Logika feladatok

2000

1. Előzetes tudnivalók a különböző matematikai logikai nyelvekről

1.1. Az alábbi mondatok közül melyek fejeznek ki állítást?

(a) Budapesten, 1986. május elsején sütött a nap.
(b) Egynél több páros törzsszámnak kell lennie.
(c) „Hol voltál, Ádám?"
(d) „Én kérem, a világháborúban."
(e) Ami nem azonos önmagával, az különbözik minden mástól is.
(f) Van-e ennek valami értelme?
(g) Minden szám osztható vagy kettővel, vagy hárommal.
(h) „Semmi nem ugyanaz többé."
(i) A Vénusz azonos az Esthajnalcsillaggal.
(j) Vedd tudomásul, hogy ami elromolhat, az el is romlik!

Amelyik mondat nem fejez ki állítást, annál indokoljuk meg, hogy miért nem. Ha valamelyik önmagában nem fejez ki állítást, de alkalmas kontextusban igen, akkor adjunk meg hozzá ilyen kontextust.

1.2. Vannak-e az alábbi mondatok között olyanok, amelyek ugyanazt az állítást fejezik ki?

(a) Senki nem ment el, aki Alinak hiányzott volna.
(b) Aki Alinak hiányzott, nem ment el.
(c) Aki elment, Alinak nem hiányzott.
(d) Ha soha nem indulsz el, nem juthatsz el sehová.
(e) Ha eljutsz valahová, akkor valamikor elindulsz.
(f) Ha nem jutsz el sehová, akkor el sem indulsz.
(g) Itt van a kutya elásva.
(h) Ezen a helyen hantolták el az ebet.

(Azt kell megfontolni, hogy egy mondatpár egyik tagja lehet-e igaz, a másik pedig hamis.)

1.3. Írjuk át a természetes nyelven megfogalmazott negációkat a '$\neg$' jel használatával a következő mondatokban! A negációjel argumentumát határoljuk zárójelekkel.

(a) Péter nem ment haza.
(b) Éva nem szőke.
(c) Nem igaz, hogy Péter nem ment haza.

(d) Nem áll, hogy nem igaz, hogy Éva nem szőke.

(e) Péter vagy nem ment haza, vagy nem maradt otthon, de nem áll, hogy otthon van.

(f) Nem igaz, hogy ha Éva nem szőke, akkor nem Juli volt az, akit nem értem utol.

1.4. Írjuk ki a konjunkciókat és a negációkat logikai jelükkel a következő mondatokban!

(a) Éva szőke, mindazonáltal nekem nem tetszik, annak ellenére, hogy a szőkéket kedvelem.

(b) Tivadar hazament, de nem maradt otthon, bár mindenki ezt várta tőle.

(c) Esik az eső, de nincs hideg, és a szél sem fúj.

(d) Ha hazajössz, és be is vásárolsz, nekem nem kell lemennem, és megfőzhetem az ebédet.

1.5. Fejezzük ki a Geom nyelvben a következőket:

(a) $(p = q)$: A p és a q egyenesek egybeesnek.

(b) $(p \neq q)$: A p és a q egyenesek különböznek.

(c) $(a = b)$: Az a és a b síkok egybeesnek.

(d) $(a \neq b)$: Az a és a b síkok különböznek.

(e) $(p \in a)$: A p egyenes az a síkban fekszik.

(f) $(p \parallel q)$: A p és a q egyenesek párhuzamosak.

(g) $(a \parallel b)$: Az a és a b síkok párhuzamosak.

(h) Párhuzamos síkok esetén az egyiket metsző tetszőleges egyenes metszi a másikat is.

1.6. Vezessünk be egy új jelölést a "pontosan egy olyan x van, hogy teljesül az A állítás" kifejezésére:

$$\exists! xA \rightleftharpoons \exists xA \wedge \forall x \forall y((A \wedge A^x_y) \supset x = y),$$

ahol A^x_y az A formulából úgy keletkezett, hogy A-ban az x változó szabad előfordulásait egy, az A-ban nem szereplő, új y változóra cseréltük.

Fejezzük ki a Geom nyelvben az alábbi állításokat a $\exists!$ jelölés használatával és anélkül:

(a) Bármely két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszthető.

(b) Bármely nem egy egyenesen fekvő három pontra pontosan egy sík illeszthető.

(c) Bármely egyenes és rá nem illeszkedő pont esetén a ponton át húzható pontosan egy párhuzamos egyenes.

1.7. Fejezzük ki a Geom nyelvben a párhuzamos egyenesekről szóló

(a) euklideszi axiómát: A síkban egy ponton át legfeljebb egy olyan egyenes húzható, mely a ponton át nem haladó egyenessel párhuzamos.

(b) Bolyai-Lobacsevszkij-féle axiómát: A síkban egy ponton át húzható két olyan egymástól különböző egyenes, melyek a ponton át nem haladó egyenessel párhuzamosak.

1.8. Fejezzük ki a Subset nyelvben a következőket:

(a) $(x = U)$: Az x részhalmaz maga az alaphalmaz.

(b) $(x = \emptyset)$: Az x részhalmaz üres halmaz.

(c) $(x = y)$: Az x és az y részhalmazok egyenlőek.

(d) $(x \subset y)$: Az x részhalmaz valódi része az y részhalmaznak.

(e) Az x részhalmaz egyelemű.

(f) $(x = y \cap z)$: Az x részhalmaz az y és a z részhalmazok metszete.

(g) $(x = y \cup z)$: Az x részhalmaz az y és a z részhalmazok uniója.

(h) $(x = \bar{\mathrm{y}})$: Az x részhalmaz az y komplementere.

(i) $(x = y \setminus z)$: Az x részhalmaz a z részhalmaz y-ra vonatkozó komplementere.

1.9. Fejezzük ki a Subset nyelvben az alábbi mondatokat:

(a) Létezik az alaphalmaznak a tartalmazásra nézve szigorúan növekvő háromtagú részhalmazlánca, melynek tagjai az alaphalmaz részhalmazai.

(b) Létezik az alaphalmaznak három, páronként különböző részhalmaza.

1.10. Milyen interpretációkban igazak az előző feladat mondatai?

1.11. Adjunk általános módszert a Subset nyelv bonyolult kifejezései közötti egyenlőségek leírására. Fejezzük ki ennek segítségével az

(a) $(x \setminus ((y \cap z) \cup y) = x \cup (y \setminus z))$

(b) $((y \setminus z) \cup (x \setminus z) = x \setminus (y \setminus z))$

egyenlőségeket.

1.12. Fejezzük ki a Set nyelvben a következőket:

(a) $(x \subseteq y)$: Az x halmaz az y-nak részhalmaza.

(b) $(x \neq y)$: Az x és az y halmazok különbözőek.

(c) $(x \subset y)$: Az x halmaz része az y-nak, de x és y különböznek.

(d) $(x = \emptyset)$: x az üres halmaz.

(e) $(x = \{y, z\})$: x kételemű halmaz, melynek elemei y és z.

(f) $(x = y \cup z)$: x az y és z halmazok uniója.

(g) $(x = y \cap z)$: x az y és z halmazok metszete.

(h) $(x = y \setminus z)$: x a z-nek y-ra vonatkozó komplementere.

(i) $(x = Py)$: x az y részhalmazainak a halmaza.

(j) $((\{x\} \cup Py) \in y \cap P\{x, y\})$

1.13. Fejezzük ki az Ar nyelvben N interpretáció mellett a következőket:

(a) $(x \neq y)$: x és y különböző számok.

(b) $(x \leq y)$: x kisebb vagy egyenlő, mint y.

(c) $(x < y)$: x kisebb, mint y.

(d) $(x \mid y)$: x osztója y-nak.

(e) x prímszám.

(f) $(z = (x, y))$: z az x és az y legnagyobb közös osztója.

(g) $(z = [x, y])$: z az x és az y legkisebb közös többszöröse.

1.14. Fejezzük ki az Ar nyelvben N interpretációban a következő mondatokat:

(a) A prímszámok száma végtelen.

(b) A prímszámok száma véges.

(c) Az ikerprímek száma végtelen.

(d) Minden természetes szám előállítható négy négyzetszám összegeként.

(e) Van legnagyobb a természetes számok között.

(f) A $3x^2 + 2x + 1 = 0$ egyenletnek pontosan két különböző gyöke van.

1.15. Az előző feladat mely mondatai igazak, melyek hamisak ebben az interpretációban?

1.16. Fejezzük ki az Ar nyelvben R interpretációban a következőket:

(a) $(x \leq y)$: x kisebb vagy egyenlő, mint y.

(b) $(x < y)$: x kisebb, mint y.

(c) Ha x kisebb, mint y, akkor van olyan szám is, amelyik x-nél nagyobb, de y-nál kisebb.

(d) Van olyan szám, hogy $\sqrt{3}$.

(e) Van olyan szám, hogy $(-\sqrt[3]{5})$.

1.17. Fejezzük ki az Ar nyelvben Z interpretációban a következőket:

(a) $(x > 0)$: x pozitív.

(b) $(x \leq y)$: x kisebb vagy egyenlő, mint y.

(c) $(x < (y - z))$: x kisebb, mint y és z különbsége.

1.18. Fejezzük ki az Ar* nyelvben N interpretációban a következőket:

(a) $(x = 0)$: x egyenlő 0-val.

(b) $(x \neq 0)$: x nem egyenlő 0-val.

(c) $(x = 1)$: x egyenlő 1-gyel.

(d) $(x = y)$: x egyenlő y-nal.

(e) $(x = Sy)$: x egyenlő Sy-nal.

(f) $(x = 2)$: x egyenlő 2-vel.

(g) $(x = (y + z) \cdot Sy)$: x egyenlő az $(y + z) \cdot Sy$ kifejezéssel.

(h) $(x \mid y)$: x osztója y-nak.

(i) x prímszám.

1.19. Fejezzük ki az Ar* nyelvben N interpretációban, hogy bármely két nullától különböző számnak van legkisebb közös többszöröse.

1.20. Adjunk általános módszert, hogy lehet leírni az Ar* nyelv bonyolult kifejezéseinek egyenlőségét az N interpretációban. Fejezze ki ennek segítségével az

$$((x^2 + x \cdot y)^2 = (z + x) \cdot z)$$

egyenlőséget.

1.21. Fejezzük ki az Ar* nyelvben az R interpretációban az

$$((x + y) \leq x^2)$$

egyenlőtlenséget.

1.22. Szerkesszünk olyan mondatot a Vect nyelvben, mely az E_3 interpretációban igaz, de bármely $E_n, n \neq 3$ interpretációban hamis.

2. Elsőrendű nyelvek; formulák és termek

2.1. Hány különböző típusú változó van

(a) a Geom **(b)** az Ar **(c)** a Vect

nyelvben?

2.2. Mutassuk meg, hogy

(a) a Geom **(b)** a Subset **(c)** az Ar
(d) az Ar* **(e)** a Set **(f)** a Vect

elsőrendű matematikai-logikai nyelvek. Mik a konstansok, a függvényszimbólumok és a predikátumszimbólumok ezekben a nyelvekben? Milyen termeket és atomi formulákat tartalmaznak?

2.3. Adjunk példákat a Geom és Ar nyelvek termjeire és atomi formuláira! Adjunk meg az Ar nyelvben legalább 3 funkcionális összetettségű termet!

2.4. Legyenek x, y, z π típusú változók és $f_{(\pi\to\pi)}$, $g_{(\pi,\pi\to\pi)}$, $h_{(\pi,\pi,\pi\to\pi)}$ pedig függvényszimbólumok egy nyelvben. Termek-e ebben a nyelvben a következő szimbólumsorozatok:

(a) $f(g(x,y))$
(b) $g(f(z), h(x,x,x))$
(c) $f(g(x), h(x,y,z))$
(d) $f(x) \wedge g(x,y)$

2.5. Legyen a nyelvünk az előző feladatbeli. Adjuk meg azoknak a termeknek a halmazát, melyek egyetlen változót, az x-et, és egyetlen függvényszimbólumot,

(a) az f-et,
(b) a g-t,

tartalmaznak.

2.6. Soroljuk fel a következő termek résztermeit, és határozzuk meg a funkcionális összetettségüket!

$$x, \quad f(x), \quad h(x, f(y)), \quad g(h(x, f(y)), y, f(z)),$$
$$h(g(x,y,z), f(x)), \quad f(g(h(x, f(y)), y, f(y)))$$

2.7. Döntsük el, hogy az alábbi jelsorozatok formulák-e:

(a) $(A \wedge B)C \neg C$

(b) $(A \wedge B) \supset D$

(c) $((C \supset A) \wedge \neg A)$

(d) $(((\neg A) \supset B) \supset \neg(A \vee C))$

2.8. Legyenek A, B, C egy nyelv formulái. Döntsük el, hogy az alábbi jelsorozatok formulák-e:

(a) $(A \wedge B)\neg C$

(b) $((A \wedge B) \supset B)$

(c) $\neg(A \vee B \supset \neg\neg C)$

(d) $\neg(A \vee B \wedge \neg C$

2.9. Legyenek A, B, C formulák. Hányféleképpen lehet zárójelekkel ellátni az alábbi jelsorozatokat úgy, hogy formulákat kapjunk:

(a) $A \supset \neg B \vee B \wedge C$

(b) $A \supset B \supset C \supset \neg A \supset \neg B$

2.10. Legyenek x, y, z π típusú változók, $f_{(\pi \to \pi)}$, $g_{(\pi,\pi \to \pi)}$, $h_{(\pi,\pi,\pi \to \pi)}$ függvényszimbólumok és $P_{(\pi)}$, $Q_{(\pi,\pi,\pi)}$ predikátumszimbólumok egy nyelvben. Formulák-e ebben a nyelvben a következő szimbólumsorozatok:

(a) $Q(x, f(y), h(y, z, z))$

(b) $(P(x) \supset \forall y(Q(x, y, z) \wedge P(g(x, y))))$

(c) $Q(P(x), f(y), f(z))$

(d) $f(h(x, y, z))$

2.11. Soroljuk fel az alábbi formulák összes részformuláit:

(a) $(((P \supset Q) \wedge (Q \supset R)) \supset (\neg P \vee R))$

(b) $((P \supset Q) \supset ((P \supset \neg Q) \supset \neg Q))$

(c) $Q(f(x), g(y, x))$

(d) $(\exists x Q(x, y) \supset \neg(P(g(x, y)) \wedge \forall z P(z)))$

(e) $(\exists x \neg(P(f(x)) \supset Q(x, y)) \supset \forall z R(z))$

2.12. Soroljuk fel a következő formulák részformuláit, és állapítsuk meg a logikai összetettségüket!

$$A(x), \quad A(x) \wedge B(y), \quad Q(f(x), g(y, z)),$$
$$((P \supset Q) \supset ((P \supset \neg Q) \supset \neg Q)),$$
$$(((P \supset Q) \wedge (Q \supset R)) \supset (\neg P \vee R))$$

2.13. Melyek részformulái az alábbiak közül a

$$\exists z(\forall x P(x,z) \supset .\exists z \forall x P(x,z) \supset \exists z P(x,z))$$

formulának?

(a) $\forall x P(x,z)$
(b) $\forall x P(x,z) \supset \exists z \forall x P(x,z)$
(c) $\exists z \forall x P(x,z) \supset \exists z P(x,z)$
(d) $\exists z P(x,z)$
(e) $\forall x P(x,z) \supset \exists z P(x,z)$

2.14. Legyen az A formulában n helyen logikai összekötőjel. Hány részformulája lehet maximum A-nak?

2.15. Bizonyítsuk be, hogy minden formula, amely nem propozícionális betű, előáll $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, vagy $(A \supset B)$ alakban, ahol A, B formulák!

2.16. Igazoljuk, hogy egy formula valamelyik részformuláját másik formulával helyettesítve ismét formulát kapunk!

2.17. Adjuk meg az alábbi formulák teljes (rövidítés mentes) alakját:

(a) $\neg(P \supset Q \supset .R \supset S) \wedge Q \vee .\neg R \vee S$
(b) $\exists z(\forall x P(x,z) \supset .\exists z \forall x P(x,z) \supset \exists z P(x,z))$
(c) $\forall x Q(x,y) \supset \forall x(Q(x,y) \supset R \supset .Q(x,y))$
(d) $\exists z.\forall x P(x) \supset Q(x) \equiv R$
(e) $\exists z \forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv R \supset P(x)$

2.18. A következő formulákban állapítsuk meg a kvantorok hatáskörét, és döntsük el változóiról, hogy melyik előfordulásuk szabad, melyik kötött.

(a) $\forall x(\forall y P(x,y,z) \supset Q(x,y))$
(b) $\forall y \exists z(P(x,y,z) \supset \exists z Q(z,x))$
(c) $\exists x \forall y(P(x) \vee Q(x,f(y))) \supset \forall y Q(x,y)$

2.19. Mely változó-előfordulások szabadok és melyek kötöttek a következő formulákban:

(a) $\forall x(P(x,y) \supset \forall y Q(y))$
(b) $(\forall x P(x,y) \supset \forall y R(x,y))$
(c) $(\neg \exists z Q(z,z) \wedge R(f(y,z)))$

2.20. Határozzuk meg a következő formulákban a kötött és szabad változókat!

(a) $\forall x A(x)$

(b) $\forall x(A(x) \supset \forall x B(x))$

(c) $\forall x(\forall y P(x, y, z) \supset Q(x, y))$

(d) $\forall y \exists z(P(x, y, z) \supset \exists x Q(z, x))$

(e) $\exists x \forall y(P(x) \vee Q(x, f(y))) \supset \forall y Q(x, y)$

2.21. Az alábbi formulákban állapítsuk meg a kvantorok hatáskörét, s jelezzük a változók minden előfordulásánál, hogy kötöttek-e vagy szabadok!

(a) $\forall x(P(x, y) \supset \exists y Q(x, y))$

(b) $\exists x R(x) \wedge S(x)$

(c) $\exists x \forall y(R(x) \wedge S(x)) \supset \forall x T(x)$

(d) $\exists x \exists y(P(x, y) \wedge R(z))$

2.22. Írjuk fel formula alakjában az alábbi állításokat:

(a) Nincs jó idő.

(b) Ha jó az idő, kirándulni megyünk.

(c) Nincs jó idő, és nem megyünk kirándulni.

(d) Csak akkor megyünk kirándulni, ha jó az idő.

(e) Nem fordulhat elő, hogy kirándulni megyünk, és nincs jó idő.

(f) Ha esik az eső vagy fúj a szél, akkor nincs jó idő.

2.23. Jelentse E, hogy "Esik az eső.", S, hogy "Strandolok.", N, hogy "Napozok.", O, hogy "Otthon maradok." Mit jelentenek természetes nyelven az alábbi formulák:

(a) $E \supset \neg(S \vee N)$

(b) $O \equiv E$

(c) $S \supset \neg E$

(d) $(E \wedge O) \vee (\neg E \wedge S)$

(e) $\neg O \supset (N \wedge \neg E) \vee S$

2.24. Megfelelően megválasztott elsőrendű nyelven formalizáljuk az alábbi állításokat:

(a) Nem minden madár tud repülni.

(b) Van olyan madár, amelyik nem tud repülni.

(c) A struccok kivételével minden madár tud repülni.
(d) Van, aki senkiben sem bízik meg.
(e) Péterben mindenki megbízik.
(f) Egyes betegek nem bíznak meg az orvosokban.

2.25. Formalizáljuk nulladrendű logikai nyelven a következő mondatokat!

(a) Esik az eső, bár süt a Nap.
(b) Ha esik az eső és süt a Nap, akkor szivárvány van, kivéve ha éppen dél van.
(c) Ha várakozás nélkül kapok reggelit, akkor - föltéve hogy nem alszom el - nyolc órára megérkezem.
(d) Ha elalszom, nem kapok várakozás nélkül reggelit.
(e) Ha nem alszom el, akkor reggelit is várakozás nélkül kapok, és meg is érkezem nyolc órára.
(f) Ha ünnepély lesz, a tanítás délben véget ér.
(g) Ha osztályfőnöki óra lesz, a tornaóra elmarad.
(h) A tanítás nem ér véget délben, pedig ünnepély vagy osztályfőnöki óra lesz.
(i) Ha a szemtanú megbízható, és az írásszakértő véleménye helytálló, úgy a bűncselekményt akkor és csak akkor követték el előre megfontolt szándékkal, ha a talált ujjlenyomatok a tettestől vagy esetleges bűntársától származnak.
(j) Ha a szemtanú megbízható, az írásszakértő véleménye helytálló, és a talált ujjlenyomatok a tettestől származnak, akkor a bűncselekményt előre megfontolt szándékkal követték el.

2.26. Formalizáljuk nulladrendű logikai nyelven a következő mondatokat!

(a) Jancsi eltévedt az erdőben, és nem talált haza.
Jancsi eltévedt az erdőben, de Juliska nem.
Jancsi eltévedt az erdőben, bár jól ismerte az utat.
(b) Egészségtelenül táplálkozik, vagy keveset mozog.
Saját autójával megy, vagy hív egy taxit.
(c) Ha holnap süt a Nap, akkor 10-kor várlak az uszodában.
Csak akkor fejezzük be a gyakorlatot, ha már mindenki volt a táblánál.
Elmegyek moziba, feltéve, hogy van pénzem.
(d) Akkor és csak akkor süt a Nap, ha holnap kimegyek az uszodába.

2.27. Formalizáljuk elsőrendű logikai nyelven a következő mondatokat!

(a) Gábor pék.
Ha Gábor pék, akkor Kriszta is az.
Vannak pékek.
Minden ember pék.

(b) Minden bíró jogász.
Vannak ügyeskedő jogászok.
Nincs ügyeskedő bíró.
Bizonyos bírók idősek, de nem életerősek.
A bírók kivételével minden jogász ügyeskedő.
Néhány jogász, aki politikus, képviselő is.
Egyetlen képviselő felesége sem idős.
Minden idős képviselő jogász.

(c) Minden strucc madár.
Van olyan madár, amely nem strucc.
A struccok kivételével minden madár tud repülni.
Csak a strucc olyan madár, amely nem tud repülni.

(d) Mindenki aki átver valakit nem becsületes.
Senki sem veri át az apját, legfeljebb, ha használtautó−kereskedő.
Mindenki aki átveri Gábort, az átveri a saját apját is.
Mindenki rajtam kívül átver mindenkit.
Aki mindenkit átver, azt legalább egy becsületes is átveri.
Senki sem veri át a barátait, csak azok, akik használtautó−kereskedők apjai.

2.28. $K(x)$ jelentse azt, hogy "x - használtautó kereskedő", $T(x)$ pedig azt, hogy "x - tisztességes ember". Mit jelentenek ekkor a

(a) $\exists x K(x)$

(b) $\forall x(K(x) \supset \neg T(x))$

(c) $\exists x(K(x) \wedge T(x))$

(d) $\exists x(T(x) \supset K(x))$

formulák?

3. A kötött változók átjelölése; változók helyettesítése termekkel

3.1. Vannak-e az alábbi formulák között olyanok, amelyek egymás variánsai?

(a) $\forall x(P(x,y) \supset \exists z Q(x,z)) \wedge \forall y R(y,z)$

(b) $\forall x(P(z,y) \supset \exists z Q(x,z)) \wedge \forall y R(y,z)$

(c) $\forall u(P(z,y) \supset \exists u Q(u,u)) \wedge \forall u R(u,z)$

(d) $\forall z(P(z,y) \supset \exists x Q(z,x)) \wedge \forall v R(v,z)$

3.2. Döntsük el a következő formulákról, melyek egymás variánsai.

(a) $\forall z(\forall x Q(z,x,v) \supset \exists v(P(v,u) \supset \exists w Q(v,w,x)))$;

(b) $\forall x(\forall w Q(x,w,v) \supset \exists w(P(w,u) \supset \exists v Q(w,v,x)))$;

(c) $\forall x(\forall w Q(x,w,u) \supset \exists v(P(v,u) \supset \exists w Q(v,w,x)))$;

(d) $\forall z(\forall x Q(x,z,v) \supset \exists w(P(w,u) \supset \exists v Q(w,v,x)))$;

(e) $\forall v(\forall w Q(v,w,x) \supset \exists x(P(x,u) \supset \exists w Q(v,w,x)))$.

3.3. Változó-tiszta-e az alábbi formula? Ha nem, hozzuk olyan alakra!

$$\exists x P(x,y,z) \supset \forall x \forall y (Q(y) \wedge P(x,y,z))$$

3.4. Számítsuk ki az alábbi helyettesítések eredményét. Mely helyettesítések megengedettek?

(a) $(\exists y P(x,y,z)) \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}$;

(b) $(\exists y P(x,y,z)) \begin{pmatrix} y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$;

(c) $(\exists y P(x,y,z)) \begin{pmatrix} x \\ f(x,z) \end{pmatrix}$;

(d) $(\exists z \forall y P(x,y) \supset Q(x)) \begin{pmatrix} x \\ f(x,z) \end{pmatrix}$;

(e) $(\forall y P(x,y) \supset Q(x)) \begin{pmatrix} x \\ f(x,z) \end{pmatrix}$;

(f) $(P(x,y) \supset \forall y Q(y)) \begin{pmatrix} x & y \\ f(x,y) & z \end{pmatrix}$;

(g) $(\forall y P(y,z) \vee \exists y R(x,y)) \begin{pmatrix} x & z & y \\ f(x,y) & y & z \end{pmatrix}$;

3.5. Megengedett e az $\{x/t\}$ helyettesítés az A számára?

(a) $t = f(y,z)$, $x = v$, $A = \forall y P(y,v)$

(b) $t = f(y,v)$, $x = y$, $A = (P(y,v) \supset \exists v Q(v))$

3.6. Bizonyítsuk be, hogy

(a) a $\Theta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ x_1 & x_2 & \dots & x_k \end{pmatrix}$ **triviális** helyettesítés megengedett minden kifejezés számára.

(b) ha a K kifejezésben nincs a helyettesítendő $x_1, x_2, \dots, x_k$ változóknak szabad előfordulása, akkor Θ megengedett K számára.

(c) ha a K kifejezésben egyáltalán nincsenek a helyettesítő $t_1, t_2, \dots, t_k$ termekbeli szabad változók, akkor Θ megengedett K számára.

(d) ha a Θ helyettesítés **konstans**, vagyis a $t_1, t_2, \dots, t_k$ helyettesítő termek nem tartalmaznak változót, akkor a Θ helyettesítés megengedett minden kifejezés számára.

3.7. Döntsük el, hogy az alábbi helyettesítések megengedettek-e, és végezzük el a szabályos helyettesítéseket!

(a) $(\forall x(P(x,y) \supset \exists z Q(x,z,v)) \wedge R(x)) \begin{pmatrix} x & y & v & z \\ z & z & f(z) & v \end{pmatrix}$

(b) $(\exists y P(x,y) \supset \forall x Q(x,y)) \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}$

3.8. Végezzük el az alábbi szabályos helyettesítéseket:

(a) $(\exists z \forall y Q(x,y) \supset P(x))(x \| f(x,z))$

(b) $(\forall y P(y,z) \supset \exists R(x,y))(x,z,y \| f(x,y),y,z)$;

(c) $(P(x,y) \supset \forall y Q(x,y))(x,y \| f(x,y),z)$;

3.9. Jelölje $A(x,y)$ a $\forall y(\exists z P(x,z,y) \supset \forall z Q(x,z))$ formulát. Írjuk ki az $A(f(y,z), g(y))$ formula teljes alakját!

3.10. Jelölje $A(u,v,w)$ a $\forall x(P(x,u) \supset (\exists v Q(v,x) \supset R(w,v)))$ formulát. Írjuk ki az $A(f(u,x),x,x)$ formula teljes alakját!

4. A nyelv szemantikája; igazságértékelés a modellben

4.1. Tekintsük a $< \{\pi\}, \{c\}, \{f_{(\pi \to \pi)}\}, \{P_{(\pi,\pi)}, Q_{(\pi,\pi)}\} >$ elsőrendű nyelvet. Mit jelent természetes nyelven a

$$\forall x(P(x,c) \supset \exists y Q(f(y),x))$$

formula a következő interpretációkban:

(a)
- Az objektumtartomány legyen R.
- c jelölje a 0-t.
- f jelölje a négyzetre emelést.
- P jelölje a szokásos nagyobb, Q pedig az egyenlőség relációt.

(b)
- Az objektumtartomány legyen az emberek halmaza.
- c jelölje Pétert.
- $f(x)$ jelölje x feleségét.
- $P(x, y)$ jelölje, hogy x y-nak a lánya, $Q(x, y)$ pedig, hogy x és y ugyanaz a személy.

4.2. Az alábbi állítások közül melyek igazak, és melyek hamisak?

(a) Ha kétszer kettő négy, akkor öt osztható hárommal.

(b) Ha öt osztható hárommal, akkor kétszer kettő négy.

(c) Abból, hogy a körvonalon van három egy egyenesen levő pont, következik, hogy öt osztható hárommal.

(d) Nem igaz, hogy a következő két állítás ekvivalens:
- Kétszer kettő egyenlő öttel.
- Öt osztható hárommal.

(e) Az a tény, hogy öt osztható hárommal ekvivalens azzal, hogy van a körvonalon három olyan pont, amely egy egyenesre illeszkedik.

4.3. Határozzuk meg az alábbi formulák értékét, ha $|A| = 0$, és $|B| = 1$:

(a) $A \supset (B \supset A)$

(b) $\neg(B \supset A) \wedge (A \vee \neg B)$

(c) $\neg(\neg B \vee \neg A \supset \neg A \wedge B)$

4.4. A megadott értékek ismeretében határozzuk meg az alábbi formulák értékét, ha lehet:

(a) $A \equiv \neg B$, ha $|A \equiv B| = 1$

(b) $A \equiv \neg B$, ha $|A \equiv B| = 0$

(c) $(A \supset B) \supset C$, ha $|B| = 1$

(d) $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$, ha $|B| = 1$

(e) $A \wedge B \supset A \vee D$, ha $|A| = 1$ és $|D| = 0$

(f) $\neg A \wedge B \supset A \vee B$, ha $|A \supset B| = 1$

(g) $\neg A \wedge B \equiv A \vee B$, ha $|A \supset B| = 1$

4.5. Keressünk olyan (minél rövidebb) zárt formulákat, amelyek az Ar nyelv

(a) N interpretációjában igazak, de a Z interpretációjában nem;

(b) Z interpretációjában igazak, de az R interpretációjában nem.

4.6. Jelölje $\circ$ a „sem-sem” logikai műveletet, azaz tetszőleges A, B formulákra $A \circ B$ jelentése: „sem A, sem B”. A logikai alapműveletekkel kifejezve: $A \circ B \equiv \neg A \wedge \neg B$. Fejezzük ki a $\supset$, $\vee$, $\wedge$ műveleteket a $\circ$ művelet segítségével!

4.7. Mutassuk meg, hogy van olyan végtelen modell, melyben a

$$\forall x \neg P(x,y) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \supset P(x,z)) \wedge \forall x \exists y P(x,y)$$

formula igaz, de egyetlen véges modellben sem igaz.

4.8. Mutassuk meg, hogy a

$$\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \supset P(x,z)) \wedge \forall x \exists y P(x,y) \supset \exists x P(x,x)$$

formula bármelyik véges modellben igaz, és mégis van olyan (végtelen) modell, melyben ez a formula hamis.

4.9. Mutassuk meg, hogy a

$$\exists x \forall y \exists z ((P(y,z) \supset P(x,z)) \supset (P(x,x) \supset P(y,x)))$$

formula bármelyik véges modellben igaz, és mégis van olyan (végtelen) modell, melyben ez a formula hamis.

4.10. Bizonyítsuk be az alábbi lemmát az r term összetettsége szerinti indukcióval!

Legyen M az Ω nyelv egy interpretációja és r egy olyan term, melyben legfeljebb egy paraméter, a π típusú x szerepel. Legyen a t π típusú értékelhető term értéke $|t|_M$. Ekkor

$$\left| r \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \right|_M = \left| r \begin{pmatrix} x \\ |t|_M \end{pmatrix} \right|_M ,$$

azaz egy értékelhető term értéke csak résztermjei értékeitől függ.

4.11. Bizonyítsuk be az alábbi lemmát az A formula összetettsége szerinti indukcióval!

Legyen M az Ω nyelv egy interpretációja és A egy olyan formula, melyben legfeljebb egy paraméter, a π típusú x szerepel. Legyen a t π típusú értékelhető term értéke $|t|_M$. Ekkor

$$M \models \left[A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \right] \text{ akkor és csak akkor, ha } M \models A \begin{pmatrix} x \\ |t|_M \end{pmatrix} .$$

5. Logikai törvények; logikai következmények

5.1. Bizonyítsuk be az alábbi lemma állításait!

(a) $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ akkor és csak akkor, ha $\models A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$.

(b) $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ akkor és csak akkor, ha $=\!\!| \; A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$.

(c) $=\!\!| \; A$ akkor és csak akkor, ha $\models \neg A$.

(d) Az A formula pontosan akkor kielégythető, ha nem igaz, hogy $\models \neg A$.

5.2. Bizonyítsuk be a következő lemmát!
$A \sim B$ pontosan akkor, ha $A \models B$ és $B \models A$.

5.3. A tanult logikai törvények segítségével igazoljuk, hogy az alábbi formulák logikai törvények!

(a) $\neg(A \supset B) \supset A$

(b) $(A \wedge B) \supset (A \supset B)$

(c) $((A \supset B) \supset B) \supset (A \vee B)$

5.4. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi formulák, melyekben P és Q predikátum-szimbólumok, nem logikai törvények:

(a) $P \supset Q \supset .Q \supset P$

(b) $\exists x P(x) \supset \forall x P(x)$

(c) $\forall x \exists y P(x, y) \supset \exists y \forall x P(x, y)$

(d) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \supset \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

(e) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \supset \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

(f) $\forall x P(x, x) \supset \forall x \forall y P(x, y)$

(g) $\exists x \exists y P(x, y) \supset \exists x P(x, x)$

(h) $P(x) \supset \forall x P(x)$

(i) $\exists x P(x) \supset P(x)$

(j) $\forall x P(x, y) \equiv \forall y P(y, y)$

(k) $\exists x P(x, y) \equiv \exists y P(y, y)$

5.5. Bizonyítsuk be, hogy nem igaz, hogy

$$=\!\!| \; \forall x \exists y P(x, y) \supset \exists y \forall x P(x, y).$$

5.6. Kielégíthetők-e a következő formulák:

(a) $\exists x \forall y(Q(x,x) \wedge \neg Q(x,y))$
(b) $\exists x \forall y(Q(x,x) \supset \forall z R(x,y,z))$
(c) $\exists x \exists y(P(x) \wedge \neg P(y))$
(d) $\exists x \forall y(P(x) \wedge \neg P(y))$

5.7. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $=\!\!| \ (A \supset B \vee C) \wedge \neg(A \supset B \vee .A \supset C)$
(b) $=\!\!| \ \forall x \forall y \exists z(P(x,y) \wedge \neg(P(y,z) \wedge P(z,z)))$

5.8. Ellenőrizzük, hogy a felsorolt logikai törvények valóban azok.

5.9. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $\neg A \vee B, C \supset \neg B \models A \supset \neg C$
(b) $(A \vee B) \supset (C \wedge D), (D \vee E) \supset F \models A \supset F$

5.10. Ellenőrizzük, hogy a konklúzió a premisszák logikai következménye-e.

(a) Lacinak nincs kocsija. Éva csak azokat a fiúkat szereti, akiknek van kocsija. Tehát Éva nem szereti Lacit.
(b) Ha a lóversenyek eredményeit az összeesküvők előre eldöntik, vagy a játéktermeket kezükbe veszik a hamis játékosok, akkor a turizmus kevesebb bevételt hoz és a város kárt szenved. Ha a turizmus kevesebb bevételt hoz, a rendőrség meg lesz elégedve. A rendőrség sohasem elégedett. Következésképp a lóversenyek eredményeit nem az összeesküvők döntik el.
(c) Néhány republikánus kedvel minden demokratát. Nincs olyan republikánus, aki szeretné a szocialistákat. Tehát egyik demokrata sem szocialista.

6. A logikai törvények néhány alkalmazása

6.1. Határozzuk meg az alábbi formulák prenex alakját:

(a) $\exists x \forall y P(x,y) \vee \exists x \forall y Q(x,y)$
(b) $\exists x \forall y P(x,y) \supset \exists x \forall y Q(x,y)$
(c) $\exists x(\forall y P(x,y) \vee \exists z Q(z)) \supset \exists x Q(x)$
(d) $\forall x(\exists y P(x,y) \supset \forall x Q(x)) \supset \forall x \exists y P(x,y)$

6.2. Hozzuk konjunktív és diszjunktív normálformára a következő formulákat:

(a) $\neg(A \wedge B \supset \neg A) \wedge \neg(A \wedge B \supset \neg B)$

(b) $\neg(A \wedge (B \vee C)) \supset (A \wedge B) \vee C$

(c) $(C \supset A) \supset (\neg(B \vee C) \supset A)$

(d) $(A \supset B \supset .C \supset \neg A) \supset .\neg B \supset \neg C$

(e) $((A \supset B \supset .\neg A) \supset \neg B \supset .\neg C) \supset C$

7. A természetes technika

7.1. Vezessük le a természetes technika segítségével a tanult logikai törvényeket!

7.2. A természetes technika segítségével végezzük el az 5. fejezet feladatainak bizonyításait!

7.3. Bizonyítsuk be, hogy logikai törvények az alábbi formulák!

(a) $A \supset (B \supset A) \equiv (\neg A) \supset (A \supset B)$

(b) $(A \supset B) \supset B \equiv A \vee B$

(c) $A \supset (B \vee C) \equiv (A \supset B) \vee (A \supset C)$

(d) $(A \supset C) \wedge (B \supset C) \equiv (A \vee B) \supset C$

(e) $A \supset B \equiv A \supset (A \wedge B)$

7.4. Tekintsük azt az elsőrendű nyelvet, amelyben három predikátumjel van: P, R (egyváltozós), Q (kétváltozós), függvényjel pedig nincs. Logikai törvények-e az alábbi formulák:

(a) $\exists x P(x) \supset \forall x P(x)$;

(b) $\neg(\exists x P(x) \supset \forall x P(x))$;

(c) $\exists x \forall y Q(x, y) \supset \forall y \exists x Q(x, y)$;

(d) $\forall x \exists y Q(x, y) \supset \exists y \forall x Q(x, y)$;

(e) $\forall x(P(x) \vee R(x)) \supset (\forall x P(x) \vee \forall x R(x))$;

(f) $(\exists x P(x) \wedge \exists x R(x)) \supset \exists x(P(x) \wedge R(x))$?

7.5. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $\vdash A \supset (B \supset C) \supset .B \supset (\neg C \supset \neg A)$,

(b) $\vdash A \supset (\neg A \supset B)$,

(c) $\vdash A \vee \neg A$.