Megoldások

2001. augusztus 8.

1. Előzetes tudnivalók a különböző matematikai logikai nyelvekről

1.1.

(a) Igen

(b) Igen

(c) Nem, mert nem kijelentő mondat.

(d) Nem fejez ki önmagában állítást. "Ádám azt mondta, hogy a világháborúban volt."

(e) Nem, mert nem tudjuk egyértelműen eldönteni, hogy igaz vagy hamis.

(f) Nem, mert nem kijelentő mondat.

(g) Igen

(h) Nem, mert nem tudjuk egyértelműen eldönteni, hogy igaz vagy hamis.

(i) Igen

(j) Nem, mert nem kijelentő mondat.

1.2.

(a) és (b)

(d) és (e)

(g) és (h)

1.3.

P: "Péter hazament."

E: "Éva szőke."

O: "Péter otthon van."

M: "Péter otthon maradt."

J: "Julit nem értem utol."

(a) $\neg$P

(b) $\neg$E

(c) $\neg(\neg P)$

(d) $\neg(\neg(\neg E))$

(e) $(\neg P \vee \neg M) \wedge \neg O$

(f) $\neg(\neg E \supset \neg J)$

1.4.

(a) E: "Éva szőke."
N: "Nekem tetszik Éva."
K: "Kedvelem a szőkéket."
$E \wedge \neg N \wedge K$

(b) T: "Tivadar hazament."
O: "Tivadar otthon maradt."
M: "Mindenki ezt várta tőle."
$T \wedge \neg O \wedge M$

(c) E: "Esik az eső."
H: "Hideg van."
F: "Fúj a szél."
$E \wedge \neg H \wedge \neg F$

(d) H: "Hazajössz."
B: "Bevásárolsz."
L: "Le kell mennem."
M: "Megfőzhetem az ebédet."
$(H \wedge B) \supset (\neg L \wedge M)$

1.5.

(a) $(p = q) \rightleftharpoons \forall A((A \in p) \equiv (A \in q))$
(b) $(p \neq q) \rightleftharpoons \neg(p = q)$
(c) $(a = b) \rightleftharpoons \forall A((A \in a) \equiv (A \in b))$
(d) $(a \neq b) \rightleftharpoons \neg(a = b)$
(e) $(p \in a) \rightleftharpoons \forall A((A \in p) \supset (A \in a))$
(f) $(p \parallel q) \rightleftharpoons \exists a((p \in a) \wedge (q \in a)) \wedge \neg\exists A((A \in p) \wedge (A \in q))$
(g) $(a \parallel b) \rightleftharpoons \neg\exists A((A \in a) \wedge (A \in b))$
(h) $((p \parallel a) \rightleftharpoons \exists q((q \in a) \wedge (q \parallel p)))$
$\forall a \forall b((a \parallel b) \supset \forall p((\neg(p \in a) \wedge \neg(p \parallel a)) \supset (\neg(p \in b) \wedge \neg(p \parallel b))))$

1.6.

(a) $\forall A \forall B(\neg(A = B) \supset \exists! p(A \in p \wedge B \in p))$
$\exists!$ nélkül:
$\forall A \forall B(\neg(A = B) \supset \exists p(A \in p \wedge B \in p) \wedge \forall p \forall q(((A \in p \wedge B \in p) \wedge (A \in q \wedge B \in q)) \supset p = q))$

(b) $\forall A \forall B \forall C(\neg \exists p(A \in p \wedge B \in p \wedge C \in p) \supset \exists! a(A \in a \wedge B \in a \wedge C \in a))$
$\exists!$ nélkül:
$\forall A \forall B \forall C(\neg \exists p(A \in p \wedge B \in p \wedge C \in p) \supset \exists a(A \in a \wedge B \in a \wedge C \in a) \wedge \forall a \forall b((A \in a \wedge B \in a \wedge C \in a) \wedge (A \in b \wedge B \in b \wedge C \in b) \supset a = b))$

(c) $\forall p \forall A(\neg(A \in p) \supset \exists! q((A \in q) \wedge (p \parallel q)))$
$\exists!$ nélkül:
$\forall p \forall A(\neg(A \in p) \supset \exists q(((A \in q) \wedge (p \parallel q)) \wedge \forall q \forall r((A \in r) \wedge (r \parallel p) \supset (r = q))))$

1.7.

(a) $\forall p \forall A(\neg(A \in p) \supset \forall q \forall r((A \in q) \wedge (q \parallel p) \wedge (A \in r) \wedge (r \parallel p) \supset q = r)))$

(b) $\forall p \forall A(\neg(A \in p) \supset \exists q \exists r((A \in q) \wedge (A \in r) \wedge (q \parallel p) \wedge (r \parallel p)) \wedge \neg(q = r))$

1.8.

(a) $(x = U) \rightleftharpoons \forall y(y \subseteq x)$

(b) $(x = \emptyset) \rightleftharpoons \forall y(x \subseteq y)$

(c) $(x = y) \rightleftharpoons (x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x)$

(d) $(x \subset y) \rightleftharpoons (x \subseteq y) \wedge \neg(x = y)$

(e) $\forall y((y \subseteq x) \supset (y = \emptyset))$

(f) $x = y \cap z \rightleftharpoons \forall u((u \subseteq y \wedge u \subseteq z) \supset u \subseteq x)$

(g) $x = y \cup z \rightleftharpoons \forall u((u \subseteq y \vee u \subseteq z) \supset u \subseteq x)$

(h) $(x = \bar{y}) \rightleftharpoons \forall u(\neg(u \subseteq y) \supset u \subseteq x)$

(i) $(x = y \mid z) \rightleftharpoons \forall u(u \subseteq y \wedge \neg(u \subseteq z) \supset u \subseteq x)$

1.9.

(a) $\exists x \exists y \exists z(x \subset y \wedge y \subset z)$

(b) $\exists x \exists y \exists z(\neg(x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \wedge \neg(y \subseteq z \wedge z \subseteq y) \wedge \neg(z \subseteq x \wedge x \subseteq z))$

1.10. Ha u legalább két elemből áll.

1.11.

1.12.

(a) $(x \subseteq y) \rightleftharpoons \forall v(v \in x \supset v \in y)$

(b) $(x \neq y) \rightleftharpoons \neg(x \subseteq y) \vee \neg(y \subseteq x)$

(c) $(x \subset y) \rightleftharpoons x \subseteq y \wedge \neg(x = y)$

(d) $(x = \emptyset) \rightleftharpoons \neg\exists y(y \in x)$

(e) $(x = \{y, z\}) \rightleftharpoons \forall v(v \in x \equiv (v = y \vee v = z))$

(f) $(x = y \cup z) \rightleftharpoons \forall v(v \in x \equiv (v \in y \vee v \in z))$

(g) $(x = y \cap z) \rightleftharpoons \forall u(u \in x \equiv (u \in y \wedge u \in z))$

(h) $(x = y \setminus z) \rightleftharpoons \forall u(u \in x \equiv (u \in y \wedge \neg(u \in z)))$

(i) $(x = Py) \rightleftharpoons \forall z \forall v(v \in x \wedge z \in v \supset z \in y)$

(j) $((\{x\} \cup Py) \in y \cap P\{x, y\}) \rightleftharpoons \forall v((v = x \vee \exists w(w \in y \wedge v \in w)) \supset v \in y \wedge \exists z(z \in x \vee z \in y \supset v \in z))$

1.13.

(a) $(x \neq y) \rightleftharpoons \neg(x = y)$

(b) $(x \leq y) \rightleftharpoons \exists z(x + z = y)$

(c) $(x < y) \rightleftharpoons (x \leq y) \wedge \neg(x = y)$

(d) $(x \mid y) \rightleftharpoons \neg(x = 0) \wedge \exists z(x * z = y)$

(e) x prímszám$\rightleftharpoons \neg(x = 0) \wedge \neg(x = S0) \wedge \forall z((z \mid x) \supset (z = S0 \vee z = x))$

(f) $(z = (x, y)) \rightleftharpoons (z \mid x) \wedge (z \mid y) \wedge \forall u(u \mid x \wedge u \mid y \supset u \leq z)$

(g) $(z = [x, y]) \rightleftharpoons (x \mid z) \wedge (y \mid z) \wedge \forall u(x \mid u \wedge y \mid u \supset z \leq u)$

1.14.

(a) $\forall x \exists y((x < y) \wedge (\text{ Prímszám}(y)))$

(b) $\exists x \forall y((\text{Prímszám}(x)) \wedge (\text{Prímszám}(y)) \wedge y < x)$

(c) $\forall x \exists y((x \leq y) \wedge ((\text{Prímszám}(y)) \wedge (\text{Prímszám}(y + SS0))))$

(d) $\forall x \exists y \exists z \exists v \exists w(x = y * y + z * z + v * v + w * w)$

(e) $\exists x \forall y(y < x)$

(f) $\exists y \exists z(((SSS0 * (y * y) + S0 * y + S0) = 0) \wedge (SSS0 * (z * z) + S0 * z + S0) = 0) \wedge \neg(z = y))$

1.15. Igaz, hamis, igaz (sejtés), igaz, hamis, hamis.

1.16.

(a) $(x \leq y) \rightleftharpoons \exists z(x + z * z = y)$

(b) $(x < y) \rightleftharpoons \exists z(x + z * z = y \wedge \neg(z = 0)) \rightleftharpoons (x \leq y \wedge \neg(x = y))$

(c) $x < y \supset \exists v(x < v \wedge v < y)$

(d) $\exists x(x * x = SSS0)$

(e) $\exists x(x * x * x + SSSSS0 = 0)$

1.17.

(a) $(x > 0) \rightleftharpoons \exists y \exists z \exists v \exists w((x = y * y + z * z + v * v + w * w) \wedge \neg(y = 0 \wedge z = 0 \wedge v = 0 \wedge w = 0))$

(b) $(x \leq y) \rightleftharpoons \wedge z(1 + z = 0 \wedge y + z * x > 0)$

(c) $(x < (y - z)) \rightleftharpoons \exists v(1 + v = 0 \wedge (y + v * z + v * x > 0))$

1.18.

(a) $(x = 0) \rightleftharpoons x + x = x$

(b) $(x \neq 0) \rightleftharpoons \neg(x = 0)$

(c) $(x = 1) \rightleftharpoons (x * x = x) \wedge \neg(x = 0)$

(d) $(x = y) \rightleftharpoons \exists z(x + x = z \wedge y + y = z)$

(e) $(x = Sy) \rightleftharpoons \exists z((y + z = x) \wedge z = 1)$

(f) $(x = 2) \rightleftharpoons \exists u((x = Su) \wedge (u = 1))$

(g) $(x = (y + z) \cdot Sy) \rightleftharpoons \exists u \exists v((y + z = v) \wedge (u = Sy) \wedge (v * u = x))$

(h) $(x \mid y) \rightleftharpoons \neg(x = 0) \wedge \exists z(x * z = y)$

(i) x prímszám$\rightleftharpoons \neg(x = 0) \wedge \neg(x = 1) \wedge \forall z(z \mid x \supset (z = 1 \vee z = x))$

1.19.

$\forall x \forall y(\neg(x = 0) \wedge \neg(y = 0) \supset \exists z(x \mid z \wedge y \mid z \wedge \forall u(x \mid u \wedge y \mid u \supset z \mid u)))$

1.20.

1.21.

$\exists u \exists v(x + y = u \wedge x * x = v \wedge \exists z(u + z = v))$

1.22.

$\exists a \exists b \exists c \forall x \forall y \forall z((x * a + y * b + z * c = \underline{0}) \supset (x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0)) \wedge \neg\exists a \neg\exists b \neg\exists c \neg\exists d \forall x \forall y \forall z \forall v(x * a + y * b + z * c + v * d = \underline{0})$

2. Elsőrendű nyelvek; formulák és termek

2.1.

(a) 3 (pont, egyenes és sík)
(b) 1 (szám)
(c) 2 (szám, vektor)

2.2.

(a) Változók:
$A, B, C...$: pontok
$p, q, r...$: egyenesek
$a, b, c...$: síkok
Konstansok: -
Függvényszimbólumok: -
Predikátumszimbólumok:
$(A = B) \rightleftharpoons P(A, B)$
$(A \in p) \rightleftharpoons Q(A, p)$
$(A \in a) \rightleftharpoons R(A, a)$
Termek: A, p, a
Atomi formulák: $(A = B), (A \in p), (A \in a)$

(b) Változók: $x, y...$: részhalmazok
Konstansok: -
Függvényszimbólumok: -
Predikátumszimbólumok: $(x \subseteq y) \rightleftharpoons T(x, y)$
Termek: x
Atomi formulák: $(x \subseteq y)$

(c) Változók: $x, y...$: számok
Konstansok: 0
Függvényszimbólumok:
$St \rightleftharpoons f(t)$
$(t + z) \rightleftharpoons g(t, z)$
$(t * z) \rightleftharpoons h(t, z)$
Predikátumszimbólumok: $(t = z) \rightleftharpoons P(t, z)$
Termek: $0, t, St, (t + r), (t * r)$
Atomi formulák: $(t = r)$

(d) Változók: $x, y...$: számok
Konstansok: -
Függvényszimbólumok: -
Predikátumszimbólumok:
$(x + y = z) \rightleftharpoons P(x, y, z)$
$(x * y = z) \rightleftharpoons Q(x, y, z)$
Termek: x
Atomi formulák: $(x + y = z), (x * y = z)$

(e) Változók: $x, y, z...$: halmazok
Konstansok: -
Függvényszimbólumok: -
Predikátumszimbólumok: $(x \in y) \rightleftharpoons T(x, y)$
Termek: x
Atomi formulák: $(x \in y)$

(f) Változók:
$x, y, z...$: számok
$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}...$: vektorok
Konstansok: $0, \underline{0}$
Függvényszimbólumok:
$Sx = y \rightleftharpoons f(x) = y$
$x + y = z \rightleftharpoons f(x, y) = z$
$x * y = z \rightleftharpoons g(x, y) = z$
$\underline{a} + \underline{b} = \underline{c} \rightleftharpoons h(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{c}$
$x * \underline{a} = \underline{b} \rightleftharpoons i(x, \underline{a}) = \underline{b}$
Predikátumszimbólumok:
$(x = y) \rightleftharpoons P(x, y)$
$(\underline{a} = \underline{b}) \rightleftharpoons Q(\underline{a}, \underline{b})$
Termek: $x, \underline{a}, 0, \underline{0}, (x + y), (x * y), (x + \underline{a}), (x * \underline{a})$
Atomi formulák: $(x = y), (\underline{a} = \underline{b})$

2.3.

A Geom nyelv kifejezései:
Termek: A, p, a
Atomi formulák: $P(A, B), P(A, p), R(A, a)$

Az Ar nyelv kifejezései:
Termek: $0, t, f(0), g(x, f(0)), h(f(f(x)), x)$
Atomi formulák: $P(g(x, f(0)), 0)$
legalább 3 funkcionális összetettségű termek:
$h(f(f(x)), x)$
$g(f(f(x)), h(x, f(0)))$

2.4.

(a) igen
(b) igen
(c) nem
(d) nem

2.5.

(a) $f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), ...$

(b) $g(x,x), g(g(x),x), \ldots$

2.6.

x résztermjei:
x funkcionális összetettség: 0

$f(x)$ résztermjei:
$f(x)$ funkcionális összetettség: 1
x funkcionális összetettség: 0

$h(x, f(y))$ résztermjei:
$h(x, f(y))$ funkcionális összetettség: 2
$f(y)$ funkcionális összetettség: 1
x funkcionális összetettség: 0

$g(h(x, f(y)), y, f(z))$ résztermjei:
$g(h(x, f(y)), y, f(z))$ funkcionális összetettség: 4
$h(x, f(y))$ funkcionális összetettség: 2
$f(y), f(z)$ funkcionális összetettség: 1
x, y, z funkcionális összetettség: 0

$h(g(x, y, z), f(x))$ résztermjei:
$h(g(x, y, z), f(x))$ funkcionális összetettség: 3
$g(x, y, z), f(x)$ funkcionális összetettség: 1
x, y, z funkcionális összetettség: 0

$f(g(h(x, f(y)), y, f(y)))$ résztermjei:
$f(g(h(x, f(y)), y, f(y)))$ funkcionális összetettség: 5
$g(h(x, f(y)), y, f(y))$ funkcionális összetettség: 4
$h(x, f(y))$ funkcionális összetettség: 2
$f(y)$ funkcionális összetettség: 1
x, y funkcionális összetettség: 0

2.7.

(a) nem
(b) igen
(c) igen
(d) nem

2.8.

(a) nem
(b) igen
(c) igen
(d) nem

2.9.

(a) $(A \supset \neg B \vee B \wedge C), (A \supset \neg B) \vee B \wedge C, A \supset \neg B \vee (B \wedge C), ...$

(b) $(A \supset B \supset C \supset \neg A \supset \neg B), A \supset (B \supset C) \supset \neg A \supset \neg B, ...$

2.10.

(a) igen

(b) igen

(c) nem

(d) nem

2.11.

(a) $(((P \supset Q) \wedge (Q \supset R)) \supset (\neg P \vee R)), ((P \supset Q) \wedge (Q \supset R)), (P \supset Q), (Q \supset R), (\neg P \vee R), \neg P, P, Q, R$

(b) $((P \supset Q) \supset ((P \supset \neg Q) \supset \neg Q)), ((P \supset \neg Q) \supset \neg Q), (P \supset \neg Q), (P \supset Q), P, Q, \neg Q$

(c) $Q(f(x), g(y, x))$

(d) $(\exists x Q(x, y) \supset \neg(P(g(x, y)) \wedge \forall z P(z))), \neg(P(g(x, y)) \wedge \forall z P(z)), (P(g(x, y)) \wedge \forall z P(z)), \exists x Q(x, y), P(g(x, y)), \forall z P(z), Q(x, y), P(z)$

(e) $(\exists x \neg(P(f(x)) \supset Q(x, y)) \supset \forall z R(z)), \exists x \neg(P(f(x)) \supset Q(x, y)), \neg(P(f(x)) \supset Q(x, y)), P(f(x)) \supset Q(x, y), \forall z R(z), R(z), P(f(x)), Q(x, y)$

2.12.

$A(x)$ részformulái:
$A(x)$ logikai összetettsége: 0

$A(x) \wedge B(y)$ részformulái:
$A(x) \wedge B(y)$ logikai összetettsége: 1
$A(x), B(y)$ logikai összetettsége: 0

$Q(f(x), g(y, z))$ részformulái:
$Q(f(x), g(y, z))$ logikai összetettsége: 0

$((P \supset Q) \supset ((P \supset \neg Q) \supset \neg Q))$ részformulái:
$((P \supset Q) \supset ((P \supset \neg Q) \supset \neg Q))$ logikai összetettsége: 6
$(P \supset \neg Q) \supset \neg Q$ logikai összetettsége: 4
$P \supset \neg Q$ logikai összetettsége: 2
$P \supset Q, \neg Q$ logikai összetettsége: 1
P, Q logikai összetettsége: 0

$(((P \supset Q) \wedge (Q \supset R)) \supset (\neg P \vee R))$ részformulái:
$(((P \supset Q) \wedge (Q \supset R)) \supset (\neg P \vee R))$ logikai összetettsége: 6
$(P \supset Q) \wedge (Q \supset R)$ logikai összetettsége: 3
$\neg P \vee R$ logikai összetettsége: 2
$P \supset Q, Q \supset R, \neg P$ logikai összetettsége: 1
P, Q, R logikai összetettsége: 0

2.13.

(a), (c), (d)

2.14.

2.15.

2.16.

2.17.

(a) $(\neg((P \supset Q) \supset (R \supset S)) \wedge Q) \vee (\neg R \vee S))$
(b) $(\exists z(\forall x P(x,z) \supset (\exists z \forall x P(x,z) \supset \exists z P(x,z))))$
(c) $(\forall x Q(x,y) \supset \forall x((Q(x,y) \supset R) \supset Q(x,y)))$
(d) $(\exists z((\forall x P(x) \supset Q(x)) \equiv R))$
(e) $(\exists z \forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (R \supset P(x)))$

2.18.

(a) $\forall x$ hatásköre: $(\forall y P(x,y,z) \supset Q(x,y))$
$\forall y$ hatásköre: $P(x,y,z)$
z első és egyetlen előfordulása és y második előfordulása szabad.
(b) $\forall y$ és (első) $\exists z$ hatásköre: $(P(x,y,z) \supset \exists z Q(z,x))$
(második)$\exists z$ hatásköre: $Q(z,x)$
x mindkét előfordulása szabad.
(c) $\exists x$ és (első) $\forall y$ hatásköre: $(P(x) \vee Q(x, f(y)))$
(második)$\forall y$ hatásköre: $Q(x,y)$
x harmadik előfordulása szabad.

2.19.

(a) y első előfordulása szabad.
(b) y első és x második előfordulása szabad.
(c) y első és egyetlen előfordulása és z harmadik előfordulása szabad.

2.20.

(a) Nincs szabad változó.

(b) Nincs szabad változó.

(c) z első és egyetlen előfordulása és y második előfordulása szabad.

(d) x első előfordulása szabad.

(e) x harmadik előfordulása szabad.

2.21.

(a) $\forall x$ hatásköre: $(P(x,y) \supset \exists y Q(x,y))$
$\exists y$ hatásköre: $Q(x,y)$
y első előfordulása szabad.

(b) $\exists x$ hatásköre: $R(x)$
x második előfordulása szabad.

(c) $\exists x$ és $\forall y$ hatásköre: $(R(x) \wedge S(x))$
$\forall x$ hatásköre: $T(x)$
Minden változó mindegyik előfordulása kötött.

(d) $\exists x$ és $\exists y$ hatásköre: $(P(x,y) \wedge R(z))$
z első és egyetlen előfordulása szabad.

2.22.

J: "Jó idő van."

K: "Kirándulni megyünk."

E: "Esik az eső."

F: "Fúj a szél."

(a) $\neg J$

(b) $J \supset K$

(c) $\neg J \wedge \neg K$

(d) $K \supset J$

(e) $\neg(K \wedge \neg J)$

(f) $(E \vee F) \supset \neg J$

2.23.

(a) Ha esik az eső, akkor nem strandolok vagy napozok. (Ha esik az eső, akkor nem strandolok és nem napozok.)

(b) Akkor és csak akkor maradok otthon, ha esik az eső.

(c) Ha strandolok, akkor nem esik az eső.

(d) Esik az eső és otthon maradok, vagy nem esik az eső és strandolok.

(e) Ha nem maradok otthon, akkor napozok és nem esik az eső, vagy strandolok.

2.24.

x, y: élőlény típusú változó
$M(x)$: "x madár"
$R(x)$: "x tud repülni"
$S(x)$: "x strucc"

(a) $\neg\forall x(M(x) \supset R(x))$

(b) $\exists x(M(x) \wedge \neg R(x))$

(c) $\forall x((M(x) \wedge \neg S(x)) \supset R(x))$

x, y: ember típusú változó
p: Péter (konstans)
$B(x)$: "x beteg"
$F(x, y)$: "x bízik y-ban"

(d) $\exists x\forall y\neg F(x, y)$

(e) $\forall xF(x, p)$

(f) $\exists x(B(x) \wedge \forall y(O(y) \supset \neg F(x, y)))$

2.25.

E: "Esik az eső."

S: "Süt a Nap."

SZ: "Szivárvány van."

D: "Dél van."

V: "Várakozás nélkül kapok reggelit."

A: "Elalszom."

N: "8 órára megérkezem."

Ü: "Ünnepély lesz."

T: "A tanítás délben végetér."

O: "Osztályfőnöki óra lesz."

TO: "A tornaóra elmarad."

(a) $E \wedge S$

(b) $E \wedge S \wedge \neg D \supset SZ$

(c) $V \wedge \neg A \supset N$

(d) $A \supset \neg V$

(e) $\neg A \supset (V \wedge N)$

(f) $\supset T$

(g) $O \supset TO$

(h) $\neg T \wedge (\vee O)$

M: "A szemtanú megbízható."

I: "Az írásszakértő véleménye helytálló."

B: "A bűncselekményt előre megfontolt szándékkal követték el."

UT: "A talált ujjlenyomatok a tettestől származnak."

UB: "A talált ujjlenyomatok a tettes bűntársától származnak."

(i) $(M \wedge I) \supset (B \equiv (UT \vee UB))$

(j) $M \wedge I \wedge UT \supset B$

2.26.

(a) JA:"Jancsi eltévedt az erdőben."

HA:"Jancsi hazatalált."

JU:"Juliska eltévedt az erdőben."

J:"Jól ismerte az utat."

$JA \wedge \neg HA$
$JA \wedge \neg JU$
$JA \wedge J$

(b) E:"Egészségtelenül táplálkozik."

K:"Keveset mozog."

S:"Saját autójával megy."

H:"Hív egy taxit."

$E \vee K$
$(S \vee H) \wedge \neg(S \wedge H)$

(c) S:"Holnap süt a Nap."

V:"10-kor várlak az uszodában."

B:"Befejezzük a gyakorlatot."

M:"Már mindenki volt a táblánál."

E:"Elmegyek moziba."

P:"Van pénzem."

$S \supset V$
$M \supset B$
$P \supset E$

(d) S:"Süt a Nap."

U:"Holnap kimegyek az uszodába."

$S \equiv U$

2.27.

(a) x, y: ember típusú változó
g: Gábor (konstans)
k: Kriszta (konstans)
$P(x)$: "x pék"

$P(g)$
$P(g) \supset P(k)$
$\exists x P(x)$
$\forall x P(x)$

(b) x, y: ember típusú változó
$B(x)$: "x bíró"
$J(x)$: "x jogász"
$\ddot{\mathrm{U}}(x)$: "x ügyeskedő"
$I(x)$: "x idős"
$\acute{\mathrm{E}}(x)$: "x életerős"
$P(x)$: "x politikus"
$K(x)$: "x képviselő"
$F(x, y)$: "x-nek y a felesége"

$\forall x(B(x) \supset J(x))$
$\exists x(\ddot{\mathrm{U}}(x) \wedge J(x))$
$\neg\exists x(\ddot{\mathrm{U}}(x) \wedge B(x))$
$\exists x(B(x) \wedge \neg\acute{\mathrm{E}}(x))$
$\forall x(\neg B(x) \wedge J(x) \supset \ddot{\mathrm{U}}(x))$
$\exists x(J(x) \wedge P(x) \supset K(x))$
$\neg\exists x(K(x) \wedge \forall y(F(x, y) \supset I(y)))$
$\forall x(I(x) \wedge K(x) \supset J(x))$

(c) x, y: élőlény típusú változó
$M(x)$: "x madár"
$S(x)$: "x strucc"
$R(x)$: "x tud repülni"

$\forall x(S(x) \supset M(x))$
$\exists x(M(x) \wedge \neg S(x))$
$\forall x((\neg S(x) \wedge M(x)) \supset R(x))$
$\forall x((\neg R(x) \wedge M(x)) \supset S(x))$

(d) x, y, z: ember típusú változó
g: Gábor (konstans)
e: Én (konstans)
$Á(x, y)$: "x átveri y-t"
$B(x)$: "x becsületes"
$P(x, y)$: "x-nek y az apja"
$H(x)$: "x használtautó kereskedő"
$R(x, y)$: "x-nek y barátja"

$\forall x(\exists y Á(x, y) \supset \neg B(x))$
$\forall x \forall y(\neg H(x) \wedge P(x, y) \supset \neg Á(x, y))$
$\forall x \forall y(Á(x, g) \wedge P(x, y) \supset Á(x, y))$
$\forall x \forall y(\neg(x = e) \supset Á(x,y))$
$\forall x \forall y(Á(x, y) \supset \exists z(B(z) \wedge Á(z, x)))$
$\forall x \forall y((R(x, y) \wedge Á(x, y)) \supset \exists z(H(z) \wedge P(z, x)))$

2.28.

(a) Van használtautó kereskedő.

(b) Aki használtautó kereskedő, az nem tisztességes ember. (Ha valaki használtautó kereskedő, akkor nem tisztességes ember.)

(c) Van olyan használtautó kereskedő, aki tisztességes ember.

(d) Van olyan ember, aki ha tisztességes, akkor használtautó kereskedő.

3. A kötött változók átjelölése; változók helyettesítése termekkel

3.1.

(a) és (d)

3.2.

(a) Szabad: v első előfordulása, u, x második előfordulása.

(b) Szabad: v első előfordulása, u.

(c) Szabad: u.

(d) Szabad: v első előfordulása, u.

(e) Szabad: x első előfordulása, u.

Az (a) nem kongruens egyikkel sem, mert több paramétert tartalmaz.

A (c) nem kongruens a többivel, mert csak egy szabad változója van.

(b) és (d): kötési viszonyok különböznek.

(e): az egyik szabad változó neve különbözik a (b) és (d)-ben levő szabad változókétól. Nem kongruens egyikkel sem.

3.3.

Nem. $\exists x P(x,y,z) \supset \forall u \forall v (Q(v) \wedge P(u,v,z))$

3.4.

(a) Nem megengedett helyettesítés. Jelöljük át a kötött változót egy, a formulában nem szereplő változóra! $\exists p P(x,p,z)$
Most végezzük el a helyettesítést: $\exists p P(f(x,y),p,z)$

(b) Nincs szabad előfordulású y, ezért ez a helyettesítés megengedett, de nem változtatja a kifejezést.
A helyettesítés eredménye: $\exists y P(x,y,z)$

(c) Megengedett helyettesítés. Eredménye: $\exists y P(f(x,z),y,z)$

(d) Nem megengedett helyettesítés. Jelöljük át a kötött változót egy, a formulában nem szereplő változóra! $\exists v \forall y P(x,y) \supset Q(x)$
Most végezzük el a helyettesítést: $\exists v \forall y P(f(x,z),y) \supset Q(f(x,z))$

(e) Megengedett helyettesítés. Eredménye: $\forall y P(f(x,z),y) \supset Q(f(x,z))$

(f) Megengedett helyettesítés. Eredménye: $P(f(x,y),z) \supset \forall y Q(y)$

(g) Nem megengedett helyettesítés. Jelöljük át a kötött változót egy, a formulában nem szereplő változóra! $\forall u P(u,z) \vee \exists v R(x,v)$
Most végezzük el a helyettesítést: $\forall u P(u,y) \vee \exists v R(f(x,y),v)$

3.5.

(a) nem

(b) igen

3.6.

3.7.

(a) Nem. A szabályos helyettesítés eredménye:
$\forall x(P(x,z) \supset \exists u Q(x,u,f(z))) \wedge R(z)$

(b) Nem. A szabályos helyettesítés eredménye:
$\exists y P(z,y) \supset \forall u Q(u,x)$

3.8.

(a) Nem megengedett helyettesítés.
$(\exists u \forall y Q(x,y) \supset P(x))$ a kifejezés variánsa. Itt a helyettesítés már megengedett.
$\exists u \forall y Q(f(x,z),y) \supset P(f(x,z))$

(b) x-nek nincs szabad előfordulása, ezért a helyettesítést redukálhatjuk: $(z,y \| y,z)$
Nem megengedett helyettesítés.
$(\forall u P(u,z) \supset \exists x R(x,y))$ a kifejezés variánsa. Itt a helyettesítés már megengedett.
$\forall u P(u,y) \supset \exists x R(x,z)$

(c) $(P(f(x,y),y) \supset \forall u Q(f(x,y),u))$

3.9.

$\forall y(\exists z P(x,z,y) \supset \forall z Q(x,z))(x,y \| f(y,z),g(y))$
y-nak nincs szabad előfordulása, ezért a helyettesítés nem változtatja.
A változóütközés elkerülése érdekében az összes kötött változót át kell jelölni.
$\forall u(\exists v P(x,v,u) \supset \forall w Q(x,w))$ az előző variánsa.
Itt a helyettesítés megengedett.
$\forall u(\exists v P(f(y,z),v,u) \supset \forall w Q(f(y,z),w))$

3.10.

A $\forall x(P(x,u) \supset (\exists v Q(v,x) \supset R(w,v)))$ formula számára az $(u,v,w \| f(u,x),x,x)$ helyettesítés nem megengedett.
A $\forall y(P(y,u) \supset (\exists v Q(v,y) \supset R(w,v)))$ számára már megengedett, így a szabályos helyettesítés eredménye a
$\forall y(P(y,f(u,x)) \supset (\exists v Q(v,y) \supset R(x,x)))$ formula.

4. A nyelv szemantikája; igazságértékelés a modellben

4.1.

(a) Minden pozitív valós számnak van valós négyzetgyöke.

(b) Péter minden lányának van férje.

4.2.

(a) Hamis, mert az implikáció hamis, ha az előtagja igaz és az utótagja hamis.

(b) Igaz, mert az implikáció igaz, ha az előtagja hamis.

(c) Igaz, mert az implikáció igaz, ha az előtagja hamis.

(d) Hamis, mert az igaz érték tagadása hamis.

(e) Igaz, mert az ekvivalencia igaz, ha az elő- és utótag értéke megegyezik.

4.3.

(a) Az implikáció igaz, ha az előtagja hamis, ezért a formula értéke: 1.

(b) A diszjunkció hamis, ha mindkét tagja hamis. $\| A \vee \neg B \| = 0$
A konjunkció hamis, ha legalább az egyik tagja hamis. Ezért a formula értéke: 0.

(c) A formula értéke: 0.

4.4.

(a) 1. eset: $|A| = 1$ és $|B| = 1$
2. eset: $|A| = 0$ és $|B| = 0$
Mindkét esetben a formula értéke 0.

(b) 1

(c) A formula értéke C értékétől függ.

(d) 1. eset: $|A| = 1$
2. eset: $|A| = 0$
Mindkét esetben a formula értéke 1.

(e) 1

(f) 1

(g) A formula értéke A értékétől függ.

4.5.

(a) $\forall x(\neg(x = 0) \supset \neg\exists y(x + y = 0))$

(b) $\neg\exists x(x * x = SS0)$

4.6.

$$A \vee B \sim \neg(A \circ B)$$

$$A \wedge B \sim \neg A \circ \neg B$$

$A \supset B \sim \neg(\neg A \circ B)$

4.7.

4.8.

4.9.

4.10.

4.11.

5. Logikai törvények; logikai következmények

5.1.

(a) **1.** Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$, akkor $\models A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$.
Minden I interpretációban, Θ értékelés esetén:
ha $I \models A_i\Theta(i = 1, ..n)$, akkor $I \models B\Theta$ (a feltétel miatt).
$\| (A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \supset B)\Theta \|_I = \| (A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n)\Theta \supset B\Theta \|_I = \| A_1\Theta \wedge A_2\Theta \wedge ... \wedge A_n\Theta \supset B\Theta \|_I =?$.
Ha $\| A_1\Theta \wedge A_2\Theta \wedge ... \wedge A_n\Theta \|_I = 0$, akkor 1.
Ha $\| A_1\Theta \wedge A_2\Theta \wedge ... \wedge A_n\Theta \|_I = 1$, ezért $\| A_i\Theta \|_I = 1 (i = 1, ..n)$.
Ekkor $\| B\Theta \|_I = 1$, és $\| A_1\Theta \wedge A_2\Theta \wedge ... \wedge A_n\Theta \supset B\Theta \|_I = 1$.

2. Ha $\models A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$, akkor $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$.
Minden I interpretációban, Θ értékelés esetén:
$\| (A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \supset B)\Theta \|_I = 1$ (a feltétel miatt).
Ezért $\| (A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n)\Theta \supset B\Theta \|_I = 1$.
Legyen I olyan interpretáció, Θ olyan értékelés, hogy $I \models A_i\Theta(i = 1, ..n)$.
$\| A_i\Theta \|_I = 1$, ezért $\| A_1\Theta \wedge ... \wedge A_n\Theta \|_I = 1$,
és a feltétel miatt: $\| A_1\Theta \wedge ... \wedge A_n\Theta \supset B\Theta \|_I = 1$, ezért $\| B\Theta \|_I = 1$.
Tehát $I \models B\Theta$.

5.2.

5.3.

5.4. Nem logikai törvények:

(b) Tekintsük az $\Omega =< \{\Pi\}, \emptyset, \emptyset, \{P^{(\Pi)}\} >$ nyelv következő interpretációját:
$D_{\Pi x} \rightleftharpoons \{a, b\}$.
$\hat{\mathrm{P}}\mathrm{r}(P) \rightleftharpoons \tilde{\mathrm{P}}$, ahol $\tilde{\mathrm{P}}(a) = 1$ és $\tilde{\mathrm{P}}(b) = 0$.
Ebben az interpretációban $\parallel \exists x P(x) \parallel= 1$, mert $\parallel P(x)^x_{\underline{a}} \parallel = \tilde{\mathrm{P}}(a) = 1$, és $\parallel \forall x P(x) \parallel= 0$, mert $\parallel P(x)^x_{\underline{b}} \parallel = \tilde{\mathrm{P}}(b) = 0$.
Ezért $\exists x P(x) \supset \forall x P(x)$ ebben az interpretációban hamis, így nem logikai törvény.

(Hasonló tulajdonságú interpretációra további példák:
Legyen $D_{\Pi x} = N$, $\hat{\mathrm{P}}\mathrm{r}(P) = \tilde{\mathrm{P}}$, ahol a $\tilde{\mathrm{P}}(n)$ jelentse azt, hogy n páros $(n \in N)$.
$\parallel \exists x P(x) \parallel= 1$, mert $\tilde{\mathrm{P}}(2) = 1$, és $\tilde{\mathrm{P}}(b) = 0$, tehát a formula nem logikai törvény.
Tekintsünk most olyan M modellt, amelyben x, y embereket jelöl, a P(x) jelentése: "x fiú".
Ekkor létezik a, b, hogy $\tilde{\mathrm{P}}(a) = 1$ és $\tilde{\mathrm{P}}(b) = 0$, tehát a formula nem logikai törvény.)

(c) Tekintsünk egy olyan M modellt, amelyben x, y értékei N számok, a P(x, y) reláció pedig: x<y.
Ekkor $M \models \forall x \exists y P(x, y)$ (Minden számnál van nagyobb természetes szám.) és
nem igaz az, hogy $M \models \exists y \forall x P(x, y)$ (Van olyan természetes szám, amely minden számnál nagyobb.)
Ezért a tekintett formula nem logikai törvény.

5.5.

Nem igaz,hogy logikai ellentmondás: olyan interpretációt kell találni, amikor igaz.
Például: $P(x, y) : x \geq y$
Objektumtartomány: N

5.6.

(a) Nem.

(b) Igen. Ha $Q(\underline{a}, \underline{a})$ hamis, akkor az implikáció minden esetben igaz.

5.7.

5.8.

12. logikai törvény:

$\neg$	$(A$	$\vee$	$B)$	$\equiv$	$\neg A$	$\vee$	$\neg B$
0	1	1	1	**1**	0	0	0
0	1	1	0	**1**	0	0	1
0	0	1	1	**1**	1	0	0
1	0	0	0	**1**	1	1	1

A Quine-táblázat csupa 1-est tartalmaz, ezért logikai törvény.

66. logikai törvény:
$\models \exists x(A(x) \wedge B(x)) \supset \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$.
Tetszőleges I interpretáció, Θ értékelés esetén vizsgálni kell a
$\| (\exists x(A(x) \wedge B(x)) \supset \exists x A(x) \wedge \exists x B(x))\Theta \|_I=$
$=\| (\exists x(A(x) \wedge B(x)))\Theta \supset (\exists x A(x))\Theta \wedge (\exists x B(x))\Theta \|_I=$
$=\| (\exists x(A(x)(\Theta - x) \wedge B(x)(\Theta - x)) \supset \exists x(A(x)(\Theta - x)) \wedge \exists x(B(x)(\Theta - x)) \|_I=$
$=\| \exists x(A'(x) \wedge B'(x)) \supset \exists x A'(x) \wedge \exists x B'(x) \|_I$ értékét.
Ha $\| \exists x(A'(x) \wedge B'(x)) \|_I= 0$, akkor az implikáció értéke 1.
Ha $\| \exists x(A'(x) \wedge B'(x)) \|_I= 1$, akkor van olyan $a \in D_\Pi$, hogy $\| (A'(x) \wedge B'(x)_{\underline{a}}^{x}) \|_I=\| A'(x)_{\underline{a}}^{x} \wedge B'(x)_{\underline{a}}^{x} \|_I= 1$.
Ekkor $\| \exists x A'(x) \|_I= 1$ és $\| \exists x B'(x) \|_I= 1$, így $\| \exists x A'(x) \wedge B'(x) \|_I= 1$.
Az implikáció értéke itt is 1.

5.9.

(a)

$\neg$	A	$\vee$	B	C	$\supset$	$\neg B$	A	$\supset$	$\neg C$
1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0	0		0
0	1	0	0	0		1	1		1
0	1	0	0	1		1	1		0
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1		0

$(\neg A \vee B) \wedge (C \supset \neg B) \supset (A \supset \neg C)$.

5.10.

(a) P_1: Lacinak nincs kocsija.
P_2: Éva csak azokat a fiúkatszereti, akiknek van kocsija.
K: Tehát Éva nem szereti Lacit.

Készítsünk alkalmas logikai nyelvet.
x,y,z...: fiúkat jelölő változók;
$K(x)$ jelentse, hogy x-nek van kocsija;
$E(x)$ jelentse, hogy Éva szereti x-et;

l konstans, Laci.
Ezen a nyelven formalizálva az állításokat:
$P_1 : \neg K(l)$
$P_2 : \forall x(E(x) \supset K(x))$
$K : \neg E(l)$
Rögzítsünk tetszőlegesen egy olyan I interpretációt, melyben
$\| P_1 \|_I = 1$ és $\| P_2 \|_I = 1$.
Ekkor $\| P_1 \|_I = 1$ miatt $\| \neg K(l) \|_I = 1$, ezért $\| K(l) \|_I = 0$
$\| P_2 \|_I = 1$ miatt minden $a \in D$-re, így l-re is
$\| (E(x) \supset K(x))^x_l \|_I = 1$. $\| K(l) \|_I = 0$ miatt ez a konjunkció akkor igaz, ha $\| E(l) \|_I = 0$.
Azaz $\| \neg E(l) \|_I = 1$.

6. A logikai törvények néhány alkalmazása

6.1. Formulák prenex alakja:

(a) $\exists x \forall y P(x,y) \vee \exists x \forall y Q(x,y)$
változó tiszta alakra hozása:
$\exists x \forall y P(x,y) \vee \exists u \forall v Q(u,v)$
Egyoldali kvantorkiemelésre vonatkozó (55.-62.) logikai törvények alkalmazása:
58. törvény alkalmazása: $\exists x \exists u(\forall y P(x,y) \vee \forall v Q(u,v))$
57. törvény alkalmazása: $\exists x \exists u \forall y \forall v(P(x,y) \vee Q(u,v))$.

(b) $\exists x \forall y P(x,y) \supset \exists x \forall y Q(x,y)$
változó tiszta alakra hozása:
$\exists x \forall y P(x,y) \supset \exists u \forall v Q(u,v)$
Egyoldali kvantorkiemelésre vonatkozó (55.-62.) logikai törvények alkalmazása:
$\forall x(\forall y P(x,y) \supset \exists u \forall v Q(u,v))$
$\forall x \exists y(P(x,y) \supset \exists u \forall v Q(u,v))$
$\forall x \exists y \exists u(P(x,y) \supset \forall v Q(u,v))$
$\forall x \exists y \exists u \forall v(P(x,y) \supset Q(u,v))$

(c) $\forall x \exists y \forall u \exists v((P(x,y) \vee Q(u)) \supset Q(v))$

(d) $\exists x \exists y \exists u \forall v \exists w((P(x,y) \supset Q(u)) \supset P(v,w))$

6.2. Konjunktív és diszjunktív normálforma:

(a) $A \wedge B$

(b) $C \vee (A \wedge B); (C \vee A) \wedge (C \vee B)$

(c) $(C \supset A) \supset (\neg(B \vee C) \supset A)$
implikáció eltávolítása:

22. törvény alkalmazása: $\neg(\neg C \vee A) \vee (\neg\neg(B \vee C) \vee A)$
24. törvény alkalmazása: $\neg(\neg C \vee A) \vee ((B \vee C) \vee A)$
12. törvény alkalmazása: $(C \wedge \neg A) \vee ((B \vee C) \vee A)$
2. törvény alkalmazása: $(C \wedge \neg A) \vee B \vee C \vee A$
elnyelés: $(A \vee C) \vee B \vee C$
8. törvény alkalmazása: $A \vee B \vee C$. Ez konjunktív és diszjunktív normálforma is.

(d) $B \vee \neg C$

(e) C

7. A természetes technika

7.1.

6. logikai törvény: $\vdash A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Itt a fő logikai jel $\equiv$, így az $\equiv$-bevezetés szerint elég megállapítani
(1) $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
és
(2) $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$.
Az első szekvencia baloldalán diszjunkció áll, ezért itt $\vee$-eltávolítást kell alkalmazni. Ezek szerint (1) helyett elegendő igazolni
(3) $A \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
és
(4) $B \wedge C \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
A (3) szekvencia helyett elegendő igazolni:
(5) $A \vdash A \vee B$
(6) $A \vdash A \vee C$. Ezek a szekvenciák az $A \vdash A$ azonosságtörvényből és a $\vee$-bevezetés szabályából adódnak.
A (4) szekvencia esetén alkalmazzuk a $\wedge$-eltávolítás szabályát és helyette bizonyítjuk
(7) $B, C \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
A $\wedge$-bevezetést alkalmazva elegendő igazolni
(8) $B, C \vdash A \vee B$
és
(9) $B, C \vdash A \vee C$.
Ezeket a szekvenciákat az azonosság törvénye és a $\vee$-bevezetés szabálya igazolja.
Ezzel bebizonyítottuk (3) és (4)-et, tehát (1)-et is.
A (2) szekvencia igazolásához alkalmazzuk a $\wedge$-eltávolítást
(10) $A \vee B, A \vee C \vdash A \vee (B \wedge C)$.
Alkalmazva $\vee$-eltávolítást (10) baloldalára négyszer, az alábbi szekvenciákhoz jutunk:

(11) $A, A \vdash A \vee (B \wedge C)$,
(12) $B, A \vdash A \vee (B \wedge C)$,
(13) $A, C \vdash A \vee (B \wedge C)$,
(14) $B, C \vdash A \vee (B \wedge C)$.
A (11)-(13) szekvenciák teljesülnek a $\vee$-bevezetés szabálya miatt, a (14) igazolása céljából a
$B, C \vdash B$ és $B, C \vdash C$ szekvenciákból $\wedge$-bevezetéssel nyerjük:
$B, C \vdash B \wedge C$,
ahonnan (14) következik $\vee$-bevezetéssel.
Ezzel befejeztük az eredeti szekvencia bizonyítását.

53. logikai tövény: $\vdash \exists x A(x) \equiv \neg \forall x \neg A(x)$.
Az $\equiv$-bevezetés szabálya alapján elegendő igazolni
(1) $\exists x A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$
és
(2) $\neg \forall x \neg A(x) \vdash \exists x A(x)$.
Az (1) szekvencia baloldalán szerepel egzisztenciális kvantor, ezért alkalmazzuk a $\exists$-eltávolítást:
(3) $A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$.
A jobboldali negáció miatt érdemes alkalmazni $\neg$-bevezetést. A következő feladat:
$A(x), \forall x \neg A(x) \vdash$ - ellentmondás?
A hipotézisek elemzése mutatja, hogy belőlük mind $A(x)$, mind $\neg A(x)$ levezethető:
(4) $A(x), \forall x \neg A(x) \vdash A(x)$,
(5) $A(x), \forall x \neg A(x) \vdash \neg A(x)$.
A (4) teljesül az azonosság törvénye alapján, (5) pedig azért igaz, mert az $A(x), \forall x \neg A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$ szekvenciából következik $\forall$-eltávolítással. Ezzel bebizonyítottuk az (1) szekvenciát. A (2) igazolásában a "nem direkt" bizonyítás alábbi fogása segít.
Alkalmazzuk (2)-re a $\neg$-eltávolítást és bizonyítsuk be, hogy
(6) $\neg \forall x \neg A(x) \vdash \neg\neg \exists x A(x)$.
A $\neg$-bevezetés segítségével próbáljuk bebizonyítani, hogy
$\neg \forall x \neg A(x), \neg \exists x A(x) \vdash$ ellentmondás.
Ismert, hogy $\neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$ logikai törvény. Közvetlenül nem használhatjuk ezt az összefüggést (mivel még nem igazoltuk a levezethetőségét), de innen meríthetünk ötletet, hogy a keresett ellentmondást a $\neg \forall x \neg A(x)$ és $\forall x \neg A(x)$ formulák eredményezhetik. Egyrészt teljesül:
$\neg \forall x \neg A(x), \neg \exists x A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$ (azonosság-törvény).
Másrészt bizonyítsuk be, hogy
(7) $\neg \forall x \neg A(x), \neg \exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$.
A jobb oldal ténylegesen csak a $\neg \exists x A(x)$ hipotézisből következik.
A $\forall$-bevezetést alkalmazva
(8) $\neg \exists x A(x) \vdash \neg A(x)$.
A $\neg$-bevezetés segítségével tovább redukáljuk a feladatot:

$\neg\exists x A(x), A(x) \vdash$ ellentmondás?
Az elletmondáshoz úgy jutunk, hogy a hipotézisekből levezethető egyrészt $\neg\exists x A(x)$, másrészt $A(x)$, de ekkor a $\exists$-bevezetés szabálya alapján levezethető belőlük $\exists x A(x)$ is.

7.2.

7.3.

7.4.

(a) nem
(b) igen
(c) igen
(d) igen
(e) nem
(f) nem

7.5.

(a) Alkalmazva az $\supset$-bevezetés szabályát háromszor, megkapjuk az egyszerűbb bizonyítandó szekvenciát:
$A \supset (B \supset C), B, \neg C \vdash \neg A$.
A $\neg$-bevezetés szabályát felhasználva, elegendő A-t hozzácsatolni a szekvencia feltételeihez és valamilyen ellentmondást levezetni:
$A \supset (B \supset C), B, \neg C, A \vdash$ ellentmondás?
A hipotézisekből levezethető C és $\neg C$. Mivel $\neg C$ szerepel a hipotézisek között, az azonosság törvénye szerint teljesül, hogy
$A \supset (B \supset C), B, \neg C, A \vdash \neg C$.
A C formula levezetése céljából alkalmazzuk többször az azonosság és az $\supset$-eltávolítás törvényét:
$A \supset (B \supset C), B, \neg C, A \vdash A \supset (B \supset C)$
$A \supset (B \supset C), B, \neg C, A \vdash A$
$A \supset (B \supset C), B, \neg C, A \vdash B \supset C$
$A \supset (B \supset C), B, \neg C, A \vdash B$
$A \supset (B \supset C), B, \neg C, A \vdash C$
Ezzel befejeztük a feladat megoldását.

(b) A levezetés direkt formáját választjuk, "felülről lefelé" alkalmazva a természetes levezetés technikája szabályait.
1. $A, \neg A, \neg B \vdash A$
2. $A, \neg A, \neg B \vdash \neg A$
3. $A, \neg A \vdash \neg\neg B$ ($\neg$-bevezetés 1. és 2.-ből)
4. $A, \neg A \vdash B$ ($\neg$-eltávolítás 3.-ból)
5. $\vdash A \supset (\neg A \supset B)$ ($\supset$-bevezetés kétszer).

(c) Helyette igazoljuk: $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$.
Alkalmazva a $\neg$-bevezetést, mutassuk meg, hogy a $\neg(A \vee \neg A)$ hipotézis ellentmondáshoz vezet, mégpedig:
$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$
és
$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg\neg A$.
Az első szekvenciát visszavezetjük ($\neg$-bevezetéssel) két szekvenciához:
$\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)$
és
$\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A$.
A felső szekvencia nyilvánvaló, a második a $\neg(A \vee \neg A), A \vdash A$ helyes szekvenciából nyerhető $\vee$-bevezetéssel.
Hasonlóan bizonyítható a
$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg\neg A$ szekvencia az alábbi szekvenciák segítségével:
$\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash \neg(A \vee \neg A)$,
$\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash A \vee \neg A$.