3}\;dx = \frac{1}{3}\int (1+x^3)^{\frac{1}{3}}3x^2\;dx = \\ = \frac{1}{3}\frac{(1+x^3)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}} + C \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

– Mivel

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x} \qquad \left(x\in\; \left]-\tfrac{\pi}{2}+2k\pi, \tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right[\;\right),$$

így $f(x) = \cos x > 0$, ha $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right[$ és $\exists\; f'(x) = -\sin x$, ezért a második formula szerint:

$$\int \operatorname{tg} x\;dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\;dx = \\ = -\ln(\cos(x)) + C_k \qquad \left(x\in\; \left]-\tfrac{\pi}{2}+2k\pi, \tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right[\;\right).$$

– Az

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\;dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\;dx = \\ = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\;dx \qquad (x\in\;]-1,1[\;)$$

egyenlőség mutatja, hogy $f(x) = 1 - x^2 \quad (x\in\;]-1,1[\;)$ esetén létezik $f'(x) = -2x$, így alkalmazható az első formula, ezért:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\;dx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\;dx = -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\ = -\sqrt{1-x^2} + C \qquad (x\in\;]-1,1[\;).$$

– Hasonlóan, mint korábban:

$$\int \frac{x}{3-2x^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{-4x}{3-2x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{(3-2x^2)'}{3-2x^2}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{4}\ln(3-2x^2)+C \qquad \left(|x|<\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right).$$

– Legyen $x>0$, akkor $\exists \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, továbbá $\exists \int \sin x\,dx = -\cos x + C$, így a harmadik formula szerint

$$\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx = -\int -\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx =$$
$$= -\int \sin t\,dt\Big|_{t=\frac{1}{x}} + C = \cos\frac{1}{x}+C \qquad (x>0).$$

– Részletezés nélkül:

$$\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx = \int \frac{(2+e^x)'}{e^x}\,dx = \ln(2+e^x)+C \qquad (x\in\mathbb{R})\ ;$$

$$\int \sin^5(x)\cos(x)\,dx = \int \sin^5(x)(\sin(x))'\,dx =$$
$$= \frac{\sin^6(x)}{6}+C \qquad (x\in\mathbb{R})\ ;$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx = \int \cos^{-\frac{3}{2}}(x)\sin(x)\,dx =$$
$$= -\int \cos^{-\frac{3}{2}}(x)\,(-\sin(x))\,dx =$$
$$= -\int \cos^{-\frac{3}{2}}(x)(\cos(x))'\,dx = -\frac{\cos^{-\frac{1}{2}}(x)}{-\frac{1}{2}} + C_k =$$
$$= 2\sqrt{\cos(x)} + C_k \qquad \left(x\in\left]-\tfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ \tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right.,\ k\in\mathbb{Z}\right).$$

## Helyettesítéses integrálás

**1.5. feladat.** Számítsa ki az alábbi integrálokat:

$$\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx\ ; \qquad \int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx\ ;$$
$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx\ ; \qquad \int \sqrt{x^2-2}\,dx\ ; \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx\ ;$$

*Megoldás.* Itt most „igazi” helyettesítésekkel élünk majd, azaz a Kalkulus II. jegyzetben kimondott helyettesítéses integrálás tételét követő megjegyzésben megfogalmazott tételt használjuk:
Ha $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $g\colon \langle c,d\rangle \to \langle a,b\rangle$ olyanok, hogy $\exists\, g'$ és $\int f$, továbbá $\exists\, g^{-1}$, akkor $\exists\ \int (f\circ g)\cdot g'$ és

$$(*)\qquad \int f(x)\,dx = \left(\left(\int (f\circ g)g'\right)\circ g^{-1}\right)(x) + C = \\ = \int f(g(t))g'(t)\,dt|_{t=g^{-1}(x)} + C \quad (x\in\langle c,d\rangle).$$

Ha $\exists\ \int (f\circ g)g'$ és $g'\neq 0$ $]c,d[$-ben, akkor $\exists\ \int f$ és ismét érvényes $(*)$.
Hogy milyen helyettesítést válasszunk, arra nincs általános módszer, de vannak jellegzetes típusok (ahogy erről már az elméletben is szóltunk).

– Az $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$ az $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ speciális esete, így az elméleti anyagban tett utalás szerint olyan $x = g(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ helyettesítést alkalmazzunk, melyre $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x} = t$ $(x\in\mathbb{R})$, azaz $(\sqrt[3]{1-x} = t \iff 1-x = t^3 \iff x = 1-t^3$ $(t\in\mathbb{R})$ miatt$)$ $x = g(t) = 1-t^3$ $(t\in\mathbb{R})$.
Ekkor $f(x) = x^2\sqrt[3]{1-x}$ $(x\in\mathbb{R})$, $g(t) = 1-t^3$-re $\exists\ g^{-1}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $\exists\ g'(t) = -3t^2 \neq 0$ $(t\in\mathbb{R})$, továbbá létezik

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int (1-t^3)^2 t(-3t^2)\,dt = \int [-3t^3+6t^6-3t^9]\,dt = \\ = -3\frac{t^4}{4} + 6\frac{t^7}{7} - 3\frac{t^{10}}{10} + C \qquad (t\in\mathbb{R})\ ;$$

ezért létezik

$$\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx = \int (1-t^3)^2 t\cdot(-3t^2)\,dt|_{t=\sqrt[3]{1-x}} + C = \\ = -\frac{3}{4}(\sqrt[3]{1-x})^4 + \frac{6}{7}(\sqrt[3]{1-x})^7 - \frac{3}{10}(\sqrt[3]{1-x})^{10} + C \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

– Hasonló gondolatmenettel az $\int \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$ kiszámításánál a $g^{-1}(x) = \sqrt{x} = t$ $(x>0)$, azaz $x = t^2 = g(t)$ $(t>0)$ helyettesítésnél: $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ $(x>0)$ , $g(t) = t^2$ $(t>0)$-ra $\exists\ g^{-1}$ és

$g'(t) = 2t \neq 0$ $(t > 0)$, továbbá létezik

$$\int f(g(t))g'(t)\ dt = \int \frac{1}{(1+t^2)t}\ 2t\ dt =$$
$$= 2\int \frac{1}{1+t^2}\ dt = 2\operatorname{arctg} t + C \qquad (t > 0),$$

ezért létezik

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\ dx = \int \frac{1}{(1+t^2)t}\ 2t\ dt|_{t=\sqrt{x}} + C =$$
$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C \qquad (x > 0).$$

– $\int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\ dx = \int \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}\ dx$ $(|x| < 1)$ miatt (az elmélet egyik példáján „felbuzdulva") alkalmazzuk az $x = g(t) = \sin t$, $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ helyettesítést. Ekkor g szigorúan monoton növekedő, így $\exists\, g^{-1}\colon ]-1,1[\to \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = \arcsin(x)$, $g'(t) = \cos t \neq 0$ $\big(t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\,\big)$, továbbá $f(x) = \dfrac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$ $(x \in ]-1,1[\,)$ mellett

$$\exists \int f(g(t))g'(t)\ dt = \int \frac{1}{\cos^3 t}\cdot \cos t\ dt = \int \frac{1}{\cos^2 t}\ dt =$$
$$= \operatorname{tg} t + C, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ .$$

Így létezik

$$\int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\ dx = \int \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}\ dx = \int \frac{1}{\cos^3 t}\cos t\ dt|_{t=\arcsin x} + C =$$
$$= \operatorname{tg}(\arcsin x) + C = \frac{\sin(\arcsin x)}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} + C =$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C \qquad (|x| < 1).$$

– Az $\int \sqrt{1+x^2}\ dx$ kiszámításánál (de általában, ha $\int R(x, \sqrt{1+x^2})\ dx$ típusú integrál szerepel) eredményt hoz az $x = g(t) = \operatorname{sh}(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ helyettesítés.
Ekkor a sh függvény szigorú monotonitása miatt $\exists\ g^{-1}(x) = \operatorname{arsh}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ és $\exists\ g'(t) = \operatorname{ch}(t) \neq 0$ $(t \in \mathbb{R})$.
Felhasználva a $\operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1$ és $\operatorname{ch}^2(t) = \dfrac{1+\operatorname{ch}(2t)}{2}$ $(t \in \mathbb{R})$ azonosságokat a hiperbolikusz függvényekre, kapjuk, hogy

$f(x) = \sqrt{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ esetén létezik

$$\begin{aligned}\int f(g(t))g'(t)\ dt &= \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(t)}\operatorname{ch}(t)\ dt = \\ &= \int \operatorname{ch}^2(t)\ dt = \int \frac{1+\operatorname{ch}(2t)}{2}\ dt = \\ &= \frac{1}{2}\int 1\ dt + \frac{1}{2}\int \operatorname{ch}(2t)\ dt + C = \\ &= \frac{1}{2}\ t + \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2t) + C \qquad (t \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Ezért létezik

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\ dx &= \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(t)}\operatorname{ch}(t)\ dt|_{t=\operatorname{arsh}(x)} + C = \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arsh}(x) + \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2\operatorname{arsh}(x)) + C = \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arsh}(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(x))\operatorname{ch}(\operatorname{arsh}(x)) + C = \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arsh}(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C \qquad (x \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

– Az $\int \sqrt{x^2-2}\ dx$ kiszámításánál, felhasználva, hogy

$$\int \sqrt{x^2-2}\ dx = \int \sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1}\ dx \qquad (\text{ha pl. } x \geq \sqrt{2})$$

és tudva a hiperbolikusz függvények $\operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1$ azonosságát, melyből $\operatorname{sh}^2(t) = \operatorname{ch}^2(t) - 1$ következik, az $x = \sqrt{2}\operatorname{ch}(t) = g(t)$ $(t \geq 0)$ helyettesítésben bízunk.
Ekkor (mivel a ch függvény szigorúan monoton növekedő $[0, +\infty[$-en) $\exists\ g^{-1}(x) = \operatorname{arch}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ $(x \geq \sqrt{2})$, $\exists\ g'(t) = \sqrt{2}\operatorname{sh}(t)$ $(t \geq 0)$ és $g'(t) \neq 0$ $(t > 0)$, továbbá $f(x) = \sqrt{x^2-2}$ $(x \geq \sqrt{2})$ mellett létezik

$$\begin{aligned}\int f(g(t))g'(t)\ dt &= \int \sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch}^2(t)-1}\ \operatorname{sh}(t)\ dt = \\ &= \sqrt{2}\int \operatorname{sh}^2(t)\ dt = \sqrt{2}\int \frac{\operatorname{ch}(2t)-1}{2}\ dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{sh}(2t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\ t + C_1 \qquad (t \geq 0).\end{aligned}$$

Ezért (a helyettesítéses integrálás tételének (∗) formulája szerint) létezik

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-2}\,dx &= \int \sqrt{2}\,\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2-1}\,dx = \\ &= \sqrt{2}\int \sqrt{\operatorname{ch}^2(t)-1}\,\operatorname{sh}(t)\,dt|_{t=\operatorname{arch}\frac{x}{\sqrt{2}}} + C_1 = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{sh}\left(2\operatorname{arch}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arch}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_1 = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh}\left(\operatorname{arch}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)\operatorname{ch}\left(\operatorname{arch}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) - \\ &- \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arch}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_1 = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arsh}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_1 = \\ &= \frac{x}{2\sqrt{2}}\,\sqrt{x^2-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arsh}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_1 \qquad (x \ge \sqrt{2}).\end{aligned}$$

**Megjegyzés.** Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\int \sqrt{x^2-2}\,dx = \frac{x}{2\sqrt{2}}\,\sqrt{x^2-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arsh}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_2 \qquad (x \le -\sqrt{2}).$$

– Az $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ $(x \in \mathbb{R})$ meghatározásánál (de általában, ha $\int R(e^x)\,dx$ típusú integrál van) eredményre vezet az $e^x = g^{-1}(x) = t$ $(x \in \mathbb{R})$, azaz $x = \ln(t) = g(t)$ $(t > 0)$ helyettesítés. Ekkor $\exists\ g'(t) = \frac{1}{t} \neq 0$ $(t > 0)$ és $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ mellett létezik

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = \int \frac{t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \operatorname{arctg}(t) + C \qquad (t > 0),$$

így létezik

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt|_{t=e^x} + C = \operatorname{arctg}(e^x) + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

## Parciális integrálás

**1.6. feladat.** Határozza meg az alábbi integrálokat:

$$\int \ln x \; dx \;; \qquad \int (x^2+2x)\ln x \; dx \;; \qquad \int (x-1)e^x \; dx \;; \qquad \int x^2 e^{-2x} \; dx \;;$$

$$\int x\cos(x) \; dx \;; \qquad \int (x^2+x)\operatorname{ch}(x) \; dx \;; \qquad \int x^2 \sin 2x \; dx \;; \qquad \int \operatorname{arctg} x \; dx \;;$$

$$\int \arcsin x \; dx \;; \qquad \int x \operatorname{arctg} x \; dx \;; \qquad \int e^{2x}\cos 3x \; dx \;; \qquad \int \sin^4(x) \; dx \;;$$

*Megoldás.* A parciális integrálás tétele szerint:
Ha az $f, g\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók $\langle a,b\rangle$-n és $\exists \int f'g$, akkor $\exists \int fg'$ is és $\exists\; C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\text{(P)} \qquad \int f(x)g'(x) \; dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \; dx + C \qquad (x \in \langle a,b\rangle).$$

A feladatban szereplő integrálok többsége a Kalkulus II. jegyzetben az előbb idézett tételt követő megjegyzésben szereplő típusok valamelyike.

– $\int \ln x \; dx = \int 1 \cdot \ln x \; dx \quad (x>0)$ igaz.
  Válasszuk az $f(x) = \ln x$ és $g(x) = x$ $(x>0)$ függvényeket, akkor $\exists\; f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $g'(x) = 1$, továbbá létezik
  $$\int f'(x)g(x) \; dx = \int \frac{1}{x}\cdot x \; dx = \int 1 \; dx = x \quad (x>0),$$
  így
  $$\begin{aligned}\exists \int 1\cdot \ln x \; dx &= \int f(x)g'(x) \; dx = \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \; dx + C = \\ &= x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x \; dx + C = x\ln x - x + C \qquad (x>0).\end{aligned}$$

– Az $\int (x^2+2x)\ln x \; dx$ kiszámításánál tekintsük az $f(x) = \ln x$, $g'(x) = x^2+2x$, azaz $g(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2$ $(x>0)$ függvényeket, akkor $\exists\; f'(x) = \dfrac{1}{x}$ és
  $$\begin{aligned}\int f'(x)g(x) \; dx &= \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right) dx = \int \left(\frac{x^2}{3}+x\right) dx = \\ &= \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} \qquad (x>0).\end{aligned}$$

Ezért (tételünk szerint) létezik $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\begin{aligned}\int (x^2+2x)\ln x\, dx &= \int f(x)g'(x)\, dx = \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx + C = \\ &= \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\ln x - \left(\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}\right) + C \qquad (x>0).\end{aligned}$$

**Megjegyzés.** $\int P_n(x)\ln x\, dx$ típusú integrál kiszámításánál mindig az $f(x)=\ln x,\ g'(x)=P_n(x)$ választással használjuk (P)-t.

– Az $\int (x-1)e^x\, dx$ kiszámításánál az $f(x)=x-1,\ g'(x)=e^x$ és így $g(x)=e^x,\ f'(x)=1\ (x\in\mathbb{R})$ választással alkalmazható (P) és akkor $\exists\ C\in\mathbb{R}$, hogy

$$\begin{aligned}\int (x-1)e^x\, dx &= (x-1)e^x - \int 1\cdot e^x\, dx + C = \\ &= (x-1)e^x - e^x + C = (x-2)e^x + C \qquad (x\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

– $\int x^2e^{-2x}\, dx$ esetében, előbb az $f(x)=x^2,\ g'(x)=e^{-2x}$, $f'(x)=2x,\ g(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\ (x\in\mathbb{R})$ mellett – (P)-t használva – kapjuk, hogy $\exists\ C_1\in\mathbb{R}$, hogy

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-2x}\, dx &= x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} - \int 2x\cdot\frac{-e^{-2x}}{2}\, dx + C_1 = \\ &= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int xe^{-2x}\, dx + C_1\ ,\end{aligned}$$

ha létezik $\int xe^{-2x}\, dx$. Ennek meghatározására alkalmazzuk újra (P)-t, $f(x)=x,\ g'(x)=e^{-2x},\ f'(x)=1,\ g(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\ (x\in\mathbb{R})$ mellett, akkor $\exists\ C_2\in\mathbb{R}$, hogy

$$\begin{aligned}\int xe^{-2x}\, dx &= x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\, dx + C_2 = \\ &= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\, dx + C_2 = \\ &= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C_2 \qquad (x\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Így

$$\int x^2 e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C_1 + C_2 =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{-2x} + C.$$

**Megjegyzés.** $\int P_n(x) e^{ax}\, dx$ típusú integrál kiszámításánál $f(x) = P_n(x)$, $g'(x) = e^{ax}$ $(x \in \mathbb{R})$ mellett használjuk (P)-t (esetleg többször is, de akkor más – az előbbiekből kapott – $f$-fel).

– $\int x \cos(x)\, dx$ kiszámításánál legyen $f(x) = x,\ g'(x) = \cos(x)$, $f'(x) = 1,\ g(x) = \sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor (P)-ből

$$\int x \cos(x)\, dx = x \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x)\, dx + C =$$
$$= x\sin(x) + \cos(x) + C \quad (x \in \mathbb{R}).$$

– $\int (x^2 + x) \operatorname{ch}(x)\, dx$ esetében kétszer alkalmazzuk a parciális integrálás tételét és (tömör írásmódban) kapjuk, hogy

$$\int (x^2 + x) \operatorname{ch}(x)\, dx = (x^2 + x) \operatorname{sh}(x) - \int (2x + 1) \operatorname{sh}(x)\, dx + C_1 =$$
$$= (x^2 + x) \operatorname{sh}(x) - \left[(2x + 1) \operatorname{ch}(x) - \int 2 \operatorname{ch}(x)\, dx + C_2\right] + C_1 =$$
$$= (x^2 + x) \operatorname{sh}(x) - (2x + 1) \operatorname{ch}(x) + 2 \operatorname{sh}(x) + C_1 + C_2 =$$
$$= (x^2 + x + 2) \operatorname{sh}(x) - (2x + 1) \operatorname{ch}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

**Megjegyzés.** Az $\int P_n(x) \sin(ax + b)\, dx$, $\int P_n(x) \cos(ax + b)\, dx$, $\int P_n(x) \operatorname{sh}(ax + b)\, dx$, $\int P_n(x) \operatorname{ch}(ax + b)\, dx$ típusú integrálok kiszámításánál az $f(x) = P_n(x)$ (és $g'(x)$ a másik tényező) mellett alkalmazzuk $(P)$-t (esetleg többször).

– Így

$$\int x^2 \sin 2x\, dx = x^2 \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int 2x \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\, dx + C_1 =$$
$$= -\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \int x \cos 2x\, dx + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \left[x\frac{1}{2}\sin 2x - \int 1\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\ dx + C_2\right] + C_1 =$$
$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C_1 + C_2 =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\right)\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + C \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

– $$\int \operatorname{arctg}(x)\ dx = \int 1\cdot\operatorname{arctg}(x)\ dx = x\operatorname{arctg}(x) - \int x\frac{1}{1+x^2}\ dx + C =$$
$$= x\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\ dx + C =$$
$$= x\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

– $$\int \arcsin(x)\ dx = \int 1\cdot\arcsin(x)\ dx = x\arcsin(x) - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx + C =$$
$$= x\arcsin(x) + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\ dx + C =$$
$$= x\arcsin(x) + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$
$$= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

– $$\int x\operatorname{arctg}(x)\ dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x) - \int\frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}\ dx + C =$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\ dx + C =$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\left[\int 1\ dx - \int\frac{1}{1+x^2}\ dx\right] + C =$$
$$= \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}x + C \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

**Megjegyzés.** Az $\int P_n(x)\arcsin(x)\ dx$, $\int P_n(x)\arccos(x)\ dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arctg}(x)\ dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arcctg}(x)\ dx$ típusú integráloknál a $g'(x) = P_n(x)$ és $f(x)$ a másik tényező jelölés mellett alkalmazzuk $(P)$-t.

– A parciális integrálás tételét (a $(P)$ formulával) felhasználva, $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \cos 3x$ $(x \in \mathbb{R})$ választással

$$\int e^{2x} \cos 3x \; dx = e^{2x} \frac{\sin 3x}{3} - \int 2e^{2x} \frac{\sin 3x}{3} \; dx + C_1 =$$
$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x \; dx + C_1 =$$
$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \left[ e^{2x} \frac{-\cos x}{3} - \int 2e^{2x} \frac{-\cos 3x}{3} \; dx + C_2 \right] + C_1 =$$
$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cos 3x - \frac{4}{9} \int e^{2x} \cos 3x \; dx + C_1 - \frac{2}{3} C_2$$

$(x \in \mathbb{R})$ következik, ami rendezés után adja, hogy

$$\int e^{2x} \cos 3x \; dx = \left[ \frac{3}{13} \sin 3x + \frac{2}{13} \cos 3x \right] e^{2x} + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

**Megjegyzés.** A fenti módszer alkalmazható általában az $\int e^{ax} \sin bx \; dx$, $\int e^{ax} \cos bx \; dx$ típusú integrálok esetén is.

– $$\int \sin^n(x) \; dx = \int \sin(x) \sin^{n-1}(x) \; dx =$$
$$= -\cos(x) \sin^{n-1}(x) - \int -\cos(x)(n-1) \sin^{n-2}(x) \cos(x) \; dx + C_1 =$$
$$= -\cos(x) \sin^{n-1}(x) + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2}(x) \; dx + C_1 =$$
$$= -\cos(x) \sin^{n-1}(x) + (n-1) \int (1 - \sin^2(x)) \sin^{n-2}(x) \; dx + C_1 =$$
$$= -\cos(x) \sin^{n-1}(x) + (n-1) \int \sin^{n-2}(x) \; dx -$$
$$- (n-1) \int \sin^n(x) \; dx + C_1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

és ebből rendezéssel kapjuk, hogy

$$\int \sin^n(x) \; dx =$$
$$= -\frac{1}{n} \cos(x) \sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) \; dx + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ez az $I_n = \int \sin^n(x) \; dx$ jelöléssel az

$$I_n = -\frac{1}{n} \cos(x) \sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} I_{n-2} + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

úgynevezett rekurzív formulát adja $I_n$-re.
Ha például $n = 2$, úgy

$$\int \sin^2(x)\ dx = -\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x + C.$$

Ha $n = 3$, úgy

$$\int \sin^3(x)\ dx = -\frac{1}{3}\cos(x)\sin^2(x) + \frac{2}{3}\int \sin(x)\ dx + C =$$
$$= -\frac{1}{3}\cos(x)\sin^2(x) - \frac{2}{3}\cos(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Általában $n-1$ lépésben $(n \geq 2)$ megkapjuk $I_n$-t.

**Megjegyzés.** Hasonló eljárással megadható $I_n = \int \cos^n(x)\ dx$ rekurzív formulája is.

## Trigonometrikus és hiperbólikusz függvényekre vonatkozó azonosságok felhasználása

**1.7. feladat.** Számítsa ki az alábbi integrálokat:

$$\int \frac{1}{1+\cos(x)}\ dx\ ; \quad \int \frac{1}{1-\cos(x)}\ dx\ ; \quad \int \frac{1}{\sin(x)}\ dx\ ; \quad \int \frac{1}{\cos(x)}\ dx\ ;$$
$$\int \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}\ dx\ ; \quad \int \sin 3x \sin 5x\ dx\ ; \quad \int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\ dx\ ;$$
$$\int \sin^3(x)\ dx\ ; \quad \int \sin^4(x)\ dx\ ; \quad \int \mathrm{ctg}^2(x)\ dx\ .$$

*Megoldás.*

– A $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ egyenlőségből $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$ következik, ami adja, hogy $\dfrac{1}{1+\cos x} = \dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}$, ha $x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ezért

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\ dx = \int \frac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\ dx =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + C = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + C_k$$

ha $x \in\ ]-\pi + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi[\ ,\ k \in \mathbb{Z}$.

– A $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ egyenlőség adja, hogy $\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2}$, azaz $\dfrac{1}{1-\cos x} = \dfrac{1}{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}$, ha $x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Így

$$\int \frac{1}{1-\cos x}\, dx = \int \frac{1}{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}\, dx = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C_k$$

$$(x \in \,]2k\pi,\ 2k+2\pi[\ ,\ k \in \mathbb{Z})\,.$$

– Mivel

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} = \frac{\sin^2\dfrac{x}{2} + \cos^2\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} =$$
$$= \frac{\sin\dfrac{x}{2}}{2\cos\dfrac{x}{2}} + \frac{\cos\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}},$$

így

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{\sin\dfrac{x}{2}}{2\cos\dfrac{x}{2}}\, dx + \int \frac{\cos\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\, dx + C =$$
$$= -\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) + \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) + C = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C_k,$$

ha például $x \in \,]2k\pi,\ (2k+1)\pi[\ ,\ k \in \mathbb{Z}$.
Belátható, hogy

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \ln\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2}\right)\right) + D_k \quad (x \in \,](2k-1)\pi,\ 2k\pi[\ ,\ k \in \mathbb{Z}).$$

– Az $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)}$ $\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$ egyenlőség miatt

$$\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)}\, dx = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x + \dfrac{\pi}{2}}{2}\right)\right) + C_k =$$
$$= \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) + C_k\ ,$$

ha $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\in\,]2k\pi,\ (2k+1)\pi[\ ,\ k\in\mathbb{Z}$, míg

$$\int\frac{1}{\cos x}\,dx=\ln\Big(\operatorname{tg}\Big(-\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big)\Big)+D_k,$$

ha $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\in\,](2k+1)\pi,\ (2k+2)\pi[\ ,\ k\in\mathbb{Z}$.

– Az

$$\frac{1}{\operatorname{sh}x}=\frac{1}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}=\frac{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}-\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}=$$
$$=\frac{\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}}-\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{2\operatorname{ch}\frac{x}{2}}\qquad(x\neq0)$$

azonosság miatt

$$\int\frac{1}{\operatorname{sh}x}\,dx=\int\frac{\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}}\,dx-\int\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{2\operatorname{ch}\frac{x}{2}}\,dx+C=$$
$$=\ln\Big(2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\Big)-\ln\Big(2\operatorname{ch}\frac{x}{2}\Big)+C=$$
$$=\ln\Big(\operatorname{th}\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big)+C_1\qquad(x>0),$$

illetve

$$\int\frac{1}{\operatorname{sh}x}\,dx=\ln\Big(\operatorname{th}\Big(-\frac{x}{2}\Big)\Big)+C_2\qquad(x<0)$$

következik.

– Az ismert $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$ trigonometrikus azonosság miatt

$$\sin3x\sin5x=\frac{1}{2}[\cos2x-\cos8x]\qquad(x\in\mathbb{R}),$$

így

$$\int\sin3x\sin5x\,dx=\int\frac{1}{2}(\cos2x-\cos8x)\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\cos2x-\frac{1}{2}\int\cos8x\,dx+C=$$
$$=\frac{1}{4}\sin2x-\frac{1}{16}\sin8x+C\qquad(x\in\mathbb{R}).$$

– Tudjuk, hogy $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ $\forall\ \alpha,\ \beta$-ra, így

$$\begin{aligned}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3} &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{3}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{6}+\cos\frac{x}{6}\right] \qquad (x\in\mathbb{R}),\end{aligned}$$

ez pedig adja, hogy

$$\begin{aligned}\int\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\ dx &= \frac{1}{2}\int\cos\frac{5x}{6}\ dx + \frac{1}{2}\int\cos\frac{x}{6}\ dx + C = \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{5}{6}x}{\frac{5}{6}} + \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x}{6}}{\frac{1}{6}} + C = \\ &= \frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x + 3\sin\frac{x}{6} + C \qquad (x\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

– A

$$\sin^3 x = \sin^2 x\sin x = (1-\cos^2 x)\sin x = \sin x - \cos^2 x\sin x$$

trigonometrikus azonosság miatt

$$\begin{aligned}\int\sin^3 x\ dx &= \int\sin x\ dx + \int\cos^2 x(-\sin x)\ dx + C = \\ &= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C \qquad (x\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

– A

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \sin^2 x(1-\cos^2 x) = \sin^2 x - \frac{1}{4}\sin^2 2x = \\ &= \frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{1}{4}\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{8}\cos 4x \qquad (x\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

azonosság miatt

$$\begin{aligned}\int\sin^4 x\ dx &= \frac{3}{8}\int 1\ dx - \frac{1}{2}\int\cos 2x\ dx - \frac{1}{8}\int\cos 4x\ dx + C = \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{8}\frac{\sin 4x}{4} + C = \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{32}\sin 4x + C \qquad (x\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

**Megjegyzés.** Az utóbbi két feladat az $\int\sin^4 x\ dx$ speciális eseteként is számítható (amit a parciális integrálásnál vizsgáltunk).

## Racionális (tört)függvények integrálása

Legyenek $P_n,\ Q_m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $n$-, illetve $m$-edfokú polinomok, $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$ olyan intervallum, melyben $Q_m$ nem zérus.
Az $R\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R},\ R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ függvényt racionális (tört)függvénynek nevezzük.
Bizonyítható, hogy ha $n \geq m$, akkor léteznek $P_{n-m}$ és $P_l$ ($n-m$ illetve $l(<m)$-edfokú) polinomok, hogy

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{P_l(x)}{Q_m(x)}$$

$\forall\ x \in \langle a,b\rangle$-re.
Legyen továbbá a $Q_m$ polinom ($\mathbb{R}$ feletti úgynevezett irreducibilis tényezőkre való) felbontása

$$Q_m(x) = A(x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s},$$

ahol $A$ $Q_m$ főegyütthatója, $i = 1,\ldots,r, j = 1,\ldots,s$ esetén
$a_i, p_j, q_j \in \mathbb{R},\ \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$ és $p_j^2 - 4q_j < 0$ (azaz $x^2 + p_jx + q_j$ nem bontható fel valós elsőfokú polinomok szorzatára).
Ekkor léteznek $A_{ik},\ B_{jl},\ C_{jl} \in \mathbb{R}$, hogy

$$\begin{aligned}\frac{P_l(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \cdots + \frac{A_{r1}}{x-a_r} + \cdots + \frac{A_{r\alpha_r}}{(x-a_r)^{\alpha_r}} + \\ + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \frac{B_{1\beta_1}x + C_{1\beta_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \\ + \cdots + \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2+p_sx+q_s} + \cdots + \frac{B_{s\beta_s}x + C_{s\beta_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}}\end{aligned}$$

$\forall\ x \in \langle a,b\rangle$ esetén.
Így egy racionális törtfüggvény $\int \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$ határozatlan integráljának meghatározása visszavezethető egy $n-m$-edfokú polinom, illetve az $\int \dfrac{A}{(x-a)^i}\,dx$ és $\int \dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}\,dx$ típusú integrálok meghatározására.
A feladatban mindig megadjuk a racionális (tört)függvény fenti előállítását (meghatározva $P_{n-m}$-et és a törtekben szereplő együtthatókat is).

**1.8. feladat.** Határozza meg adott $A, B, C \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{R}$ $(p^2 - 4q < 0)$, $i, j \in \mathbb{N}$ esetén az

$$\int \frac{A}{(x-a)^i}\,dx \qquad \text{és} \qquad \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}\,dx$$

integrálokat.

*Megoldás.*
a) Nyilvánvaló, hogy
$i = 1$ esetén

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = \begin{cases} A\ln(x-a) + C_1 & \text{, ha } x > a \\ A\ln(-(x-a)) + C_2 & \text{, ha } x < a\ . \end{cases}$$

$i > 1$ esetén

$$\int \frac{A}{(x-a)^i}\,dx = \begin{cases} A\dfrac{(x-a)^{-i+1}}{-i+1} + C_1 & \text{, ha } x > a \\ A\dfrac{(x-a)^{-i+1}}{-i+1} + C_2 & \text{, ha } x < a\ . \end{cases}$$

(Lásd „Egy egyszerű helyettesítés” című fejezet.)

b) $$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j} = \frac{Bx+C}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]^j} = \frac{Bx+C}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + b^2\right]^j} =$$

$$= \frac{Bx+C}{b^{2j}\left[\left(\dfrac{x+\frac{p}{2}}{b}\right)^2 + 1\right]^j} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

miatt (ahol $q - \frac{p^2}{4} = \frac{4q-p^2}{4} > 0$ miatt vezetjük be, hogy $b^2 = q - \frac{p^2}{4}$), az $x = bt - \frac{p}{2} = g(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ illetve $g^{-1}(x) = \dfrac{x+\frac{p}{2}}{b} = t$ $(x \in \mathbb{R})$ helyettesítéssel kapjuk (a helyettesítéses integrálás tétele szerint), $\exists\ C_1$, hogy

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}\,dx = \int \frac{B\left(bt-\dfrac{p}{2}\right)+C}{b^{2j}(t^2+1)^j}\,b\,dt\Big|_{t=\frac{x+\frac{p}{2}}{b}} + C_1 =$$

$$= \frac{B}{b^{2(j-1)}2}\int \frac{2t}{(t^2+1)^j}\,dt\Big|_{t=\frac{x+\frac{p}{2}}{b}} +$$

$$+ \frac{C-B\dfrac{p}{2}}{b^{2j-1}}\int \frac{1}{(t^2+1)^j}\,dt\Big|_{t=\frac{x+\frac{p}{2}}{b}} + C_1$$

Ha $j=1$, úgy ebből

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx = \frac{B}{b^{2(j-1)}2}\ln\left(\left(\frac{x+\dfrac{p}{2}}{b}\right)^2+1\right) +$$

$$+ \frac{C-B\dfrac{p}{2}}{b^{2j-1}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\dfrac{p}{2}}{b}\right) + C_2$$

következik $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén.
Ha $j>1$, úgy

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}\,dx = \frac{B}{b^{2(j-1)2}}\frac{(t^2+1)^{-j+1}}{-j+1}\Big|_{t=\frac{x+\frac{p}{2}}{b}} +$$

$$+ \frac{C-B\dfrac{p}{2}}{b^{2j-1}}\int \frac{1}{(t^2+1)^j}\,dt\Big|_{t=\frac{x+\frac{p}{2}}{b}} + C_3$$

következik.
Ugyanakkor a parciális integrálás tételét felhasználva

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^j}\, dt = \int \frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^j}\, dt = \int \frac{1}{(t^2+1)^{j-1}}\, dt -$$
$$-\frac{1}{2}\int t\frac{2t}{(t^2+1)^j}\, dt = \int \frac{1}{(t^2+1)^{j-1}}\, dt -$$
$$-\frac{1}{2}\left[t\frac{(t^2+1)^{-j+1}}{-j+1} - \int 1\cdot\frac{(t^2+1)^{-j+1}}{-j+1}\, dt\right] + C_4 =$$
$$= \frac{2j-3}{2j-2}\int \frac{1}{(t^2+1)^{j-1}}\, dt + \frac{1}{2(j-1)}\frac{t}{(t^2+1)^{j-1}} + C_4.$$

Ezért, ha $j>1$, akkor

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}\, dx = \left[\frac{B}{b^{2(j-1)}2(1-j)} + \frac{C-B\frac{p}{2}}{b^{2j-1}2(j-1)}t\right]\frac{1}{(t^2+1)^{j-1}}\Big|_{t=x+\frac{p}{2}} +$$
$$+\frac{C-B\frac{p}{2}}{b^{2j-1}}\frac{2j-3}{2j-2}\int \frac{1}{(t^2+1)^{j-1}}\, dt\Big|_{t=x+\frac{p}{2}} + C_5.$$

Ha $\int \frac{1}{(t^2+1)^{j-1}}\, dt$-re az előbbi módszert alkalmazzuk, illetve azt tovább folytatjuk, úgy integrálunk véges ($j$) lépésben meghatározható.

**Megjegyzés.** Természetesen (a megjegyezhetőség nehézségei miatt) nem ezen bonyolult formulákat használjuk, hanem minden konkrét feladatban ugyanezt az eljárást követjük majd.

**1.9. feladat.** Határozza meg az alábbi integrálokat:

$$\int \frac{2}{x+3}\, dx\ ; \qquad \int \frac{5}{(x+1)^2}\, dx\ ; \qquad \int \frac{x^2}{x+1}\, dx\ ;$$
$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\, dx\ ; \qquad \int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\, dx\ ; \qquad \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\, dx\ ;$$
$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\, dx\ ; \qquad \int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\, dx\ ; \qquad \int \frac{x}{x^3-3x+2}\, dx\ ;$$
$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+2)^2}\, dx\ .$$

*Megoldás.*

– $\int \frac{2}{x+3}\, dx = 2\int \frac{1}{x+3}\, dx = \begin{cases} 2\ln(x+3)+C_1 & ,\text{ha } x>-3 \\ 2\ln(-(x+3))+C_2 & ,\text{ha } x<-3 \end{cases}$

(az 1.8. feladat a) esetének megfelelően).

– $\int \frac{5}{(x+1)^2}\,dx = 5\int (x+1)^{-2}\,dx =$

$$= \begin{cases} \frac{5(x+1)^{-1}}{-1} + C_1 & ,\text{ha } x > -1 \\ \frac{5(x+1)^{-1}}{-1} + C_2 & ,\text{ha } x < -1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-5}{x+1} + C_1 & ,\text{ha } x > -1 \\ \frac{-5}{x+1} + C_2 & ,\text{ha } x < -1\ . \end{cases}$$

– $\frac{x^2}{x+1} = \frac{(x^2-1)+1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1} \quad (x \neq 1)$
miatt

$$\int \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int (x-1)\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) + C_1 & ,\text{ha } x > -1 \\ \frac{x^2}{2} - x + \ln(-(x+1)) + C_2 & ,\text{ha } x < -1\ . \end{cases}$$

– $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{(x-2)+(x+5)}{(x-2)(x+5)} = \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-2} \quad (x \neq 2,\ x \neq -5)$
miatt

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-2}\right)\,dx =$$

$$= \begin{cases} \ln(-(x+5)) + \ln(-(x-2)) + C_1 & ,\text{ha } x < -5\ , \\ \ln(x+5) + \ln(-(x-2)) + C_2 & ,\text{ha } x \in \,]-5, 2[\ , \\ \ln(x+5) + \ln(x-2) + C_3 & ,\text{ha } x > 2\ . \end{cases}$$

– Megmutatjuk, hogy $\exists\ A, B, C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \quad (x \neq -1, -2, -3).$$

A jobb oldalon közös nevezőre hozva, és rendezve

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (5A+4B+3C)x + 6A + 3B + 2C}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

következik, ha $x \neq -1, -2, -3$, ami csak akkor teljesülhet, ha

$$x = (A + B + C)x^2 + (5A + 4B + 3C)x + 6A + 3B + 2C \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ami csak úgy lehetséges, ha

$$A + B + C = 0, \quad 5A + 4B + 3C = 1, \quad 6A + 3B + 2C = 0.$$

Ez egy lineáris egyenletrendszer $A, B, C$-re, melynek egyértelmű megoldására (nem nehéz számolással)

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{2}{3}, \quad C = \frac{1}{2}$$

következik, így

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{6}\frac{1}{x+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+3}$$

$(x \neq -1, -2, -3)$, ami adja, hogy

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\, dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{6}\ln(-(x+1)) - \frac{2}{3}\ln(-(x+2)) + \frac{1}{2}\ln(-(x+3)) + C_1 & ,\text{ha } x < -3\ , \\ \frac{1}{6}\ln(-(x+1)) - \frac{2}{3}\ln(-(x+2)) + \frac{1}{2}\ln(x+3) + C_2 & ,\text{ha } x \in\, ]-3, -2[\ , \\ \frac{1}{6}\ln(-(x+1)) - \frac{2}{3}\ln(x+2) + \frac{1}{2}\ln(x+3) + C_3 & ,\text{ha } x \in\, ]-2, -1[\ , \\ \frac{1}{6}\ln(x+1) - \frac{2}{3}\ln(x+2) + \frac{1}{2}\ln(x+3) + C_4 & ,\text{ha } x > -1\ . \end{cases}$$

– $$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{(x^3-5x^2+6x) + (5x^2-6x+1)}{x^3-5x^2+6x} =$$

$$= 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x(x^2-5x+6)} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} \qquad (x \neq 0, 2, 3)$$

Megmutatjuk, hogy $\exists\, A, B, C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x} \qquad (x \neq 0, 2, 3).$$

A jobb oldalt hasonlóan alakítva, mint az előző feladatban

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B+C)x^2 + (-3A-2B-5C)x + 6C}{x(x-2)(x-3)}$$

következik, ha $x \neq 0, 2, 3$, ami csak akkor igaz, ha

$$A + B + C = 5, \qquad -3A - 2B - 5C = -6, \qquad 6C = 1,$$

ami $\Longleftrightarrow$ teljesül, ha

$$A = -\frac{21}{6}, \quad B = \frac{52}{6}, \quad C = \frac{1}{6}\ .$$

Az előbbiek miatt, így

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 - \frac{21}{6}\frac{1}{x-2} + \frac{52}{6}\frac{1}{x-3} + \frac{1}{6}\frac{1}{x} \qquad (x \neq 0, 2, 3),$$

ami adja, hogy

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx =$$
$$= \begin{cases} x + \frac{52}{6}\ln(-(x-3)) - \frac{21}{6}\ln(-(x-2)) + \frac{1}{6}\ln(-x) + C_1 & \text{, ha } x < 0\ , \\ x + \frac{52}{6}\ln(-(x-3)) - \frac{21}{6}\ln(-(x-2)) + \frac{1}{6}\ln(x) + C_2 & \text{, ha } x \in\ ]0,2[\ , \\ x + \frac{52}{6}\ln(-(x-3)) - \frac{21}{6}\ln(x-2) + \frac{1}{6}\ln(x) + C_3 & \text{, ha } x \in\ ]2,3[\ , \\ x + \frac{52}{6}\ln(x-3) - \frac{21}{6}\ln(x-2) + \frac{1}{6}\ln(x) + C_4 & \text{, ha } x > 3\ . \end{cases}$$

– Az $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$ az 1.8. feladat b) részének megfelelő integrál $B = 1$, $C = 1$, $p = 1$, $q = 1$ és $j = 1$ mellett, hiszen $p^2 - 4q = 1 - 4 = -3 < 0$.
Az

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\frac{x+1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

azonosság és a $g^{-1}(x) = \dfrac{x+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = t$ $(x \in \mathbb{R})$ illetve

$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{1}{2} = g(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ helyettesítés adja, hogy

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{x+1}{\left(\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}+1}{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt\Big|_{t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)} + C_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt\Big|_{t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)} + \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt\Big|_{t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)} + C_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right] + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C_3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

– Az $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$ integrál meghatározásához előbb megmutatjuk, hogy $\exists\ A, B, C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad (x \neq -1).$$

A jobboldalt közös nevezőre hozva, rendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+(B+C)x+A+C}{(x+1)(x^2+1)} \qquad (x \neq -1),$$

ami csak úgy lehetséges, ha

$$A+B=0, \quad B+C=0, \quad A+C=1,$$

azaz ha $A = \frac{1}{2}$, $\quad B = -\frac{1}{2}$, $\quad C = \frac{1}{2}$, így

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{-x+1}{x^2+1} \qquad (x \neq -1).$$

Ezért integrálunkban az 1.8. feladatban szereplő mindkét típus előfordul, továbbá a b) típusnál már teljes négyzet a nevező. Ezeket figyelembe véve:

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) + C_1 & ,\text{ha } x > -1 \ , \\ \frac{1}{2}\ln(-(x+1)) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) + C_2 & ,\text{ha } x < -1 \ . \end{cases}$$

– Az

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 &= x^3 - x - 2(x-1) = (x^2-1)x - 2(x-1) = \\ &= (x-1)(x^2+x-2) = (x-1)^2(x+2) \qquad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

egyenlőség miatt

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} \qquad (x \neq 1, -2)$$

és megmutatjuk, hogy $\exists\ A, B, C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} \qquad (x \neq 1, -2),$$

azaz

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{(A+C)x^2 + (A+B-2C)x - 2A + 2B + 2C}{(x-1)^2(x+2)}$$

$(x \neq 1, -2)$, ami csak úgy lehetséges, ha

$$A + C = 0, \quad A + B - 2C = 1, \quad -2A + 2B + 2C = 0,$$

azaz, ha $A = \frac{1}{5},\ B = \frac{2}{5},\ C = -\frac{1}{5}$,
ezért

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{1}{5}\frac{1}{x-1} + \frac{2}{5}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{5}\frac{1}{x+2} \qquad (x \neq 1, -2).$$

Ebből következik, hogy

$$\int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{2}{5}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+2}\,dx + C =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{5}\ln(-(x-1)) + \frac{2}{5}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} - \frac{1}{5}\ln(-(x+2)) + C_1 & ,\text{ha } x < -2 \ , \\ \frac{1}{5}\ln(-(x-1)) + \frac{2}{5}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} - \frac{1}{5}\ln(x+2) + C_2 & ,\text{ha } x \in \,]-2, 1[ \ , \\ \frac{1}{5}\ln(x-1) + \frac{2}{5}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} - \frac{1}{5}\ln(x+2) + C_3 & ,\text{ha } x > 1 \ . \end{cases}$$

– Az $\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$ az 1.8. feladat b) részében szereplő integrál speciális esete: $B = 3,\ C = 2,\ p = 2,\ q = 2\ p^2 - 4q = 4 - 8 = -4 < 0$ és $j = 2 > 1$. Így az ott használt módszerrel dolgozhatunk

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \int \frac{3x+2}{[(x+1)^2+1]^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{3(t-1)+2}{(t^2+1)^2}\,dt|_{t=x+1} + C_1 =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2t}{(t^2+1)^2}\,dt|_{t=x+1} - \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt|_{t=x+1} + C_2 =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{(t^2+1)^{-1}}{-1}\,dt|_{t=x+1} - \int \frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt|_{t=x+1} + C_2 =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+2} - \int \frac{1}{t^2+1}\,dt|_{t=x+1} + \frac{1}{2}\int t\frac{2t}{(t^2+1)^2}\,dt + C_3 =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+2} - \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{1}{2}t\frac{(t^2+1)^{-1}}{-1}|_{t=x+1} -$$

$$-\frac{1}{2}\int 1\cdot\frac{(t^2+1)^{-1}}{-1}\,dt|_{t=x+1} + C_4 =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1) + C_5 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

## Racionális törtfüggvényre vezető helyettesítések

**1.10. feladat.** Alkalmas helyettesítéssel vezesse vissza az alábbi integrálokat racionális törtfüggvények integráljára:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}\,dx\ ;$$
$$\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx\ ;$$
$$\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,dx\ ;$$
$$\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx\ ; \qquad \int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx\ ;$$
$$\int \sqrt{x^2-6x-7}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx\ ;$$
$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}\,dx\ ; \qquad \int \frac{x}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}\,dx\ ;$$
$$\int \frac{1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx\ ; \qquad \int \frac{e^x}{1-e^{2x}}\,dx\ ;$$
$$\int \sqrt{e^x-1}\,dx\ .$$

*Megoldás.* Az első három feladat annak annak speciális esete, amikor egy

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\dots,\ \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

(ahol $R(u_1,\dots,u_{k+1})$ az $u_1,\dots,u_{k+1}$ racionális függvénye) integrált kell meghatározni.
Ekkor mindig eredményre vezet a

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=g^{-1}(x)\ ,\quad g(t)=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}=x$$

helyettesítés (alkalmas intervallumon), ahol $n$ az $n_1,\dots,n_k$ természetes számok legkisebb közös többszöröse.

– A $t = \sqrt{x} = g^{-1}(x),\ x = t^2 = g(t)$ $(t \geq 0)$ helyettesítésnél $g'(t) = t^2$, így (a helyettesítéses integrálás tétele szerint):

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{1}{1+t}2t\ dt|_{t=\sqrt{x}} + C_1 = \\ &= 2\int \frac{(t+1)-1}{1+t}\ dt|_{t=\sqrt{x}} + C_1 = \\ &= 2\int 1\ dt|_{t=\sqrt{x}} - 2\int \frac{1}{t+1}\ dt|_{t=\sqrt{x}} + C_2 = \\ &= 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C_3 \qquad (x \geq 0).\end{aligned}$$

– A

$$t = \sqrt{\frac{2x-3}{x}} = g^{-1}(x) \quad \left(x \geq \tfrac{3}{2}\right), \qquad x = \frac{3}{2-t^2} = g(t) \quad (t > \sqrt{2})$$

helyettesítéssel, $g'(t) = \dfrac{2t}{(2-t^2)^2}$ $(t > \sqrt{2})$ mellett

$$\begin{aligned}&\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}\ dx = \int \frac{2-t^2}{3}t\frac{2t}{(2-t^2)^2}\ dt|_{t=\sqrt{\frac{2x-3}{x}}} + C_1 = \\ &= \frac{2}{3}\int \frac{t^2}{2-t^2}\ dt|_{t=\sqrt{\frac{2x-3}{x}}} + C_1 = \\ &= -\frac{2}{3}\int 1\ dt|_{t=\sqrt{\frac{2x-3}{x}}} - \frac{4}{3}\int \frac{1}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})}|_{t=\sqrt{\frac{2x-3}{x}}} + C_1 = \\ &= -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x-3}{x}} - \frac{4}{3}\int \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)\ dt|_{t=\sqrt{\frac{2x-3}{x}}} + C_1 = \\ &= -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x-3}{x}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left(\sqrt{\frac{2x-3}{x}} - \sqrt{2}\right) + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left(\sqrt{\frac{2x-3}{x}} + \sqrt{2}\right) + C_2 \qquad \left(x > \tfrac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

– A $t=\sqrt[6]{x}=g^{-1}(x)$ $(x\geq 0)$, $x=t^6=g(t)$ $(t\geq 0)$ helyettesítéssel, $g'(t)=6t^5$ $(t\geq 0)$ mellett

$$\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx=\int \frac{1}{t^6(1+2t^3+t^2)}6t^5\,dt|_{t=\sqrt[6]{x}}+C=$$
$$=\int \frac{6}{t(2t^3+t^2+1)}\,dt|_{t=\sqrt[6]{x}}+C=$$
$$=6\int \frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+2)}\,dt|_{t=\sqrt[6]{x}}+C=$$
$$=3\int \frac{1}{t(t+1)\left(\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right)}\,dt|_{t=\sqrt[6]{x}}+C=$$
$$=3\int \left[\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}\right]\,dt|_{t=\sqrt[6]{x}}+C,$$

ahol $A,B,C,D$ a korábban használt módszerrel meghatározhatók, az integrálok pedig az 1.8 feladatbeliek speciális esetei.

A következő három (de az azokat követő is) az $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ speciális esete, ahol $R(u,v)$ az $u$ és $v$ változók racionális függvénye. Ekkor (ahogy az elméletben már jeleztük) a $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t=g^{-1}(x)$ $(x\in\,]-\pi,\pi[\,)$ illetve $x=2\operatorname{arctg}(t)=g(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ helyettesítés mindig eredményt hoz (racionális törtfüggvény integráljához jutunk), ugyanis ekkor

$$\sin(x)=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}=\frac{2t}{t^2+1}\qquad(t\in\mathbb{R}),$$
$$\cos(x)=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\qquad(t\in\mathbb{R})$$

és $g'(t)=\dfrac{2}{1+t^2}$ $(t\in\mathbb{R})$ miatt

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx=$$
$$=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{2+t^2}\,dt|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$$

adódik és a jobb oldalon az integrandus racionális törtfüggvény.
Ezért:

– $$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$

$$= \int \frac{1}{t+1}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$

$$= \begin{cases} \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1\right)+C_1 & \text{, ha } \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1>0 \\ \ln\left(-\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1\right)\right)+C_2 & \text{, ha } \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1<0 \end{cases}$$

– $$\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\dfrac{4t}{1+t^2}-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+5}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+\dfrac{2}{3}t+\dfrac{2}{3}}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{3\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}\int \frac{1}{\left(\dfrac{t+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\right)^2+1}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$

$$= \frac{3}{5}\,\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}\right)+C$$

– $\displaystyle\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,dx =$

$$= \int \frac{1}{\left(2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$
$$= \int \frac{t^2+1}{(t^2+3)t}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$
$$= \int \left(\frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+3}\right)\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C\ ,$$

ami már egyszerűen meghatározható.

– $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx \quad \left(x \neq \frac{\pi}{4},\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\,\right)$
számítható az előbbi módszerrel, de a $g^{-1}(x) = \operatorname{tg} x = t,\ x = \operatorname{arctg} t = g(t)$ helyettesítéssel is. Ekkor $g'(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$, így

$$\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx = \int \frac{1-t}{1+t} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg} x} + C =$$
$$= \int \left(\frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1}\right)\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg} x} + C\ ,$$

ami már egyszerűen folytatható.

A következő hat integrál kiszámításánál két módszer is „kínálkozik”.

A) Ezek olyan integrálok, melyek az $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ integrál speciális esetei, így:

(i) ha $a > 0$, akkor a

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t \quad \text{vagy} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x - t\ ;$$

(ii) ha $c > 0$, akkor a

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c} \quad \text{vagy} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = tx - \sqrt{c}\ ;$$

(iii) ha $\exists\ x_1 \in \mathbb{R}$, hogy $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$, akkor a

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_1)$$

helyettesítés után racionális törtfüggvényt kell integrálni (természetesen minden esetben megadható az $x = g(t)$ helyettesítő függvény, melynek $t = g^{-1}(x)$ inverzének alakja azonnal látszik).

B) Az

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$$

teljes négyzetté alakítás jelzi a másik lehetséges utat, melynél $\dfrac{4ac - b^2}{4a} = d^2$, vagy $\dfrac{4ac - b^2}{4a} = -d^2$ jelöléssel, $\dfrac{x + \frac{b}{2a}}{d}$ helyére helyettesítünk $\sin t$-t, vagy $\operatorname{sh} t$-t, vagy $\operatorname{ch} t$-t.

– Az $\int x\sqrt{x^2 + x + 1}\, dx$ integrálnál a

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t,$$
$$t = \sqrt{x^2 + x + 1} - x = g^{-1}(x), \qquad x = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t} = g(t)$$

helyettesítés $g'(t) = -2\dfrac{t^2 - t + 1}{(1 - 2t)^2}$ mellett adja, hogy

$$\int x\sqrt{x^2 + x + 1}\, dx =$$
$$= \int \frac{t^2 - 1}{1 - 2t}\left(\frac{t^2 - 1}{1 - 2t} + t\right)(-2)\frac{t^2 - t + 1}{(1 - 2t)^2}\, dt|_{t = \sqrt{x^2 + x + 1} - x} + C,$$

ami már egy racionális tört integrálja. Ez persze még elég sok munkával jár.
Másrészt az

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1\right]$$

azonosság, illetve az $\dfrac{x+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \operatorname{sh} t,\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} t - \dfrac{1}{2} = g(t)\ (t \geq 0)$ helyettesítés adja, hogy

$$\begin{aligned}
&\int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\int\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} t - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\ dt\Big|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} + C = \\
&= \frac{3}{4}\int\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} t - \frac{1}{2}\right)\operatorname{ch}^2 t\ dt\Big|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} + C = \\
&= \frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\int\operatorname{ch}^2 t\operatorname{sh} t\ dt\Big|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} - \frac{3}{8}\int\operatorname{ch}^2 t\ dt\Big|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} + C = \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{\operatorname{ch}^3 t}{3}\Big|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} - \frac{3}{8}\int\frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2}\ dt\Big|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} + C = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}\operatorname{ch}^3\left(\operatorname{arsh}\frac{x+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\right) - \frac{3}{16}\operatorname{arsh}\frac{x+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{3}{32}\operatorname{sh}\left(2\operatorname{arsh}\frac{x+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C\,.
\end{aligned}$$

– Az $\int\sqrt{x^2-6x-7}\,dx$ számításánál a

$$\sqrt{x^2-6x-7} = x+t$$

$$t = \sqrt{x^2-6x-7} - x = g^{-1}(x), \qquad x = -\frac{t^2+7}{2t+6}$$

helyettesítés, $g'(t) = \dfrac{2t^2 + 12t - 14}{(2t+6)^2}$ mellett adja, hogy

$$\int \sqrt{x^2 - 6x - 7}\, dx =$$
$$= \int \left(t - \frac{t^2+7}{2t+6}\right) \frac{2t^2 + 12t - 14}{(2t+6)^2}\, dt|_{t=\sqrt{x^2-6x-7}-x} + C =$$
$$= \int \frac{(t^2+6t-7)^2}{(2t+6)^2}\, dt|_{t=\sqrt{x^2-6x-7}-x} + C\ ,$$

ami viszonylag egyszerűen kezelhető.

Másrészt az $x^2 - 6x - 7 = (x-3)^2 - 16 = 16\left[\left(\dfrac{x-3}{4}\right)^2 - 1\right]$ azonosság, $\dfrac{x-3}{4} = \operatorname{ch} t$, illetve $x = 4\operatorname{ch} t + 3 = g(t)$ helyettesítés, $g'(t) = 4\operatorname{sh} t$ miatt adja, hogy

$$\int \sqrt{x^2 - 6x - 7}\, dx = \int 4\sqrt{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 - 1}\, dx =$$
$$= 4^2 \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}\, \operatorname{sh} t\, dt|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x-3}{4}} + C =$$
$$= 16 \int \operatorname{sh}^2 t\, dt|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x-3}{4}} + C =$$
$$= 16 \int \frac{1 - \operatorname{ch} 2t}{2}\, dt|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x-3}{4}} + C =$$
$$= 8 \operatorname{arsh}\frac{x-3}{4} - 4\operatorname{sh}\left(2\operatorname{arsh}\frac{x-3}{4}\right) + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A második módszer most is gyorsabban ad eredményt.

– A

$$\sqrt{1 - 2x - x^2} = tx - 1 \qquad t = \frac{1}{x}(\sqrt{1-2x-x^2} + 1) = g^{-1}(x),$$

illetve $x = \dfrac{2t-2}{t^2+1} = g(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ helyettesítés, $g'(t) = \dfrac{-2t^2+4t+2}{(t^2+1)^2}$ adja, hogy

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx = \\
&\quad= \int \frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)}\,dt\Big|_{t=\frac{1}{x}(\sqrt{1-2x-x^2}+1)} + C = \\
&\quad= \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{2}{t^2+1}\right)\,dt\Big|_{t=\frac{1}{x}(\sqrt{1-2x-x^2}+1)} + C = \\
&\quad= \left[-\ln t + \ln(t-1) - 2\operatorname{arctg} t\right]_{t=\frac{1}{x}(\sqrt{1-2x-x^2}+1)} + C\ .
\end{aligned}$$

A másik módon:

$$1-2x-x^2 = 2-(x+1)^2 = 2\left(1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \qquad (|x+1| \le \sqrt{2})$$

és az $\dfrac{x+1}{\sqrt{2}} = \sin t$ $\left(t = \arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$, $x = \sqrt{2}\sin t - 1 = g(t)$, $g'(t) = \sqrt{2}\cos t$ adja, hogy

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{1+\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dx = \\
&= \int \frac{\sqrt{2}\cos t}{1+\sqrt{2}\cos t}\,dt\Big|_{t=\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}} + C
\end{aligned}$$

ami például a $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ helyettesítéssel vihető tovább.
Most a két módszer „nagyjából" egyformán gyors.

– A $\sqrt{x^2+2x+4} = x - t$, azaz $x = \dfrac{t^2-4}{2(t+1)}$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2t+4}{t(t+1)^2}\,dt\Big|_{t=x-\sqrt{x^2+2x+4}} + C = \\
&\quad= \frac{1}{2}\int\left(\frac{4}{t} - \frac{3}{t+1} - \frac{3}{(t+1)^2}\right)\,dt\Big|_{t=x-\sqrt{x^2+2x+4}} + C = \\
&\quad= 2\ln(\sqrt{x^2+2x+4}-x) - \frac{3}{2}\ln(\sqrt{x^2+2x+4}-x-1) + \\
&\qquad\quad + \frac{3}{2}\,\frac{1}{x-\sqrt{x^2+2x+4}-1} + C\ .
\end{aligned}$$

Próbálja ki a másik módszert is.

– A $\sqrt{7x-10-x^2} = t(x-5)$, azaz $x = \dfrac{5t^2+2}{t^2+1}$ helyettesítéssel

$$\int \frac{x}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}\,dx = -\frac{2}{9}\int \frac{5t^2+2}{t^2}\,dt\Big|_{t=\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-5}} + C =$$
$$= \left[-\frac{10}{9}t + \frac{4}{9t}\right]_{t=\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-5}} + C\ .$$

– $$\int \frac{1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)^2+1}}\,dx =$$
$$= \int \frac{1}{\operatorname{sh} t\sqrt{\operatorname{sh}^2 t+1}}\operatorname{ch} t\ dt|_{t=\operatorname{arsh}(x+1)} + C =$$
$$= \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 t}\,dt|_{t=\operatorname{arsh}(x+1)} + C = -\operatorname{cth}[\operatorname{arsh}(x+1)] + C =$$
$$-\frac{\operatorname{ch}[\operatorname{arsh}(x+1)]}{\operatorname{sh}[\operatorname{arsh}(x+1)]} + C = -\frac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh}(x+1))}}{x+1} + C =$$
$$= -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + C\ .$$

– Az $e^x = t,\ x = \ln t = g(t)\ (t>0)$ helyettesítés, $g'(t) = \dfrac{1}{t}\ (t>0)$ miatt adja, hogy

$$\int \frac{e^x}{1-e^{2x}}\,dx = \int \frac{t}{1-t^2}\cdot\frac{1}{t}\,dt|_{t=e^x} + C =$$
$$= \int \frac{1}{1-t^2}\,dt|_{t=e^x} = -\int\left(\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}\right)dt|_{t=e^x} =$$
$$= -A\ln(e^x-1) + B\ln(e^x+1) + C\ ,$$

ha $x>0$, ahol $A$ és $B$ egyszerűen meghatározható.

– Az $e^x = t,\ x = \ln t = g(t)\ (t>0)$ helyettesítéssel, $g'(t) = \dfrac{1}{t}$-vel

$$\int \sqrt{e^x-1}\,dx = \int \sqrt{t-1}\cdot\frac{1}{t}\,dt|_{t=e^x} + C$$

következik.
A $\sqrt{t-1} = u,\ t = u^2+1 = g(u)\ (u\in\mathbb{R})$ helyettesítés és $g'(u) = 2u$ adja,

hogy

$$\int \frac{\sqrt{t-1}}{t}\,dt = \int \frac{u}{u^2+1} 2u\,du\Big|_{u=\sqrt{t-1}} + C_1 =$$
$$= 2\int \frac{u^2+1-1}{u^2+1}\,du\Big|_{u=\sqrt{t+1}} + C_1 =$$
$$= [2u - 2\operatorname{arctg} u]_{u=\sqrt{t-1}} + C_1 = 2\sqrt{t-1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{t-1} + C_1\ .$$

Így

$$\int \sqrt{e^x-1}\,dx = 2\sqrt{e^x-1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1} + C \quad (x \ge 0).$$

# 2. Riemann-integrál

## A Riemann-integrálhatóság fogalma, a Darboux-tétel következményei

**1.11. feladat.** Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ egy intervallum. Bizonyítsa be, hogy a $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozata $[a,b]$-nek, ha

a) $P_k = \{x_i^k |\ x_i^k = a + i\dfrac{b-a}{k},\ i = 0,1,2,\dots,k\}$
(egyenlő részekre osztással kapott felosztássorozat) ;

b) $P_k = \{x_i^k |\ a = x_0^k < x_1^k < \dots < x_k^k = b\}$, ahol $x_0^k, x_1^k, \dots, x_k^k$
egy mértani sorozat egymás után következő tagjai.

*Megoldás.*

a) $\Delta x_i^k = x_i^k - x_{i-1}^k = \dfrac{b-a}{k}$, így $\|P_k\| \doteq \sup\limits_i\{\ \Delta x_i^k,\ i = 0,1,\dots,k\} = \sup \dfrac{b-a}{k} = \dfrac{b-a}{k}$ és $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{b-a}{k} = 0$, ezért $\lim\limits_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$, azaz (definíció szerint) $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozat.

b) Ha $k$ rögzített, úgy (a feltétel miatt) $x_i^k = aq^i$ $(i = 0,1,\dots,k)$, ahol $q = \sqrt[k]{\dfrac{b}{a}} > 1$ (ami könnyen ellenőrízhető).
Ekkor $\Delta x_i^k = x_i^k - x_{i-1}^k = aq^{i-1}(q-1)$, így $q > 1$ miatt

$$\|P_k\| = \sup_i\{\ aq^{i-1}(q-1),\ i = 0,1,\dots,k\} = aq^{k-1}(q-1) =$$
$$= a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{k}} \left(\sqrt[k]{\frac{b}{a}} - 1\right)\ .$$

Ugyanakkor (a sorozatokra tanultak szerint)

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{b}{a}} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{k\to\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{b}{a} \sqrt[k]{\frac{b}{a}} = \frac{b}{a},$$

ami adja, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$, azaz $\langle P_k\rangle$ normális felosztássorozata $[a,b]$-nek.

**1.12. feladat.** Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Bizonyítsa be, hogy $[a,b]$ $\forall$ $\langle P_k\rangle$ normális felosztássorozatára létezik $\lim\limits_{k\to\infty} s(f,P_k) = \underline{I}$, $\lim\limits_{k\to\infty} S(f,P_k) = \bar{I}$ és $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{O}(f,P_k) = \bar{I} - \underline{I}$.

*Megoldás.* Legyen $\varepsilon > 0$ adott, akkor a Darboux-tétel miatt $\exists$ $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall$ $P$-re, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$ $\quad |s(f,P) - \underline{I}| < \varepsilon$, $|S(f,P) - \bar{I}| < \varepsilon$.
Legyen $\langle P_k\rangle$ normális felosztássorozat akkor $\lim\limits_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$ miatt
$\delta(\varepsilon) > 0$-hoz $\exists$ $N_1(\delta(\varepsilon))$, hogy $\forall$ $k > N_1(\delta(\varepsilon))$ esetén $\|P_k\| < \delta(\varepsilon)$.
Ha tehát $N(\varepsilon) = N_1(\delta(\varepsilon))$, akkor $\forall$ $k > N(\varepsilon)$-ra $\|P_k\| < \delta(\varepsilon)$, így

$$|s(f,P_k) - \underline{I}| < \varepsilon \ , \qquad |S(f,P_k) - \bar{I}| < \varepsilon \ ,$$

ami (a határérték definíciója miatt) adja az első két állítást.
A harmadik $\mathcal{O}(f,P_k) = S(f,P_k) - s(f,P_k)$-ból jön $k \to \infty$ esetén.

**1.13. feladat.** Bizonyítsa be, hogy az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ függvény Riemann-integrálható és $\int\limits_a^b x^3\,dx = \dfrac{b^4 - a^4}{4}$ .

*Megoldás.* Legyen $\langle P_k\rangle$ a 2.1. feladat a) része szerinti normális felosztássorozata $[a,b]$-nek, azaz

$$P_k = \{\ x_i^k |\ x_i^k = a + i \cdot \frac{b-a}{k},\ i = 0,1,2,\ldots,k\ \}.$$

Függvényünk monoton növekedő, így az $[x_{i-1}^k, x_i^k]$ intervallumhoz tartozó $m_i^k$ illetve $M_i^k$ éppen az intervallum alsó, illetve felső végpontjaiban felvett függvényértékek, azaz

$$m_i^k = \left(a + (i-1)\frac{b-a}{k}\right)^3 \ , \quad M_i^k = \left(a + i \cdot \frac{b-a}{k}\right)^3 \ .$$

Ezért $\Delta x_i^k = \dfrac{b-a}{k}$ miatt

$$s(f,P_k) = \sum_{i=1}^{k} \left(a + (i-1)\frac{b-a}{k}\right)^3 \frac{b-a}{k}\ ,$$
$$S(f,P_k) = \sum_{i=1}^{k} \left(a + i\cdot\frac{b-a}{k}\right)^3 \frac{b-a}{k}\ .$$

Egyszerű számolás adja, hogy

$$\begin{aligned}
&s(f,P_k) = \\
&= \left[ka^3 + \frac{3a^2(b-a)}{k}\sum_{i=1}^{k}(i-1) + \frac{3a(b-a)^2}{k^2}\sum_{i=1}^{k}(i-1)^2 + \frac{(b-a)^3}{k^3}\sum_{i=1}^{k}(i-1)^3\right]\frac{b-a}{k} = \\
&= \left(a^3 + \frac{3}{2}a^2(b-a)\frac{k-1}{k} + \frac{a(b-a)^2}{2}\frac{(k-1)(2k-1)}{k^2} + \frac{(b-a)^3}{4}\frac{(k-1)^2}{k^2}\right)(b-a) \\
&S(f,P_k) = \\
&= \left[ka^3 + \frac{3a^2(b-a)}{k}\sum_{i=1}^{k} i + \frac{3a(b-a)^2}{k^2}\sum_{i=1}^{k} i^2 + \frac{(b-a)^3}{k^3}\sum_{i=1}^{k} i^3\right]\frac{b-a}{k} = \\
&= \left(a^3 + \frac{3}{2}a^2(b-a)\frac{k+1}{k} + \frac{a(b-a)^2}{2}\frac{k(2k+1)}{k^2} + \frac{(b-a)^3}{4}\right)(b-a)
\end{aligned}$$

Így $\underline{I} = \lim\limits_{k\to\infty} s(f,P_k) = \dfrac{b^4-a^4}{4}$, $\bar{I} = \lim\limits_{k\to\infty} S(f,P_k) = \dfrac{b^4-a^4}{4}$ teljesül (ahol felhasználtuk az előző feladatot is), ami adja, hogy $\underline{I} = \bar{I} = \dfrac{b^4-a^4}{4}$, azaz $f$ Riemann-integrálható és teljesül az is, hogy $\int\limits_a^b x^3\,dx = \dfrac{b^4-a^4}{4}$.

**Megjegyzések.**

1. Ha $\langle P_k \rangle$-nak a 2.1. feladat b) részében vizsgált normális felosztássorozatot választjuk, úgy még egyszerűbben kapjuk feladatunk bizonyítását (ellenőrízzük).
2. Az $f(x) = x^3$ $(x \in [a,b])$ függvény folytonos, ezért Riemann-integrálhatósága a Kalkulus II. jegyzet I.4. fejezet 5. tételéből is következik. Az integrál értékének meghatározása ugyanúgy történik.

## A Riemann-integrálhatóság kritériumai, elegendő feltételei, műveleti tulajdonságok

**1.14. feladat.** Bizonyítsa be, hogy az $f(x) = 2 - x$, $x \in [0, 1]$ függvény Riemann-integrálható $[0, 1]$-en és $\int\limits_0^1 (2 - x)\, dx = \dfrac{3}{2}$ .

*Megoldás.* Az adott függvény Riemann-integrálható $[0, 1]$-en, mert monoton csökkenő (ahogy azt már általánosabb lineáris függvények esetén korábban megmutattuk).
Az integrál értéke meghatározható például $\forall\ \langle P_k \rangle$ normális felosztássorozathoz tartozó $s(f, P_k)$ határértékeként.
Legyen rögzített $k$-ra $P_k = \left\{\ x_i^k |\ x_i^k = \dfrac{i}{k},\ i = 0, 1, \ldots, k\ \right\}$, akkor a 2.1. feladat szerint $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozat.
$f$ monoton csökkenő, így az $[x_{i-1}^k, x_i^k] = \left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right]$ intervallumhoz tartozó $m_i^k = f(x_i^k) = 2 - \dfrac{i}{k}$, $\Delta x_i^k = \dfrac{1}{k}$, ezért

$$s(f, P_k) = \sum_{i=1}^{k} \left(2 - \frac{i}{k}\right) \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{2}{k} - \frac{i}{k^2}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k} i = 2 - \frac{1}{k^2} \frac{k(k+1)}{2} = 2 - \frac{k+1}{2k} \quad (k \in \mathbb{N}) \ ,$$

ami adja, hogy $I = \lim\limits_{k \to \infty} s(f, P_k) = \lim\limits_{k \to \infty} \left(2 - \dfrac{k+1}{2k}\right) = \dfrac{3}{2}$ .
Ezzel a feladatot megoldottuk.

**1.15. feladat.** Vizsgálja a következő függvények Riemann-integrálhatóságát, határozza meg a Riemann-integrál értékét (ha létezik):

a) $f(x) = x + 5 \ , \quad x \in [-1, 1]$ ;

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ ha } x \in [-1, 0[ \\ 1 & , \text{ ha } x \in [0, 1] \end{cases}$ ;

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \text{ ha } x \in [-1, 0[ \ \cup\ ]0, 1] \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}$ ;

d) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 6$ , $x \in [0, 2]$ ;

e) $f(x) = |x + 3|$ , $x \in [-5, 5]$.

*Megoldás.*

a) Az $f(x) = x+5$, $x \in [-1, 1]$ függvény folytonos, így Riemann-integrálható $[-1, 1]$-en.

Ismeretes, hogy $\int\limits_a^b x\,dx = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$ és $\int\limits_a^b 5\,dx = 5(b-a)$, ezért $\exists \int\limits_{-1}^1 x\,dx = 0$ és $\int\limits_{-1}^1 5\,dx = 10$.

Így a Riemann-integrál műveleti tulajdonságai (Kalkulus II.I.6.1. tétel) miatt létezik $\int\limits_{-1}^1 (x + 5)\,dx$ és

$$\int\limits_{-1}^1 (x + 5)\,dx = \int\limits_{-1}^1 x\,dx + \int\limits_{-1}^1 5\,dx = 0 + 10 = 10.$$

b) Az

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ ha } x \in [-1, 0[ \\ 1 & , \text{ ha } x \in [0, 1] \end{cases}$$

függvény (ahogy ez egyszerűen belátható) monoton növekedő, így a Kalkulus II.I.4.6. tétel miatt Riemann-integrálható $[-1, 1]$-en és akkor a $[-1, 0]$ és $[0, 1]$ intervallumokon is.

Mivel $f(x) = 1$, ha $x \in [0, 1]$, így $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 1\,dx = 1$.

Másrészt

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ ha } x \in [-1, 0[ \\ 1 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases} ,$$

így $\int\limits_{-1}^0 f(x)\,dx$ értéke meghatározható $[-1, 0]$ tetszőleges $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozatához tartozó $\langle s(f, P_k) \rangle$ határértékeként.

Legyen $\langle P_k \rangle$ olyan, hogy $P_k = \left\{ x_i^k \,|\, x_i^k = -1 + \dfrac{i}{k},\ i = 0, 1, \ldots, k \right\}$, ekkor $m_i^k = -1$ $(i = 1, \ldots, k)$, $\Delta x_i^k = \dfrac{1}{k}$, így

$$s(f, P_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)\frac{1}{k} = -1 \ ,$$

ezért

$$\lim_{k\to\infty} s(f, P_k) = -1 = \int_{-1}^{0} f \ .$$

Most már az integrál intervallum feletti additivitása miatt (lásd Kalkulus II. I.4.8. tétel)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = \int_{-1}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{1} f(x)\ dx = -1 + 1 = 0 \ .$$

c) Az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \text{ ha } x \in [-1, 0[\, \cup\, ]0, 1] \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény (ahogy ezt már korábban beláttuk) nem korlátos $[-1, 1]$-en, így nem Riemann-integrálható.

d) Az $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 6$, $x \in [0, 2]$ függvény folytonos, így Riemann-integrálható. Másrészt $f$ az $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^2$ és $f_3(x) = 6$ $(x \in [0, 2])$ függvények lineáris kombinációja.
Mivel pedig beláttuk, hogy

$$\int_a^b x^3\ dx = \frac{b^4 - a^4}{4}, \quad \int_a^b x^2\ dx = \frac{b^3 - a^3}{3} \quad \text{és} \quad \int_a^b 6\ dx = 6(b - a),$$

így

$$\int_0^2 x^3\ dx = \frac{2^4 - 0^4}{4} = 4, \qquad \int_0^2 x^2\ dx = \frac{2^3 - 0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

és

$$\int_0^2 6\ dx = 6(2 - 0) = 12 \ .$$

Végül felhasználva a Kalkulus II. I.6. fejezet 1. tételét:

$$\int_0^2 (5x^3 - 3x^2 + 6)\ dx = 5\int_0^2 x^3 - 3\int_0^2 x^2 + \int_0^2 6\ dx =$$
$$= 20 - 8 + 12 = 24\ .$$

e) Az abszolútérték definíciója miatt

$$f(x) = |x+3| = \begin{cases} -(x+3) & ,\ \text{ha } x \in [-5,-3] \\ x+3 & ,\ \text{ha } x \in [-3,5]. \end{cases}$$

$f$ (például az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételt használva) folytonos $[-5,5]$-ben, így Riemann-integrálható $[-5,5]$-on, de akkor a $[-5,-3]$ és $[-3,5]$ intervallumokon is és

$$\int_{-5}^{-3} |x+3|\ dx = \int_{-5}^{-3} -(x+3)\ dx = -\int_{-5}^{-3} x\ dx + \int_{-5}^{-3} 3\ dx =$$
$$= -\frac{(-3)^2 - (-5)^2}{2} + 3(-3-(-5)) = 8 + 6 = 14\ ,$$
$$\int_{-3}^{5} |x+3|\ dx = \int_{-3}^{5} (x+3)\ dx = \int_{-3}^{5} x\ dx + \int_{-3}^{5} 3\ dx =$$
$$= \frac{5^2 - (-3)^2}{2} + 3(5-(-3)) = 8 + 24 = 32\ .$$

Ezért

$$\int_{-5}^{5} |x+3|\ dx = \int_{-5}^{-3} |x+3|\ dx + \int_{-3}^{5} |x+3|\ dx = 46\ .$$

## Egyenlőtlenségek, középértéktételek Riemann-integrálra

**1.16. feladat.** Bizonyítsa be, hogy

a) $$\int_1^2 (3x^2+4)\ dx \geq \int_1^2 (x^2+5)\ dx\ ;$$

b) $$\int_0^\pi (1+\sin x)\ dx \geq 0\ ;$$

c) $$\int_{-2}^2 (x^2+2)\ dx \geq \int_{-2}^2 (x-1)\ dx\ ;$$

d) $$\int_2^4 (x^2-6x+8)\ dx \leq 0\ ;$$

e) $$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}\ dx \leq \frac{1}{3}\ .$$

*Megoldás.* Az itt szereplő integrálok (a függvények folytonossága miatt) léteznek.

a) $3x^2+4 \geq x^2+5 \iff 2x^2 \geq 1 \iff |x| \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \implies 3x^2+4 \geq x^2+5$, ha $x \geq 1$, így $3x^2+4 \geq x^2+5$, ha $x \in [1,2]$.
Ezért a Kalkulus II. I.7. fejezet (Egyenlőtlenségek, középértéktételek Riemann-integrálra) 1. tétele szerint az integrálok közötti egyenlőtlenség is teljesül.

b) $1+\sin x \geq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, így az előbb idézett tétel szerint

$$\int_0^\pi (1+\sin x)\ dx \geq \int_0^\pi 0\ dx = 0(\pi-0) = 0,$$

amit bizonyítani kellett.

c) $x^2+2 \geq x-1 \iff x^2-x+3 \geq 0 \iff \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{8}{4} \geq 0$,
ami $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén igaz, így akkor is, ha $x \in [-2,2]$.
Ebből pedig (újra felhasználva tételünket) jön az egyenlőtlenség a két integrálra.

d) $x^2-6x+8\le 0 \iff (x-3)^2-1\le 0 \iff (x-3)^2\le 1 \iff$

$$\begin{aligned}&\iff |x-3|\le 1 \iff -1\le x-3\le 1 \iff\\ &\iff 2\le x\le 4,\end{aligned}$$

azaz $x^2-6x+8\le 0$, ha $x\in[2,4]$, ami az előbbi tételt használva adja, hogy

$$\int_2^4 (x^2-6x+8)\ dx \le \int_2^4 0\ dx = 0,$$

s ezt kellett bizonyítani.

e) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}\le x^2 \iff 1\le\sqrt{1+x^4} \iff 1\le 1+x^4 \iff 0\le x^4$, ami $\forall\ x\in\mathbb{R}$-re teljesül, így

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}\ dx \le \int_0^1 x^2 = \frac{1^3-0^3}{3} = \frac{1}{3}\ ,$$

amit bizonyítani kellett.

**1.17. feladat.** Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{\sqrt{3}}{8}\le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\ dx \le \frac{\sqrt{2}}{6}\ .$$

*Megoldás.* Az

$$f\colon \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

függvény szigorúan monoton csökkenő, mert

$$\begin{aligned}f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\le 0 \iff x\cos x-\sin x\le 0 \iff\\ \iff x\cos x\le\sin x \iff x\le\operatorname{tg}x\end{aligned}$$

ami $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén illetve a $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén is igaz.
Ezért

$$m = \inf_{x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\ ,$$

$$M = \sup_{x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\ .$$

Tehát

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi},$$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ folytonos a $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ intervallumon, így Riemann-integrálható, ezért a Riemann-integrálokra vonatkozó középértéktétel

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a)$$

formulája miatt $a = \frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{3}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $m = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$, $M = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ mellett

$$\frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\ dx \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}\ ,$$

amit bizonyítani kellett.

**1.18. feladat.** Legyen $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Bizonyítsa be, hogy létezik $c \in [a,b]$, hogy $\int\limits_0^3 x^2\ dx = 3c^2$.

*Megoldás.* $f$ folytonos $[0,3]$-on, így a középértéktétel 2. következménye miatt $\exists\ c \in [0,3]$, hogy $f(c) = c^2 = \frac{1}{3}\int\limits_0^3 x^2\ dx$, s ez adja az állítást.

## Az integrálfüggvény

**1.19. feladat.** Határozza meg az $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény lokális szélsőértékhelyeit, ha

$$\text{a)}\quad F(x) = \int_0^x \log \frac{1+t^2}{5}\; dt\;;$$

$$\text{b)}\quad F(x) = \int_\pi^x \frac{\sin t}{2+\cos t}\; dt\;;$$

$$\text{c)}\quad F(x) = \int_0^{x^2} \frac{t^2-5t+4}{e^t+2}\; dt\;.$$

*Megoldás.* Ismeretes (lásd Kalkulus II. jegyzet), hogy adott $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény esetén az

$$F\colon [a,b] \to \mathbb{R},\; F(x) = \int_a^x f(t)\; dt$$

függvényt $f$ integrálfüggvényének nevezzük.
Megmutattuk, hogy ha $f$ folytonos $x \in [a,b]$-ben, akkor $\exists\; F'(x) = f(x)$.
Így ha $f$ folytonos $[a,b]$-n, akkor $\exists\; F'(x) = f(x)\; \forall\; x \in [a,b]$-re, azaz $F$ egy primitív függvénye $f$-nek.
Mindhárom feladat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényei (az integrandusok) folytonosak, így $\forall\; x \in \mathbb{R}$ esetén $\exists\; F'(x) = f(x)$ az első két esetben, míg

$$F(x) = G(x^2)\;(x \in \mathbb{R}) \quad G(x) = \int_0^x \frac{t^2-5t+4}{e^t+2}$$

miatt $\exists\; F'(x) = G'(x^2)2x$.

a) $F'(x) = \log \dfrac{1+x^2}{5}$ $(x \in \mathbb{R})$ és

$$F'(x) = 0 \iff \frac{1+x^2}{5} = 1 \iff 1+x^2 = 5 \iff$$
$$\iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2\;,$$

így $F$-nek $x = \pm 2$-ben lehet szélsőértéke.

$F'$ az $y \to \log y$ és $x \to \dfrac{1+x^2}{5}$ differenciálható függvények kompozíciója,

így

$$\exists\ F''(x) = \frac{5}{1+x^2}2x = \frac{10x}{1+x^2},$$

továbbá

$$F''(-2) = -\frac{20}{5} = -4 < 0, \qquad F''(2) = \frac{20}{5} = 4 > 0$$

miatt $F$-nek maximuma van $x = -2$-ben és minimuma van $x = 2$-ben.

b) $F'(x) = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ $(x \in \mathbb{R})$ és

$$F'(x) = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = k\pi\ ,$$

továbbá

$$\exists\ F''(x) = \frac{\cos x(2+\cos x) + \sin^2 x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$F''(2l\pi) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} > 0, \qquad F''((2l+1)\pi) = -\frac{1}{9} < 0 \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

Ezért az $x = 2l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$ helyeken lokális minimuma van, míg az $x = (2l+1)\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$ helyeken lokális maximuma van $F$-nek.

c) $F'(x) = G'(x^2)2x = \dfrac{x^4+5x^2+4}{e^{x^2}+2}2x$ és $F'(x) = 0 \iff x = -2, -1, 0, 1, 2$ . $F''(x)$, majd $F''(-2)$, $F''(-1)$, $F''(0)$, $F''(1)$, $F''(2)$ meghatározásával kapjuk, hogy a $-1$ és $1$ helyen lokális maximuma, a $0, -2, 2$ helyeken lokális minimuma van $F$-nek.

**1.20. feladat.** Határozza meg a

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^x \cos t^2\ dt}{x}\ ; \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\ dt}{\sqrt{x^2+1}}$$

határértékeket.

*Megoldás.*

a) Az $F(x) = \int\limits_0^x \cos t^2\ dt$, $G(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ differenciálható függvények, $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \lim\limits_{x\to 0} \int\limits_0^x\ cost^2 = F(0) = 0$ és $\lim\limits_{x\to 0} G(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, továbbá $F'(x) = \cos x^2$ és $G'(x) = 1$ miatt $\exists\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F'(x)}{G'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x^2}{1} = 1$, így $F$

és $G$ teljesíti a L'Hospital-szabály feltételeit, ezért

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^x \cos t^2 \, dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = 1 \; .$$

b) Legyen most $F(x) = \int\limits_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 \, dt$, $G(x) = \sqrt{x^2+1}$, így

$$\exists \; F'(x) = (\operatorname{arctg} x)^2, \quad G'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty$$

(ezt ellenőrízzük) és $\lim\limits_{x\to\infty} G(x) = +\infty$, továbbá

$$\lim_{x\to +\infty} (\operatorname{arctg} x)^2 = \frac{\pi^2}{4} \text{ és } \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

miatt $\exists \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{\pi^2}{4}$, így a L'Hospital-szabály adja, hogy

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 \, dt}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{\pi^2}{4} \; .$$

## A Newton-Leibniz formula, integrálási módszerek

**1.21. feladat.** Számítsa ki az alábbi Riemann-integrálokat:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2 \, dx$ ; b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx$ ; c) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ ;

d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} \, dx$ ; e) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2+4x+5} \, dx$ ; f) $\displaystyle\int_{0}^{1} (5x^3+3x^2+x-5) \, dx$

*Megoldás.* Ismeretes a Newton-Leibniz formula nevű tétel:
Legyen $f, F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $f$ Riemann-integrálható, $F$ folytonos $[a,b]$-n és differenciálható $]a,b[$-n, továbbá $F'(x) = f(x)$ $(x \in\, ]a,b[\,)$, akkor

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b\,.$$

Az integrandusokban szereplő $f$ függvények mindegyike folytonos az adott intervallumon, így a Riemann-integrálok léteznek. Továbbá léteznek az $F$ primitív függvények, melyeket az $\int f(x)\ dx$ határozatlan integrálok adnak meg (ahol $C = 0$ választható).
a) $f(x) = x^2$, így

$$F(x) = \int x^2\ dx = \frac{x^3}{3} \implies \int_{-1}^{2} x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - \left(\frac{-1}{3}\right) = 3.$$

b) $f(x) = \sin x$, így

$$\begin{aligned} F(x) = \int \sin x\ dx = -\cos x \implies \int_0^{\pi} \sin x\ dx = \\ = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 2. \end{aligned}$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, így

$$\begin{aligned} F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arcsin(x) \implies \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \\ = [\arcsin(x)]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \\ = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\ . \end{aligned}$$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, így

$$F(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \operatorname{arctg}(x) \implies \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\ dx =$$

$$= [\operatorname{arctg}(x)]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}\ .$$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+5} = \dfrac{1}{(x+2)^2+1}$, így

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2+4x+5}\ dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\ dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} \frac{1}{x^2+4x+5}\ dx = [\operatorname{arctg}(x+1)]_{-2}^{1} = \operatorname{arctg}(2) - \operatorname{arctg}(-1).$$

f) $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + x - 5$, így

$$F(x) = \frac{5x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 5x \implies \int\limits_{0}^{1} (5x^3 + 3x^2 + x - 5)\ dx =$$

$$= \left[\frac{5x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} - 5x\right]_0^1 = -\frac{9}{4}\ .$$

**1.22. feladat.** Számítsa ki az alábbi Riemann-integrálokat:

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx \; ; \qquad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^2 x \, dx \; ; \qquad \int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-5x}} \, dx \; ;$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x \, dx \; ; \qquad \int_1^{e} \frac{\ln^2 x}{x} \, dx \; ; \qquad \int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x} \, dx \; ;$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 3x \, dx \; ; \qquad \int_0^{1} x^2 e^x \, dx \; ; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x \, dx \; ;$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x \, dx \; ; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \; ; \qquad \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-3x+2} \, dx \; ;$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \; ; \qquad \int_0^{9} \frac{2}{1+\sqrt{x}} \, dx \; ; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos x+3} \, dx$$

*Megoldás.*

– Az $f(x) = \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ $(x \in [0,\pi])$ függvény folytonos, így Riemann-integrálható,

$$F(x) = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} \qquad (x \in [0,\pi])$$

primitív függvénye $f$-nek, így

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \; .$$

– Az

$$f(x) = \operatorname{ctg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \qquad \left(x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

függvény folytonos, így Riemann-integrálható.

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) \, dx = -\operatorname{ctg} x - x \qquad \left(x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

primitív függvénye $f$-nek, így a Newton-Leibniz formula szerint:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^2 x \, dx = [-\operatorname{ctg} x - x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\pi}{2} \ .$$

– Az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-5x}}$ $(x \in [-2,-1])$ függvény folytonos, így Riemann-integrálható.
Az

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2-5x}} \, dx = -\frac{1}{5}\frac{\sqrt{2-5x}}{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} \qquad (x \in [-2,-1])$$

primitív függvénye $f$-nek, ezért a N-L formulát felhasználva:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-5x}} \, dx = \left[-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}\right]_{-2}^{-1} = \frac{2}{5}(\sqrt{12} - \sqrt{7}).$$

– Az

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1-\cos^2 x)\sin x = \\ &= \sin x + \cos^2 x(-\sin x) \qquad (x \in [0,\pi]) \end{aligned}$$

függvény Riemann-integrálható, mert folytonos.
A

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sin^3 x \, dx = \int \left[\sin x + \cos^2 x(-\sin x)\right] \, dx = \\ &= \int \sin x \, dx + \int \cos^2 x(-\sin x) \, dx = \\ &= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x \qquad (x \in [0,\pi]) \end{aligned}$$

függvény primitív függvénye $f$-nek, így a N-L formula szerint:

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x \, dx = \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \ .$$

– Az

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x} = (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} \qquad (x \in [1,e])$$

függvény folytonos, így Riemann-integrálható $[1, e]$-n.
A határozatlan integrálokról tanultakat felhasználva kapjuk, hogy az

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{\ln^2 x}{x}\, dx = \int (\ln x)^2 (\ln x)'\, dx = \frac{(\ln x)^3}{3} = \\ &= \frac{1}{3}\ln^3 x \qquad (x \in [1, e]) \end{aligned}$$

függvény primitív függvénye $f$-nek, így N-L formula szerint:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\, dx = \left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_1^e = \frac{1}{3}\ln^3 e - \frac{1}{3}\ln^3 1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}\ .$$

– Az

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x} = \frac{2\sin x \cos x}{3+\sin^2 x} = \frac{(3+\sin^2 x)'}{3+\sin^2 x} \qquad (x \in [0, \pi])$$

függvény folytonos, így Riemann-integrálható $[0, \pi]$-n.
Az

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x}\, dx = \int \frac{(3+\sin^2 x)'}{3+\sin^2 x}\, dx = \\ &= \ln(3+\sin^2 x) \qquad (x \in [0, \pi]) \end{aligned}$$

függvény primitív függvénye $f$-nek, ezért a N-L formula szerint:

$$\int_0^\pi \frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x}\, dx = \big[\ln(3+\sin^2 x)\big]_0^\pi = \ln 3 - \ln 3 = 0.$$

– Az

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \sin 3x = \frac{1}{2}[\cos(x-3x) - \cos(x+3x)] = \\ &= \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x \qquad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) \end{aligned}$$

függvény folytonos, így Riemann-integrálható.
Az

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sin x \sin 3x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx = \\ &= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x \qquad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) \end{aligned}$$

függvény primitív függvénye $f$-nek, ezért a N-L formula szerint:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 3x \; dx = \left[\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 - 0 = 0.$$

– Az $x \to x^2$ $(x \in [0,1])$ függvény differenciálható, az $x \to e^x$ $(x \in [0,1])$ függvény folytonos, így a Riemann-integrálra vonatkozó parciális integrálás tétele szerint:

$$\exists \int_0^1 x^2 e^x \; dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x \; dx = e - 2\int_0^1 xe^x \; dx.$$

Másrészt az $x \to x$ $(x \in [0,1])$ függvény is differenciálható és az $x \to e^x$ $(x \in [0,1])$ függvény folytonos, így a parciális integrálás tétele szerint:

$$\exists \int_0^1 xe^x \; dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1e^x \; dx = e - [e^x]_0^1 = e - [e - e^0] = 1.$$

A két formulát használva:

$$\int_0^1 x^2 e^x \; dx = e - 2.$$

– A parciális integrálás tétele (egyszerűen ellenőrízhető módon) most is alkalmazható, ezért

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x \; dx = [x \sin x]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin x \; dx =$$

$$= 0 - [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = 0 - 0 = 0.$$

– Az előbbiekhez hasonló vizsgálat adja, hogy alkalmazható a parciális integrálás tétele, mely szerint most:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x \; dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot \arccos x \; dx = [x \arccos x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \; dx =$$

$$= \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \; dx =$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) \; dx =$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-x^2)' \; dx =$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \left[ \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{6} - \left( \sqrt{1 - \frac{1}{4}} - \sqrt{1} \right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$$

– Használható a parciális integrálás tétele, így:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n-1} x \; dx = \left[ - \cos x \sin^{n-1}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} [- \cos x](n-1) \sin^{n-2}(x)(\cos^2 x) \; dx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 \; dx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\cos^2 x)\; dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

ami adja az $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ rekurzív formulát $I_n$-re.

Ebből pedig $I_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \; dx = \dfrac{\pi}{2}$ és $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \; dx = 1$ miatt könnyen adódik, hogy

$n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) esetén

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{3}{2} I_0 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k} \cdot \frac{\pi}{2}\;,$$

$n = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) esetén pedig

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{2}{1} I_1 = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2k+1}\;.$$

**Megjegyzés.** Belátható, hogy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \; dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \; dx$.

– Az

$$f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-2)(x-1)} =$$
$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \qquad (x \in [-1,0])$$

függvény folytonos és így Riemann-integrálható $[-1,0]$-on.

Az

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2-3x+2}\; dx = \int \frac{1}{x-2}\; dx - \int \frac{1}{x-1}\; dx =$$
$$= \ln(2-x) - \ln(1-x) \qquad (x \in [-1,0])$$

függvény primitív függvénye $f$-nek, így a N-L formula miatt

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-3x+2}\; dx = \left[\ln\frac{2-x}{1-x}\right]_{-1}^{0} = \ln 2 - \ln\frac{3}{2} = \ln\frac{2}{\frac{3}{2}} = -\ln 3.$$

Az utolsó négy integrálnál a helyettesítéses Riemann-integrálás tételét használjuk, alkalmas $x = g(t)$ helyettesítéssel:
Ha $g\colon [a,b] \to [c,d]$ folytonosan differenciálható, $f\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\ dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ dx$$

– Az $\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$ Riemann-integrál esetében, ha $a = 0$ és $b = \frac{\pi}{4}$ és az $x = \sin t = g(t)$ $\left(t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ helyettesítéssel élünk, úgy $g(0) = 0,\ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Az $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left(x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right)$ függvény folytonos a $g(t) = \sin(t)$ $\left(t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$ folytonosan differenciálható, így

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int_{\sin(0)}^{\sin\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t\ dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2t}{2}\ dt = \left[\frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ .$$

– Az $\int\limits_0^9 \frac{2}{1+\sqrt{x}}\ dx$ integrálnál, ha az $x = t^2 = g(t)$ $(t \in [0,3])$ helyettesítést használjuk, úgy $g'(t) = 2t$ ; $a = 0,\ b = 3$ mellett $g(a) = g(0) = 0$, $g(b) = g(3) = 9$.
Mivel $f(x) = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$ $(x \in [0,9])$ folytonos, $g(t) = t^2$ $(t \in [0,3])$ folytonosan differenciálható, a helyettesítéses integrálás tétele adja, hogy:

$$\int_0^9 \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_{g(0)}^{g(3)} \frac{2}{1+\sqrt{x}} = \int_0^3 \frac{2}{1+t}2t\,dt = 4\int_0^3 \frac{t+1-1}{t+1}\,dt =$$

$$= 4\int_0^3 \left(1-\frac{1}{t+1}\right)\,dt = 4\,[t-\ln(t+1)]_0^3 = 4[3-\ln 4]\ .$$

– Az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos x+3}\,dx$ integrálnál, mivel az $f(x) = \dfrac{1}{2\cos x+3} = R(\cos x)$ és folytonos (a határozatlan integrálásnál követettek szerint) az $x = 2\operatorname{arctg} t = g(t)$ $(t \in [0,1])$ helyettesítést használjuk.
Ekkor $g'(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$ $(t \in [0,1])$ miatt $g$ folytonosan differenciálható; $a=0,\ b=1$ mellett $g(a)=g(0)=0,\ g(b)=g(1)=\dfrac{\pi}{2}$, így a helyettesítéses integrálás tétele szerint:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos x+3}\,dx = \int_{g(0)}^{g(1)} \frac{1}{2\cos x+3}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+3}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{t^2+5}\,dt = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\dfrac{t}{\sqrt{5}}\right)^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{t}{\sqrt{5}}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{5}}{3}\left[\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5} - \operatorname{arctg} 0\right] =$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}\ .$$

## Improprius-integrálok

**1.23. feladat.** Vizsgáljuk az alábbi improprius-integrálok konvergenciáját, ha konvergensek, úgy határozzuk meg értéküket is:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\ ; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx\ ; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx\ ;$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{1-x^2}\,dx\ ; \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\ ; \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx\ ;$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx\ (p>0)\ ; \qquad \int_0^1 \ln x\,dx\ ; \qquad \int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\ ;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx\ .$$

*Megoldás.* Az első négy integrál a Kalkulus II. jegyzet I.12. fejezetének 1. definíciójában értelmezett típusba sorolható, amikor az integrandus $f\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ típusú függvény, mely $\forall\ [a,t] \subset [a,b[$ intervallumon korlátos és Riemann-integrálható, $b=+\infty$ vagy $\exists\ \varepsilon>0$, hogy $f$ nem korlátos $[b-\varepsilon,b[$-n. Az $\int_a^b f$ improprius-integrál konvergens, ha $\exists \lim\limits_{t\to b-0} \int_a^t f$ véges határérték, s ekkor $\int_a^b f \doteq \lim\limits_{t\to b-0} \int_a^t f$.

– $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$, így az $f\colon [0,1[\to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ függvény nem korlátos az $[1-\varepsilon,1[$ $(\varepsilon<1)$ intervallumon, ugyanakkor folytonos $\forall\ [0,t]\subset[0,1[$ intervallumon, így Riemann-integrálható $[0,t]$-n, továbbá

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\arcsin x]_0^t = \arcsin t,\ \text{ha } t\in[0,1[\ .$$

Ebből $\lim\limits_{t\to 1-0} \arcsin t = \dfrac{\pi}{2}$ miatt kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to 1-0} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \lim_{t\to 1-0} \arcsin t = \frac{\pi}{2}\ ,$$

így az improprius-integrál konvergens és értékére

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

teljesül.

– Az $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx$-nél $a = 1,\ b = +\infty,\ f\colon [1, +\infty[\ \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ korlátos $\forall\ [1, t] \subset [1, +\infty[$ -en és folytonossága miatt Riemann-integrálható, továbbá

$$\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx = \int_1^t x^{-\frac{3}{2}}\, dx = \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\dfrac{1}{2}}\right]_1^t = \left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_1^t = 2 - \frac{2}{\sqrt{t}}\ ,$$

ami $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{t}} = 0$ miatt adja, hogy

$$\exists \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx = 2,$$

azaz az improprius-integrál konvergens és értéke $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx = 2.$

– Hasonló meggondolásokkal, mint előbb

$$\exists \int_1^t \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_1^t = \ln t - \ln 1 = \ln t,$$

ami $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$ miatt adja, hogy $\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_1^t \dfrac{1}{x}\, dx = +\infty$, így az $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{1}{x}\, dx$ improprius-integrál divergens.

**Megjegyzés.** Az előző két feladat vizsgálható a Kalkulus II. jegyzetben szereplő $\int\limits_1^{\infty} x^{\alpha}\, dx$ feladat speciális eseteként is.

– Az $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ ($x \in [2, +\infty[$) függvény korlátos és folytonos bármely $[2, t] \subset [2, +\infty[$ intervallumon, így

$$\exists \int_2^t \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int_2^t \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^t \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\ln(x+1) - \ln(x-1)\right]_2^t = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{x+1}{x-1}\right]_2^t =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{t-1} - \frac{1}{2}\ln 3.$$

Másrészt $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t+1}{t-1} = 1$ és $\lim\limits_{u\to 1} \ln(u) = \ln(1) = 0$ miatt (az összetett függvény határértékére vonatkozó tétel szerint) $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln\dfrac{t+1}{t-1} = 0$.
Így

$$\lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{1-x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{t-1} - \ln\sqrt{3}\right] = -\ln\sqrt{3},$$

azaz az $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{1}{1-x^2}\,dx$ improprius-integrál konvergens és
$\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{1}{1-x^2}\,dx = -\ln\sqrt{3}$.

A következő négy integrál a Kalkulus II. jegyzet jelzett fejezetének 2. definíciójában értelmezett típus, így az integrandus $f\colon ]c, a] \to \mathbb{R}$ típusú függvény, mely $\forall\ [t, a] \subset ]c, a]$ intervallumon korlátos és Riemann-integrálható és $\exists\ \varepsilon > 0$, hogy $f$ nem korlátos $]c, c+\varepsilon]$-on. Ekkor az $\int\limits_c^a f$ improprius integrált akkor neveztük konvergensnek, ha $\exists \lim\limits_{t\to c+0} \int\limits_t^a f$ véges határérték, továbbá $\int\limits_c^a f \doteq \lim\limits_{t\to c+0} \int\limits_t^a f$ szerint definiált az improprius integrál értéke.

– Az $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ integrálnál $c = 0,\ b = 1,\ f\colon ]0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$-re, $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ miatt nem korlátos $]0, 1]$-en, de korlátos és folytonos is

$\forall\ [t,1]\subset\ ]0,1]$ intervallumon és így Riemann-integrálható, továbbá

$$\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_t^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_t^1 = [2\sqrt{x}]_t^1 = 2-\sqrt{t} \qquad (t\in\ ]0,1]).$$

Ebből $\lim\limits_{t\to 0+0}\sqrt{t}=0$ miatt kapjuk, hogy $\lim\limits_{t\to 0+0}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$
$=\lim\limits_{t\to 0+0}(2-\sqrt{t})=2$, azaz $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergens és $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2.$

– Hasonló meggondolással $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x\in\ ]0,1])$ mellett

$$\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_t^1 = -\ln t \quad (t\in\ ]0,1]),$$

melyből $\lim\limits_{t\to 0+0}\ln t=-\infty$ miatt $\lim\limits_{t\to 0+0}\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim\limits_{t\to 0+0} -\ln t = +\infty$, ezért az $\int_0^1 \frac{1}{x}$ impproprius integrál nem konvergens.

– Ha $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ $(x\in\ ]0,1])$ és $p>0$ rögzített, akkor

$$\int_t^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} -\ln t & ,\text{ha } p=1\\ \dfrac{1}{1-p}-\dfrac{t^{1-p}}{1-p} & ,\text{ha } p\neq 1\end{cases}$$

Ebből

$$\lim_{t\to 0+0}\ln t=-\infty,\ \lim_{t\to 0+0} t^{1-p} = \begin{cases} 0 & ,\text{ha } 0<p<1\\ +\infty & ,\text{ha } p>1\end{cases}$$

miatt kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to 0+0}\int_t^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} +\infty & ,\text{ha } p\geq 1\\ \dfrac{1}{1-p} & ,\text{ha } 0<p<1\end{cases},$$

így $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ divergens, ha $p\geq 1$, konvergens, ha $0<p<1$, ekkor értéke $\dfrac{1}{1-p}$.

– Az $\int\limits_0^1 \ln x \; dx$ integrálnál, az előbbivel azonos meggondolások után kapjuk, hogy

$$\exists \int\limits_t^1 \ln x \; dx = \int\limits_t^1 1 \cdot \ln x \; dx = [x \ln x]_t^1 - \int\limits_t^1 x \frac{1}{x} \; dx =$$
$$= -t \ln t - [x]_t^1 = -t \ln t - 1 + t \qquad (t \in \,]0, 1]).$$

A L'Hospital-szabály alkalmazásával belátható, hogy $\lim\limits_{t \to 0+0} t \ln t = 0$, így $\lim\limits_{t \to 0+0} \int\limits_t^1 \ln x \; dx = -1$, azaz az $\int\limits_0^1 \ln x \; dx$ improprius integrál konvergens és $\int\limits_0^1 \ln x \; dx = -1$.

Az utolsó két integrál az elméletben tárgyalt harmadik típushoz tartozik, amikor $f \colon \,]a, b[\, \to \mathbb{R}$ típusú és $]a, b[$ mindkét végpontja (vagy egyik) végtelen, vagy a végpontok egy környezetében $f$ nem korlátos (esetleg mindkét dolog fennáll). Ekkor, ha $\exists \lim\limits_{\substack{t \to a+0 \\ s \to b-0}} \int\limits_t^s f$ véges érték, akkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_a^b f$ improprius integrál konvergens, értéke pedig e határérték.

– Az $\int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \; dx$ integrál esetén $a = -2, \; b = 2$,

$$\lim_{x \to -2+0} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 2-0} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} = +\infty$$

miatt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \qquad (x \in \,] -2, 2[)$$

nem korlátos a $-2$, illetve $+2$ egy alkalmas környezetében, de korlátos, folytonos és így Riemann-integrálható $\forall \; [t, s] \subset \,] -2, 2[$ intervallumon, így

$$\exists \int\limits_t^s \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \; dx = \frac{1}{2} \int\limits_t^s \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \; dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} \right]_t^s =$$
$$= \arcsin \frac{s}{2} - \arcsin \frac{t}{2} \qquad (t, s \in \,] -2, 2[).$$

Ekkor

$$\lim_{s\to 2-0} \arcsin\frac{s}{2} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

és

$$\lim_{t\to -2+0} \arcsin\frac{t}{2} = \arcsin -1 = -\frac{\pi}{2}$$

miatt

$$\exists \lim_{\substack{t\to -2+0\\ s\to 2-0}} \int_t^s \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \pi,$$

így $\int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ konvergens és értéke $\pi$.

– Az $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$ esetében

$$a = -\infty, \quad b = +\infty, \qquad f(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

folytonos $\mathbb{R}$-en, így $\forall\ [t,s] \subset \mathbb{R}$ esetén Riemann-integrálható és

$$\int_t^s \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\operatorname{arctg} x]_t^s = \operatorname{arctg} s - \operatorname{arctg} t \qquad (t, s \in \mathbb{R}).$$

Ebből

$$\lim_{s\to+\infty} \operatorname{arctg} s = \frac{\pi}{2} \qquad \text{és} \qquad \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg} t = -\frac{\pi}{2}$$

miatt,

$$\lim_{\substack{t\to-\infty\\ s\to+\infty}} \int_t^s \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{\substack{t\to-\infty\\ s\to+\infty}} [\operatorname{arctg} s - \operatorname{arctg} t] = \pi$$

következik, tehát $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$ konvergens és értéke $\pi$.

## Sorozatok, sorok és Riemann-integrál

**1.24. feladat.** Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$\left\langle \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right\rangle \ ; \quad \left\langle \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right\rangle \ ;$$

$$\left\langle \frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right\rangle \ ;$$

$$\left\langle \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\right\rangle \ (p>0) \ ; \quad \left\langle \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)\right\rangle \ ;$$

$$\left\langle \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)\right\rangle \ .$$

*Megoldás.*

– $$S_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}=\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

mutatja, hogy $S_n$ az $f(x)=x$ ($x\in[0,1]$) függvény alsó közelítő összege, ha $P_n$ a $[0,1]$ $n$ egyenlő részre osztásával kapott felosztás, azaz $s(f,P_n)$ bármely $n\in\mathbb{N}$-re. $\langle P_n\rangle$ normális felosztássorozata $[0,1]$-nek, $f$ Riemann-integrálható (mert folytonos), így

$$\lim_{n\to\infty} s(f,P_n)=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\ ,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} s(f,P_n)=\frac{1}{2}\ .$$

–

$$\begin{aligned} S_n&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\\ &=\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}\end{aligned}$$

mutatja, hogy $S_n$ adott $n\in\mathbb{N}$-re az $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ ($x\in[0,1]$) függvény $s(f,P_n)$ alsó közelítő összege, ha $P_n$ a $[0,1]$ $n$ egyenlő részre osztásával kapott felosztás.

Ekkor $\langle P_n\rangle$ normális felosztássorozat, $f$ folytonos, ezért Riemann-integrálható $[0,1]$-en,

így

$$\lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln 2,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \ln 2.$$

–

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} = \\ &= \left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)\frac{1}{n} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\ ,\end{aligned}$$

ami adja, hogy $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re $S_n$ az $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(x \in [0,1])$ függvény $s(f,P_n)$ alsó közelítő összege, ha $P_n$ a $[0,1]$ $n$ egyenlő részre osztásával kapott felosztás, így $\langle P_n\rangle$ normális felosztássorozata $[0,1]$-nek, $f$ folytonos, ezért Riemann-integrálható $[0,1]$-en és

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s(f,P_n) &= \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \\ &= \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}\ ,\end{aligned}$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \frac{\pi}{4}\ .$$

–

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^p\right]\frac{1}{n} = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p\frac{1}{n}\ ,\end{aligned}$$

így $S_n$ az $f(x) = x^p$ $(x \in [0,1])$ függvény egy integrálközelítő összege, ha $P_n$ a $[0,1]$ $n$ egyenlő részre osztásával nyert felosztás, azaz $S_n = \sigma(f,P_n)$

$\left(t_i = \dfrac{i}{n},\ i = 1, \dots, n\right)$ $\forall$ $n$-re.
$\langle P_n \rangle$ normális felosztássorozat, $f$ folytonos, így Riemann-integrálható, így

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n) = \int_0^1 x^p \, dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1} \ ,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n) = \frac{1}{p+1} \ .$$

– $S_n = \left(\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \dots + \sin\dfrac{n-1}{n}\pi\right)\dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \sin\left(i \cdot \frac{\pi}{n}\right)\frac{1}{n}$ .
Így $f(x) = \sin(\pi x)$ $(x \in [0, \pi])$ mellett $S_n = \sigma(f, P_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, ahol $P_n$ a $[0, \pi]$ $n$ egyenlő részre osztásával kapott felosztás, $\langle P_n \rangle$ normális felosztássorozat, $f$ Riemann-integrálható, így

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n) = \int_0^\pi \sin \pi x \, dx = \left[\frac{-\cos x}{\pi}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \ .$$

– $S_n = \left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} + \sqrt{1 + \dfrac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \dfrac{n}{n}}\right)\dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n}$
az $f(x) = \sqrt{1+x}$ $(x \in [0, 1])$ folytonos függvény egy integrálközelítő összege, így

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n) = \int_0^1 \sqrt{1+x} \, dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) \ .$$

**1.25. feladat.** Bizonyítsa be, hogy

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

bármely $x \in \,]-1, 1]$-re.

*Megoldás.* A

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n$$

egy $q = x^2$ kvóciensű geometriai sor, hogy $a_1 = 1$. Ez konvergens, ha $x \in \,]-1,1[$ és az összege $\dfrac{1}{1+x^2}$, azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \,]-1,1[).$$

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ függvénysor (hatványsor) egyenletesen konvergens a $[-t,t]$ $(t \in \,]-1,1[)$ zárt intervallumon az $f_n(x) = (-1)^n x^{2n}$ függvények Riemann-integrálhatók $[-t,t]$-n, így a függvénysor tagonként integrálható (lásd Kalkulus II. I.10. fejezet 1. Tétel következménye). Ezeket és a N-L formulát használva

$$\operatorname{arctg} t = \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^t x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

következik, ha $t \in \,]-1,1[$ .
De a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

hatványsor $t = 1$-re is konvergens (lásd Leibniz-kritérium), továbbá a korábbiak miatt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1,$$

melyek együtt adják a feladat állítását.

# Gyakorló feladatok

1) Határozza meg az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$ ; $\displaystyle\int \frac{x^4+x^{-4}+2}{x^3} dx$ ;

$\displaystyle\int \frac{2x^2-x+3}{\sqrt{x}} dx$ ; $\displaystyle\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x\cdot 4^x} dx$ ;

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$ ; $\displaystyle\int \cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right) dx$ ;

$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(5x+7)} dx$ ; $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}} dx$ ;

c) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{(x^3-3x+1)^6} dx$ ; $\displaystyle\int (2x^3+1)^7x^2 dx$ ;

$\displaystyle\int \frac{5x}{\sqrt{(x^2-1)^5}} dx$ ; $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\, dx$ ;

d) $\displaystyle\int xe^{-x^2} dx$ ; $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ ;

$\displaystyle\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x^3}\, dx$ ;

e) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$ ; $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx$ ;

$\displaystyle\int \sqrt{1-2x^2}\, dx$ ; $\displaystyle\int \sqrt{9x^2-4x}\, dx$ ;

f) $\displaystyle\int x^n \ln x\, dx$ ; $\displaystyle\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\, dx$ ;

$\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\, dx$ ; $\displaystyle\int e^{2x}\sin^2 x\, dx$ ;

$\displaystyle\int \operatorname{sh} ax \cos bx\, dx$ ; $\displaystyle\int xe^x \sin x\, dx$ ;

$\displaystyle\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx$ ;

g) $\displaystyle\int \sin^5 x\, dx$ ; $\displaystyle\int \sin 5x\cos x\, dx$ ;

$\displaystyle\int \operatorname{ch}^4 x\, dx$ ; $\displaystyle\int \cos^3 x \sin^4 x\, dx$ ;

h) $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx$ ; $\int \frac{3x+2}{x^2+4x-5}\,dx$ ;

$\int \frac{5x+2}{x^2+4x+13}\,dx$ ; $\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$ ;

$\int \frac{x^3+1}{x^4-x^3}\,dx$ ; $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$ ;

$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$ ; $\int \frac{1}{1+x^4+x^8}\,dx$ ;

i) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$ ; $\int x\sin\sqrt{x}\,dx$ ;

$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$ ; $\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}\,dx$ ;

$\int \frac{1}{x}\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$ ; $\int \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx$ ;

$\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx$ ; $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$ ;

$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}\,dx$ ; $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$ ;

j) $\int x^x(1+\ln x)\,dx$ ; $\int x|x|\,dx$ ;

$\int e^{-|x|}\,dx$ ; $\int \max(1;x^2)\,dx$ ;

2) Bizonyítsa be, hogy létezik az $\int\limits_0^1 (1-x^2)\,dx$ integrál és hogy

$$\int\limits_0^1 (1-x^2)\,dx = \frac{2}{3}\ .$$

3) Határozza meg $\int\limits_{-1}^1 f(x)\,dx$ értékét, ha

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{, ha } |x| > \frac{1}{2} \\ -2 & \text{, ha } |x| \le \frac{1}{2}\ . \end{cases}$$

4) Számítsa ki az alábbi Riemann-integrálokat:

$$\int_{-1}^{32} \sqrt[5]{x}\ dx\ ; \qquad \int_{0}^{\pi} x^2 \sin x\ dx\ ; \qquad \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-3x+2}\ dx\ ;$$

$$\int_{1}^{e} \frac{\sin(\pi \ln x)}{x}\ dx\ ; \qquad \int_{0}^{\pi} \cos^5 x\ dx\ ; \qquad \int_{0}^{1} (x^2+x+2)e^x\ dx\ ;$$

$$\int_{0}^{1} x \arccos x\ dx\ ; \qquad \int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\ dx\ ; \qquad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\ dx\ ;$$

5) Vizsgálja az alábbi improprius integrálok konvergenciáját, határozza meg értéküket, ha konvergensek:

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^5}\ dx\ ; \qquad \int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\ dx\ ; \qquad \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^4}\ dx\ ; \qquad \int_{0}^{\infty} x e^{-3x}\ dx\ .$$

# II. fejezet

# Vektorterek, Euklideszi terek, metrikus terek

## 1. Alapfogalmak

**2.1. feladat.** Legyen adott egy $X$ nemüres halmaz és

$$d_0 \colon X \times X \to \mathbb{R},\ d_0(x,y) = \begin{cases} 0 & ,\text{ha } x = y \\ 1 & ,\text{ha } x \neq y\ . \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy $(X, d_0)$ metrikus tér. ($d_0$ a diszkrét metrika, $(X, d_0)$ a diszkrét metrikus tér.)

*Megoldás.* A metrikus tér definíciója szerint (lásd Kalkulus II. jegyzet II.1. fejezet 6. definíció) be kell látnunk, hogy

1) $d_0(x,y) \geq 0,\ d(x,y) = 0 \iff x = y \quad (\forall\ x, y \in X)$.
   Ez $d_0$ definíciója szerint nyilvánvaló.

2) $d_0(x,y) = d_0(y,x) \quad (\forall\ x, y \in X)$.
   Ez is látszik $d_0$ definíciójából.

3) $d_0(x,z) \leq d_0(x,y) + d_0(y,z) \quad (\forall\ x, y, z \in X)$.
   Ha $x, y, z \in X$ olyanok, hogy
   - $x = y = z$, akkor $0 \leq 0 + 0 = 0$ nyilván igaz ;
   - $x = y \neq z$, akkor $d_0(x,z) = 1,\ d_0(x,y) = 0,\ d_0(y,z) = 1$, így $1 \leq 0 + 1 = 1$ teljesül ;
   - az $x \neq y = z$ és $x = z \neq y$ esetekben ugyanígy járunk el ;
   - ha $x, y, z$ páronként különböznek, úgy $d_0(x,z) = 1,\ d_0(x,y) = 1$ és $d_0(y,z) = 1$ és $1 \leq 1 + 1 = 2$ miatt kapjuk a háromszögegyenlőtlenséget.

   Ezzel az összes lehetséges esetet megnéztük.

**2.2. feladat.** Ha $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ és

a) $d_1 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ d_1(x,y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|,$

b) $d_2 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ d_2(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$

akkor bizonyítsa be, hogy $(\mathbb{R}^n, d_1)$ és $(\mathbb{R}^n, d_2)$ metrikus tér.

*Megoldás.* Az első két tulajdonság teljesülése azonnal jön $d_1$ és $d_2$ definíciójából (az abszolút érték és az egyenlőtlenségek tulajdonságainak felhasználásával).
Így csak a háromszögegyenlőtlenség bizonyítását részletezzük.
Ha $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n),\ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ tetszőlegesek, úgy $\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re (az abszolútérték tulajdonsága miatt)

$$|x_i - z_i| = |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)| \le |x_i - y_i| + |y_i - z_i|.$$

Az egyenlőtlenségeket összeadva azonnal kapjuk $d_2$-re a háromszögegyenlőtlenséget.
Másrészt

$$|x_i - y_i| \le \max_{0 \le i \le n} |x_i - y_i| = d_1(x,y)$$

és

$$|y_i - z_i| \le \max_{0 \le i \le n} |y_i - z_i| = d_1(y,z)$$

és az előbbi egyenlőtlenség miatt $\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re

$$|x_i - z_i| \le d_1(x,y) + d(y,z),$$

amiből

$$d_1(x,z) = \max_{0 \le i \le n} |x_i - z_i| \le d_1(x,y) + d_1(y,z)$$

következik, ami adja $d_1$-re a háromszögegyenlőtlenséget.

**2.3. feladat.** Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallum, $X$ az

$$X \doteq \{\, f |\, f \colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ folytonos függvény}\}$$

szerint definiált halmaz, továbbá

$$d \colon X \times X \to \mathbb{R},\ d(f,g) \doteq \sup\{\, |f(x) - g(x)|\, \}.$$

Bizonyítsa be, hogy $(X, d)$ metrikus tér.

*Megoldás.*

$$|f(x) - g(x)| \ge 0,\ |f(x) - g(x)| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x)$$

miatt a metrikus tér első tulajdonsága nyilván igaz.
A második tulajdonság az

$$|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)| \quad (x \in [a,b])$$

egyenlőség miatt jön $d$ definíciójából.
Ha $f, g, h \in X$, úgy a $\forall\, x \in [a, b]$-re teljesülő

$$|f(x) - g(x)| = |(f(x) - h(x)) + (h(x) - g(x))| \leq$$
$$\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - f(x)|$$

egyenlőtlenség $|f(x) - h(x)| \leq d(f, h)$ és $|h(x) - g(x)| \leq d(h, g)$ miatt adja, hogy

$$|f(x) - g(x)| \leq d(f, h) + d(h, g) \quad (x \in [a, b]),$$

amiből azonnal következik $d$-re a háromszögegyenlőtlenség.

**2.4. feladat.** Legyen $(X, d)$ metrikus tér. Bizonyítsa be, hogy

a) bármely $x_0 \in X$ és bármely $r \in \mathbb{R}_+$ esetén $x_0 \in K(x_0, r)$;
b) ha $x_0 \in X,\ r \in \mathbb{R}_+$ és $x \in K(x_0, r)$, akkor létezik $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, hogy $K(x, \varepsilon) \subset K(x_0, r)$;
c) bármely $x, y \in X,\ x \neq y$-ra létezik $r \in \mathbb{R}_+$, hogy $K(x, r) \cap K(y, r) = \emptyset$.

*Megoldás.* Ismeretes, hogy $K(x_0, r) \doteq \{\, x |\, x \in X,\ d(x, x_0) < r\}$.
a) $d(x_0, x_0) = 0$ és $K(x_0, r)$ definíciója adja az állítást;
b) Legyen $0 < \varepsilon \doteq r - d(x, x_0)$ és $y \in K(x, \varepsilon)$ tetszőleges, akkor

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \varepsilon + d(x, x_0) = r$$

adja, hogy $y \in K(x_0, r)$, tehát $K(x, \varepsilon) \subset K(x_0, r)$;

c) Ha $r \doteq \dfrac{1}{2} d(x, y)$ és létezne olyan $z \in X$, melyre $z \in K(x, r) \cap K(y, r)$, akkor a háromszögegyenlőtlenség miatt

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + r = d(x, y),$$

s ez ellentmondás.

**2.5. feladat.** Legyen $(X, d)$ metrikus tér. Bizonyítsa be, hogy $\emptyset \neq H \subset X$ akkor és csak akkor korlátos, ha létezik $a \in X$ és $r \in \mathbb{R}_+$, hogy $H \subset K(a, r)$.

*Megoldás.* Definíció szerint $\emptyset \neq H$ akkor korlátos, ha létezik $r \in \mathbb{R}_+$, hogy bármely $x, y \in H$-ra $d(x, y) < r$. Ekkor a $\operatorname{diam} H \doteq \sup\{\, d(x, y) |\, x, y \in H\}$ számot $H$ átmérőjének nevezzük.
a) Ha $\exists\, a \in X$ és $r \in \mathbb{R}_+$, hogy $H \subset K(a, r)$, akkor $\forall\, x, y \in H$-ra $d(x, a) < r,\ d(y, a) < r$ és akkor a háromszögegyenlőtlenség miatt

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < 2r,$$

ami definíció szerint adja $H$ korlátosságát.

b) Ha $H \neq \emptyset$ korlátos halmaz, $a \in X$ rögzített, $\operatorname{diam} H = c$ és $y_0 \in H$ is rögzített, úgy $r = d(a, y_0) + c + 1$ választással $\forall\ x \in H$-ra

$$d(x,a) \leq d(x,y_0) + d(y_0,a) \leq c + d(a,y_0) < c + d(a,y_0) + 1 = r,$$

vagyis $H \subset K(a,r)$ teljesül. (Ezzel az állításnál még többet bizonyítottunk.)

## 2. Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér

**2.6. feladat.** Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{R}^n$ a benne értelmezett összeadással és skalárral való szorzással vektortér.

*Megoldás.* Ellenőrizni kell a vektortér 1)-7) tulajdonságát.
Legyen $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n),\ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n;\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen adott, akkor

1) $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) = y + x;$

2) $x + (y + z) = (x_1 + (y_1 + z_1), \ldots, x_n + (y_n + z_n)) =$
$= ((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n) = (x + y) + z;$

3) $\underline{0} = (0, \ldots, 0)$ esetén
$x + \underline{0} = (x_1, \ldots, x_n) + (0, \ldots, 0) = (x_1 + 0, \ldots, x_n + 0) = (x_1, \ldots, x_n) = x;$

4) $(x_1, \ldots, x_n) = x$-re legyen $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$, akkor
$x + (-x) = (x_1, \ldots, x_n) + (-x_1, \ldots, -x_n) =$
$= (x_1 + (-x_1), \ldots, x_n + (-x_n)) = (0, \ldots, 0) = 0;$

5) $1 \cdot x = 1(x_1, \ldots, x_n) = (1 \cdot x_1, \ldots, 1 \cdot x_n) = (x_1, \ldots, x_n) = x;$

6) $\lambda(\mu x) = \lambda(\mu(x_1, \ldots, x_n)) = \lambda(\mu x_1, \ldots, \mu x_n) = ((\lambda\mu)x_1, \ldots, (\lambda\mu)x_n) =$
$= (\lambda\mu)(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda\mu)x;$

7) $(\lambda + \mu)x = (\lambda + \mu)(x_1, \ldots, x_n) = ((\lambda + \mu)x_1, \ldots, (\lambda + \mu)x_n) =$
$= (\lambda x_1 + \mu x_1, \ldots, \lambda x_n + \mu x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \ldots, \mu x_n) =$
$= \lambda(x_1, \ldots, x_n) + \mu(x_1, \ldots, x_n) = \lambda x + \mu x.$

(Felhasználtuk a valós számok testaxiómákban rögzített tulajdonságait.)

**2.7. feladat.** Adottak az $x = (1,5,5),\ y = (-2,2,3)$ $\mathbb{R}^3$-beli vektorok, határozza meg az $x + y,\ x - y,\ 3x - \dfrac{1}{2}y$ vektorokat.

*Megoldás.*

– $x + y = (1,5,5) + (-2,2,3) = (1 + (-2), 5 + 2, 5 + 3) = (-1,7,8);$

– $x - y \doteq x + (-1)y = (1,5,5) + (-1)(-2,2,3) = (1,5,5) + (2,-2,-3) =$
$= (3,3,2);$

– $$3x - \frac{1}{2}y = 3x + \left(-\frac{1}{2}y\right) = 3(1,5,5) + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2,2,3) = $$
$$= (3,15,15) + \left(1,-1,-\frac{3}{2}\right) = \left(4,14,13\frac{1}{2}\right).$$

**2.8. feladat.** Bizonyítsa be, hogy ha $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, úgy $\langle x, y\rangle \doteq x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ skaláris (belső) szorzat $\mathbb{R}^n$-ben.

*Megoldás.* Ellenőrízni kell a skaláris szorzat négy definiáló tulajdonságát:

1) $\langle x, y\rangle \doteq x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = y_1x_1 + \ldots + y_nx_n \doteq \langle y, x\rangle$;

2) $\langle x + y, z\rangle \doteq (x_1 + y_1)z_1 + \ldots + (x_n + y_n)z_n =$
$= (x_1z_1 + \ldots + x_nz_n) + (y_1z_1 + \ldots + y_nz_n) \doteq \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;

3) $\langle \lambda x, y\rangle \doteq (\lambda x_1)y_1 + \ldots + (\lambda x_n)y_n = \lambda(x_1y_1) + \ldots + \lambda(x_ny_n) =$
$= \lambda(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n) \doteq \lambda\langle x, y\rangle$;

4) $\langle x, x\rangle = x_1x_1 + \ldots + x_nx_n = x_1^2 + \ldots x_n^2 \geq 0$ és $= 0 \iff$
$\iff x_1 = \cdots = x_n = 0 \iff x = (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) = \underline{0}$.

(Itt is használtuk a valós számok néhány ismert tulajdonságát – axiómákat, vagy tételeket.)

**2.9. feladat.** Bizonyítsa be, hogy ha
$x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x\rangle} \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,, \qquad d(x, y) \doteq \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

norma, illetve távolság (metrika) $\mathbb{R}^n$-ben.

*Megoldás.*

– A normát a 8. feladat szerint belső szorzatból származtattuk, így a Kalkulus II. jegyzet II.1. fejezet 1. tétele szerint az teljesíti a norma három tulajdonságát.

– $d$ normából (így belső szorzatból) származtatott, így a Kalkulus II. jegyzet előbb idézett fejezetének 2. tétele szerint $d$ valóban távolság (metrika) $\mathbb{R}^n$-ben.

**Megjegyzés.** A tulajdonságok közvetlenül is beláthatók.

## 3. $\mathbb{R}^n$ és metrikus tér topológiája

**2.10. feladat.** Bizonyítsa be, hogy az $(X, d)$ metrikus térbeli (így az $\mathbb{R}^n$-beli) nyílt környezetek nyílt halmazok.

*Megoldás.* Legyen $x_0 \in X$ és $r \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges. Definíció szerint a $K(x_0, r)$ környezet akkor nyílt, ha minden pontja belső pont, azaz $\forall\ x \in K(x_0, r)$ esetén $\exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+$, hogy $K(x, \varepsilon) \subset K(x_0, r)$. Utóbbi viszont a 4. feladat b) része miatt igaz.

**2.11. feladat.** Legyen adott $(X, d)$ (vagy $(\mathbb{R}^n, d)$) metrikus tér.
Bizonyítsa be, hogy $x_0 \in X$ (vagy $\mathbb{R}^n$) akkor és csak akkor torlódási pontja a $H \subset X$ (vagy $\mathbb{R}^n$) halmaznak, ha $x_0$ minden környezetében $H$-nak végtelen sok eleme van.

*Megoldás.*

a) Ha $x_0\ \forall\ K(x_0, r)$ környezetében végtelen sok $H$-beli eleme van $H$-nak, akkor $\exists\ x_0$-tól különböző eleme is, így (definíció szerint) $x_0$ torlódási pont.

b) Ha $x_0$ torlódási pontja $H$-nak, úgy $\forall\ K(x_0, r)$-ben $\exists\ x_0$-tól különböző $H$-beli elem.
Tegyük fel, hogy $\exists\ K(x_0, r)$, hogy abban csak véges sok eleme van $H$-nak, akkor nyilván véges sok $x_0$-tól különböző $H$-beli elem van $\forall\ K(x_0, r)$-ben, legyenek ezek, mondjuk $x_1, \ldots, x_n \in H$, úgy ha
$0 < \varepsilon = \min\{d(x_0, x_1), \ldots, d(x_0, x_n)\}$, akkor $K(x_0, \varepsilon)$-ban nincs $x_0$-tól különböző $H$-beli elem, ellentmondásban azzal, hogy $x_0$ torlódási pont.
Így minden $K(x_0, r)$-ben végtelen sok $H$-beli elem van.

**2.12. feladat.** Bizonyítsa be, hogy ha $H \subset X$ (vagy $\mathbb{R}^n$) ($(X, d)$ vagy $(\mathbb{R}^n, d)$ metrikus tér), akkor $H$ határpontjainak illetve torlódási pontjainak halmaza is zárt halmaz.

*Megoldás.*

a) Jelölje $\partial H$ $H$ határát.
Be kell látnunk, hogy $\partial H$ minden torlódási pontját tartalmazza.
Legyen $x_0$ torlódási pontja $\partial H$-nak és $r \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges, akkor (a torlódási pont definíciója miatt)$\exists\ x \in \partial H,\ x \neq x_0$, hogy $x \in K(x_0, r)$.
A 4. feladat b) része miatt $\exists\ \varepsilon > 0$, hogy $K(x, \varepsilon) \subset K(x_0, r)$.
Ugyanakkor $x \in \partial H$ miatt (a határpont definíciója szerint)
– $\exists\ y \in H,\ y \in K(x, \varepsilon) \subset K(x_0, r) \implies H \cap K(x_0, r) \neq \emptyset$;
– $\exists\ z \in CH,\ z \in K(x, \varepsilon) \subset K(x_0, r) \implies CH \cap K(x_0, r) \neq \emptyset$;
ami viszont (ugyancsak a határpont definíciója miatt) adja, hogy $x_0 \in \partial H$, amit bizonyítani kellett.

b) A másik állítás bizonyítása a)-hoz hasonló.

**2.13. feladat.** Legyen

$$H = \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \mid m, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Határozza meg $H$ torlódási pontjait $(\mathbb{R}^2, d)$-ben.

*Megoldás.* Megmutatjuk, hogy

$$H' = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(0,0)\}.$$

– $\forall$ rögzített $n \in \mathbb{N}$-re $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ esetén $\forall\ r \in \mathbb{R}_+$-re $\exists\ m \in \mathbb{N}$, hogy

$$d\left(\left(\frac{1}{n}, 0\right), \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{m}\right)^2} = \frac{1}{m} < r,$$

hiszen $\frac{1}{m} < r \iff m > \frac{1}{r}$, ilyen $m$ pedig (mivel $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos) létezik. Ez pedig azt jelenti, hogy az $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ pont bármely környezetében létezik $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$-tól különböző $H$-beli elem, azaz $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re torlódási pontja $H$-nak.

– Hasonlóan megmutatható, hogy a $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ pontok is torlódási pontjai $H$-nak.

– Tekintsük a $(0,0)$ pontot és legyen $r \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges, akkor $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy $d\left((0,0), \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{\left(0 - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{n} < r$, hiszen $\frac{\sqrt{2}}{n} < r \iff n > \frac{\sqrt{2}}{r}$, ilyen $n \in \mathbb{N}$ pedig (hasonló okok miatt, mint előbb) létezik. Így a $(0,0)$ bármely környezetében $\exists$ $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq (0,0)$ $H$-beli pont, tehát $(0,0)$ torlódási pontja $H$-nak.

– Mutassuk meg, hogy más torlódási pontja nincs $H$-nak.

**2.14. feladat.** Bizonyítsa be, hogy $(\mathbb{R}^n, d)$-ben egy nyílt halmaz minden eleme torlódási pontja a halmaznak.

*Megoldás.* Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $x \in H$ tetszőleges elem, úgy ha $r \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges, $H$ nyíltsága miatt $\exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+,\ \varepsilon \leq r$, hogy
$K(x,\varepsilon) \subset H$ és $K(x,\varepsilon) \subseteq K(x,r)$.
Az előbb mondottak szerint $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, így $x = (x_1, \dots, x_n)$ esetén, ha $y \in \mathbb{R}^n,\ y = \left(x_1 + \dfrac{1}{n}, x_2, \dots, x_n\right)$, úgy $x \neq y$ és

$$d(x,y) = \sqrt{\left(x_1 - \left(x_1 + \frac{1}{n}\right)\right)^2 + (x_2 - x_2)^2 + \dots + (x_n - x_n)^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

így $x \neq y \in K(x,\varepsilon) \implies y \in K(x,r)$, azaz $x$ torlódási pont, amit bizonyítani kellett.

**2.15. feladat.** Legyen $x_0 \in \mathbb{R}^n,\ r \in \mathbb{R}_+$. Bizonyítsa be, hogy a $K(x_0,r)$ nyílt környezet átmérője $2r$.

*Megoldás.* Ha $x, y \in K(x_0,r)$, akkor a háromszögegyenlőtlenség miatt

$$d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y) < r + r = 2r,$$

azaz $K(x_0,r)$ korlátos és nyilván $\operatorname{diam} K(x_0,r) \leq 2r$.
Tegyük fel, hogy $2\alpha = \operatorname{diam} K(x_0,r) < 2r$.
Legyen $\varepsilon \doteq r - \alpha\ (> 0)$ és $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$.
Ha $x = (x_{01} - r + \dfrac{\varepsilon}{2}, x_{02}, \dots, x_{0n}),\ y = (x_{01} + r - \dfrac{\varepsilon}{2}, x_{02}, \dots, x_{0n})$, akkor egyrészt $x, y \in K(x_0,r)$ (ezt lássuk be) és

$$d(x,y) =$$

$$= \sqrt{\left[\left(x_{01} - r + \tfrac{\varepsilon}{2}\right) - \left(x_{01} + r - \tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right]^2 + (x_{02} - x_{02})^2 + \dots + (x_{0n} - x_{0n})^2} =$$

$$= \sqrt{(2r - \varepsilon)^2} = 2r - \varepsilon = 2r - (r - \alpha) = r + \alpha > \alpha + \alpha = 2\alpha,$$

ellentmondásban azzal, hogy $\operatorname{diam} K(x_0,r) = 2\alpha < 2r$, így igaz az állítás.

**2.16. feladat.** Bizonyítsa be, hogy $(\mathbb{R}^n, d)$-ben egy szakasz átmérője egyenlő a szakasz hosszával.

*Megoldás.* Ha $a, b \in \mathbb{R}^n,\ a \neq b$, akkor az $a$-t és $b$-t összekötő $n$-dimenziós szakaszon az $E = \{\, a + t(b-a) \,|\, t \in [0,1] \} \subset \mathbb{R}^n$ halmazt értjük.
Ha $x, y \in E$, akkor $\exists\ t_1, t_2 \in [0,1]$, hogy $x = a + t_1(b-a),\ y = a + t_2(b-a)$, így

$$d(x,y) = \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} = \|(t_1 - t_2)(b-a)\|_{\mathbb{R}^n} = |t_1 - t_2| \|b - a\|_{\mathbb{R}^n} \leq d(a,b),$$

ezért $\operatorname{diam} E \leq d(a,b)$. De $a, b \in E$, így $\operatorname{diam} E = d(a,b)$.

**2.17. feladat.** Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ és $H_i$ $(i = 1, \dots, n)$ a $H$ elemei $i$-edik koordinátáiból álló halmaz. Bizonyítsa be, hogy $H$ akkor és csak akkor korlátos, ha bármely $H_i$ korlátos $(\mathbb{R}, d)$-ben.

*Megoldás.* Ha $x, y \in H$ tetszőleges, hogy $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, akkor egyszerűen belátható, hogy $\forall\ i = 1, \dots, n$-re

$$|x_i - y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \|x - y\| = d(x, y) \leq \sqrt{n \max_i (x_i - y_i)^2} =$$
$$= \sqrt{n} \max_i |x_i - y_i|.$$

Ha $H = \emptyset$, úgy nyilván igaz az állítás, ha $H \neq \emptyset$, úgy

a) ha $H$ korlátos, úgy $\exists\ r \in \mathbb{R}_+$, hogy $d(x, y) < r\ \forall\ x, y \in H$-ra, így $\forall\ i = 1, \dots, n$-re $|x_i - y_i| < r$, ami adja $H_i$ korlátosságát $\mathbb{R}$-ben $\forall\ i$-re;

b) ha $\forall\ H_i$ korlátos $\mathbb{R}$-ben, úgy $\exists\ r_i \in \mathbb{R}_+$, hogy $|x_i - y_i| < r_i\ \forall\ x_i, y_i \in H_i$, így az előbbi egyenlőtlenség miatt $d(x, y) \leq \sqrt{n} \max_i r_i \doteq r \in \mathbb{R}_+$ $\forall\ x, y \in H$-ra, s ez adja $H$ korlátosságát $(\mathbb{R}^n, d)$-ben.

**2.18. feladat.** Bizonyítsa be, hogy $(\mathbb{R}^n, d)$ $\forall$ véges $H$ részhalmaza kompakt.

*Megoldás.* $H \subset \mathbb{R}^n \iff$ kompakt, ha korlátos és zárt.
Ha $H$ véges, akkor nyilván korlátos, ugyanakkor véges halmaznak nincs torlódási pontja, így zárt is (ami jön abból is, hogy egy véges $\mathbb{R}^n$-beli halmaz komplementere nyílt).

# 4. További lineáris algebrai előismeretek

Ehhez a fejezethez a Diszkrét matematika (más szakosok pedig a Lineáris algebra tárgyak) keretében, jegyzeteiben és példatáraiban találnak feladatokat.

# Gyakorló feladatok

1) Bizonyítsa be, hogy a $H \subset (\mathbb{R}^n, d)$ halmaz akkor és csak akkor korlátos, ha $H = \emptyset$, vagy ha $\exists\ r > 0$, hogy $H \subset K(\underline{0}, r)$, ahol $\underline{0} = (0, \dots, 0)$ az $\mathbb{R}^n$-beli zérus elem.
2) Legyenek $x = (-2, 3, 0)$, $y = (3, 4, 5)$, $z = (\pi, e, 1)$ $\mathbb{R}^3$-beli vektorok, határozza meg az $5x - 2y + 3z$ vektort.

3) Bizonyítsa be, hogy $H \subset \mathbb{R}^n$ akkor és csak akkor zárt az $(R^n, d)$ euklideszi térben, ha minden torlódási pontját tartalmazza.
4) Határozza meg a $H = [-1,1[\ \times\ ]0,1[\ \times\ ]1,2] \subset \mathbb{R}^3$ halmaz belső, külső, torlódási és határpontjait.
5) Vizsgálja a $H_1 = ]0,1[\ \times [2,7]$ és $H_2 = [-1,1] \times [0,+\infty[$ $\mathbb{R}^2$-beli halmazok korlátosságát.
6) Határozza meg a $H_1 = [0,1] \times [-1,1[\ \times\ ]0,2[\ \subset \mathbb{R}^3$ és $H_2 = \left\{ \left( \frac{2}{n}, (-2)^n \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ halmazok átmérőjét.
7) Bizonyítsa be, hogy a $[-2,2] \times [0,4] \subset \mathbb{R}^2$ halmaz kompakt.
8) Vizsgálja a $H_1 = ]0,1[\ \times [0,2] \times [0,3] \subset \mathbb{R}^3$ és $H_2 = [0,1] \times [0,2] \times [0,+\infty[ \subset \mathbb{R}^3$ halmazok kompaktságát.

# III. fejezet

# Sorozatok $\mathbb{R}^k$-ban

**3.1. feladat.** Bizonyítsa be, hogy az $\left\langle\left(\frac{1}{n},(-1)^n\right)\right\rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozat korlátos.

*Megoldás.* Be kell látnunk, hogy a sorozat elemeinek halmaza korlátos $\mathbb{R}^2$-ben. Ez igaz, ha teljesül az, hogy például a $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ pontnak $\exists\ r>0$ sugarú környezete, mely tartalmazza a sorozat összes elemét.
Mivel

$$d\left(\left(\frac{1}{n},(-1)^n\right),(0,0)\right)=\sqrt{\left(\frac{1}{n}-0\right)^2+((-1)^n-0)^2}=\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}\leq$$
$$\leq\sqrt{2}<\sqrt{3}$$

$\forall\ n\in\mathbb{N}$-re (hiszen $\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}\leq\sqrt{2}\iff\frac{1}{n^2}+1\leq 2\iff\frac{1}{n^2}\leq 1\iff\frac{1}{n}\leq 1\iff n\geq 1$, ami igaz; és $\sqrt{2}<\sqrt{3}\iff 2<3\iff 0<1$, ami szintén igaz), így a sorozat bármely eleme benne van a $(0,0)$ $\sqrt{3}$ sugarú környezetében.

**3.2. feladat.** Bizonyítsa be, hogy az $\left\langle\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2},\frac{2n+1}{n}\right)\right\rangle$ $\mathbb{R}^3$-beli sorozat korlátos.

*Megoldás.* Az előbbiekhez hasonló gondolatmenet, a $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re egyszerűen adódó

$$\begin{aligned} &d\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{2n+1}{n}\right), (0,0,0)\right) = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{n}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{n^2}-0\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{n}-0\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \frac{(2n+1)^2}{n^2}} \le \sqrt{\frac{2+(2n+1)^2}{n^2}} < \\ &< \sqrt{\frac{2(2n+1)^2}{n^2}} < \sqrt{\frac{2(4n)^2}{n^2}} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

egyenlőtlenség miatt adja, hogy a sorozat minden eleme benne van a $(0,0,0)$ pont $4\sqrt{2}$ sugarú környezetében, így a sorozat korlátos.

**3.3. feladat.** Bizonyítsa be, hogy ha az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat konvergens, akkor egy határértéke van.

*Megoldás.* Tegyük fel, hogy $\exists\, a, b \in \mathbb{R}^k,\ a \neq b$, hogy $x_n \to a$ és $x_n \to b$ is teljesül.
Ez azt jelentené, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$-ra létezne $n(\varepsilon)$, hogy bármely $n \ge n(\varepsilon)$-ra $x_n \in K(a, \varepsilon)$ és $x_n \in K(b, \varepsilon)$ is teljesülne.
Válasszuk $\varepsilon$-t úgy, hogy $\varepsilon = \dfrac{d(a,b)}{2} > 0$, akkor (ahogy ezt korábban már beláttuk)

$$K\left(a, \frac{d(a,b)}{2}\right) \cap K\left(b, \frac{d(a,b)}{2}\right) = \emptyset\ ,$$

így ezen $\varepsilon > 0$ esetén a fentiek nem teljesülhetnek.
Így $a = b$, ami adja az állítást.

**3.4. feladat.** Definíció alapján vizsgálja az

$$\left\langle \left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right) \right\rangle \quad \text{és} \quad \left\langle \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^4}, \frac{2n+1}{n}\right) \right\rangle$$

sorozatok konvergenciáját.

*Megoldás.*

a) Belátjuk, hogy az $\left\langle \left(\dfrac{1}{n}, (-1)^n\right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozat divergens.

Ehhez azt kell megmutatni, hogy $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$-re $\exists\ \varepsilon > 0$, hogy

$\forall\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ esetén $\exists n \geq n(\varepsilon)$, hogy

$$d\left(\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right), (0,0)\right) \geq \varepsilon\ .$$

– Legyen $(a,b)$ olyan, hogy $b = 0$ és $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$, akkor a $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re teljesülő

$$\begin{aligned} d\left(\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right), (a,0)\right) &= \sqrt{\left(\frac{1}{n} - a\right)^2 + ((-1)^n - 0)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{n} - a\right)^2 + 1} \geq 1 > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

egyenlőtlenség miatt

$$d\left(\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right), (a,0)\right) > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

is igaz $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re, így $(a,0)$ nem határértéke a sorozatnak.

– Legyen most $(a,b)$ olyan, hogy $b > 0$ és $\varepsilon = 1 > 0$, akkor $\forall$ páratlan $n \in \mathbb{N}$-re

$$\begin{aligned} d\left(\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right), (a,b)\right) &= d\left(\left(\frac{1}{n}, -1\right), (a,b)\right) = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{n} - a\right)^2 + (-1-b)^2} \geq \\ &\geq \sqrt{(1+b)^2} = |1+b| \geq 1 = \varepsilon, \end{aligned}$$

ami adja, hogy az ilyen $(a,b)$ sem lehet határérték.

– Hasonlóan belátható, hogy olyan $(a,b)$ sem lehet határérték, ahol $b < 0$.

b) Belátjuk, hogy az $\left\langle \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{2n+1}{n}\right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^3$-beli sorozat konvergens és határértéke a $(0,0,2) \in \mathbb{R}^3$ pont.

A $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re teljesülő

$$d\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{2n+1}{n}\right), (0,0,2)\right) =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n^2} - 0\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{n} - 2\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}} \le \sqrt{\frac{3}{n^2}} = \frac{\sqrt{3}}{n}$$

egyenlőséget és azt felhasználva, hogy $\frac{\sqrt{3}}{n} \to 0$ miatt $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \ge n(\varepsilon)$-ra $\left|\frac{\sqrt{3}}{n} - 0\right| = \frac{\sqrt{3}}{3} < \varepsilon$, kapjuk a sorozat konvergenciáját a $(0,0,2)$-höz.

**3.5. feladat.** Definíció alapján bizonyítsa be, hogy az

$$\langle x_n \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{k}{n}\right) \right\rangle$$

$\mathbb{R}^k$-beli sorozat konvergál a $\underline{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^k$-hoz.

*Megoldás.* Egyszerűen indokolható, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re

$$d(x_n, \underline{0}) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{n} - 0\right)^2 + \cdots + \left(\frac{k}{n} - 0\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + k^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}},$$

ahol $\sqrt{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} = c \in \mathbb{R}$ konstans.
Másrészt a $\left\langle \frac{c}{n} \right\rangle$ sorozat konvergens és határértéke 0, ami azt jelenti, hogy $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon)$, $\forall\, n \ge n(\varepsilon) \implies \frac{c}{n} < \varepsilon$.
Ezek összevetése adja, hogy az $\langle x_n \rangle$ sorozatnál $x = (0, \ldots, 0) = \underline{0}$ választással $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon)$, $\forall\, n \ge n(\varepsilon)$-ra $d(x_n, x) = d(x_n, \underline{0}) < \varepsilon$, azaz $\langle x_n \rangle$ konvergál a $\underline{0} \in \mathbb{R}^k$ elemhez.

**3.6. feladat.** Bizonyítsa be a Kalkulus II. III./1. fejezet 4. tételét, azaz, hogy:
Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat $\iff$ konvergens és határértéke $x \in \mathbb{R}^k$, ha $x_n = (x_{1n}, \ldots, x_{kn})$ jelöléssel az $\langle x_{1n} \rangle, \ldots, \langle x_{kn} \rangle$ (úgynevezett koordináta)

sorozatok konvergensek és az $x = (x_1, \dots, x_k)$ jelöléssel $x_{in} \to x_i$ $(i = 1, \dots, k)$.

*Megoldás.*

a) Ha $x_n \to x$, akkor $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n(\varepsilon),\ \forall\ n \geq n(\varepsilon)\ \ (n \in \mathbb{N})$ esetén $\|x - x_n\|_{\mathbb{R}^k} < \varepsilon \Longrightarrow |x_i - x_{in}| \leq \|x - x_n\|_{\mathbb{R}^k} < \varepsilon\ \ (i = 1, \dots, k)$, azaz $x_{in} \to x_i\ \ (i = 1, \dots, k)$.

b) Ha $x_{in} \to x_i\ \ (i = 1, \dots, k) \Longrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n_i(\varepsilon)\ \ (i = 1, \dots, k)$, hogy $\forall\ n \geq n_i(\varepsilon)\ \ (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow |x_{in} - x_i| < \varepsilon\ \ (i = 1, \dots, k)$.
Ha $x = (x_1, \dots, x_k)$, akkor

$$n(\varepsilon) = \sup \left\{ n_i \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \right) \mid i = 1, \dots, k \right\}$$

választással $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ esetén

$$\|x - x_n\|_{\mathbb{R}^k} = \sqrt{(x_i - x_{in})^2 + \dots + (x_k - x_{kn})^2} < \sqrt{k \cdot \frac{\varepsilon^2}{k}} = \varepsilon\ ,$$

azaz $x_n \to x$ teljesül.

**3.7. feladat.** Vizsgálja a

a) $\left\langle \left( \cos \frac{n\pi}{2}, \frac{n+1}{n^2} \right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli ;

b) $\left\langle \left( \sqrt[n]{n}, \sin \frac{n+1}{n}\pi, \frac{\sin n}{n} \right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^3$-beli ;

c) $\left\langle \left( \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{k}{n} \right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli ;

sorozatok konvergenciáját.

*Megoldás.* A 6. feladatban bizonyított tételt használjuk.

a) A $\left\langle \cos \frac{n\pi}{2} \right\rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat nem konvergens, mert $n = 2k + 1$ $(k = 0, 1, \dots)$ esetén

$$\cos \frac{n\pi}{2} = \cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0, \quad \text{így} \quad \lim_{k\to\infty} \cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0,$$

míg ha $n = 4k$ $(k \in \mathbb{N})$, akkor

$$\cos \frac{n\pi}{2} = \cos 4k\frac{\pi}{2} = \cos 2k\pi = 0 \quad \text{miatt} \quad \lim_{k\to\infty} \cos 4k\frac{\pi}{2} = 0,$$

így van két olyan részsorozata, melynek határértéke különböző.
Mivel a $\left\langle \left( \cos \frac{n\pi}{2}, \frac{n+1}{n^2} \right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozat első komponens sorozata nem konvergens, így sorozatunk sem.

b) Ismeretes, hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\pi = \pi \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \sin x_n = \sin x_0, \text{ ha } x_n \to x_0$$

miatt

$$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{n+1}{n}\pi = \sin\pi = 0.$$

Míg

$$\frac{\sin n}{n} = \frac{1}{n}\sin n\ , \ \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{és} \quad |\sin n| \le 1 \quad \text{miatt} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Így a sorozatunk minden komponens sorozata konvergens, ami adja konvergenciáját a 6. feladat miatt és azt is, hogy

$$\left(\sqrt[n]{n}, \sin\frac{n+1}{n}\pi, \frac{\sin n}{n}\right) \to (1,0,0).$$

c) Ha $i \in \mathbb{N}$ rögzített, úgy $\frac{i}{n} \to 0$, így ezen $\mathbb{R}^k$-beli sorozat minden komponens sorozata 0-sorozat, ezért konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{k}{n}\right) = (0,0,\dots,0).$$

**3.8. feladat.** Cauchy-sorozat-e a $\left\langle \left(\frac{2}{n^2}, (-1)^n\right)\right\rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozat.

*Megoldás.* Nem. Ehhez azt kell belátni, hogy $\exists\ \varepsilon > 0$, hogy $\forall\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ esetén $\exists\ p,q \in \mathbb{N},\ p,q \ge n(\varepsilon)$, hogy $d(x_p, x_q) \ge \varepsilon$.
Legyen $\varepsilon = 2\ \forall\ p = 2n,\ q = 2n+1$ $(n \in \mathbb{N})$, esetén

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{2}{(2n)^2} - \frac{2}{(2n+1)^2}\right)^2 + ((-1)^{2n} - (-1)^{2n+1})^2} > \sqrt{2^2} = 2,$$

ami adja a nemleges választ.

**3.9. feladat.** Cauchy-sorozat-e az

$$\langle x_n \rangle = \left\langle \left(\frac{n^2+n+1}{n^3+2n^2+3}, \frac{2^n}{n!}, \sqrt[n]{2}\right)\right\rangle$$

$\mathbb{R}^3$-beli sorozat?

*Megoldás.* A korábbiakban tanultak szerint

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+2n^2+3} = 0 \ , \ \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0 \ , \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1,$$

így az $\langle x_n \rangle$ komponens sorozatai, ezért maga $\langle x_n \rangle$ is konvergens ($x_n \to (0,0,1)$).
Ez pedig a Cauchy-féle konvergenciakritérium miatt adja, hogy $\langle x_n \rangle$ Cauchy-sorozat.

## Gyakorló feladatok

1) Vizsgálja a

$$\left\langle \left( (-1)^n \frac{1}{n}, 1 + (-1)^n \right) \right\rangle$$

és

$$\left\langle \left( \frac{1}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \frac{1}{n^2}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \right) \right\rangle$$

sorozatok korlátosságát.

2) Vizsgálja a

$$\left\langle \left( (-1)^n \frac{1}{n}, 1 + (-1)^n \right) \right\rangle$$

és

$$\left\langle \left( \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, \frac{5n^2+3n-1}{-2n^2+5n-2} \right) \right\rangle$$

sorozatok konvergenciáját.

# IV. fejezet

# Többváltozós és vektorértékű függvények folytonossága, határértéke

**4.1. feladat.** Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

$$f_1(x,y) = \sin y \; ; \qquad f_2(x,y) = \cos\sqrt{x^2+y^2} \; ;$$

$$f_3(x,y) = \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2}} \; ; \qquad f_4(x,y) = \frac{1}{\sin(x^2+y^2)} \; ;$$

$$f_5(x,y) = \sqrt[4]{\ln(\cos xy)} \; ; \qquad f_6(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right) \; ;$$

*Megoldás.*

– A sin függvény $\forall\, y \in \mathbb{R}$ esetén értelmezett, így $D_{f_1} = \mathbb{R}^2$.

– Az $(x,y) \to \sqrt{x^2+y^2}$ függvénynek $x^2+y^2 \geq 0$ miatt $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re van értelme, a cos függvény is minden valós számra értelmezett, így $D_{f_2} = \mathbb{R}^2$.

– Az $(x,y) \to 3$ és $(x,y) \to \sqrt{x^2+y^2}$ függvények $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re értelmezettek, így hányadosuk akkor nem értelmezhető, ha a nevező 0, azaz $x^2+y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0)$.
Ezért $D_{f_3} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

– Az előbbihez hasonló meggondolással kapjuk, hogy $f_4 \iff$ nem értelmezett, ha $\sin(x^2+y^2) = 0 \iff x^2+y^2 = k\pi,\ k \in \{0,1,2,\ldots\}$, azaz a $(0,0)$ pontban és az origó középpontú $\sqrt{k\pi}$ sugarú körökön. Így

$$D_{f_4} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\, (x,y) |\, x^2+y^2 = k\pi,\ k = 0,1,2,\ldots\}.$$

– A $z \to \sqrt[4]{z}$ függvény akkor értelmezett, ha $z \geq 0$, így $\ln(\cos xy) \geq 0$ kell, hogy teljesüljön, ami $\iff$ igaz, ha $\cos(xy) \geq 1 \iff xy = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), vagyis ha $(x,y)$ az $x$, vagy $y$ tengelyen, vagy pedig az $xy = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) hiperbolákon van.
Tehát $D_{f_5} = \{\, (x,y) |\, xy = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

– Az $x \to \arcsin x$ függvény értelmezési tartománya a $[-1,1]$ intervallum. Így $f_6 \iff$ értelmezett, ha $-1 \leq \dfrac{x}{y} \leq 1$ és $y \neq 0$ teljesül, azaz
$$D_{f_6} = \left\{ (x,y) | -1 \leq \frac{x}{y} \leq 1,\ y \neq 0 \right\}.$$

**4.2. feladat.** Korlátosak-e az alábbi függvények:

$$f_1(x,y) = \sin \sqrt[3]{x^2+y^2} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)\ ,$$
$$f_2(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)\ .$$

*Megoldás.*

– A $t \to \sin t$ $(t \in \mathbb{R})$ függvényre $-1 \leq \sin t \leq 1$ $(t \in \mathbb{R})$ teljesül, így $-1 \leq \sin \sqrt[3]{x^2+y^2} \leq 1$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ miatt az $f_1$ függvény értékkészlete korlátos, azaz $f_1$ korlátos.

– $\sqrt{x^2+y^2+1} \geq 1 \iff x^2+y^2+1 \geq 1 \iff x^2+y^2 \geq 0$ (ami igaz), így $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \leq 1$ teljesül $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re.
Másrészt
$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \iff 0 \leq 1$$
(ami igaz) $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Ezek adják, hogy $f_2$ értékkészlete alulról és felülről is korlátos, így korlátos.

**4.3. feladat.** Bizonyítsa be a definíció alapján, hogy az
$$f_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$
és
$$f_2(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin \dfrac{1}{x^2+y^2} & ,\text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,\text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
függvények folytonosak a $(0,0)$-pontban.

*Megoldás.* A folytonosság definíciója az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényekre a $(0,0)$-ban a következő: Az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény a $(0,0)$-ban folytonos, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $d((x,y),(0,0)) < \delta(\varepsilon)$ esetén
$|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$.

– Az $f_1$ függvényre

$$|f_1(x,y)-f_1(0,0)| = \left|\sqrt{x^2+y^2}-0\right| = \sqrt{x^2+y^2} = \\ = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = d((x,y),(0,0))$$

$\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$-re, így ha $\varepsilon>0$-ra $\delta(\varepsilon)=\varepsilon>0$, akkor $\sqrt{x^2+y^2} = d((x,y),(0,0)) < \varepsilon$ esetén $|f_1(x,y)-f_1(0,0)|<\varepsilon$, ami adja a folytonosságot.

– $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$-ra

$$|f_2(x,y)-f_2(0,0)| = (x^2+y^2)\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \le x^2+y^2 = \\ = d^2((x,y),(0,0)),$$

így ha adott $\varepsilon>0$-ra $\delta(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}>0$, akkor $d((x,y),(0,0))<\delta(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}$ esetén $d^2((x,y),(0,0))<\varepsilon$, így $|f_2(x,y)-f_2(0,0)|<\varepsilon$, azaz $f_2$ folytonos $(0,0)$-ban.

**4.4. feladat.** A definíció alapján bizonyítsa be, hogy

a) az $f_1\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=x+2y+z$ függvény folytonos $\forall\ (x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$-ban;

b) az $f_2\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & ,\text{ha } x^2+y^2+z^2>0\\ 0 & ,\text{ha } x^2+y^2+z^2=0\end{cases}$

függvény folytonos a $(0,0,0)$ pontban.

*Megoldás.*

a) Nyilvánvaló, hogy

$$|x-x_0|,\ |y-y_0|,\ |z-z_0| \le \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = \\ = d((x,y,z),(x_0,y_0,z_0)).$$

Másrészt $\forall\ (x,y,z),\ (x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$-ra

$$|f_1(x,y,z)-f_1(x_0,y_0,z_0)| = |(x+2y+z)-(x_0+2y_0+z_0)| = \\ = |(x-x_0)+2(y-y_0)+(z-z_0)| \le \\ \le |x-x_0|+2|y-y_0|+|z-z_0| \le \\ \le 2(|x-x_0|+|y-y_0|+|z-z_0|) \le \\ \le 6d((x,y,z),(x_0,y_0,z_0)).$$

Így, ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{6} > 0$, akkor

$$d((x,y,z),(x_0,y_0,z_0)) < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{6}$$

esetén

$$|f_1(x,y,z) - f_1(x_0,y_0,z_0) < 6\frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon\ ,$$

ami adja $f_1$ folytonosságát $\forall\ (x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ esetén.

b) $\forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ esetén

$$\begin{aligned}
|f_2(x,y,z) - f_2(0,0,0)| &= \frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} = \\
&= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\frac{|x||y||z|}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} = \\
&= d((x,y,z),(0,0,0))\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{|z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le \\
&\le d((x,y,z),(0,0,0)),
\end{aligned}$$

ezért $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ választás adja az állítást.

**4.5. feladat.** Vizsgálja az alábbi függvények folytonosságát:

a) $f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ ha } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, a $(0,0)$ pontban;

b) $f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & , \text{ ha } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, a $(0,0)$ pontban;

c) $f_3(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \text{ ha } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, a $(0,0)$ pontban.

*Megoldás.* Az átviteli elv szerint az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény $\Longleftrightarrow$ folytonos a $(0,0)$-ban, ha $\forall\ \langle(x_n,y_n)\rangle$, $(x_n,y_n) \to (0,0)$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozatra $f(x_n,y_n) \to f(0,0)$.

a) Ha tekintjük az $\langle(x_n,x_n)\rangle$ sorozatot, hogy $(x_n,x_n) \to (0,0)$, akkor

$$f_1(x_n,x_n) = \frac{x_n \cdot x_n}{x_n^2 + x_n^2} = \frac{1}{2} \not\to 0 = f(0,0),$$

így $f_1$ nem folytonos $(0,0)$-ban.

b) Tekintsük az $\langle (x_n, x_n^2) \rangle$ sorozatot, hogy $(x_n, x_n^2) \to (0,0)$, akkor

$$f_2(x_n, x_n^2) = \frac{x_n^2 \cdot x_n^2}{x_n^4 + x_n^4} = \frac{1}{2} \not\to 0 = f(0,0),$$

így $f_2$ nem folytonos $(0,0)$-ban.

c) Legyen $\langle (x_n, y_n) \rangle$ tetszőleges $\mathbb{R}^2$-beli sorozat, hogy $(x_n, y_n) \to (0,0)$, ez a korábbiak szerint (lásd sorozatok) $\Longleftrightarrow$ teljesül, ha $x_n \to 0,\ y_n \to 0$. Ekkor $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ esetén

$$\begin{aligned} 0 \le |f_3(x_n, y_n)| &= \left| x_n y_n \cdot \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \right| = \\ &= \frac{|x_n|}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \cdot \frac{|y_n|}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \cdot |x_n^2 - y_n^2| \le |x_n^2 - y_n^2| \end{aligned}$$

és $|x_n^2 - y_n^2| \to 0$ miatt (a rendőr-elv szerint)
$|f_3(x_n, y_n)| \to 0$, ami $\Longleftrightarrow$ teljesül, ha $f_3(x_n, y_n) \to 0 = f(0,0)$.
Ez pedig adja, hogy $f_3$ folytonos $(0,0)$-ban.

**4.6. feladat.** Folytonos-e az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \left( (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}\ ,\ xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right),\ \text{ha } (x,y) \neq (0,0),$$

$f(0,0) = (0,0)$függvény a $(0,0)$pontban.

*Megoldás.* A Kalkulus II. jegyzet IV. 2. fejezet 2. tétele szerint az $f : E \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ $(f = (f_1, f_2, \ldots, f_m),\ f_i\colon E \to \mathbb{R})$ függvény $\Longleftrightarrow$ folytonos $x_0 \in E$-ben, ha az $f_i$ függvények folytonosak.
Az első komponens függvény a 3. feladat, a második függvény az 5. feladat miatt folytonos $(0,0)$-ban, így $f$ is.

**4.7. feladat.** Bizonyítsa be, hogy az $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (\cos x, \sin x)$ függvény folytonos $[0, 2\pi]$-n.

*Megoldás.* Az $f_1(x) = \cos x,\ f_2(x) = \sin x\ (x \in [0, 2\pi])$ egyváltozós függvények folytonosak (ezek $f$ komponens függvényei), így $f$ is.

**4.8. feladat.** Egyenletesen folytonosak-e az

a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x,y) = x + 4y - 1;$

b) $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2(x,y) = x + y^2$

függvények?

*Megoldás.* Azt kell vizsgálni, hogy igaz-e a definíció ilyen függvényekre, azaz hogy:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall\ (x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2\ d((x, y), (u, v)) < \delta(\varepsilon)$$

esetén $|f_1(x, y) - f_1(u, v)| < \varepsilon$.

a) $\forall\ (x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$-re

$$\begin{aligned} |f_1(x, y) - f_1(u, v)| &= |(x + 4y - 1) - (u + 4v - 1)| = \\ &= |(x - u) + 4(y - v)| \leq |x - u| + 4|y - v| \leq \\ &\leq d((x, y), (u, v)) + 4d((x, y), (u, v)) = \\ &= 5d((x, y), (u, v)). \end{aligned}$$

Legyen adott $\varepsilon > 0$-ra $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{5} > 0$, akkor az előbbiek miatt

$$d((x, y), (u, v)) < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{5} \implies |f_1(x, y) - f_1(u, v)| < \varepsilon,$$

így $f_1$ egyenletesen folytonos $\mathbb{R}^2$-n.

b) Megmutatjuk, hogy $f_2$ nem egyenletesen folytonos $\mathbb{R}^2$-n.
Ehhez azt kell belátni, hogy: $\exists\ \varepsilon > 0,\ \forall\ \delta(\varepsilon) > 0$-ra
$\exists\ (x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ d((x, y), (u, v)) < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f_2(x, y) - f_2(u, v) \geq \varepsilon$.
Legyen $\varepsilon = 2$, úgy $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$-ra $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy $\dfrac{1}{n} < \delta(\varepsilon)$.
Ha $(x, y) = (0, n)$ és $(u, v) = \left(0, n + \dfrac{1}{n}\right)$, úgy

$$d((x, y), (u, v)) = \sqrt{(0 - 0)^2 + \left(n - \left(n + \frac{1}{n}\right)\right)^2} = \frac{1}{n} < \delta(\varepsilon)$$

és

$$|f_2(x, y) - f_2(u, v) = \left|n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2\right| = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2,$$

azaz $f_2$ nem egyenletesen folytonos $\mathbb{R}^2$-n.

**4.9. feladat.** Egyenletesen folytonos-e az

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ f(x) = Ax + b$$

függvény, ahol $A$ $m \times n$-es nem null mátrix, $b \in \mathbb{R}^m$ adott vektor.

*Megoldás.* $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\begin{aligned} ||f(x) - f(y)||_{\mathbb{R}^m} &= ||(Ax + b) - (Ay + b)||_{\mathbb{R}^m} = ||Ax - Ay||_{\mathbb{R}^m} = \\ &= ||A(x - y)||_{\mathbb{R}^m} \leq ||A|| \cdot ||x - y||_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Így $||A|| \neq 0$ miatt, ha adott $\varepsilon > 0$-ra $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{||A||} > 0$, úgy $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén, ha $d(x, y) = ||x - y||_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon)$, akkor $||f(x) - f(y)||_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$, ezért $f$ egyenletesen folytonos $\mathbb{R}^n$-en.

**4.10. feladat.** A definíció alapján bizonyítsa be, hogy az

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x^2 + y^2)\cos\frac{1}{x^2 + y^2}$$

függvénynek létezik határértéke $(0,0)$-ban.

*Megoldás.* A $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ torlódási pontja a $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ halmaznak. Azt kell megmutatni, hogy $A = 0$ választással $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ \ 0 < d((x,y),(0,0)) < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$.
$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ esetén

$$|f(x,y) - 0| = (x^2 + y^2)\left|\cos\frac{1}{x^2 + y^2}\right| \leq x^2 + y^2 = d^2((x,y),(0,0)),$$

ezért $\forall\ \varepsilon > 0$-ra, ha $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} > 0$, akkor

$$0 < d((x,y),(0,0)) < \delta(\varepsilon) \doteq \sqrt{\varepsilon} \implies |f(x,y) - 0| < \varepsilon,$$

így

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)\cos\frac{1}{x^2 + y^2} = 0.$$

**4.11. feladat.** Bizonyítsa be, hogy az alábbi függvényeknek nem létezik határértéke a $(0,0)$ pontban:

a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f_1(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

b) $f_2\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f_2(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

*Megoldás.* Az átviteli elvet használjuk a határértékre.
a) $(0,0) \in D_{f_1}$.

Tekintsük először az $\langle x_n \rangle = \left\langle \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozatot, melyre $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \to (0,0)$, akkor

$$f_1\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 0 \to 0.$$

Ha $\langle x_n \rangle = \left\langle \left( \dfrac{2}{n}, \dfrac{1}{n} \right) \right\rangle$, úgy $x_n \to (0,0)$ és

$$f_1\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2 - \frac{1}{n^2}}{\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5} \to \frac{3}{5}\,.$$

Így nem teljesül, hogy $\exists\ A \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\ x_n \to (0,0)$ $(x_n \in D_f)$, akkor $f_1(x_n) \to A$, ezért $f_1$-nek nem létezik határértéke $(0,0)$-ban.

b) $(0,0) \in D'_{f_2}$.

Ha $\langle x_n \rangle = \left\langle \left( \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n} \right) \right\rangle$, úgy $x_n \to (0,0)$ és

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^2}}} = \frac{n}{\sqrt{2}} \to +\infty,$$

ezért nem létezik $f$-nek véges határértéke.

Ugyanakkor a 3. feladathoz hasonlóan beláthatjuk, hogy $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, így a Kalkulus II. jegyzet IV. 6. fejezet 2. tétele szerint kapjuk, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\infty,$$

azaz $f$-nek $(0,0)$-ban a határértéke $+\infty$.

**4.12. feladat.** Bizonyítsa be, hogy

$$\exists \lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \frac{2}{5}\,.$$

*Megoldás.* $(2,-1)$ torlódási pontja az

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

függvény értelmezési tartományának.

Legyen $\langle (x_n, y_n) \rangle$ tetszőleges olyan $\mathbb{R}^2$-beli sorozat, hogy $(x_n, y_n) \to (2,-1)$, akkor $x_n \to 2,\ y_n \to -1$ és

$$\lim_{n\to\infty} f_1(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n^2 = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n^2) = 2 \cdot 1 = 2$$

és

$$\lim_{n\to\infty} f_2(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n^2 + y_n^4) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 + \lim_{n\to\infty} y_n^4 = 4 + 1 = 5,$$

illetve a műveleti tulajdonságok miatt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^4} = \frac{2}{5} \ ,$$

ami az átviteli elv szerint adja állításunkat.

## Gyakorló feladatok

1) Határozza meg az

$$f_1(x,y) = \exp(x+y) \ ; \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{\cos(x^2+y^2)} \ ;$$

$$f_3(x,y) = \arccos \frac{2y}{x^2+y^2-1}$$

függvények értelmezési tartományát.

2) Korlátosak-e az

$$f_1(x,y) = \arcsin \frac{x}{y} \qquad \left(-1 \le \frac{x}{y} \le 1,\ y \ne 0\right),$$

$$f_2(x,y,z) = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+2}} \qquad \left((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right)$$

függvények?

3) Vizsgálja az

$$f_1(x,y) = \begin{cases} (x+y)\cos\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y} & , \text{ ha } xy \ne 0 \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

és

$$f_2(x,y) = \sqrt[3]{xy} \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

függvények folytonosságát a $(0,0)$ pontban.

4) Folytonosak-e az

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{ ha } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

és

$$f_2(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \left((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right)$$

függvények a $(0,0)$ illetve $(0,0,0)$ pontban.
És az $(x_0,y_0) \ne (0,0)$ illetve $(x_0,y_0,z_0) \ne (0,0,0)$ pontban?

5) Egyenletesen folytonos-e az $f_1(x,y) = x^2 + y \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény $\mathbb{R}^2$-n, illetve a $[0,1] \times [1,2]$ téglalapon?

6) Léteznek-e a
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$
és
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{3xyz}{x^2+y^2+z^2}$$
határértékek?

# V. fejezet

# A Riemann-integrál általánosítása és alkalmazása

## 1. Korlátos változású függvények

**5.1. feladat.** Bizonyítsa be, hogy

$$V(f,[a,b]) = f(b) - f(a), \text{ ha } f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ monoton növekedő,}$$
$$V(f,[a,b]) = f(a) - f(b), \text{ ha } f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ monoton csökkenő.}$$

*Megoldás.*

– Ha $f$ növekedő, akkor $\forall\ P$ felosztására $[a,b]$-nek

$$\begin{aligned} V(f,[a,b],P) &= \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \\ &= (f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \cdots \\ &+ (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(x_{k+1}) - f(x_0) = f(b) - f(a), \end{aligned}$$

így $V(f,[a,b]) = \sup\limits_P V(f,[a,b],P) = f(b) - f(a)$.

– Ha $f$ csökkenő, úgy $\forall\ P$-re

$$\begin{aligned} V(f,[a,b],P) &= \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = -\sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \\ &= -(f(b) - f(a)) = f(a) - f(b), \end{aligned}$$

így $V(f,[a,b]) = \sup\limits_P V(f,[a,b],P) = f(a) - f(b)$.

**Megjegyzés.** Ha $f$ konstans $[a,b]$-n, akkor nyilván $f(a) = f(b)$, így $V(f,[a,b]) = 0$.

**5.2. feladat.** Bizonyítsa be, hogy ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ adott függvény, $c \in [a,b]$ tetszőleges, akkor

$$V(f,[a,b]) = V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]).$$

(Kalkulus II. IV. 1. fejezet 4. tétel).

*Megoldás.*

– Legyen $P_1$ $[a, c]$, $P_2$ $[c, b]$ egy felosztása, akkor $P_1 \cup P_2$ felosztása $[a, b]$-nek és (1) miatt

$$V(f, [a, b], P_1 \cup P_2) = V(f, [a, c], P_1) + V(f, [c, b], P_2)$$

következik, amiből (2) miatt előbb

$$V(f, [a, c], P_1) + V(f, [c, b], P_2) \le V(f, [a, b]) \ ,$$

majd

$$V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]) \le V(f, [a, b]) \tag{5}$$

következik.

– Legyen most $P \doteq \{a = x_0, x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n = b\}$ $[a, b]$ tetszőleges felosztása, hogy $x_j \le c \le x_{j+1}$, akkor

$$P_1 = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_j, c\}, \qquad P_2 = \{c, x_{j+1}, \ldots, x_n = b\}$$

felosztása $[a, c]$, illetve $[c, b]$-nek, továbbá

$$|f(x_{j+1}) - f(x_j)| \le |f(x_{j+1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_j)|$$

miatt

$$\begin{aligned} V(f,[a, b], P) &= \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \le \\ &\le \sum_{k=0}^{j-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(c) - f(x_j)| + |f(x_{j+1}) - f(c)| + \\ &+ \sum_{k=j+1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \\ &= V(f, [a, c], P_1) + V(f, [c, b], P_2) \le V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]) \ , \end{aligned}$$

illetve

$$V(f, [a, b]) \le V(f, [a, c]) + V(f, [c, b])$$

adódik, mely (5)-tel együtt adja az állítást.

**Megjegyzés.** Ha $c_1, \ldots, c_n \in [a, b]$, úgy

$$V(f, [a, b]) = V(f, [a, c_1]) + V(f, [c_1, c_2]) + \cdots + V(f, [c_n, b]) \ .$$

**5.3. feladat.** Korlátos változásúak-e az alábbi függvények:

$$f_1(x) = \sin^2 x \qquad (x \in [0, \pi]) \ ;$$
$$f_2(x) = x^3 - 3x + 4 \qquad (x \in [0, 2]) \ ;$$
$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } x \in [0, 1[ \\ \dfrac{1}{2} & , \text{ ha } x \in [1, 2[ \\ 2 & , \text{ ha } x \in [2, 3] \end{cases} \ ;$$
$$f_4(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{\pi}{x} & , \text{ ha } x \in ]0, 1] \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \ . \end{cases}$$

*Megoldás.*

- Az $f_1(x) = \sin^2 x$ ($x \in [0, \pi]$) fügvény monoton növekedő a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ és monoton csökkenő a $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ intervallumon (hiszen $\exists\ f_1'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$ és $\sin 2x \geq 0$, ha $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, illetve $\sin 2x \leq 0$, ha $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$), így $f_1$ korlátos változású a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ és $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ intervallumokon (mert monoton függvény korlátos változású).
  Ekkor viszont az előző feladatban bizonyított Kalkulus II. jegyzetben is szereplő tételt követő 1. következmény szerint $f_1$ korlátos változású a $[0, \pi] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ intervallumon.
- Az $f_2(x) = x^3 - 3x + 4$ ($x \in [0, 2]$) függvényre $\exists\ f_2'(x) = 3x^2 - 3$ ($x \in [0, 2]$) és $f_2'(x) = 3x^2 - 3 \geq 0 \iff |x| \geq 1$, illetve $f_2'(x) = 3x^2 - 3 \leq 0 \iff |x| \leq 1$ miatt $f_2$ monoton csökkenő és így korlátos változású a $[0, 1]$, illetve monoton növekedő és ezért korlátos változású az $[1, 2]$ intervallumon.
  Így – az $f_1$-nél alkalmazott befejezéssel – $f_2$ korlátos változású a $[0, 2]$-n.
- Egyszerűen ellenőrízhető, hogy az $f_3$ függvény monoton növekedő, így korlátos változású.
- Az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor korlátos változású, ha
  $$V(f, [a, b]) \doteq \sup V(f, [a, b], P) = \sup_P \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < +\infty \ ,$$
  ahol $P \doteq \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ $[a, b]$ tetszőleges felosztása.
  Ha $\exists\ \langle P_n \rangle$ felosztássorozata $[a, b]$-nek, hogy $\lim\limits_{n \to \infty} V(f, [a, b], P_n) = +\infty$, akkor nyilván nem véges $V(f, [a, b])$, így $f$ nem korlátos változású.

Legyen $P_n \doteq \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1\right\}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re.

$$f_4\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}\cos k\pi = (-1)^k\frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

és $f(0) = 0$, így

$$V(f_4, [0,1], P_n) = \left|-1 - \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right| + \dots + \left|(-1)^n\frac{1}{n}\right| \geq$$
$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\ .$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ sor divergens, mégpedig $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty$, így (a korábban tanultak szerint) $\lim\limits_{n\to\infty} V(f_4, [0,1], P_n) = +\infty$, ezért $V(f_4, [0,1]) = +\infty$, azaz $f_4$ nem korlátos változású.

**5.4. feladat.** Határozza meg $V(f, [a,b])$-t, ha

a) $f_1(x) = \sin x, \quad x \in [0, 2\pi] = [a,b]$ ;

b) $f_2(x) = |\sin x|, \quad x \in [0, 10\pi] = [a,b]$ ;

c) $f_3(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{, ha } x \in [-1, 0] \\ x - x^2 & \text{, ha } x \in ]0,1] \end{cases}, \quad x \in [-1, 1] = [a,b].$

*Megoldás.* Az első feladathoz fűzött megjegyzést és a 3. feladat eredményét használjuk.

a) Legyen $c_1 = \frac{\pi}{2}$, $c_2 = \frac{3\pi}{2}$, akkor az 1. feladat megjegyzése miatt:

$$V(f_1, [0, 2\pi]) = V\left(f_1, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) + V\left(f_1, \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right) + V\left(f_1, \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]\right)$$

A sin függvény növekedő $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$-n, így a 3. feladat miatt

$$V\left(f_1, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

A sin függvény csökkenő $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$-n, így

$$V\left(f_1, \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right) = 1 - (-1) = 2.$$

A sin függvény növekedő $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$-n, így

$$V\left(f_1, \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]\right) = 0 - (-1) = 1.$$

Ezért

$$V(f_1, [0, 2\pi]) = 4.$$

b) Legyen $c_1 = \frac{\pi}{2}$, $c_2 = \pi$, $c_3 = 3\frac{\pi}{2}, \ldots,$ $c_{19} = 19\frac{\pi}{2}$, akkor

$$V(f_2, [0, 10\pi]) = V\left(f_2, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) + V\left(f_2, \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right) + \cdots$$
$$+ V\left(f_2, \left[19\frac{\pi}{2}, 10\pi\right]\right).$$

Másrészt az $f_2 = |\sin|$ függvény a $[0, c_1], \ldots, [c_{19}, 10\pi]$ intervallumokon váltakozva növekedő illetve csökkenő, továbbá a totális variáció minden részintervallumon 1, így

$$V(f_2, [0, 10\pi]) = 20.$$

c) Legyen $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$, akkor

$$V(f_3, [-1, 1]) = V(f_3, [-1, 0]) + V\left(f_3, \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) + V\left(f_3, \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right).$$

Egyszerűen belátható, hogy $f_3$ csökkenő a $[-1, 0]$, növekedő a $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ és csökkenő az $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ intervallumokon, és hogy

$$V(f_3, [-1, 0]) = 1, \quad V\left(f_3, \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = 1\frac{1}{4} \quad \text{és } V\left(f_3, \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \frac{1}{4},$$

ezért

$$V(f_3, [-1, 1]) = \frac{5}{2}\ .$$

## 2. Riemann-Stieltjes integrál

**5.5. feladat.** Létezik-e $\int\limits_a^b f\ dg$, ha

a) $f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{, ha } x \in ]0,1[ \\ 1 & \text{, ha } x \in [1,2] \end{cases}$ , $\quad g_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } x \in [0,1[ \\ x & \text{, ha } x \in [1,2] \end{cases}$ ,

b) $f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[ \\ 2 & \text{, ha } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$ , $\quad g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[ \\ 1 & \text{, ha } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$ .

*Megoldás.*

a) Legyen $\langle P_n \rangle$ egy tetszőleges normális felosztássorozata $[0,2]$-nek, hogy $P_n = \{0 = x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{n_k}^n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, $t_k^n \in [x_{k-1}^n, x_k^n]$ tetszőleges, akkor ha $1 \in [x_i^n, x_{i+1}^n]$, úgy

$$\begin{aligned}\sigma(f_1,g_1,P_n) &= \sum_{k=1}^{n_k} f_1(t_k^n)[g_1(x_k^n) - g_1(x_{k-1}^n)] = \\ &= f_1(t_1^n)(1-1) + \cdots + f_1(t_i^n)(1-1) + f_1(t_{i+1}^n)(x_{i+1}^n - 1) + \\ &+ 1(x_{i+2}^n - x_{i+1}^n) + 1(x_{i+3}^n - x_{i+2}^n) + \cdots + (2 - x_{n_k}^n - 1) = \\ &= f_1(t_{i+1}^n)(x_{i+1}^n - 1) - x_{i+1}^n + 2.\end{aligned}$$

$\langle P_n \rangle$ normális, $1 \in [x_i^n, x_{i+1}^n]$ (ahol $i$ nyilván függ $n$-től), így $\lim\limits_{n\to\infty} x_{i+1}^n = 1$ és $f_1$ folytonossága miatt $\lim\limits_{n\to\infty} f_1(t_{i+1}^n) = f_1(1) = 1$, melyek adják, hogy

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sigma(f_1, g_1, P_n) = 1 \quad \forall\ \sigma(f_1, g_1, P_n)\text{-re},$$

ami definíció szerint adja, hogy $\exists \int\limits_0^2 f_1\ dg_1 = 1$.

b) Legyen $\langle P_n \rangle = \left\langle \left\{ 0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n}{n} = 1 \right\} \right\rangle$ a $[0,1]$ $n$ egyenlő részre osztásával nyert normális felosztássorozat. Ha $n = 2k$, úgy $\dfrac{1}{2} = \dfrac{k}{2k}$ osztáspont, ha $n$ páratlan úgy nem, ezért $n = 2k$ mellett

$$\begin{aligned}\sigma(f, g, P_{2k}) = 1 \cdot 0 + \cdots + 1 \cdot 0 + 1(1-0) + 2(1-1) + \cdots \\ + 2(1-1) = 1,\end{aligned}$$

ha $t^n_{k_n} \neq 1$ és (hasonló számolással) $\sigma(f,g,P_{2k}) = 2$, ha $t^n_k = 1$.
Az első esetben $\sigma(f,g,P_{2k}) \to 1$, a másodikban $\sigma(f,g,P_{2k}) \to 2$
$\Longrightarrow\ \nexists \int\limits_0^1 f_2\ dg_2$.

**5.6. feladat.** Vizsgálja meg, hogy létezik-e $\int\limits_a^b f\ dg$ (ha létezik, úgy számítsa ki értékét), ha

a) $f_1(x) = x, \qquad g_1(x) = \sin x \qquad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$,

b) $f_2(x) = x, \qquad g_2(x) = e^{|x|} \qquad (x \in [-1,1])$,

c) $f_3(x) = x^5, \qquad g_3(x) = |x|^3 \qquad (x \in [-1,2])$.

*Megoldás.* Ismeretesek a következők:

– Ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású, akkor $\exists \int\limits_a^b f\ dg$ (elegendő feltétel).

– Ha $\int\limits_a^b f\ dg$ és $\int\limits_a^b g\ df$ egyike létezik, akkor a másik is és

$$\int\limits_a^b f\ dg + \int\limits_a^b g\ df = [f \cdot g]_a^b$$

(a parciális integrálás tétele).

– Ha $a < c < b$ és

$$\exists \int\limits_a^b f\ dg,\ \int\limits_a^c f\ dg \text{ és } \int\limits_c^b f\ dg \Longrightarrow \int\limits_a^b f\ dg = \int\limits_a^c f\ dg + \int\limits_c^b f\ dg$$

(additivitás az intervallumra).

– Ha $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f$ és $g'$ folytonos $\Longrightarrow \exists \int\limits_a^b f\ dg = \int\limits_a^b f(x)g'(x)\ dx$.
(„visszavezetés" Riemann-integrálra).

a) $f_1$ folytonos, $g_1$ korlátos változású (mert monoton), így $\exists \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\ d(\sin x)$ és a parciális integrálás tételét felhasználva:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ d(\sin x) = [x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx =$$
$$= \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

b) $f_2$ folytonos,

$$g_2(x) = \begin{cases} e^x & , \text{ ha } x \in [0,1] \\ e^{-x} & , \text{ ha } x \in [-1,0] \end{cases},$$

így $g_2$ monoton csökkenő $[-1,0]$-n, ezért itt korlátos változású, monoton növekedő $[0,1]$-n, így itt is korlátos változású. Ezek adják, hogy $g_2$ $[-1,1]$-n is korlátos változású.

Tehát $\exists \int_{-1}^{1} x\ d(e^{|x|})$ és a parciális integrálás tétele, valamint a Riemann-integrál tulajdonságai alapján:

$$\int_{-1}^{1} x\ d(e^{|x|}) = [x \cdot e^{|x|}]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{|x|}\ dx =$$
$$= 2e - \left[\int_{-1}^{0} e^{-x}\ dx + \int_0^1 e^x\ dx\right] =$$
$$= 2e - \left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_{-1}^{0} - [e^x]_0^1 = 2e + 1 - e - e + 1 = 2.$$

c) $f_3$ folytonos, $g_3$ korlátos változású a $[-1,2]$, $[-1,0]$, $[0,2]$ intervallumokon, így azokon léteznek a Riemann-Stieltjes integrálok és

$$\int_{-1}^{2} x^5\ d(|x|^3) = \int_{-1}^{0} x^5\ d(-x^3) + \int_0^2 x^5\ d(x^3) =$$
$$= \int_{-1}^{0} x^5(-3x^2)\ dx + \int_0^2 x^5 3x^2\ dx =$$
$$= -3\left[\frac{x^8}{8}\right]_{-1}^{0} + 3\left[\frac{x^8}{8}\right]_0^2 = \frac{3}{8} + 3\frac{2^8}{2^3} = \frac{3}{8} + 96 = 96\frac{3}{8}$$

(a visszavezetést is használva).

# 3. Görbék, görbementi integrál

**5.7. feladat.** Bizonyítsa be, hogy a

$$G = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$$

egységkör egy paraméteres előállítása az $\underline{f} = (\cos, \sin)\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ (nyilván) folytonos függvény.

*Megoldás.* Meg kell mutatni, hogy

$$G = \Gamma = \{\,(\cos t, \sin t) \,|\, t \in [0, 2\pi]\}.$$

Ismeretes, hogy $\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \ \forall\ t \in [0, 2\pi]$, így $\Gamma \subset G$.
Megmutatjuk, hogy $\forall\ (x, y) \in G$-re pontosan egy $t \in [0, 2\pi]$ létezik, hogy $(x, y) = (\cos t, \sin t) \in \Gamma$ (azaz $G \subset \Gamma$ is igaz).
$x^2 + y^2 = 1$ miatt $x, y \in [-1, 1]$.
Ha $x, y \in [0, 1]$, úgy egy és csak egy $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ létezik, hogy $\cos t = x$ (hiszen a cos függvény folytonos és szigorúan monoton csökkenő $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$-n és $\cos 0 = 1$, $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, így 0 és 1 között minden értéket felvesz és csak egyszer).
Ekkor

$$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2} = y,$$

másrészt $t \in \left(\dfrac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ esetén $\cos t \in [0, 1]$ és $\sin t \in [0, 1]$ egyszerre nem teljesül, ezért ebben az esetben igazoltuk az állítást.
A többi esetben, vagyis ha $x, y \in [-1, 0]$; $x \in [0, 1]$ és $y \in [-1, 0]$ vagy fordítva, hasonlóan járhatunk el.

**5.8. feladat.** Bizonyítsa be, hogy az $\underline{f} = (\cos, \sin)\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ egységkör sima zárt görbe.

*Megoldás.* $\underline{f}' = (-\sin, \cos)\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ és a $-\sin$ és cos függvények folytonossága miatt $f'$ folytonos, továbbá

$$\sum_{i=1}^{2} f_i'^2(t) = (-\sin(t))^2 + \cos^2 t = \sin^2 t + \cos^2 t = 1 > 0,$$

ami definíció szerint adja, hogy az egységkör sima görbe.
Másrészt

$$\underline{f}(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = \underline{f}(2\pi),$$

az zárt is.

**5.9. feladat.** Legyen $\underline{f} = (f_1, f_2)\colon [-3,3] \to \mathbb{R}^2$, ahol $f_1(t) = t^2 - t$, $f_2(t) = t^3 - 3t$. Van-e az $\underline{f}$ görbének többszörös pontja?

*Megoldás.* $\underline{f}(-1) = (2,2) = \underline{f}(2)$, így $(2,2)$ többszörös pont.

**5.10. feladat.** Bizonyítsa be, hogy az $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ pontokat összekötő szakasz ívhossza $\|\underline{x} - \underline{y}\|_{\mathbb{R}^n}$.

*Megoldás.* Az adott szakasz paraméteres előállítását az

$$\underline{f}(t) = \underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x}) = (x_1 + t(y_1 - x_1), \cdots, x_n + t(y_n - x_n)) \quad (t \in [0,1])$$

folytonos függvény adja.
Ha $P = \{0 = t_0, t_1, \ldots, t_m = 1\}$ a $[0,1]$ egy felosztása, akkor

$$\begin{aligned} l(\underline{f}, P) &= \sum_{i=1}^{m} \|(\underline{x} + t_i(\underline{y} - \underline{x})) - (\underline{x} + t_{i-1}(\underline{y} - \underline{x}))\|_{\mathbb{R}^n} = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \|(t_i - t_{i-1})(\underline{y} - \underline{x})\|_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{m}(t_i - t_{i-1})\|\underline{y} - \underline{x}\|_{\mathbb{R}^n} = \\ &= \|\underline{y} - \underline{x}\|_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m}(t_i - t_{i-1}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|_{\mathbb{R}^n}(1-0) = \|\underline{x} - \underline{y}\|_{\mathbb{R}^n}\ , \end{aligned}$$

melyből nyilván következik, hogy

$$l(\underline{f}) = \sup_P \{l(\underline{f}, P)\} = \|x - y\|_{\mathbb{R}},$$

és ezt kellett bizonyítani.

**5.11. feladat.** Rektifikálható-e az

$$\underline{f}(t) = \left(t, \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}} \cos \dfrac{\pi}{t} & , \text{ ha } t > 0 \\ 0 & , \text{ ha } t = 0 \end{cases}\right) \quad (t \in [0,1])$$

$\mathbb{R}^2$-beli görbe?

*Megoldás.* Megmutatjuk, hogy $\sup\limits_P \{l(\underline{f}, P)\} = +\infty$.

Ha $P_n \doteq \left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n-1}, \ldots, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ a $[0,1]$ egy felosztássorozata, úgy

$$\underline{f}\left(\frac{1}{i}\right) = \left(\frac{1}{i}, (-1)^i \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{i}}}\right) = \left(\frac{1}{i}, (-1)^i \sqrt{i}\right) \ (i = 1, 2, \ldots, n),\ \underline{f}(0) = (0,0)$$

miatt

$$l(\underline{f}, P_n) = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2 + (\sqrt{2}-(-\sqrt{3}))^2} + \cdots$$
$$+ \sqrt{\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)^2 + (\sqrt{n-1}-(-\sqrt{n}))^2} >$$
$$> (1+\sqrt{2}) + (\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n-1}+\sqrt{n}) > \sqrt{n},$$

ami $\sqrt{n} \to +\infty$ miatt adja, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} l(\underline{f}, P_n) = +\infty$, ezért $\sup\limits_{P}\{l(\underline{f}, P)\} = +\infty$, vagyis görbénk nem rektifikálható.

**5.12. feladat.** Határozza meg az alábbi görbék ívhosszát:

$$f(t) = (3\cos t, 3\sin t, 2t) \quad (t \in [0, 2\pi]) \ ;$$
$$g(t) = \left(t, \frac{3}{2}t^2, \frac{3}{2}t^3\right) \quad (t \in [0, 2]) \ ;$$
$$h(t) = (t\cos t, t\sin t, t) \quad \left(t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

*Megoldás.* Alkalmazható a sima görbék rektifikálhatóságára és ívhosszának kiszámítására vonatkozó tétel.
E szerint

$$l(\underline{f}) = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i'^2(t)} \, dt.$$

– $\underline{f}$ komponens függvényei:

$$f_1(t) = 3\cos t \implies \exists\ f_1'(t) = -3\sin t \text{ és } f_1' \text{ folytonos;}$$
$$f_2(t) = 3\sin t \implies \exists\ f_2'(t) = 3\cos t \text{ és } f_2' \text{ folytonos;}$$
$$f_3(t) = 2t \implies \exists\ f_3'(t) = 2 \text{ és } f_3' \text{ is folytonos,}$$

továbbá

$$f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t) = 9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 4 = 13 > 0,$$

így $\underline{f}$ sima görbe.
Ezért

$$l(\underline{f}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{13} \, dt = 2\pi\sqrt{13}.$$

– $\underline{g}$ komponens függvényei:

$$g_1(t) = t \implies \exists\ g_1'(t) = 1;$$
$$g_2(t) = \frac{3}{2}t^2 \implies \exists\ g_2'(t) = 3t;$$
$$g_3(t) = \frac{3}{2}t^3 \implies \exists\ g_3'(t) = \frac{9}{2}t^2$$

és $g_1', g_2', g_3'$ folytonosak, továbbá

$$g_1'^2(t) + g_2'^2(t) + g_3'^2(t) = 1 + 9t^2 + \frac{81}{4}t^4 > 0,$$

így $\underline{g}$ sima görbe.
Ezért

$$l(\underline{g}) = \int_0^2 \sqrt{1 + 9t^2 + \frac{81}{4}t^4}\, dt = \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{9}{2}t^2 + 1\right)^2}\, dt =$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{9}{2}t^2 + 1\right)\, dt = \left[\frac{3}{2}t^3 + t\right]_0^2 = \frac{3}{2}8 + 2 = 14.$$

– Hasonló meggondolások után:

$$l(\underline{h}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1^2}\, dt =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t - t\sin 2t + t^2\sin^2 t + \cos^2 t + t\sin 2t + t^2\cos^2 t + 1}\, dt =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + t^2}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dt =$$
$$= 2\int_0^{\operatorname{arsh}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} \operatorname{ch}^2 s\, ds = \int_0^{\operatorname{arsh}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} (1 + \operatorname{ch} 2s)\, ds =$$
$$= \left[s + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2s\right]_0^{\operatorname{arsh}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} = \operatorname{arsh}\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{8}}\ .$$

**5.13. feladat.** Számítsa ki az $\int\limits_{\underline{g}} \underline{f}$ görbementi integrált, ha

a) $\underline{g}(t) = (t^2, 2t, t)$ $(t \in [0,1])$, $\underline{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_3, x_1x_3, x_1x_2)$;

b) $\underline{g}$ a $(2,0,1)$ és $(2,0,4)$ pontokat összekötő irányított egyenes szakasz, $\underline{f}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, -3x_2, x_1)$;

c) $\underline{g}(t) = (t, t^2, t^3)$ $(t \in [0,1])$, $\underline{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_3, -x_2, x_1)$.

*Megoldás.* A tanultak szerint ha $\underline{g}'$ folytonos $[a,b]$-n, $\underline{f}$ folytonos $\underline{g}$ $([a,b])$-n, akkor

$$\int\limits_{\underline{g}} \underline{f} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{a}^{b} (f_i \circ \underline{g}) g_i'(t)\ dt.$$

E feltételek mindhárom esetben teljesülnek.

a)

$$\int\limits_{\underline{g}} \underline{f} = \int\limits_0^1 (t^4 + t) 2t\ dt + \int\limits_0^1 t^2 \cdot t \cdot 2\ dt + \int\limits_0^1 t^2 \cdot 2t \cdot 1\ dt =$$
$$= \left[ 2\frac{t^6}{6} + 2\frac{t^3}{3} \right]_0^1 + 2\left[ 2\frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 = 2.$$

b) Először írjuk fel az adott szakasz paraméteres előállítását:

$$\underline{g}(t) = (2,0,1) + t[(2,0,4) - (2,0,1)] = (2,0,1) + t(0,0,3) =$$
$$= (2, 0, 1 + 3t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))\ (t \in [0,1]).$$

Ekkor már:

$$\int\limits_{\underline{g}} \underline{f} = \int\limits_0^1 2 \cdot 2 \cdot 0\ dt + \int\limits_0^1 -3 \cdot 0 \cdot 0\ dt + \int\limits_0^1 2 \cdot 3\ dt = [6t]_0^1 = 6.$$

c)

$$\int\limits_{\underline{g}} \underline{f} = \int\limits_0^1 t \cdot t^3 \cdot 1\ dt + \int\limits_0^1 -t^2 \cdot 2t\ dt + \int\limits_0^1 t \cdot 3t^2\ dt =$$
$$= \left[ \frac{t^5}{5} \right]_0^1 - 2\left[ \frac{t^4}{4} \right]_0^1 + 3\left[ \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}\ .$$

## Gyakorló feladatok

1) Bizonyítsa be, hogy $V(f,[a,b]) = f(b) - f(a) \iff$ ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növekedő.
2) Korlátos változásúak-e az alábbi függvények:

$$f_1(x) = 1 + \cos x \quad (x \in [0,\pi]); \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & , \text{ ha } x \in ]0,1] \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}.$$

3) Határozza meg $V(f,[a,b])$-t, ha

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x = 0 \\ 1 & , \text{ ha } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \end{cases}; \qquad f_2(x) = \cos 2x \quad (x \in [0,2\pi]).$$

4) Létezik-e $\int\limits_a^b f\, dg$, ha
   a) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & , \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$ ; $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ nem konstans monoton növekedő függvény;
   b) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $g(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } x \neq a_i,\ i = 1,\ldots,n \\ c_i & , \text{ ha } x = a_i,\ i = 1,\ldots,n \end{cases}$, ahol $a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < b,\ c_i \in \mathbb{R}$.
5) Számítsa ki $\int\limits_a^b f\, dg$ értékét, ha
   a) $f(x) = x^2,\ g(x) = \cos x \quad (x \in [0,\pi])$;
   b) $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = e^x \quad (x \in [0,1])$.
6) Határozza meg az alábbi görbék ívhosszát:
   a) $\underline{f}(t) = \left(t, \dfrac{\sqrt{2}}{2}t^2, \dfrac{1}{3}t^3\right) \quad (t \in [0,2])$;
   b) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.
7) Számítsa ki az $\int\limits_{\underline{g}} \underline{f}$ görbementi integrált, ha
   a) $\underline{g}$ a $(0,0,0)$ és $(1,1,1)$ pontokat összekötő irányított egyenes szakasz, $\underline{f}(x_1,x_2,x_3) = (x_1x_3, -x_2, x_1)$;
   b) $\underline{g}$ a $(0,0,0,0)$ és $(1,1,1,1)$ pontokat összekötő irányított egyenes szakasz, $\underline{f}(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1x_4, x_2, -x_2x_4, x_3)$.

# VI. fejezet

# Többváltozós függvények differenciálszámítása

**6.1. feladat.** Számítsa ki az alábbi függvények parciális deriváltjait, ha (és ahol) léteznek:

$$f_1(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2);$$
$$f_2(x,y) = \ln(x^2+y^2) \qquad (x^2+y^2 \neq 0);$$
$$f_3(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \left(-1 \leq \frac{x}{y} \leq 1,\ y \neq 0\right);$$
$$f_4(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (x^2+y^2 \neq 0);$$
$$f_5(x,y) = \sqrt{x^4+y^2}\sin(x+y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2);$$
$$f_6(x,y,z) = \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (x^2+y^2+z^2 \neq 0);$$
$$f_7(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z \qquad (x,y,z > 0).$$

*Megoldás.* Ha $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény, úgy az $i$-edik változója szerinti parciális derivált létezése az $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ pontban azt jelenti, hogy létezik a

$$\lim_{x_i \to x_{0i}} \frac{f(x_{01}, \ldots, x_{0i-1}, x_i, x_{0i+1}, \ldots, x_{0n}) - f(x_{01}, \ldots, x_{0i}, \ldots, x_{0n})}{x_i - x_{0i}}$$

véges határérték ($i = 1, 2, \ldots, n$ lehetséges), vagyis azt, hogy a $\varphi(t) = f(x_{01}, \ldots, x_{0i-1}, t, x_{0i+1}, \ldots, x_{0n})$ (az $x_{0i}$ egy környezetében értelmezett) függvény differenciálható $t = x_{0i}$-ben.

Tehát azt a „technikát” alkalmazhatjuk, hogy adott (például $x_i$) változó szerinti parciális derivált létezésének bizonyításánál, illetve kiszámításánál csak az adott (itt $x_i$) változóban tekintjük a függvényt, a többi változót konstansnak tekintve, így mindig egyváltozós függvénnyel számolunk (a tanultaknak megfelelően).

– Az $f_1$ kétváltozós függvény csak $x$, vagy csak $y$ függvényében is negyedfokú függvény, mely mindenütt differenciálható, így használhatjuk az egyváltozós függvényekre vonatkozó differenciálási és műveleti szabályokat. Ezért

$$\exists\ D_1 f(x,y) = 4x^3 - 4y^2 \cdot 2x = 4x^3 - 8xy^2 \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\text{-re},$$
$$\exists\ D_2 f(x,y) = 4y^3 - 4x^2 \cdot 2y = 4y^3 - 8x^2 y \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\text{-re}.$$

($D_1 f(x,y)$ helyett használhatjuk a $D_x f(x,y)$, $f_x(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, míg $D_2 f(x,y)$ helyett a $D_y f(x,y)$, $f_y(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ jelöléseket is.)

– $f_2$ értelmezett a $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nyílt halmazon és bármelyik változójában tekintve (a másik rögzítése mellett) az ln és az $x \to x^2 + y^2$, vagy $y \to x^2 + y$ függvények összetett függvénye, melyek mind differenciálhatók, ezért

$$\exists\ D_1 f_2(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\text{-ra},$$
$$\exists\ D_2 f_2(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2+y^2} \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\text{-ra}.$$

– $f_3$ $D$ értelmezési tartományán (ezt már vizsgáltuk) az $x \to \dfrac{x}{y}$, $y \to \dfrac{x}{y}$ függvények (mint egyváltozósak) differenciálhatók, ugyanakkor az arcsin: $[-1,1] \to \mathbb{R}$ függvény nem differenciálható $-1$-ben és $+1$-ben, így a parciális deriváltak nem léteznek $D$ azon $(x,y)$ pontjaiban, amikor $y = -x$ és $y = x$. Ezért

$$\exists\ D_1 f_3(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{y}\right)^2}} \cdot \frac{1}{y}$$

és

$$\exists\ D_2 f_3(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{y}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

ha $-1 < \dfrac{x}{y} < 1$ és $y \neq 0$.

– $f_4$ is összetett függvény az $x$ és $y$ változójában is, mégpedig az arctg és az $x \to \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ illetve $y \to \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ függvényeké, melyek differenciálhatók, így

$$D_1 f_4(x,y) = \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x}{x^2+y^2} =$$
$$= \frac{y^2}{(2x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \ ,$$
$$D_2 f_4(x,y) = \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}} \cdot x\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y}{x^2+y^2} =$$
$$= \frac{-xy}{(2x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\forall\ (x,y) \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

– Az $f_5$ függvénynél nem léteznek $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re a parciális deriváltak, csak $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ esetén, mert a $t \to \sqrt{t}$ függvény nem differenciálható $t = 0$-ban, így $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-ra

$$D_1 f_5(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^4+y^2}} \cdot 4x^3 \sin(x+y) + \sqrt{x^4+y^2}\cos(x+y),$$
$$D_2 f_5(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^4+y^2}} \cdot 2y \sin(x+y) + \sqrt{x^4+y^2}\cos(x+y).$$

– Az $f_6$ háromváltozós függvény három parciális deriváltja létezik $\forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$-ra és

$$D_1 f_6(x,y,z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - (x+y+z)\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x}{x^2+y^2+z^2} =$$
$$= \frac{y^2+z^2-xy-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$D_2f_6(x,y,z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - (x+y+z)\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2y}{x^2+y^2+z^2} =$$

$$= \frac{x^2+z^2-xy-zy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$D_3f_6(x,y,z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - (x+y+z)\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2z}{x^2+y^2+z^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-xz-yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

– Ha $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+$, úgy léteznek a parciális deriváltak és

$$D_1f_7(x,y,z) = z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} \cdot \frac{1}{y} ;$$

$$D_2f_7(x,y,z) = z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} \cdot \frac{-x}{y^2} ;$$

$$D_3f_7(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{z} \ln\left(\frac{x}{y}\right) .$$

**6.2. feladat.** Vizsgálja a $D_1f(0,0)$ és $D_2f(0,0)$ létezését az alábbi esetekben:

a) $$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & , \text{ ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases} ;$$

b) $$f(x,y) = \sqrt[3]{xy} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) ;$$

c) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & , \text{ ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases} ;$$

d) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & , \text{ ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases} ;$$

e) $$f(x,y) = \sqrt{|xy|} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) ;$$

f) $$f(x,y) = |x+y| \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) .$$

*Megoldás.* Az $f\colon D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény $(0,0)$-beli parciális deriváltjainak létezéséhez a

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}\quad \text{és}\quad \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$$

határértékeket kell vizsgálni.

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0,$$

mert $x\to 0$, illetve az $x\to\sin\dfrac{1}{x^2}$ függvény korlátos, ezért $\exists\, D_1f(0,0)=0$. Hasonlóan

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\sin\frac{1}{y^2}-0}{y-0}=\lim_{y\to 0}y\sin\frac{1}{y^2}=0=$$
$$=D_2f(0,0)\ ;$$

b) $$\exists\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x\cdot 0}-\sqrt[3]{0\cdot 0}}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}0=0=D_1f(0,0),$$
$$\exists\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{0\cdot y}-\sqrt[3]{0\cdot 0}}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y-0}=\lim_{y\to 0}0=0=D_2f(0,0);$$

c) $$\exists\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0}=0=D_1f(0,0),$$
$$\exists\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y-0}=0=D_2f(0,0);$$

d) $$\exists\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0}=1=D_1f(0,0);$$
$$\exists\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y-0}=\lim_{y\to 0}0=0=D_2f(0,0);$$

e) $$\exists\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0}=0=D_1f(0,0),$$
$$\exists\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y-0}=0=D_2f(0,0);$$

f)
$$\lim_{x\to 0} \frac{|x+0|-|0+0|}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

nem létezik, mert $\dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{, ha } x>0 \\ -1 & \text{, ha } x<0 \end{cases}$ miatt $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \frac{|x|}{x} = 1$,

$\displaystyle\lim_{x\to 0-0} \frac{|x|}{x} = -1$, ezért nem létezik $D_1 f(0,0)$.

Ugyanígy látható be, hogy $\nexists\ D_2 f(0,0)$.

**6.3. feladat.** Milyen $e$ irányra létezik $D_e f(0,0)$, ha

a) $f_1(x,y) = \sqrt[3]{xy} \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$;
b) $f_2$ a 2. feladat c)-beli függvény;
c) $f_3$ a 2. feladat d)-beli függvény;
d) $f_4$ a 2. feladat e)-beli függvény;

*Megoldás.* Ha $f\colon D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ és $(x_0,y_0)\in D$, illetve $e=(e_1,e_2)\in\mathbb{R}^2$ $(\|e\|=\sqrt{e_1^2+e_2^2}=1)$ adott, úgy definíció szerint

$$D_e f(x_0,y_0) \doteq \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_1, y_0+te_2)-f(x_0,y_0)}{t}\ ,$$

ha ez a határérték létezik. Ha $(x_0,y_0)=(0,0)$, úgy

$$D_e f(0,0) \doteq \lim_{t\to 0} \frac{f(te_1,te_2)-f(0,0)}{t}$$

(ha létezik a határérték).

a)
$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{te_1\cdot te_2}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e_1e_2t^{\frac{2}{3}}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e_1e_2}{\sqrt[3]{t}}$$

csak akkor létezik, ha $e_1=0$ vagy $e_2=0$, és ekkor értéke: 0 (ami éppen $D_1f_1(0,0)$ és $D_2f_1(0,0)$ lesz, összhangban a 2. feladat b) részével).

Ha $e_1\cdot e_2\neq 0$, úgy $\nexists\ \displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{t}}$, ezért $\nexists\ D_e f(0,0)$.

b)
$$\lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{(te_1)^2te_2}{(te_1)^2+(te_2)^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2e_1e_2}{t^2(e_1^2+e_2^2)} = \lim_{t\to 0} e_1e_2 = e_1e_2,$$

így $\forall\ e=(e_1,e_2)$-re $\exists\ D_e f(0,0)=e_1e_2$.

(Speciálisan most is kapjuk, hogy $D_1 f(0,0)=D_2 f(0,0)=0$, összhangban a 2. feladat c) részével.)

c)

$$\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{(te_1)^3}{(te_1)^2+(te_2)^2}-0}{t}=\begin{cases}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e_1^3}{e_1^2+e_2^2}=e_1^3 & \text{, ha } e_1\neq 0\\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{0}{t}=0 & \text{, ha } e_1=0\end{cases},$$

így $\exists\ D_e f(0,0)\ \forall\ e$ irányra.

d)

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{|te_1te_2|}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\sqrt{|e_1e_2|}\frac{\sqrt{t^2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}\sqrt{|e_1e_2|},$$

ami csak akkor létezik, ha $e_1=0$ vagy $e_2=0$ (azaz csak a parciális deriváltak!).

**6.4. feladat.** Vizsgálja az adott függvények adott pontbeli differenciálhatóságát:

a) a 2. feladat a) függvényét a $(0,0)$-ban;
b) a 2. feladat c) függvényét a $(0,0)$-ban;
c) a 2. feladat d) függvényét a $(0,0)$-ban;
d) a 2. feladat e) függvényét a $(0,0)$-ban;
e) az $f(x,y)=|xy| \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ függvényt a $(0,0)$-ban;
f) az $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+2y^2+3z^2} \quad ((x,y,z)\in\mathbb{R}^3)$ a $(0,0,0)$-ban.

*Megoldás.* Azt mondjuk, hogy az $f\colon D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ függvény differenciálható az $x_0\in D$ pontban, ha $\exists$ egy $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés, hogy

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^n}}=0.$$

Ekkor $f'(x_0)=A$ az $f$ függvény $x_0$-beli differenciálhányadosa.
Ha $f$ differenciálható $x_0$-ban, úgy ott bármely komponens függvényének létezik minden parciális deriváltja, továbbá

$$f'(x_0)=(D_i f_j(x_0))_{m\times n}\ .$$

A differenciálhatóságnak tehát szükséges feltétele a $D_i f_j$ parciális deriváltak létezése. Ha ezeket meghatároztuk, és megalkottuk belőlük az $A$ „derivált mátrix-jelöltet”, akkor ellenőrízni kell a definíció teljesülését.

a) A 2. feladat a) részében meghatároztuk a parciális deriváltakat: $D_1 f(0,0)=D_2 f(0,0)=0$, így a jelölt a derivált mátrixra: $A=(0\ 0)$.

Ekkor

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} - 0 - (0\ 0)\binom{x-0}{y-0}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| = 0,$$

mert $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ és $\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|$ korlátos.

Ezért $f$ differenciálható $(0,0)$-ban és $f'(0,0) = (0\ 0)$.

b) A 2. feladat c) részében beláttuk, hogy
$D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0 \implies$ csak $A = (0\ 0)$ lehetséges.
Ekkor

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} - 0 - (0\ 0)\binom{x-0}{x-0}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y|}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0,$$

mert $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \to (0,0)$ választással

$$\frac{\dfrac{1}{n^3}}{\left(\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{1}{n^2}\right)\dfrac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1+n^2}{n^4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{n^2}{1+n^2}\frac{1}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

Ez azt jelenti, hogy függvényünk nem differenciálható $(0,0)$-ban.

c) A 2. feladat d) részében beláttuk, hogy
$D_1 f(0,0) = 1,\ D_2 f(0,0) = 0$, így csak $A = (1\ 0)$ lehetne a $(0,0)$-beli derivált.
Ekkor

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2} - 0 - (1\ 0)\binom{x-0}{y-0}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2} - x\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0,$$

mert $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ választással

$$\frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}}{\left(\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{\sqrt{8}}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \to \frac{1}{\sqrt{8}} \neq 0.$$

Ezért a függvényünk nem differenciálható $(0,0)$-ban.

d) A 2. feladat e) részében beláttuk, hogy
$D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0 \implies A = (0,0)$ a „jelölt”.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\sqrt{|xy|} - 0 - (0\ 0)\binom{x-0}{x-0}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} ,$$

ami nem 0, mert $(x_n, x_n) \to (0,0)$ választással

$$\frac{\sqrt{|x_n x_n|}}{\sqrt{x_n^2 + x_n^2}} = \frac{|x_n|}{\sqrt{2}|x_n|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

ezért $f$ nem differenciálható $(0,0)$-ban.

e) Az $f(x,y) = |xy|$ függvénynél

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x-0} = 0 = D_1 f(0,0) \quad ; \quad \exists \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y-0} = 0 = D_2 f(0,0) ,$$

és

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left||xy| - 0 - (0\,0)\binom{x}{y}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

mert $|x| \to 0$, a második tényező pedig $0 \leq \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$ miatt korlátos.

Ezért függvényünk differenciálható $(0,0)$-ban.

f)

$$\frac{f(x,0,0) - f(0,0,0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x^2} - 0}{x} = \frac{|x|}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

miatt nem létezik a $\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0,0) - f(0,0,0)}{x-0}$ határérték, azaz $D_1 f(0,0,0)$.
Így $f$ nem differenciálható $(0,0,0)$-ban (mert ha az lenne, akkor $D_1 f(0,0,0)$ is létezne).
Hasonlóan belátható egyébként, hogy $D_2 f(0,0,0)$ és $D_3 f(0,0,0)$ sem létezik.

**6.5. feladat.** Bizonyítsa be, hogy ha $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = g(x_i)$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) (ahol $g$ egyváltozós függvény), $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in D$ és $g$ differenciálható $x_{0i}$-ben, akkor $f$ differenciálható $x_0$-ban és

$$f'(x_0) = f'(x_{01}, \dots, x_{0n}) = (0 \cdots 0 g'(x_{0i}) 0 \cdots 0).$$

*Megoldás.*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - (0 \cdots 0 g'(x_{0i}) 0 \cdots 0)(x - x_0)|}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{|g(x_i) - g(x_{0i}) - g'(x_{0i})(x_i - x_{0i})|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i})^2}} =$$

$$= \lim_{(x_1, \dots, x_n) \to (x_{01}, \dots, x_{0n})} \left( \left| \frac{g(x_i) - g(x_{0i})}{x_i - x_{0i}} - g'(x_{0i}) \right| \frac{|x_i - x_{0i}|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i})^2}} \right) = 0,$$

mert az első tényező határértéke (mivel $\exists\, g'(x_{0i})$) 0, míg a második tényező korlátos.
Ez pedig adja $f$ differenciálhatóságát $x_0$-ban és $f'(x_0)$ jelzett alakját.

**Megjegyzés.** A lokális tétel globális formában is megfogalmazható.

**6.6. feladat.** Bizonyítsa be, hogy ha $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $f(x, y) = g(x)h(y)$ ($(x, y) \in D$), $(x_0, y_0) \in D$ és $\exists\, g'(x_0)$, $h'(y_0)$, akkor $\exists\, f'(x_0, y_0)$ és

$$f'(x_0, y_0) = (g'(x_0)h(y_0) \ g(x_0)h'(y_0)).$$

*Megoldás.* Felhasználjuk a differenciálhatóság definícióját, azt is, hogy $g'(x_0)$ és $h'(y_0)$ létezése adja, hogy $g$ folytonos $x_0$-ban és $h$ folytonos $y_0$-ban, valamint, hogy az $x \to |x|$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény folytonos, illetve, hogy

$$0 \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \ , \ \frac{|y - y_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \leq 1.$$

$$0 \le \frac{\left| f(x,y) - f(x_0,y_0) - (g'(x_0)h(y_0)\ g(x_0)h'(y_0)) \binom{x-x_0}{y-y_0} \right|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} =$$
$$= \frac{|g(x)h(y) - g(x_0)h(y_0) - g'(x_0)h(y_0)(x-x_0) - g(x_0)h'(y_0)(y-y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} =$$
$$= \frac{|(g(x)-g(x_0))h(y) + g(x_0)(h(y)-h(y_0)) - g'(x_0)h(y_0)(x-x_0) - g(x_0)h'(y_0)(y-y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \le$$
$$\le \left| \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} h(y) - g'(x_0)h(y_0) \right| \frac{|x-x_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} +$$
$$+ \left| g(x_0) \frac{h(y)-h(y_0)}{y-y_0} - g(x_0)h'(y_0) \right| \frac{|x-x_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \to 0,$$

ha $(x,y) \to (x_0,y_0)$, ami adja $f$ differenciálhatóságát $(x_0,y_0)$-ban és a feladatban megfogalmazott formulát.

**6.7. feladat.** Vizsgálja az $f(x,y) = x^2 + y^2 + x\cos y + y^3 \sin x$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény differenciálhatóságát és határozza meg az $f'(x,y)$ deriváltmátrixot.

*Megoldás.* A $g_1(x,y) = x^2$ $((x,y) \in \mathbb{R})$ függvény az $x \to x^2$ függvény differenciálhatósága miatt $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}$ esetén differenciálható és $g_1'(x,y) = (2x\ 0)$ (lásd 5. feladat).
Hasonlóan kapjuk, hogy a $g_2(x,y) = y^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény differenciálható és $g_2'(x,y) = (0\ 2y)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$.
A 6. feladat – az $x \to x,\ y \to \cos y,\ y \to y^3,\ x \to \sin x$ $(x,y \in \mathbb{R})$ függvények differenciálhatósága miatt – adja, hogy a

$$g_3(x,y) = x\cos y \quad \text{és} \quad g_4(x,y) = y^3 \sin x \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvények differenciálhatók és $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re:

$$g_3'(x,y) = (1 \cdot \cos y \cdot x(-\sin y))\ , \qquad g_4'(x,y) = (y^3 \cos x \cdot 3y^2 \sin x).$$

A Kalkulus II. jegyzet – Differenciálási szabályok 1. tétele – szerint ekkor a négy függvény összege is differenciálható és

$$f'(x,y) = (2x + \cos y + y^3 \cos x \cdot 2y - x\sin y + 3y^2 \sin x).$$

**6.8. feladat.** Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$:
a) létezik-e $f'$, ha igen $f' =?$, $\det f' =?$
b) határozza meg az $S = [1,2] \times [0,\pi]$ képét $f$-re.

*Megoldás.*
a) $f = (f_1, f_2) \iff$ differenciálható, ha $f_1$ és $f_2$ is az és

$$f' = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \end{pmatrix}$$

(lásd Kalkulus II. jegyzet).
Most $f_1(r,\varphi) = r\cos\varphi$, $f_2(r,\varphi) = r\sin\varphi$, így $f_1$ és $f_2$ is két egyváltozós (differenciálható) függvény szorzata, ezért differenciálhatók. Továbbá

$$f'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \forall\ (r,\varphi)\text{-re.}$$

Ebből $\det f'(r,\varphi) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$ következik.

b) $[1,2]\times[0,\pi]$ az $(r,\varphi)$-sík egy téglalapja. $f$ ennek egy $(r,\varphi)$ pontjához az $(x,y)$-sík $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ pontját rendeli. Az $r = 1$ egyenes képe az $f(1,\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ egységkör, illetve ha $\varphi \in [0,\pi]$, úgy ennek felső félköre.
Az $r = 2$ egyenes képe hasonlóan a 2 sugarú origó középpontú kör, illetve annak felső félköre.
Ha $1 < r < 2$, úgy az $r$ sugarú (0-középpontú) felső félkört kapjuk.
E gondolatok adják, hogy $S$ képe az $\{(x,y)|\ 1 \le x^2+y^2 \le 2,\ y \ge 0\}$ fél körgyűrű.

**6.9. feladat.** Legyen $D = \{(x_1,x_2,x_3)|\ 1+x_1+x_2+x_3 \neq 0\}$,

$$f\colon D \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = \frac{x}{1+x_1+x_2+x_3}\ , \quad f' =?$$

*Megoldás.*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x_1,x_2,x_3)}{1+x_1+x_2+x_3} = \\ &= \left(\frac{x_1}{1+x_1+x_2+x_3}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2+x_3}, \frac{x_3}{1+x_1+x_2+x_3}\right) \end{aligned}$$

miatt $f$ komponens függvényei az

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1}{1+x_1+x_2+x_3}\ ; \quad f_2(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_2}{1+x_1+x_2+x_3}\ ;$$
$$f_3(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_3}{1+x_1+x_2+x_3}$$

valós értékű függvények.
Ezek mind lineáris függvények hányadosai, melyek (ahogy ezt a Kalkulus II. jegyzetben beláttuk) differenciálhatók, így a műveleti tulajdonságok (hányados differenciálhatósága) miatt $f_1$, $f_2$ és $f_3$ is differenciálható $D$-n.

Ezért

$f'(x_1, x_2, x_3) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1 \cdot (1+x_1+x_2+x_3) - x_1}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} & \frac{-x_1}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} & \frac{-x_1}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} \\ \frac{-x_2}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} & \frac{1 \cdot (1+x_1+x_2+x_3) - x_2}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} & \frac{-x_2}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} \\ \frac{-x_3}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} & \frac{-x_3}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} & \frac{1 \cdot (1+x_1+x_2+x_3) - x_3}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} \end{pmatrix}.$$

**6.10. feladat.** Legyen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ olyan függvény, hogy $f(0,0,0) = (1,2)$ és $\exists\ f'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, továbbá legyen $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$g(x,y) = (x+2y+1,\ 3xy)$.
Létezik-e $(g \circ f)'(0,0,0)$ és ha igen, mivel egyenlő?

*Megoldás.* Az összetett függvény differenciálására vonatkozó tétel feltételeit kell vizsgálnunk.
Most $D = \mathbb{R}^3$, $n = 3$, $m = 2$, $k = 2$. $f$ differenciálható az $x_0 = (0,0,0)$ pontban. Be kell látni, hogy $g$ differenciálható az $f(0,0,0) = (1,2)$ pontban, ez igaz mert: $g \iff$ differenciálható $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-ben, ha a
$g_1(x,y) = x+2y+1$ és $g_2(x,y) = 3xy$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ komponensfüggvényei differenciálhatók, ami teljesül, mert $g_1$ lineáris függvény (így differenciálható), $g_2$ pedig két egyváltozós differenciálható függvény szorzata (ami a 8. feladat miatt differenciálható).
Ekkor

$$(g \circ f)'(0,0,0) = g'(f(0,0,0))f'(0,0,0) = g'(1,2)f'(0,0,0).$$

De

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} D_1 g_1(x,y) & D_2 g_1(x,y) \\ D_1 g_2(x,y) & D_2 g_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3y & 3x \end{pmatrix},$$

így $g'(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.
Ezért

$$(g \circ f)'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 6 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 6 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 6 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 12 & 21 \end{pmatrix}$$

(ahol használtuk a mátrixok szorzási szabályát a Kalkulus II. jegyzetből).

**6.11. feladat.** Vizsgálja meg, hogy az alábbi függvények folytonosan differenciálhatók-e $(0,0)$-ban

$$\text{a)} \qquad f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & ,\text{ ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & ,\text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases};$$

$$\text{b)} \qquad f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,\text{ ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & ,\text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases};$$

*Megoldás.* A tanultak szerint azt mondjuk, hogy az adott függvények folytonosan differenciálhatók $(0,0)$-ban, ha létezik $D_1 f$ és $D_2 f$ parciális deriváltjuk a $(0,0)$ egy környezetében és azok folytonosak $(0,0)$-ban.

a) A 2. a) és 4. a) feladatban beláttuk, hogy $\exists\ D_1 f(0,0) = 0$ és $D_2 f(0,0) = 0$ (sőt azt is, hogy $f$ differenciálható $(0,0)$-ban). Nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned} \exists\ D_1 f(x,y) &= 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} \qquad (\forall\ (x,y) \neq (0,0)), \\ \exists\ D_2 f(x,y) &= 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} \qquad (\forall\ (x,y) \neq (0,0)). \end{aligned}$$

Ha $\exists\,(x_n,y_n) \to (0,0)$ sorozat, hogy $D_1 f(x_n,y_n) \not\to D_1 f(0,0) = 0$, illetve $D_2 f(x_n,y_n) \not\to D_2 f(0,0) = 0$, akkor $D_1 f$ és $D_2 f$ nem folytonosak $(0,0)$-ban, így $f$ nem folytonosan differenciálható.
Legyen $x_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ és $(x_n,x_n) \to (0,0)$, akkor például

$$D_1 f(x_n,x_n) = 2x_n\sin\frac{1}{2x_n^2} - \frac{1}{x_n}\cos\frac{1}{2x_n^2} \not\to 0,$$

mert

$$\lim_{n\to\infty} 2x_n\sin\frac{1}{2x_n^2} = 0, \text{ de } -\frac{1}{x_n}\cos\frac{1}{2x_n^2} \not\to 0$$

(utóbbi egyszerűen belátható).
Hasonlóan belátható, hogy $D_2 f(x_n,x_n) \not\to 0$ is igaz.
$f$ tehát nem folytonosan differenciálható $(0,0)$-ban.
Megmutatható, hogy $\forall\ (x_0,y_0) \neq (0,0)$ pontban folytonosan differenciálható $f$.

b) A Kalkulus I. jegyzetben már vizsgáltuk a függvényt és megmutattuk, hogy

$$D_1 f(x,y) = \begin{cases} y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\dfrac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} & \text{, ha } (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0-0}{x-0} = 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0) \end{cases};$$

$$D_2 f(x,y) = \begin{cases} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\dfrac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} & \text{, ha } (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0-0}{y-0} = 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Egyszerű számolás adja, hogy $\forall\ (x,y) \neq (0,0)$-ra

$$D_1 f(x,y) = y\left(1 + \frac{2y^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right), \quad D_2 f(x,y) = x\left(1 + \frac{3y^2x^2-2y^4}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Ellenőrizhető, hogy $D_1 f(x,y)$ kifejezésében az $y$, míg $D_2 f(x,y)$ kifejezésében az $x$ szorzója korlátos, ezért

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1 f(x,y) = 0 = D_1 f(0,0)$$

és

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_2 f(x,y) = 0 = D_2 f(0,0).$$

Ez pedig adja a $D_1 f$ és $D_2 f$ parciális deriváltak folytonosságát $(0,0)$-ban, ezért függvényünk folytonosan differenciálható $(0,0)$-ban.

**6.12. feladat.** Vizsgálja $D_2 D_1 f(x,y)$ és $D_1 D_2 f(x,y)$ létezését és egyenlőségét, ha

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{, ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

*Megoldás.* A Kalkulus II. jegyzetben már beláttuk, hogy

$$D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 1,$$

továbbá, hogy

$$D_1 f(x,y) = \frac{2y(x^2+y^2)-2xy2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \quad ((x,y)\neq(0,0)),$$

$$D_2 f(x,y) = \frac{2x^3-2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \quad ((x,y)\neq(0,0))$$

Ezekből: $D_2 D_1 f(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\frac{2y^3}{y^4} - 0}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2}{y^2} = +\infty,$

így $\nexists\ D_2D_1f(0,0)$.
Hasonlóan

$$D_1D_2f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^3}{x^4} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^2} = +\infty,$$

így $\nexists\ D_1D_2f(0,0)$.
Egyszerűen belátható viszont, hogy $\forall\ (x,y) \neq (0,0)$-ra

$$D_2D_1f(x,y) = \frac{12x^2y^2 - x^4 - y^4}{(x^2+y^2)^3} = D_1D_2f(x,y).$$

**6.13. feladat.** Írja fel a Taylor-formulát az

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 \qquad ((x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3)$$

függvényre az $x = (1,1,1)$ esetén, $r = 2$ mellett, a maradéktag nélkül.

*Megoldás.* Egyszerűen belátható, hogy $f$ kétszer differenciálható, ugyanis $f$ differenciálható $\forall\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$-ban és a $D_1f$, $D_2f$ és $D_3f$ parciális deriváltak is differenciálhatók (ellenőrízzük).
Ekkor

$$f(1,1,1) + \frac{df((1,1,1),(h_1,h_2,h_3))}{1!} + \frac{d^2f((1,1,1),(h_1,h_2,h_3))}{2!}$$

kiszámítása a feladat ($k = (h_1,h_2,h_3)$ jelöléssel), ahol

$$\begin{aligned}
df((1,1,1),(h_1,h_2,h_3)) &= \sum_{i=1}^{3} f_{x_i}(1,1,1)h_i = \\
&= f_{x_1}(1,1,1)h_1 + f_{x_2}(1,1,1)h_2 + f_{x_3}(1,1,1)h_3 \\
d^2f((1,1,1),(h_1,h_2,h_3)) &= \sum_{i_1,i_2=1}^{3} f_{x_{i_1i_2}}(1,1,1)h_{i_1}h_{i_2} = \\
&= f_{x_1x_2}(1,1,1)h_1^2 + f_{x_2x_2}(1,1,1)h_2^2 + \\
&\quad + f_{x_3x_3}(1,1,1)h_3^2 + 2f_{x_1x_2}(1,1,1)h_1h_2 + \\
&\quad + 2f_{x_1x_3}h_1h_3 + f_{x_2x_3}h_2h_3
\end{aligned}$$

(felhasználva a vegyes parciálisok egyenlőségét is).
Mivel $f(1,1,1)=0$ és

$$\begin{aligned}
&f_{x_1}(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-3x_2x_3 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_1}(1,1,1)=0,\\
&f_{x_2}(x_1,x_2,x_3)=3x_2^2-3x_1x_3 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_2}(1,1,1)=0,\\
&f_{x_3}(x_1,x_2,x_3)=3x_3^2-3x_1x_2 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_3}(1,1,1)=0,\\
&f_{x_1x_2}(x_1,x_2,x_3)=-3x_3 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_1x_2}(1,1,1)=-3,\\
&f_{x_1x_3}(x_1,x_2,x_3)=-3x_2 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_1x_3}(1,1,1)=-3,\\
&f_{x_2x_3}(x_1,x_2,x_3)=-3x_1 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_2x_3}(1,1,1)=-3,\\
&f_{x_1x_1}(x_1,x_2,x_3)=6x_1 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_1x_1}(1,1,1)=6,\\
&f_{x_2x_2}(x_1,x_2,x_3)=6x_2 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_2x_2}(1,1,1)=6,\\
&f_{x_3x_3}(x_1,x_2,x_3)=6x_3 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_3x_3}(1,1,1)=6.
\end{aligned}$$

Így a keresett formula:

$$\frac{1}{2}\left[6h_1^2+6h_2^2+6h_3^2-3h_1h_2-3h_1h_3-3_2h_3\right],$$

ami $f(1+h_1,1+h_2,1+h_3)$ bizonyos közelítését adja.

**6.14. feladat.** Határozza meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

a) $f_1(x,y)=2x^2+(y-1)^2 \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$,

b) $f_2(x,y)=x^2-y^2 \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$,

c) $f_3(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2 \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$,

d) $f_4(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+3x-2z \quad ((x,y,z)\in\mathbb{R}^3)$.

*Megoldás.* Ismeretes a következő tétel (lásd Kalkulus II. jegyzet):
Ha az $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $x_0\in D$ pontban, továbbá $f'(x_0)=0$ és $d^2f(x_0,h)$ pozitív (negatív) definit, akkor $x_0$-ban $f$-nek szigorú lokális minimuma (maximuma) van.
Továbbá igaz, hogy $d^2f(x_0,h)\iff$ pozitív (negatív) definit, ha a

$$\Delta_1=f_{x_1x_1}(x_0),$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0)\\ f_{x_2x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0)\end{vmatrix},\ldots$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) & \ldots & f_{x_1x_n}(x_0)\\ f_{x_2x_2}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) & \ldots & f_{x_2x_n}(x_0)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{x_nx_1}(x_0) & f_{x_nx_2}(x_0) & \ldots & f_{x_nx_n}(x_0)\end{vmatrix}$$

úgynevezett bal felső sarokdeterminánsok (az úgynevezett Hesse-mátrixból) pozitívak (illetve váltakozva negatívak és pozitívak).

a) Az $f_1$ függvény (mint egyváltozós differenciálható függvények összege) differenciálható, továbbá nyilván a $D_1f_1(x,y) = 4x$ és $D_2f(x,y) = 2(y-1)$ parciális deriváltak is differenciálhatók (lásd 5. feladat), így $f$ kétszer differenciálható.
$f'(x,y) = (4x \cdot 2(y-1)) = (0,0) \iff 4x = 0,\ 2(y-1) = 0 \iff x = 0,\ y = 1$, így a függvénynek a $(0,1)$ pontban lehet lokális szélsőértéke.

$$D_1D_1f(x,y) = 4, \qquad D_2D_1f(x,y) = 0,$$
$$D_1D_2f(x,y) = 0, \qquad D_2D_2f(x,y) = 2,$$

így a Hesse-mátrix $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, így a $(0,1)$ pontban is.

$$\Delta_1 = 4 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

így $d^2f((0,1),h)$ pozitív definit, ezért $f$-nek $(0,1)$-ben lokális minimuma van.

b) Az $f_2$ függvényről egyszerűen belátható, hogy kétszer differenciálható.

$$D_1f_2(x,y) = 2x = 0, \quad D_2f_2(x,y) = -2y = 0 \quad \iff \quad (x,y) = (0,0).$$

Itt lehet lokális szélsőértéke $f_2$-nek.

$$D_1D_1f_2(x,y) = 2,$$
$$D_2D_1f_2(x,y) = 0 = D_1D_2f_2(x,y),$$
$$D_2D_2f_2(x,y) = -2$$

$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re, így $(0,0)$-ban is.
A Hesse-mátrix: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, így $\Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = -4 < 0$, ezért $d^2f_2((0,0),h)$ nem pozitív és nem negatív definit, így más módon kell megnézni, hogy $(0,0)$-ban van-e lokális szélsőérték.
Mivel $\forall\ r > 0$-ra $\exists\ x,y \in \mathbb{R}$, hogy $(0,y),(x,0) \in K((0,0),r)$ és $f_2(0,y) = -y^2 < 0,\ f_2(x,0) = x^2 > 0$, azaz $\forall\ K((0,0),r)$-ben $f$ felvesz pozitív és negatív értéket is, így $(0,0)$-ban nincs lokális szélsőértéke $f_2$-nek.

c) Az $f_3(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ függvény kétszer differenciálható $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re (indokolja).

$$\left.\begin{aligned} D_1f_3(x,y) &= 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ D_2f_3(x,y) &= 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{aligned}\right\}$$

$\iff (x,y)=(0,0);\ (x,y)=(\sqrt{2},-\sqrt{2});\ (x,y)=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.
Így a $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ és $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ pontokban lehet lokális szélsőértéke $f_3$-nak.

$$\begin{aligned}D_1D_1f_3(x,y)&=12x^2-4,\\ D_2D_1f_3(x,y)&=D_1D_2f_3(x,y)=4,\\ D_2D_2f_3(x,y)&=12y^2-4.\end{aligned}$$

A $(0,0)$ pontban a Hesse-mátrix: $\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 4 & -4\end{pmatrix}$, így $\Delta_1=-4$, $\Delta_2=0$ miatt nem alkalmazható tételünk.
Bizonyítsa be, hogy $(0,0)$-ban nincs lokális szélsőérték.
A $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ és a $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ pontban is kapjuk egyszerű számolással, hogy $\Delta_1=20>0$, $\Delta_2=384>0$, így e két pontban szigorú lokális minimuma van $f_3$-nak, ennek értéke: $-8$.

d) Az

$$f_4(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+3x-2z \qquad ((x,y,z)\in\mathbb{R}^3)$$

kétszer differenciálható $\forall\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ esetén (indokolja).

$$\left.\begin{aligned}D_1f_4(x,y,z)&=2x-y+3=0\\ D_2f_4(x,y,z)&=2y-x=0\\ D_3f_4(x,y,z)&=2z-2=0\end{aligned}\right\}\iff (x,y,z)=(-2,-1,1),$$

ezért itt lehet $f_4$-nek lokális szélsőértéke.

$$\begin{aligned}&D_1D_1f_4(x,y,z)=2,\ D_2D_1f_4(x,y,z)=D_1D_2f_4(x,y,z)=-1,\\ &D_3D_1f_4(x,y,z)=D_1D_3f_4(x,y,z)=0,\ D_2D_3f_4(x,y,z)=D_3D_2f_4(x,y,z)=0,\\ &D_2D_2f_4(x,y,z)=2,\ D_3D_3f_4(x,y,z)=2,\end{aligned}$$

így a Hesse-mátrix mindenütt, így $(-2,-1,1)$-ben is

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\implies \Delta_1=2>0,\ \Delta_2=3>0,\ \Delta_3=6>0,$$

ami adja, hogy $f_4$-nek szigorú lokális minimuma van a $(-2,-1,1)$-ben, értéke $f(-2,-1,1)=-4$.

**6.15. feladat.** Bizonyítsa be, hogy az

$$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$$

függvény (leképezés) reguláris $\mathbb{R}^2$-n, kölcsönösen egyértelmű a $D = \{(x,y)|\ 0 < y < 2\pi\}$ halmazon, de nem kölcsönösen egyértelmű $\mathbb{R}^2$-n. Határozza meg $f(D)$-t és $(f^{-1})'(0,1)$-et.

*Megoldás.* Az $f_1(x,y) = e^x \cos y$, $f_2(x,y) = e^x \sin y$ függvények (mint egyváltozós folytonosan differenciálható függvények szorzatai) folytonosan differenciálhatók és

$$\det f'(x) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0 \quad (\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}),$$

így $f$ reguláris leképezés $\mathbb{R}^2$-n.
A korábban tanultak szerint $f \iff$ kölcsönösen egyértelmű $D$-n, ha $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \implies x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$ .
Ha $(e^{x_1} \cos y_1, e^{x_1} \sin y_1) = (e^{x_2} \cos y_2, e^{x_2} \sin y_2)$, akkor

$$e^{x_1} \cos y_1 = e^{x_2} \cos y_2,\ e^{x_1} \sin y_1 = e^{x_2} \sin y_2 \ .$$

A két egyenlet négyzetre emelése és összeadása adja, hogy

$$e^{2x_1}(\cos^2 y_1 + \sin^2 y_1) = e^{2x_2}(\cos^2 y_2 + \sin^2 y_2),$$

azaz $e^{2x_1} = e^{2x_2}$ teljesül, ami (az exp függvény szigorú monotonitása miatt) $\iff$ teljesül, ha $x_1 = x_2$.
Ekkor viszont $\cos y_1 = \cos y_2$ és $\sin y_1 = \sin y_2$ kell, hogy teljesüljön, ami csak akkor igaz $0 < y_1, y_2 < 2\pi$-re, ha $y_1 = y_2$ .
Ezzel bizonyítottuk, hogy $f$ kölcsönösen egyértelmű $D$-n.
Mivel $f(0,0) = f(0,2\pi)$ és $0 \neq 2\pi$, így $f$ $\mathbb{R}^2$-n nem kölcsönösen egyértelmű.
Rögzített $x \in \mathbb{R}$-re az $\{(x,y)|\ 0 < y < 2\pi\}$ halmaz képe az $(u,v)$ síkban az $(u,v) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ pontok összessége, melyekre $u^2 + v^2 = (e^x)^2$ teljesül, azaz egy $(0,0)$-középpontú, $e^x$ sugarú kör, megfosztva az $(e^x, 0)$ ponttól.
$x \in \mathbb{R}$ tetszőleges lehet, így $f(D) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0)|\ u \geq 0\}$.
$D$-n $f$ reguláris és kölcsönösen egyértelmű, így $f^{-1}$ is reguláris.
A $(0,1)$ pont a $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ képe $f$-re, azaz $f\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) = (0,1)$.
Ezért felhasználva a Kalkulus II. jegyzet VI. fejezet tételét:

$$(f^{-1})'(0,1) = \left(f'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**6.16. feladat.** Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^3$, akkor $f(0,0) = 0$. Létezik-e a 0-nak olyan környezete, melyen $f(x,y) = 0$ megoldható $y$-ra $x$ függvényében? Differenciálható-e a kapott $g$ függvény $x = 0$-ban?

*Megoldás.* A Kalkulus II. jegyzetben szereplő implicitfüggvény-tétel $k = 1$, $n = 1$ speciális esetének feltételei most nem teljesülnek maradéktalanul, ha $(a, b) = (0, 0)$. $f$ folytonosan differenciálható (ez ellenőrizhető), de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3y^2$ miatt $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.
Ugyanakkor az $x^2 - y^3 = 0$ egyenlet megoldható $y$-ra $x$ függvényében. A megoldás a $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ folytonos függvény, hiszen $x^2 - (\sqrt[3]{x^2})^3 = 0$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Ugyanakkor $g$ nem differenciálható $x = 0$-ban, mert

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

határérték nem létezik (hiszen $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$).

**6.17. feladat.** Megoldható-e az

$$\begin{aligned} x_1^2 - y_1 y_2 &= 0 \\ 3x_1^3 - y_1 - 2y_2 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer $y_1$-re és $y_2$-re $x_1$ függvényében az $x_1 = 1$ pont egy környezetében?

*Megoldás.* Az

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1, y_2) &= x_1^2 - y_1 y_2 \\ f_2(x_1, y_1, y_2) &= 3x_1^3 - y_1 - 2y_2\ , \end{aligned}$$

$f = (f_1, f_2) \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ jelöléssel egyenletrendszerünk

$$f(x_1, y_1, y_2) = (f_1(x_1, y_1, y_2), f_2(x_1, y_1, y_2))$$

alakú. A kérdés tehát az, hogy $\exists$-e $g = (g_1, g_2)$ valamilyen $K(1, r)$-en értelmezett függvény (függvényrendszer), hogy $f(x_1, g_1(x_1), g_2(x_1)) = 0$ $K(1, r)$-en.
Egyik út a válaszhoz, ha megoldjuk a kétismeretlenes egyenletrendszert $y_1$-re és $y_2$-re, ebből a megoldásrendszerből kiválasztjuk azokat, melyek $K(1, r)$-en értelmezettek.
A választ e nélkül is megadhatjuk, ha teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei $a = 1$, $k = 1$, $n = 2$ mellett.
Nyilván $f = (f_1, f_2)$ folytonosan differenciálható.
Kérdés, milyen $y_1$ és $y_2$-re teljesülnek egyenleteink, ha $x_1 = 1$, azaz, hogy $1 - y_1 y_2 = 0$, $3 - y_1 - 2y_2 = 0$. Ez teljesül például, ha $y_1 = y_2 = 1$, tehát

$b = (1, 1)$.
Ekkor

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1, y_2) = \begin{vmatrix} -y_2 & -y_1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2y_2 - y_1$$

miatt $\det \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) = 1 \neq 0$.
Tehát $\exists\ (a, b_1, b_2) = (1, 1, 1)$, hogy $\det \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) = 1 \neq 0$.
Ezért az implicitfüggvény-tétel miatt $\exists\ K(1, r) \in \mathbb{R}$ és egy egyértelműen meghatározott $g\colon K(1, r) \to \mathbb{R}^2$ $(g = (g_1, g_2))$, hogy $g(1) = (g_1(1), g_2(1)) = (1, 1)$ és $f(x, g(x)) = 0$ $(x \in K(1, r))$.
Továbbá $g$ folytonosan differenciálható.

**6.18. feladat.** Határozza meg az alábbi feltételes lokális szélsőérték feladatok megoldását:

a) Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ függvénynek a
$h(x) = (x - 2)^2 + y^2 - 1 = 0$ feltételre vonatkozó szélsőértékeit;

b) Az $f(x, y) = x + y$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ függvénynek a
$h(x) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 1 = 0$ feltételre vonatkozó szélsőértékeit.

*Megoldás.* A feltételes lokális szélsőérték szükséges feltételére vonatkozó tétel szerint (a kétváltozós esetre korlátozódva) úgy járunk el, hogy definiáljuk az

$$F\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda h(x, y)$$

függvényt.
Ott lehet feltételes lokális szélsőérték, ahol

$$D_1F(x, y, \lambda) = 0,\ D_2F(x, y, \lambda) = 0,\ h(x, y) = 0.$$

a) Most is teljesül, hogy $f$ és $h$ folytonosan differenciálhatók.

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda[(x - 2)^2 + y^2 - 1],$$

így a

$$\begin{aligned} D_1F(x, y, \lambda) &= 2x + 2\lambda(x - 2) = 0 \\ D_2F(x, y, \lambda) &= 2y + 2\lambda y = 0 \\ h(x, y) &= (x - 2)^2 + y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani.
A megoldások $\lambda = 1,\ x = 1,\ y = 0$ és $\lambda = -3,\ x = 3,\ y = 0$, így az $(1, 0)$ és $(3, 0)$ pontokban lehet feltételes lokális szélsőérték.
$f(1, 0) = 1,\ f(3, 0) = 9$.

Az $(x-2)^2+y^2=1$ egy kör egyenlete, mely kompakt halmaz, így azon $f$ felveszi a maximumát és minimumát, s ezek csak 9 illetve 1 lehetnek.

b) $f$ és $h$ folytonosan differenciálhatók. Legyen

$$F(x,y,\lambda)=x+y++\lambda\left[(x-2)^2+(y+1)^2-1\right],$$

ekkor a

$$\begin{aligned}D_1F(x,y,\lambda)&=1+2\lambda(x-2)=0\\ D_2F(x,y,\lambda)&=1+2\lambda(y+1)=0\\ h(x,y)&=(x-2)^2+(y+1)^2-1=0\end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani, s erre

$$\begin{aligned}\lambda&=\frac{\sqrt{2}}{2},\ x=2-\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \lambda&=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ x=2+\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

adódik. Az $(x-2)^2+(y+1)^2=1$ is egy kör egyenlete, ami kompakt halmaz, melyen $f$ felveszi maximumát és minimumát, ezek pedig

$$f\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2},-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+\sqrt{2},\ f\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2},-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-\sqrt{2}\,.$$

**6.19. feladat.** Határozza meg az $xy$ minimális és maximális értékét az $x^2+y^2=1$ kör pontjaiban.

*Megoldás.* Az $f(x,y)=xy$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ függvény folytonosan differenciálható, a $h(x,y)=x^2+y^2-1$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ függvény is.
A feladat úgy fogalmazható, hogy határozzuk meg az $f(x,y)=xy$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ függvény lokális szélsőértékeit a $h(x,y)=x^2+y^2-1=0$ feltételre.
A probléma megoldására vonatkozó tétel feltételei teljesülnek, így az alkalmazható.
Tekintsük az

$$F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^2+y-1)\quad((x,y,\lambda)\in\mathbb{R}^3)$$

függvényt. A problémának a

$$\begin{aligned}D_1F(x,y,\lambda)&=y+2\lambda x=0\\ D_2F(x,y,\lambda)&=x+2\lambda y=0\\ h(x,y)&=x^2+y^2-1=0\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásaként kapott $(x, y)$ pontokban lehet megoldása.
Az első két egyenletből kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 = 4\lambda^2(x^2 + y^2) \iff \lambda = \pm\frac{1}{2} .$$

$\lambda = \frac{1}{2}$-re $y = -x$, így $x^2 + x^2 = 1 \implies x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \implies y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;
$\lambda = -\frac{1}{2}$-re $y = x$, így $x^2 + x^2 = 1 \implies x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \implies y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
Ezért az $f$ függvénynek a $h = 0$ feltételre a

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

pontokban lehet lokális szélsőértéke.
Az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel egy kört határoz meg az $(x, y)$ síkban, mely kompakt halmaz, így ezen $f(x, y) = xy$ felveszi az abszolút minimumát és maximumát, melyek

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

és

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

miatt $-\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{2}$ lehetnek.

**Megjegyzés.** Az alábbi gondolatmenet mutatja, hogy egyes esetekben elemi módszerek egyszerűbben vezetnek eredményre.
$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ miatt

$$xy = \frac{1}{2}\left[(x + y)^2 - (x^2 + y^2)\right] = \frac{1}{2}\left[(x + y)^2 - 1\right] ,$$

ami mutatja, hogy $xy$ akkor minimális, ha $(x + y)^2$ az, vagyis ha
$x + y = 0 \iff y = -x$, de akkor a feltételből

$$x^2 + x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \implies y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

ezért $xy$ a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ és $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pontokban veszi fel minimumát, a $-\frac{1}{2}$ értéket.

Másrészt $0 \leq (x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$ miatt $xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2} = \dfrac{1}{2}$ és egyenlőség csak $y = x$ esetén lehetséges, ami hasonlóan mint előbb adja, hogy az $\dfrac{1}{2}$ maximumot $xy$ a $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$-ben veszi fel.

**6.20. feladat.** Határozza meg az $f(x,y) = x^2+y^2-xy+3x-3y$ függvény szélsőértékeit a $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ x,y \geq 0, \ x+y \leq 2\}$ halmazon.

*Megoldás.* $D$ egy zárt háromszöglap, melyet az $x = 0$, $y = 0$ és $x+y = 2$ egyenesek határolnak. Ez kompakt halmaz, így azon $f$-nek van maximuma és minimuma.
Először nézzük, hogy $D$ belsejében, a $D^\circ$ nyílt halmazon van-e lokális szélsőértéke $f$-nek.
Ott lehet, ahol

$$D_1 f(x,y) = 2x-y+3 = 0, \quad D_2 f(x,y) = 2y-x-3 = 0,$$

melynek megoldása az $(x,y) = (-1,1) \notin D^\circ$ pont, így $f$-nek $D^\circ$-on nincs lokális (és így globális) szélsőértéke.
Így a maximum és minimum hely a háromszög kerületén van.

a) Ha az $x = 0$, $y \in [0,2]$ által meghatározott határszakaszt tekintjük, úgy az $f(0,y) = g(y) = y^2-3y$ $(y \in [0,2])$ egyváltozós függvény szélsőértékeit keressük. Ekkor $\exists\ g'(y) = 2y-3 = 0$ és $g''(y) = 2$ miatt kapjuk, hogy $g$-nek $y = \dfrac{3}{2} \in ]0,2[$-ben lokális minimuma van, melynek értéke: $-\dfrac{9}{4}$ . $g(0) = 0$, $g(2) = -2$.
Így
$$f\left(0, \frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}, \ f(0,0) = 0, \ f(0,2) = -2.$$

b) Ha $y = 0$, akkor az $f(x,0) = h(x) = x^2+3x$ $(x \in [0,2])$ egyváltozós függvény szélsőértékeit kell meghatározni.
$$\exists\ h'(x) = 2x+3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{3}{2} \notin [0,2],$$
így $h$-nak $]0,2[$-ben nincs lokális szélsőértéke. A végpontokban $h(0) = 0$, $h(2) = 10$, így $f(0,0) = 0$, $f(2,0) = 10$.

c) Ha $x+y = 2$, akkor $y = 2-x$, így az $f(x,2-x) = l(x) = 3x^2-2$ $(x \in [0,2])$ egyváltozós függvény szélsőértékeit keressük.
Ekkor $l'(x) = 6x = 0 \iff x = 0 \notin ]0,2[$, így csak $[0,2]$ végpontjaiban kell meghatározni $l$ értékeit: $l(0) = -2$, $l(2) = 10$, így

$f(0,2) = -2,\ f(2,0) = 10.$

A minimum így az $f\left(0, \dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{9}{4}$, a maximum az $f(2,0) = 10$ érték.

## Gyakorló feladatok

1) Számítsa ki az alábbi függvények parciális deriváltjait:

$$\begin{aligned}
&f_1(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y)|\ y \in \mathbb{R}\}\big)\,;\\
&f_2(x,y) = x\sin(x+y) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2);\\
&f_3(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}} \quad (x,y,z > 0);\\
&f_4(x,y,z) = x^{y^z} \quad (x,y,z > 0).
\end{aligned}$$

2) Létezik-e $D_1 f(0,0)$, $D_2 f(0,0)$? Milyen $e$-re létezik $D_e f(0,0)$? Differenciálható-e $f$ $(0,0)$-ban? Folytonos-e $f$ $(0,0)$-ban? Ha

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2+(y-x)^2} & \text{, ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

3) Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (e^{2x}\cos y, e^{2x}\sin y)$.
Létezik-e $f'$? Ha igen, határozza meg.
Határozza meg az $S = [0,1] \times [0,\pi]$ halmaz képét $f$-re.

4) Legyen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ rögzített, $f\colon K(x_0,1) \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = \dfrac{2x}{1-\|x\|^2}$.
Számítsa ki $f'(x)$-et (ha létezik).

5) Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, hogy

$$\begin{aligned}
&f(x_1,x_2) = (e^{2x_1+x_2}, 3x_2 - \cos x_1, x_1^2 + x_2 + 2),\\
&g(y_1,y_2,y_3) = (3y_1 + 2y_2 + y_3^2, y_1^2 - y_3 + 1).
\end{aligned}$$

Ha $F(x) = g(f(x))$ $(x \in \mathbb{R}^2)$, úgy $F'(0,0) =?$
Ha $G(y) = f(g(y))$ $(y \in \mathbb{R}^3)$, úgy $G'(0,0,0) =?$

6) Bizonyítsa be, hogy $D_1D_2f = D_2D_1f$, ha

$$f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2 \ ((x,y) \in \mathbb{R}^2), \text{ vagy } f(x,y) = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}\ .$$

7) Írja fel a Taylor-formulát az $a = (1, 1, 1)$ pontban $r = 3$ mellett a maradéktag nélkül, ha
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 \quad ((x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3).$$

8) Írja fel $x - 1$ és $y - 2$ polinomjaként az
$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + 2xy^2 + y^3 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$
függvényt.

9) Határozza meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:
   a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$;
   b) $f(x, y) = (x - y)(1 - xy) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$;
   c) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$;
   d) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y) \quad ((x, y) \in ]-\pi, \pi[ \times ]-\pi, \pi[)$.

10) Bizonyítsa be, hogy az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ függvény kölcsönösen egyértelmű a $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \; x > 0\}$ halmazon. Reguláris-e $f$ $D$-n?

11) Megoldható-e a
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4^2 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$
egyenletrendszer az $x_1, x_2, x_4$ ismeretlenekre $x_3$ függvényében, illetve az $x_1, x_2, x_3$ ismeretlenekre $x_4$ függvényében?

12) Határozza meg az alábbi feltételes lokális szélsőérték feladatok megoldását:
   a) Az $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ függvényét az $x^2 + y^2 = 1$ feltételre;
   b) Az $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + 2x_3$ függvényét az $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2 = 0$ feltételre.

13) Határozza meg az
$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y) \quad \left((x, y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$
függvény szélsőértékeit.

14) Határozza meg az $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ ellipszisen azokat a pontokat, melyek maximális illetve minimális távolságra vannak a $(0, 0)$ ponttól.