Matematikai logika

Nagy Károly

2009

Nyíregyházi Főiskola
Matematika és Informatika Intézet

Tartalomjegyzék

1. Elsőrendű nyelvek

1.1. Definíció. *Az* $\Omega =< \mathcal{S}rt,\ \mathcal{C}nst,\ \mathcal{F}n,\ \mathcal{P}r >$ *komponensekből álló rendezett négyest* ***elsőrendű nyelvnek*** *nevezzük, ha teljesülnek a következők:*

a.) $\mathcal{S}rt$ *egy nem üres halmaz, elemei a nyelv típusai. Minden* $\pi \in \mathcal{S}rt$ *típushoz szimbólumok megszámlálható rendszere tartozik, melyeket* π*-típusú változóknak nevezünk. Ezek:* $x_1^\pi, x_2^\pi, ...$ *vagy csak egyszerűen:* $x_1, x_2, ...$

b.) $\mathcal{C}nst$ *az* Ω *nyelv konstansainak a halmaza (lehet üres halmaz is). Minden* $c \in \mathcal{C}nst$ *konstansnak valamely* π*-típushoz kell tartoznia.*

c.) $\mathcal{F}n$ *az* Ω *nyelv függvényszimbólumainak (függvényjeleinek) halmaza (lehet üres halmaz is). Minden* $f \in \mathcal{F}n$ *függvényjelnek meg kell adni az alakját. Azaz* $f^{(\pi_1,\pi_2,...,\pi_n \to \pi)}$ *ahol* $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n, \pi \in \mathcal{S}rt$ *típusok és* $n > 0$*. Ekkor* f*-t* n*-változós függvényszimbólumnak nevezzük.*

d.) $\mathcal{P}r$ *nem üres halmaz, az* Ω *nyelv predikátumszimbólumainak (predikátumbetűinek) halmaza. Minden* $P \in \mathcal{P}r$ *predikátumszimbólumhoz hozzárendeljük az alakját, azaz* $P^{(\pi_1,\pi_2,...,\pi_n)}$ *ahol* $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n, \in \mathcal{S}rt$ *típusok és* $n \geq 0$*. Ekkor* P*-t* n*-változós predikátumszimbólumnak nevezzük. Ha* $n = 0$*, úgy a nullváltozós predikátumbetűt propozicionális betűnek is nevezzük.*

1.2. Definíció. *(Induktív definíció) az* Ω ***nyelv*** π***-típusú termjei****.*
Bázis:

a.) Az Ω*-nyelv minden* π*-típusú változója* π*-típusú term.*

b.) Az Ω*-nyelv minden* π*-típusú konstansa* π*-típusú term.*

Indukciós lépés:

c.) Ha $f \in \mathcal{F}n$ *és az* f *függvényszimbólum alakja* $f^{(\pi_1,\pi_2,...,\pi_n \to \pi)}$ *és* t_i *pedig* π_i*-típusú termek* $(i = 1, 2, ..., n)$ *akkor*

$$f(t_1, t_2, ..., t_n)$$

π*-típusú term.*

Megjegyzés: Minden term a következő két alak egyikét veszi fel.

A.) Az Ω nyelv konstansa vagy változója.

B.) Az indukciós lépés véges sokszori alkalmazásával nyert termek.

1.3. Definíció. *(Az Ω nyelv atomi formulái) Ha a $P \in \mathcal{P}r$ predikátumbetű alakja $P^{(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n)}$ és t_i pedig π_i-típusú termek $(i = 1, 2, ..., n)$ akkor*

$$P(t_1, t_2, ..., t_n)$$

kifejezést ***atomi formulának*** *nevezzük.*

Speciálisan, ha P propozicionális betű, úgy atomi formula.

Az Ω nyelv szimbólumai:

Logikai összekötőjelek:

jele	neve	jelentése
$\wedge$	konjunkció	,,és"
$\vee$	diszjunkció	,,vagy"
$\neg$	negáció	,,nem igaz, hogy ..."
$\supset$	implikáció	,,ha ..., akkor ..."

Kvantorok:

jele	neve	jelentése
$\forall$	univerzális kvantor	,,minden"
$\exists$	egzisztenciális kvantor	,,létezik"

1.4. Definíció. *(Induktív definíció) az Ω* ***nyelv formulái****.*

Bázis:

a.) Minden atomi formula az Ω nyelv formulája.

Indukciós lépés:

b.) Ha A és B az Ω nyelv formulája, akkor

$$(A \wedge B),\ (A \vee B),\ (A \supset B),\ \neg A$$

is az Ω nyelv formulája.

c.) Ha A formula és x tetszőleges változó az Ω nyelvben, akkor a

$$\forall x A,\ \exists x A$$

kifejezések szintén formulák.

Megjegyzés: Minden formula a következő két alak egyikét veszi fel.

A.) Az Ω nyelv atomi formulája.

B.) Az indukciós lépés véges sokszori alkalmazásával nyert formulák.

Példa: Nem formulák:

$((A \wedge B) \vee C) \supset$

$(A \supset B) \wedge \exists x$

$A \exists x B(x)$

$\exists A$

$A \wedge B \vee C$

1.5. Definíció. *A termek és a formulák az Ω nyelv kifejezései.*

Az A formula minden olyan részét, amely maga is formula az A formula ***részformulájának*** *nevezzük.*

A t term minden olyan részét, amely maga is term a t term ***résztermjének*** *nevezzük.*

Példa: $\forall x(A(x) \wedge \neg \exists y B(y))$ részformulái:

$$A(x),\ B(y),\ \exists y B(y),\ \neg \exists y B(y),\ (A(x) \wedge \neg \exists y B(y)),\ \forall x(A(x) \wedge \neg \exists y B(y))$$

Más jelsorozatok nem részformulák.

1.6. Definíció. *(szemantikai definíció) Egy A formulában szereplő logikai szimbólumok számát* ***logikai összetettségnek*** *nevezzük és $l(A)$-val jelöljük. Minden atomi formula logikai összetettsége 0.*

1.7. Definíció. *(szemantikai definíció) Egy t termben szereplő függvényszimbólumok számát a t term* ***funkcionális összetettségnek*** *nevezzük és $\tilde{l}(t)$-vel jelöljük. Minden konstans, változó funkcionális összetettsége 0.*

Megjegyzés: A logikai összetettség, s a funkcionális összetettség fogalma induktív definícióval is megadható. (Lásd előadás.)

Megállapodások rövidítésekről:

a.) Külső zárójelek elhagyhatóak.

b.) Használjuk az ekvivalencia jelet:

$$(A \equiv B) := (A \supset B) \wedge (B \supset A)$$

c.) a logikai jelek prioritása növekvő sorrendben:

$$\equiv \quad \supset \quad \begin{matrix} \wedge \\ \\ \vee \end{matrix} \quad \neg \quad \begin{matrix} \forall \\ \\ \exists \end{matrix}$$

d.) A pont használat konvenciója: jobbról álló pont jelöli a zárójelen belüli leggyengébb logikai jelet.

Példa:

a.)

$$P \supset (Q \vee R \equiv \neg R \supset \neg P)$$

rövidített formula jelentése:

$$(P \supset ((Q \vee R) \equiv (\neg R \supset \neg P)))$$

b.)

$$P \supset (Q \vee R \supset .\neg R \supset \neg P)$$

rövidített formula jelentése:

$$(P \supset ((Q \vee R) \supset (\neg R \supset \neg P)))$$

c.)

$$(P \supset Q \supset .R) \vee P \supset Q$$

rövidített formula jelentése:

Megjegyzés: A logikai összetettség, s a funkcionális összetettség fogalma induktív definícióval is megadható. (Lásd előadás.)

$$((((P \supset Q) \supset R) \vee P) \supset Q)$$

Példa: logikai nyelvekre

a.) nulladrendű logikai nyelv (a kijelentés logika nyelve)

$$\Omega =< \emptyset, \emptyset, \emptyset, \mathcal{P}r >$$

és minden $p \in \mathcal{P}r$ predikátumbetű propozicionális betű. (Tehát, nincsenek típusok, konstansok és függvényszimbólumok.)

Példa: Elsőrendű logikai nyelvre

a.) A $\mathcal{G}eom$ nyelv:

$\mathcal{S}rt := \{pt, et, st\}$,

a pt típushoz tartozó változók: A, B, $C, ...$,

az et típushoz tartozó változók: a, b, $c, ...$,

az st típushoz tartozó változók: α, β, $\gamma, ...$,

$\mathcal{C}nst := \emptyset$ (konstans nincs),

$\mathcal{F}n := \emptyset$ (függvényszimbólum nincs),

$\mathcal{F}n := \{P^{(pt,pt)}, Q^{(pt,et)}, R^{(pt,st)}\}$.

b.) Az $\mathcal{A}r$ nyelv:

$\mathcal{S}rt := \{szt\}$,

az szt típushoz tartozó változók: x, y, z, ...,

$\mathcal{C}nst := \{0\}$ (konstans a 0),

$\mathcal{F}n := \{f^{(szt \to szt)}, g^{(szt,szt \to szt)}, h^{(szt,szt \to szt)}\}$,

$\mathcal{F}n := \{P^{(szt,szt)}\}$.

Megjegyzés: A példákban még csak szimbólumaink vannak, a szimbólumokat majd jelentéssel fogjuk feltölteni (lásd a 2. fejezetet).

1.8. Definíció. *A $\forall xA$, $\exists xA$ formulákban a $\forall x$, $\exists x$ jelsorozatot **kvantoros előtagnak**, az x változót a **kvantoros előtag változójának**, az A formulát a **kvantoros előtag hatáskörének** nevezzük.*

1.9. Definíció. *(szemantikai definíció) Azt mondjuk, hogy egy változó egy formulában **kötött előfordulásu**, ha szerepel egy rajta ható kvantor hatáskörében. Egy változó valamely előfordulását egy formulában **szabadnak** nevezzük, ha nem kötött.*

Egy változó a formula paramétere (szabad változója), ha van legalább egy szabad előfordulása.

Jelölés: $\mathcal{F}v(A)$ az A formula szabad változóinak halmaza.

Megjegyzés: A változó kötött és szabad előfordulása fogalom induktív definícióval is megadható. (Lásd előadás.)
Példa: A $\forall x(P(x) \vee Q(y))$ formulában a $\forall x$ kvantoros előtag hatásköre a $(P(x) \vee Q(y))$ részformula, így x előfordulása kötött lesz, míg y előfordulása szabad lesz.

1.10. Definíció. *Az Ω nyelv szabad változót tartalmazó formuláit* ***nyitott formuláknak****, szabad változót nem tartalmazó formuláit* ***zárt formuláknak, mondatoknak*** *nevezzük.*

1.11. Definíció. *Ha egy formulában egy változó kötött, akkor át lehet jelölni, ha az átjelölés után egyetlen részformula szabad változója sem válik kötötté. Ilyenkor* ***szabályosan végrehajtott kötött változó átjelölésről*** *beszélünk.*

Ha az A és az A' formulák csak szabályosan végrehajtott kötött változó átjelölésben különböznek egymástól, akkor ***kongruens formuláknak*** *nevezzük őket, ill. azt is mondjuk, hogy A* ***az A' variánsa****.*

Jelölés: $A \approx A'$.

Példa: A $\forall x(P(x) \vee Q(y))$ formula kötött változó átjelölései:

a.) $\forall y(P(y) \vee Q(y))$ nem szabályosan végrehajtott kötött változó átjelölés, (y változó szabad volt, s kötött lett.)

b.) $\forall z(P(z) \vee Q(y))$ szabályosan végrehajtott kötött változó átjelölés. (y változó szabad maradt.)

1.12. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy formula* ***változó-tiszta****, ha benne a kvantorok különböző változókat kötnek meg és a kötött változók különböznek a szabad változóktól.*

1.13. Definíció. *A* ***formális helyettesítést*** *megadhatjuk táblázattal*

$$\Theta := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ t_1 & t_2 & ... & t_n \end{pmatrix},$$

ahol a felsősorban változók, az alsó sorban termek szerepelnek. A Θ helyettesítés során az x_i változóba helyettesítjük a t_i termet.

A Θ helyettesítés értelmezési tartománya: $\mathcal{D}om\ \Theta := \{x_1, x_2, ..., x_n\}$,
a Θ helyettesítés érték készlete: $\mathcal{R}ng\ \Theta := \{t_1, t_2, ..., t_n\}$.

Megjegyzés: A formális helyettesítést induktív definícióval adjuk meg (lásd előadás).

Fontos, hogy csak szabad változóba helyettesíthetünk.

1.14. Definíció. *A* Θ *helyettesítés* ***megengedett*** *a* K *kifejezés számára, ha a helyettesítés után a helyettesített termek egyetlen szabad változója sem válik kötötté.*

Ha az A *formula esetén egy helyettesítés nem megengedett, akkor az* A *formula valamely* A' *variánsával megengedetté tehető. Ekkor* ***szabályos helyettesítésről*** *beszélünk. Jelölés:* $[A\Theta]$.

2. A nyelv szemantikája

2.1. Definíció. *Adott egy Ω elsőrendű nyelv. Az Ω* ***nyelv hordozója*** *egy olyan $\mathcal{D}$ függvény, amely minden $\pi \in \mathcal{S}rt$ típushoz hozzárendel egy nem üres $\mathcal{D}_\pi$ halmazt, melyet a π típus* ***objektum tartományának*** *nevezünk. ($\mathcal{D}_\pi$ nem más mint a π-típusu változók lehetséges értékeinek a halmaza, azaz a π típusu ,,objektumok" halmaza.)*

2.2. Definíció. *Az Ω elsőrendű nyelv I* ***interpretációja (modellje)*** *az $I :=< \mathcal{D}, \hat{\mathcal{C}nst}, \hat{\mathcal{F}n}, \hat{\mathcal{P}r} >$ négyes, amely teljesíti a következőket:*

a.) $\mathcal{D} : \pi \mapsto \mathcal{D}_\pi$, tehát a nyelv hordozója $\mathcal{D}$ minden π típushoz hozzárendeli az objektum tartományát $\mathcal{D}_\pi$-t.

b.) $\hat{\mathcal{C}nst} : c \mapsto \hat{c}$, azaz minden $c \in \mathcal{C}nst$ π-típusu konstansnak megfeleltet egy $\hat{c} \in \mathcal{D}_\pi$ π-típusu objektumot.

c.) $\hat{\mathcal{F}n} : f \mapsto \hat{f}$, azaz minden $f \in \mathcal{F}n$ függvényszimbólumnak egy konkrét $\hat{f}$ függvényt feleltet meg. Azaz, ha az f alakja $f^{(\pi_1,\pi_2,\ldots\pi_n \to \pi)}$ úgy

$$\hat{f} : \mathcal{D}_{\pi_1} \times \mathcal{D}_{\pi_2} \times \ldots \times \mathcal{D}_{\pi_n} \to \mathcal{D}_\pi$$

alaku konkrét függvény.

d.) $\hat{\mathcal{P}r} : P \mapsto \hat{P}$, azaz minden $P \in \mathcal{P}r$ predikátumszimbólumnak egy konkrét $\hat{P}$ predikátumot feleltet meg. Azaz, ha az P alakja $P^{(\pi_1,\pi_2,\ldots\pi_n)}$ úgy

$$\hat{P} : \mathcal{D}_{\pi_1} \times \mathcal{D}_{\pi_2} \times \ldots \times \mathcal{D}_{\pi_n} \to \{0, 1\}$$

alaku konkrét függvény. Ha P propozicionális betű, akkor $\hat{P}$ vagy 0 vagy 1.

Megjegyzés: A nyelv modellje vagy interpretációja a nyelv szimbólumait (jeleit) valódi tartalommal (jelentéssel) tölti fel.

A 0, 1 szimbólumokat **logikai értékeknek** nevezzük, használjuk még a **hamis, igaz** elnevezésekez is.
Példa:

a.) A $\mathcal{G}eom$ nyelv modellje (a szimbólumokat jelentéssel töltjük fel):

a nyelv hordozójának $\mathcal{D}$-nek a megadása:

$\mathcal{D}_{pt}$:= a tér pontjainak halmaza,

$\mathcal{D}_{et}$:= a tér egyeneseinek halmaza,

$\mathcal{D}_{st}$:= a tér síkjainak halmaza.

$\hat{\mathcal{C}nst}$, $\hat{\mathcal{F}n}$ nincs, mert $\mathcal{C}nst = \mathcal{F}n = \emptyset$ volt.

$\hat{\mathcal{P}r}$ megadása:

$\hat{P}(A, B) := (A = B)$ azaz az A pont egyenlő a B ponttal,

$\hat{Q}(A, e) := (A \in e)$ azaz az A pont az e egyenesen van,

$\hat{R}(A, \alpha) := (A \in \alpha)$ azaz az A pont az α síkon van.

b.) A $\mathcal{A}r$ nyelv $\mathbb{N}$ modellje:

a nyelv hordozójának $\mathcal{D}$-nek a megadása:

$\mathcal{D}_{szt} := \mathbb{N}$ a természetes számok halmaza,

$\hat{\mathcal{C}nst}$ megadása:

$\hat{0} \in \mathbb{N}$ a nulla természetes szám, melyet egyszerűen csak 0-val is szoktunk jelölni (a 0 szimbólumhoz gyermekkorunkban hozzárendelték a nulla számot).

$\hat{\mathcal{F}n}$ megadása:

$\hat{f}(x) := Sx$ azaz az x rákövetkezője „$x + 1$" (de ez csak idézőjelben, mert 1 sincs csak $S0$),

$\hat{g}(x, y) := x + y$,

$\hat{h}(x, y) := x \cdot y$.

$\hat{\mathcal{P}r}$ megadása:

$\hat{P}(x, y) := (x = y)$ azaz az x természetes szám egyenlő az y természetes számmal.

Megjegyzés: Az $\mathcal{A}r$ nyelvnek más modellje is van például a $\mathcal{D}_{szt} = \mathbb{Z}($ vagy $\mathbb{R})$-t is írhattunk volna.

2.3. Definíció. *$\mathcal{C}nst(D) := \mathcal{C}nst \bigcup (\cup_{\pi \in \mathcal{S}rt} \mathcal{D}_\pi)$ segítségével új nyelv adható meg, ez*

$$\Omega(\mathcal{D}) :=< \mathcal{S}rt,\ Cnst(D),\ Fn,\ Pr > .$$

Megjegyzés: Az $\Omega(\mathcal{D})$ az Ω-tól, csak új konstansok jelenlétében különbözik. Például az $\mathcal{A}r$ nyelvben most már leírhatjuk azt, hogy 2, eddig csak azt írhattuk le, hogy $SS0$.

2.4. Definíció. *(Induktív definíció) az Ω **nyelv értékelt termjei**. Legyen adott az Ω nyelv egy I interpretációja, a t term I-beli értékét jelölje $|t|_I$. Ha a t típusa π, úgy $|t|_I$ a $\mathcal{D}_\pi$ objektum tartomány egy objektuma.*

Bázis:

a.) Ha $c \in Cnst$, úgy $|c|_I := \hat{c}$.

b.) Ha $a \in \mathcal{D}_\pi$, úgy $|a|_I := a$.

Indukciós lépés:

c.) Ha a term alakja $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ ahol a $t_1, t_2, ..., t_n$ már értékelt termek, a $|t_1|_I, |t_2|_I, ..., |t_n|_I$ értékekkel, úgy

$$|f(t_1, t_2, ..., t_n)|_I := \hat{f}(|t_1|_I, |t_2|_I, ..., |t_n|_I).$$

Megjegyzés: Változót tartalmazó termet nem lehet értékelni.

2.5. Definíció. *(Induktív definíció) az Ω* ***nyelv értékelt formulái****. Legyen adott az Ω nyelv egy I interpretációja. Ha az A az I-ben értékelt formula és A igaz az I interpretációban, akkor ezt $I \models A$-val jelöljük.*

Bázis:

a.) Ha az A formula atomi formula, azaz $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ alakú, ahol a $t_1, t_2, ..., t_n$ már értékelt termek, a $|t_1|_I, |t_2|_I, ..., |t_n|_I$ értékekkel, úgy

$$I \models A \quad \textit{pontosan akkor, ha} \quad \hat{P}(|t_1|_I, |t_2|_I, ..., |t_n|_I) = 1.$$

Indukciós lépés:

b.)

$$I \models (A \wedge B) \quad \textit{pontosan akkor, ha} \quad I \models A \textit{ és } I \models B,$$

c.)

$$I \models (A \vee B) \quad \textit{pontosan akkor, ha} \quad I \models A \textit{ vagy } I \models B,$$

d.)

$$I \models (A \supset B) \quad \textit{pontosan akkor, ha} \quad I \models A \textit{ akkor } I \models B,$$

e.)

$$I \models \neg A \quad \textit{pontosan akkor, ha nem igaz, hogy} \quad I \models A,$$

f.)

$$I \models \forall x A \quad \textit{pontosan akkor, ha minden } a \in \mathcal{D}_\pi \textit{ esetén } I \models A\begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix},$$

g.)

$$I \models \exists x A \quad \textit{pontosan akkor, ha van olyan } a \in \mathcal{D}_\pi\textit{, hogy } I \models A\begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix}.$$

Az A formulát I-ben hamis formulának nevezzük, ha $I \models \neg A$.

2.6. Definíció. ***Logikai összekötő jelek értelmezése.***

a.) Az $(A \wedge B)$ *formula pontosan akkor igaz, ha az* A *és a* B *formula egyszere igaz.*

b.) Az $(A \vee B)$ *formula pontosan akkor igaz, ha az* A *és a* B *formulák közül legalább az egyik igaz.*

c.) Az $(A \supset B)$ *formula pontosan akkor hamis, ha az* A *igaz és a* B *hamis formula.*

d.) $\neg A$ *formula pontosan akkor igaz, ha az* A *hamis formula.*

Quine-féle táblázatban:

A	B	$(A \wedge B)$	$(A \vee B)$	$(A \supset B)$	$\neg A$
1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1

Megjegyzés: Ekvivalencia pontosan akkor igaz, ha a két tag igazságértéke megegyezik.

További logikai műveletek:

Sem-sem művelet: $(A||B) := (\neg A \wedge \neg B)$,

Scheffer-művelet: $(A|B) := \neg(A \wedge B)$.

3. Logikai törvények

3.1. Definíció. *Az nyelv Ω egy A formulája logikai törvény vagy azonosan igaz formula, vagy tautológia, ha A igaz az Ω nyelv minden interpretációjában, minden értékelés esetén.*

Jelölés: $\models A$.

Az A formula logikailag ellentmondásos, vagy kontradikció, ha minden interpretációban, minden értékelés esetén hamis.

Az A formula kielégíthető, ha van olyan I modell és abban olyan értékelés, amelynél A igaz.

Az A és B formulák logikailag ekvivalensek, ha az $(A \equiv B)$ formula logikai törvény.

Jelölés: $A \sim B$.

3.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az Ω nyelv A formulája az $A_1, A_2, ..., A_k$ Ω-beli formulák Boole-kombinációja, ha az A formula az $A_1, A_2, ..., A_k$ formulákból épül fel a $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\neg$ logikai jelek segítségével, kvantorok alkalmazása nélkül (azonban $A_1, A_2, ..., A_k$-ban szerepelhetnek kvantorok).*

Példa: $\forall x A(x) \vee \exists y B(y)$ formula Boole-kombináció, melynek komponensei: $\forall x A(x)$, $\exists y B(y)$.
Megjegyzés: A komponensek logikai értéke egyértelműen meghatározza a Boole-kombináció logikai értékét, ezt a formula Quine-féle táblázatából is le lehet olvasni. Az $A_1, A_2, ..., A_k$ formulák alatt kiírjuk a 0 és 1 összes lehetséges kombinációját, ez 2^k sor. Ez után sorra elvégezzük a logikai műveleteket.

3.3. Definíció. *Az olyan Boole-kombinációt, amelyben tartozó Quine-féle táblázatban a főoszlop csupa egyesekből áll propozícionális tautológiának nevezzük.*

3.1. Lemma. *Ha egy Boole-kombináció propozícionális tautológia, akkor logikai törvény.*

Példa: Készítse el az $A \equiv (B \vee C \supset .C \supset \neg A)$ formula értéktáblázatát! Döntsük el, hogy kontradikció-e, kielégíthető-e, logikai törvény-e!

A	B	C	$(A$	$\equiv$	$((B$	$\vee$	$C)$	$\supset$	$(C$	$\supset$	$\neg$	$A)))$
1	1	1		0		1		0		0	0	
1	1	0		1		1		1		1	0	
1	0	1		0		1		0		0	0	
1	0	0		1		0		1		1	0	
0	1	1		0		1		1		1	1	
0	1	0		0		1		1		1	1	
0	0	1		0		1		1		1	1	
0	0	0		0		0		1		1	1	
				5.)		1.)		4.)		3.)	2.)	

A formula kielégíthető és nem logikai törvény.

Logikai törvények:

Asszociativitás:

1.) $A \wedge (B \wedge C) \sim (A \wedge B) \wedge C$,

2.) $A \vee (B \vee C) \sim (A \vee B) \vee C$.

Kommutativitás:

3.) $(A \wedge B) \sim (B \wedge A)$,

4.) $(A \vee B) \sim (B \vee A)$.

Disztributivitás:

5.) $A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,

6.) $A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Idempotencia:

7.) $A \wedge A \sim A$,

8.) $A \vee A \sim A$.

Elimináció:

9.) $A \wedge (A \vee B) \sim A$,

10.) $A \vee (A \wedge B) \sim A$.

De Morgan törvények:

11.) $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$,

12.) $\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$.

Az implikáció tagadása:

13.) $\neg(A \supset B) \sim A \wedge \neg B$.

Ellentmondás az implikációban:

14.) $A \supset \neg A \sim \neg A$,

15.) $\neg A \supset A \sim A$,

16.) $\models \neg(A \equiv \neg A)$.

Logikai jelek közötti összefüggések:

17.) $A \wedge B \sim \neg(\neg A \vee \neg B)$,

18.) $A \vee B \sim \neg(\neg A \wedge \neg B)$,

19.) $A \supset B \sim \neg(A \wedge \neg B)$,

20.) $A \supset B \sim B \vee \neg A$,

21.) $A \wedge B \sim \neg(A \supset \neg B)$,

22.) $A \vee B \sim \neg A \supset B$.

Kontrapozició törvénye:

23.) $A \supset B \sim \neg B \supset \neg A$.

Kétszeres tagadás törvénye:

24.) $\neg\neg A \sim A$.

Előtagok felcserélése implikációban:

25.) $A \supset (B \supset C) \sim B \supset (A \supset C)$.

Implikáció konjunktív előtaggal:

26.) $(A \wedge B) \supset C \sim A \supset (B \supset C)$.

Jelölés:

Legyen C tetszőleges zárt formula.
$\top := (C \vee \neg C)$ „szabvány igaz”,
$\perp := (C \wedge \neg C)$ „szabvány hamis”.

Kiszámítási törvények:

27.) $A \vee \top \sim \top$,

28.) $A \vee \perp \sim A$,

29.) $A \wedge \top \sim A$,

30.) $A \wedge \perp \sim \perp$,

31.) $A \supset \top \sim \top$,

32.) $A \supset \perp \sim \neg A$,

33.) $\top \supset A \sim A$,

34.) $\perp \supset A \sim \top$.

Azonosság törvénye:

35.) $\models A \supset A$.

Bővítés előtaggal:

36.) $\models A \supset (B \supset A)$.

Az implikáció öndisztributivitása:

37.) $A \supset (B \supset C) \sim (A \supset B) \supset (A \supset C)$.

Esetelemzés (implikáció diszjunktív előtaggal):

38.) $(A \vee B) \supset C \sim (A \supset C) \wedge (B \supset C)$.

Tranzitivitás:

39.) $\models ((A \supset B) \wedge (B \supset C)) \supset (A \supset C)$.

Reduktio ad absurdum:

40.) $\models ((A \supset B) \wedge (A \supset \neg B)) \supset \neg A$.

Negáció az implikációs előtagban:

41.) $\models A \supset (\neg A \supset B)$.

A kizárt harmadik törvénye:

42.) $\models A \vee \neg A$.

Az ellentmondás törvénye:

43.) $\models \neg(A \wedge \neg A)$.

Pierce-törvény:

44.) $\models ((A \supset B) \supset A) \supset A$.

Fiktív kvantorok törvénye (x nem paraméter az A-ban):

45.) $\forall x A \sim A$,

46.) $\exists x A \sim A$.

Jelölés: A továbbiakban $A(x)$, $A(x, y)$ azt jelöli, hogy az x ill. y felléphet A-beli szabad változóként, de nem feltétlenül az.

Egynemű kvantorok cseréje:

47.) $\forall x \forall y A(x, y) \sim \forall y \forall x A(x, y)$,

48.) $\exists x \exists y A(x, y) \sim \exists y \exists x A(x, y)$.

Kvantor-csere implikációban:

49.) $\models \forall x A(x) \supset \exists x A(x)$,

50.) $\models \exists y \forall x A(x, y) \supset \forall x \exists y A(x, y)$.

De Morgan-féle kvantoros törvények:

51.) $\neg \forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x)$,

52.) $\neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$.

Kvantor kifejezése másik kvantorral:

53.) $\forall x A(x) \sim \neg \exists x \neg A(x)$,

54.) $\exists x A(x) \sim \neg \forall x \neg A(x)$.

Kvantorok egyoldali kiemelése (itt x nem szabad változó A-ban):

55.) $(A \wedge \forall x B(x)) \sim \forall x(A \wedge B(x))$,

56.) $(A \vee \forall x B(x)) \sim \forall x(A \vee B(x))$,

57.) $(A \wedge \exists x B(x)) \sim \exists x(A \wedge B(x))$,

58.) $(A \vee \exists x B(x)) \sim \exists x(A \vee B(x))$,

59.) $(A \supset \forall x B(x)) \sim \forall x(A \supset B(x))$,

60.) $(A \supset \exists x B(x)) \sim \exists x(A \supset B(x))$,

61.) $(\forall x B(x) \supset A) \sim \exists x(B(x) \supset A)$,

62.) $(\exists x B(x) \supset A) \sim \forall x(B(x) \supset A)$.

Kvantorok kétoldali kiemelése:

63.) $(\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)) \sim \forall x(A(x) \wedge B(x))$,

64.) $(\exists x A(x) \vee \exists x B(x)) \sim \exists x(A(x) \vee B(x))$,

65.) $(\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \supset \forall x(A(x) \vee B(x))$,

66.) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \supset (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))$.

Kongruens formulák ekvivalenciája:

67.) Ha $A \approx B$ akkor $A \sim B$.

Helyettesítéskor fellépő kvantorok:

68.) $\models \forall x A \supset A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$,

69.) $\models A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \supset \exists x A$.

Kvantor-hatáskör átjelölés (x, y azonos típusú változó, y nem szabad változó A-ban):

70.) $\forall x A \sim \forall y A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

71.) $\exists x A \sim \exists y A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Kvantor-redukció (x, y azonos típusu változó):

72.) $\models \forall x \forall y A \supset \forall x A\binom{y}{x}$,

73.) $\models \exists x A\binom{y}{x} \supset \exists x \exists y A$.

Helyettesítés ekvivalens formulákban:

74.) Ha $A \sim B$, akkor $A\binom{x}{t} \sim B\binom{x}{t}$.

Megjegyzés:

a.) $\forall x A(x) \supset \exists x A(x)$ formula Boole-kombináció, komponensei $\forall x A(x)$, $\exists x A(x)$. Értéktáblázata:

$\forall x A(x)$	$\exists x A(x)$	$\forall x A(x) \supset \exists x A(x)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

A Boole-kombináció nem propozicionális tautológia (lásd 2. sor az értéktáblázatban), pedig logikai törvény. Az értéktáblázat nem veszi figyelembe a formula finom szerkezetét (jelentését).

Nevezetesen $|\forall x A(x)|_I = 1$ és $|\exists x A(x)|_I = 0$ egyszerre nem állhat fenn.

b.) Ha kvantort tartalmazó formula főoszlopában csupa 1 áll, akkor propozicionális tautológia, tehát logikai törvény. Ha a főoszlop 0-t is tartalmaz, akkor nem tudunk nyilatkozni, a formula lehet logikai törvény és nem logikai törvény is.

c.) Sokkal egyszerűbb egy formuláról megmutatni, hogy nem logikai törvény. Elég megadni egy I interpretációt és egy értékelést, amikor a formula hamis lesz.

Példa: Mutassuk meg, hogy a $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \supset \exists x(A(x) \wedge B(x))$ formula nem logikai törvény (használjuk a c.) megjegyzést)!

Megadunk egy I interpretációt, amelyben a formula hamis lesz.

I megadása: $\mathcal{A}r$ nyelv $\mathbb{N}$ interpretáció.

$A(x) := (SS0|x)$, tehát x páros szám, $B(x) := \neg(SS0|x)$, tehát x páratlan szám.

Ekkor $|\exists x A(x)|_I = 1$, $|\exists x B(x)|_I = 1$ és $|\exists x(A(x) \wedge B(x))|_I = 0$, így $|\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \supset \exists x(A(x) \wedge B(x))|_I = 0$.

Példa: Mutassuk meg, hogy a $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \supset \exists x(A(x) \wedge B(x))$ formula kielégíthető formula!

Megadunk egy olyan I interpretációt és benne olyan értékelést, amelyben a formula igaz lesz.

I megadása: $\mathcal{A}r$ nyelv $\mathbb{N}$ interpretáció.

$A(x) := (SSS0|x)$, tehát x osztható 3-al, $B(x) := (SS0|x)$, tehát x osztható 2-vel.

Ekkor $|\exists x A(x)|_I = 1$ (hiszen a 3, 6, 9, ... osztható 3-al), $|\exists x B(x)|_I = 1$ (hiszen a 2, 4, 6, ... osztható 2-vel) és $|\exists x(A(x) \wedge B(x))|_I = 1$, (a 6 olyan szám, amely osztható 3-al és 2-vel) így $|\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \supset \exists x(A(x) \wedge B(x))|_I = 1$.

4. Logikai törvények alkalmazásai

4.1. Definíció. *Egy atomi formulát vagy a negáltját literálnak nevezzük.*

Legyenek $L_1, L_2, ..., L_n$ *literálok* ($n \geq 1$). *Az* $L_1 \wedge L_2 \wedge ... \wedge L_n$ *alaku formulákat elemi konjunkciónak, az* $L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_n$ *alakú formulákat elemi diszjunkciónak nevezzük.*

Legyenek $K_1, K_2, ..., K_m$ *elemi konjunkciók (ahol* $m \geq 1$*), ekkor a* $K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_m$ *alaku formulákat diszjunktív normálformának (d.n.f.) nevezzük.*

Legyenek $D_1, D_2, ..., D_m$ *elemi diszjunkciók (ahol* $m \geq 1$*), ekkor a* $D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_m$ *alaku formulákat konjunktív normálformának (k.n.f.) nevezzük.*

Megjegyzés: Egy literál is elemi konjunkció és elemi diszjunkció (válasszunk a definícióban $n = 1$-t), de k.n.f. és d.n.f. is (válasszunk a definícióban $n = m = 1$-t).

Egy elemi konjunkció is d.n.f és egy elemi diszjunkció is k.n.f. (válasszunk a defínicióban $m = 1$-t).

4.1. Lemma. *Az* Ω *nyelv minden kvantormentes formulája konjunktív normálformára ill. diszjunktív normálformára hozható, azaz logikailag ekvivalens valamely konjunktív normálformával ill. diszjunktív normálformával.*

Bizonyítás: Megadunk egy algoritmust, amellyel mindig megkapjuk a d.n.f. illetve a k.n.f. alakot.

1.) A logikai törvények segítségével kicseréljük az implikációt és az ekvivalenciát az $\wedge, \vee, \neg$ jelekre.

2.) A de Morgan és a kétszeres tagadás törvényeket többször egymás után alkalmazva elérjük, hogy a negációk csak a komponensekre vonatkozzanak.

3.) A disztributivitás törvényeket használva elérjük azt, hogy a konjunkciók és a diszjunkciók a megfelelő sorrendben kövessék egymást.

4.) Egyszerűsítünk. (Használjuk az idempotencia, az elimináció és a kiszámítási törvényeket.)

Példa: Hozzuk d.n.f. illetve k.n.f. alakra az $(A \supset (B \wedge \neg C)) \supset C$ formulát!

$$\begin{aligned}
((A \supset (B \wedge \neg C)) \supset C) &\sim C \vee \neg(A \supset (B \wedge \neg C)) \quad \text{(kicseréljük az } \supset\text{-t)} \\
&\sim C \vee \neg((B \wedge \neg C) \vee \neg A) \quad \text{(kicseréljük az } \supset\text{-t)} \\
&\sim C \vee (\neg(B \wedge \neg C) \wedge \neg\neg A) \quad \text{(de Morgan törv.)} \\
&\sim C \vee ((\neg B \vee \neg\neg C) \wedge \neg\neg A) \quad \text{(de Morgan törv.)} \\
&\sim C \vee ((\neg B \vee C) \wedge A) \quad \text{(kétszeres tagadás törv.)} \\
&\sim C \vee (\neg B \wedge A) \vee (C \wedge A) \quad \text{(disztributivitás)} \\
&\sim C \vee (\neg B \wedge A) \quad \text{(elimináció) d.n.f. alak} \\
&\sim (C \vee \neg B) \wedge (C \vee A) \text{ (disztributivitás) k.n.f.}
\end{aligned}$$

4.2. Definíció. *Az Ω nyelv egy $Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_nA$ alakú formuláját , ahol $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ kvantorok ($n \geq 0$) és A kvantormentes formula, prenex formulának nevezzük.*

Speciálisan a kvantormentes formula is prenex formula (lásd $n = 0$).

4.1. Tétel. *Minden A formula prenex alakra hozható, azaz van olyan prenex formula, amellyel A logikailag ekvivalens.*

Bizonyítás: Algoritmust adunk meg, amellyel mindig prenex alakot kapunk.

1.) A formulát változó-tiszta alakra hozzuk.

2.) A kvantoros de Morgan törvényeket és a kvantorok egyoldali kiemelése törvényeket többször egymás után alkalmazva prenex formulát kapunk.

Megjegyzés: A kvantorok kiemelésének sorrendje változtatható, így a prenex alak kvantoros előtagja (prefixum) függ az átalakítás módjától.
Példa: Hozza prenex alakra a $\neg\exists x\forall y P(x, y) \supset \exists x\forall y Q(x, y)$ formulát! Alkalmazzuk az algoritmust, figyeljünk a hiányzó zárójelekre!

$$\begin{aligned}
\neg\exists x\forall y P(x, y) \supset \exists x\forall y Q(x, y) &\sim (\neg\exists x\forall y P(x, y) \supset \exists z\forall w Q(z, w)) \\
&\sim (\forall x\exists y\neg P(x, y) \supset \exists z\forall w Q(z, w)) \\
&\sim \exists z\forall w(\forall x\exists y\neg P(x, y) \supset Q(z, w)) \\
&\sim \exists z\forall w\exists x\forall y(\neg P(x, y) \supset Q(z, w)).
\end{aligned}$$

Előbb hiányzó zárójelek, majd változó-tiszta alak, majd kvantoros de Morgan törvények (52, 51 sorrendben), majd kvantorok egyoldali kiemelése (60, 59, 61, 62 sorrendben).

5. Logikai következmény

5.1. Definíció. *Jelölje Γ az Ω nyelv véges sok formulájának a halmazát, A pedig az Ω nyelv egy formuláját. Azt mondjuk, hogy A logikai következménye (szemantikai következménye) a Γ-beli formuláknak (jelölés: $\Gamma \models A$), ha az Ω nyelv minden I interpretációja, valamint az A és a Γ-beli formulák minden olyan értékelése esetén, amikor az Γ-beli formulák mindegyike igaz I-ben, akkor az A is igaz I-ben. Ha a Γ a $B_1, B_2, ..., B_n$ formulákból áll, úgy ezeket premisszáknak (feltételeknek), az A-t konklúziónak (zárótételnek) nevezzük.*

Jelölések: $\Gamma \models A$,

$B_1, B_2, ..., B_n \models A$,

$$\frac{B_1, B_2, ..., B_n}{A},$$

$$\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \\ \hline A \end{array}$$

Ezeket a formációkat következtetési sémáknak is nevezzük.

5.1. Tétel. *Egy A formula pontosan akkor logikai következménye a B_1, B_2, ..., B_n formuláknak, ha a $(B_1, B_2, ..., B_n) \supset A$ formula logikai törvény.*

Jelekkel: $\Gamma \models A$ *akkor és csakis akkor, ha* $\models (B_1, B_2, ..., B_n) \supset A$.

Példa: Az $\neg A \vee B, C \supset \neg B$ formuláknak logikai következménye-e az $A \supset \neg C$ formula?

A	B	C	$\neg A \vee B$	$C \supset \neg B$	$A \supset \neg C$
1	1	1	1	0	
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	
1	0	0	0	1	
0	1	1	1	0	
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

Az aláhúzott sorokban a premisszák egyszerre igazak, a konklúzió is igaz. Tehát logikai következmény.

Megjegyzés: A definícióval egyenértékű megfogalmazás: helyes a következtetés, ha nincs olyan modell és benne olyan értékelés, amelynél a premisszák mind igazak a konklúzió pedig hamis.

Példa: Az $A \supset (B \supset C), \neg D \vee \neg A, B$ formuláknak logikai következménye-e a $D \supset C$ formula?

Értéktáblázattal 16 sort kellene írnunk, így most a megjegyzésünkkel fogjuk megoldani:

Tegyük fel a megjegyzés ellenkezőjét, azaz van olyan I modell és benne olyan értékelés, amikor a premisszák (P_1, P_2, P_3) egyszerre igazak és a konklúzió (K) hamis. Ezt az értékelést keressük.

Tehát $|P_1|_I = |P_2|_I = |P_3|_I = 1$ és $|K|_I = 0$.

Vegyük $0 = |K|_I = |D \supset C|_I$-t, ez csak úgy lehet, ha $|C|_I = 0$ és $|D|_I = 1$.

Vegyük $1 = |P_3|_I$-t, amiből $|B|_I = 1$ adódik, majd tekintsük $1 = |P_2|_I = |\neg D \vee \neg A|_I$-t, amiből azonnal adódik, hogy $|\neg A|_I = 1$, azaz $|A|_I = 0$.

Most tekintsük a $1 = |P_1|_I = |A \supset (B \supset C)|_I$-t, ami teljesül.

Megtaláltuk a keresett értékelést. Ez $|A|_I = 0$, $|B|_I = 1$, $|C|_I = 0$ és $|D|_I = 1$. Ezen értékelésnél $|P_1|_I = |P_2|_I = |P_3|_I = 1$ és $|K|_I = 0$, így nem logikai következménye a premisszáknak a zárótétel.

Nevezetes következtetési sémák:

Modus ponens:

$$\begin{array}{l} P \supset Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$$

Indirekt következtetési sémák:

$$\begin{array}{l} \neg P \supset Q \\ \neg P \supset \neg Q \\ \hline P \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \supset Q \\ P \supset \neg Q \\ \hline \neg P \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \neg P \supset Q \\ \neg Q \\ \hline P \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg P \supset \neg Q \\ Q \\ \hline P \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P \supset Q \\ \neg Q \\ \hline \neg P \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \supset \neg Q \\ Q \\ \hline \neg P \end{array}$$

Kontrapozició:

$$\begin{array}{l} P \supset Q \\ \hline \neg Q \supset \neg P \end{array}$$

Láncszabály:

$$\begin{array}{l} P \supset Q \\ Q \supset R \\ \hline P \supset R \end{array}$$

Diszjunktív szillogizmus:

$$\frac{\begin{array}{l} P \vee Q \\ \neg P \end{array}}{Q}$$

Bizonyítás: Csak kettőt látunk be a többi hasonlóan megy.

Először láncszabály. A tételünket fogjuk használni.

$((P \supset Q) \wedge (Q \supset R)) \supset (P \supset R)$ logikai törvény (lásd 39.). Tehát a tételünk miatt logikai következmény.

Másodszor a diszjunktív szillogizmust bizonyítjuk be. Ismét a tételünket szeretnénk használni, megmutatjuk, hogy a $((P \vee Q) \wedge \neg P) \supset Q$ formula logikai törvény, így logikai következmény lesz. Hozzuk k.n.f. alakra!

$$\begin{aligned}
((P \vee Q) \wedge \neg P) \supset Q &\sim ((P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg P)) \supset Q \quad \text{(disztributivitás)} \\
&\sim (\perp \vee (Q \wedge \neg P)) \supset Q \quad \text{(def. szabvány hamis)} \\
&\sim (Q \wedge \neg P) \supset Q \quad \text{(kiszámítási törvények)} \\
&\sim \neg(Q \wedge \neg P) \vee Q \quad \text{(impl. kifejezése diszjunkcióval)} \\
&\sim (\neg Q \vee P) \vee Q \quad \text{(de Morgan törvények)} \\
&\sim \neg Q \vee P \vee Q \quad \text{(k.n.f és d.n.f., asszociativitás)} \\
&\sim \neg Q \vee Q \vee P \quad \text{(kommutativitás)} \\
&\sim \top \vee P \quad \text{(def. szabvány igaz)} \\
&\sim \top \quad \text{(kiszámítási törvények).}
\end{aligned}$$

6. Predikátumkalkulus

Bevezetés: A szintaktikailag felépített logikai rendszereket logikai kalkulusoknak is nevezzük, azaz logikai kalkulus nem más mint olyan formális rendszer, formális eljárás (szabályok gyűjteménye) melyek segítségével logikai törvényeket kapunk. Egy logikai kalkulus kiinduló *axiómákból és levezetési szabályokból* áll.

6.1. Definíció. *Rögzítsünk egy Ω elsőrendű nyelvet, a* ***predikátumkalkulus axiómái*** *a következők:*

1.) $A \supset (B \supset A)$

2.) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

3.) $A \supset (B \supset (A \wedge B))$

4.) $(A \wedge B) \supset A$

5.) $(A \wedge B) \supset B$

6.) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

7.) $A \supset (A \vee B)$

8.) $B \supset (A \vee B)$

9.) $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

10.) $\neg\neg A \supset A$

11.) $\forall x A \supset \left[A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}\right]$, *x változó t vele azonos típusú term,*

12.) $\forall x(C \supset A(x)) \supset (C \supset \forall x A(x))$, *ahol x nem paraméter a C-ben,*

13.) $\left[A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}\right] \supset \exists x A$, *x változó t vele azonos típusú term,*

14.) $\forall x(A(x) \supset C) \supset (\exists x A(x) \supset C)$, *ahol x nem paraméter a C-ben.*

Megjegyzés:

1.) A predikátumkalkulus minden axiómája logikai törvény.

2.) $\left[A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}\right]$ helyett szoktunk egyszerűen csak $A(t)$-t írni.

A Predikátumkalkulus **levezetési szabályai:** A, B tetszőleges formula, x tetszőleges változó.

Modus ponens szabály:

$$\frac{A,\ A \supset B}{B}$$

Általánosítás szabálya:

$$\frac{A}{\forall x A}$$

Megjegyzés: Bármely logikai törvény megkapható, ,,levezethető" az 1-14 axiómákból a megadott levezetési szabályokkal. Mit jelent az, hogy levezethető?

6.2. Definíció. *Legyen Γ az Ω nyelvbeli formulák tetszőleges véges halmaza (lehet üreshalmaz is), azaz $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$, B pedig egy formula. Azt mondjuk, hogy a Γ formulahalmazból a B formula* ***levezethető a predikátumkalkulusban,*** *ha megadható egy $D_1, ..., D_m$ formulasorozat ($m \geq 1$), ahol $D_m = B$ és a $D_1, ..., D_{m-1}$ sorozat tagjai*

a.) vagy a predikátumkalkulus axiómái,

b.) vagy Γ-beli formulák, azaz hipotézisek (nyílt premisszák),

c.) vagy a megelőző tagokból adódnak a levezetési szabályok alkalmazásával. Fontos, hogy ha a $\forall x C$ formulát a C formulából nyerjük az általánosítás szabályával, akkor teljesülnie kell a struktúra feltételnek (struktúra feltétel: x nem lehet szabad változó egyik olyan hipotézisben sem, azaz Γ-beli formulában sem, amely megelőzi a C tekintett előfordulását.).

Jelölés: $\Gamma \vdash B$.

6.3. Definíció. *Legyen B az Ω nyelv egy formulája. A B-t a* ***predikátumkalkulus levezethető formulájának*** *nevezzük, ha van hipotézis mentes levezetése, azaz levezethető a $\Gamma = \emptyset$ halmazból.*

Jelölés: $\vdash B$.

6.4. Definíció. *A $\Gamma \vdash A$ alakzatot* ***szekvenciának*** *nevezzük. A $\Gamma \vdash A$* ***szekvencia megalapozása*** *alatt olyan levezetés megkonstruálását értjük, amelyben A alsó formula és minden hipotézis Γ-beli.*

6.1. Tétel (Dedukció tétel). *Legyen Γ egy tetszőleges véges formula halmaz, A, B formulák.*

$\Gamma, A \vdash B$ *pontosan akkor, ha* $\Gamma \vdash A \supset B$.

6.5. Definíció. *Ha $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \models A$ is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a **kalkulus helyes** a szemantikus rendszerre nézve.*

*Ha $\Gamma \models A$, akkor $\Gamma \vdash A$ is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a **kalkulus teljes** a szemantikus rendszerre nézve.*

*Ha mind a kettő teljesül, akkor **adekvátnak** nevezzük.*

6.2. Tétel. *A predikátumkalkulus helyes.*

6.3. Tétel (Gödel-féle teljességi tétel). *A predikátumkalkulus teljes.*

6.1. Következmény. $\Gamma \vdash A$ *pontosan akkor, ha* $\Gamma \models A$.

6.2. Következmény. $\vdash A$ *pontosan akkor, ha* $\models A$.

A természetes levezetés technikája:

Megjegyzés: Olyan szabályok rendszere, amelyek megkönnyítik a levezetéseket. A szabályok két típusba sorolhatók, strukturális és logikai szabályok.

Strukturális szabályok: Γ, Δ formulahalmaz, A, B, C formulák.

1.) Az azonosság törvénye:

$$\Gamma, A \vdash A$$

2.) A bővítés szabálya:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$$

3.) A permutálás szabálya:

$$\frac{\Gamma, B, C, \Delta \vdash A}{\Gamma, C, B, \Delta \vdash A}$$

4.) A redukció szabálya:

$$\frac{\Gamma, B, B, \Delta \vdash A}{\Gamma, B, \Delta \vdash A}$$

5.) A vágás szabálya:

$$\frac{\Gamma \vdash A; \qquad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

Megjegyzés: Az 1-5 szabályok a levezetés megengedő szabályai. Ez azt jelenti, hogy ha adva van a vonal feletti szekvencia levezetése, akkor megkonstruálható a vonal alatti szekvencia levezetése is, azaz a fenti szabályokat már igazolta helyettünk valaki a dedukció-tétel és a levezetési szabályok segítségével.

Logikai szabályok:

Bevezetés szabályai — Eltávolítás szabályai

Implikáció:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A; \qquad \Gamma \vdash A \supset B}{\Gamma \vdash B}$$

Konjunkció:

$$\frac{\Gamma \vdash A; \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$$

Diszjunkció:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}; \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash C; \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$$

Negáció:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B; \qquad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Univerzális kvantor:

$$\frac{\Gamma \vdash A(y)}{\Gamma \vdash \forall y A(y)} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}}$$

Egzisztenciális kvántor:

$$\frac{\Gamma \vdash A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}}{\Gamma \vdash \exists x A} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A(y) \vdash C}{\Gamma, \exists y A(y) \vdash C}$$

Megjegyzés:

1. Az univerzális kvántor bevezetésénél y nem szabad változó Γ-ban, az egzisztenciális kvántor eltávolításánál y nem szabad változó Γ-ban és C-ben.

2. A felsorolt szabályok megalapozása nem bonyolult, az axiómák és a levezetési szabályok segítségével könnyen igazolhatóak.

3. Minden logikai összekötőjelhez és kvántorhoz két szabály kapcsolódik, a bevezetés és az eltávolítás szabálya. A bevezetés szabálya arra vonatkozik, hogy hogyan bizonyíthatóak az adott logikai szimbólumokat tartalmazó formulák. Az eltávolítás szabálya arra vonatkozik, hogy hogyan lehet az ilyen szimbólumokat tartalmazó formulákat más formulák bizonyítására használni.

7. Gentzen-kalkulus

7.1. Definíció. *Legyenek* $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$ *és* $\Delta = \{B_1, ..., B_m\}$ *formula halmazok* $(n, m \geq 0)$. *Ekkor a*

$$\top \wedge A_1 \wedge ... \wedge A_n \supset B_1 \vee ... \vee B_m \vee \bot$$

formulát ***sequentnek*** *nevezzük.*

Jelölés: $A_1, ..., A_n \to B_1, ..., B_m$, *röviden* $\Gamma \to \Delta$.

Legyenek Γ és Δ formulák halmaza (lehet üres halmaz is), A és B formulák, x, y azonos típusú változók, t az x-el azonos típusú term.

A Gentzen-kalkulus axiómasémái:

$$A, \Gamma \to \Delta, A$$

$$\bot, \Gamma \to \Delta$$

A Gentzen-kalkulus levezetési szabályai:

$$(\wedge \to)\quad \frac{A, B, \Gamma \to \Delta}{(A \wedge B), \Gamma \to \Delta} \qquad\qquad (\to \wedge)\quad \frac{\Gamma \to \Delta, A; \qquad \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, (A \wedge B)}$$

$$(\vee \to)\quad \frac{A, \Gamma \to \Delta; \qquad B, \Gamma \to \Delta}{(A \vee B), \Gamma \to \Delta} \qquad\qquad (\to \vee)\quad \frac{\Gamma \to \Delta, A, B}{\Gamma \to \Delta, (A \vee B)}$$

$$(\supset\to)\quad \frac{\Gamma \to \Delta, A; \qquad B, \Gamma \to \Delta}{(A \supset B), \Gamma \to \Delta} \qquad\qquad (\to\supset)\quad \frac{A, \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, (A \supset B)}$$

$$(\neg \to)\quad \frac{\Gamma \to \Delta, A}{\neg A, \Gamma \to \Delta} \qquad\qquad (\to \neg)\quad \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg A}$$

$$(\forall \to)\quad \frac{A\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \forall x A, \Gamma \to \Delta}{\forall x A, \Gamma \to \Delta} \qquad\qquad (\to \forall)\quad \frac{\Gamma \to \Delta, A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\Gamma \to \Delta, \forall x A}$$

$$(\exists \to)\quad \frac{A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \Gamma \to \Delta}{\exists x A, \Gamma \to \Delta} \qquad\qquad (\to \exists)\quad \frac{\Gamma \to \Delta, A\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \exists x A}{\Gamma \to \Delta, \exists x A}$$

Megjegyzés: $(\to \forall)$ és a $(\exists \to)$ szabálynál y nem szabad változó Γ-ban és Δ-ban.

7.2. Definíció. *Egy sequentet a* ***Gentzen-kalkulusban levezethetőnek*** *nevezünk, ha* *a.) vagy axióma,*

b.) vagy van olyan levezetési szabály, amelyben a vonal alatti sequent, és a vonal feletti sequent (sequentek) levezethető (levezethetőek).

7.1. Tétel. *A Gentzen-kalkulus helyes és teljes.*

Példa: Mutassuk meg, hogy a $(A \supset B) \wedge (A \supset \neg B) \supset \neg A$ formula logikai törvény! Belátjuk, hogy a Gentzen-kalkulus levezethető sequentje.

$$\mathbf{A}, B \rightarrow \mathbf{A} \text{ ax.séma} \qquad \mathbf{B} \rightarrow \neg A, \mathbf{B} \text{ ax.séma}$$

$$(\rightarrow \neg) \qquad (\neg \rightarrow)$$

$$\mathbf{A}, (A \supset \neg B) \rightarrow \mathbf{A} \text{ ax.séma} \qquad bi.)\ B \rightarrow \neg A, A \qquad bii.) B, \neg B \rightarrow \neg A$$

$$(\rightarrow \neg) \qquad (\supset\rightarrow)$$

$$a.)\ (A \supset \neg B) \rightarrow \neg A, A \qquad b.)\ B, (A \supset \neg B) \rightarrow \neg A$$

$$(\supset\rightarrow)$$

$$(A \supset B), (A \supset \neg B) \rightarrow \neg A$$

$$(\wedge \rightarrow)$$

$$((A \supset B) \wedge (A \supset \neg B)) \rightarrow \neg A$$

$$(\rightarrow\supset)$$

$$\rightarrow ((A \supset B) \wedge (A \supset \neg B)) \supset \neg A$$

8. Formális axiomatikus elméletek

8.1. Definíció. ***Formális axiomatikus elmélet*** *alatt olyan* $T :=< \Omega, X >$ *párt értünk, ahol* Ω *egy matematikai logikai nyelv és* X *az* Ω*-beli zárt formulák halmaza. Az* X*-beli formulákat a* T *elmélet* ***nem logikai axiómáinak*** *nevezzük. (*X *lehet üres halmaz is.)*

8.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* Ω *nyelv egy* A ***formulája levezethető a*** T ***elméletben*** *(*A *formula a* T *elmélet tétele, jele* $T \vdash A$*) ha megadható* $\Gamma \subset X$ *nem logikai axiómák véges rendszere úgy, hogy a* $\Gamma \vdash A$ *szekvencia igaz a predikátumkalkulusban.*

8.3. Definíció. *Az* Ω *nyelv egy* I *interpretációja (modellje) a* $T =< \Omega, X >$ ***elmélet modellje****, ha minden nem logikai axióma teljesül* I*-ben, azaz minden* $A \in X$ *formula esetén* $I \models A$*.*

8.1. Tétel. *Ha* I *a* T *elmélet egy interpretációja és* $T \vdash B$ *akkor* $I \models B$ *is teljesül.*

8.4. Definíció. *A* $T =< \Omega, X >$ *formális axiomatikus elmélet* ***ellentmondásos****, ha létezik az* Ω *nyelvben olyan* A *zárt formula, hogy* $T \vdash A$ *és* $T \vdash \neg A$ *egyszerre teljesül. Ellenkező esetben a* T *elméletet* ***ellentmondástalannak*** *nevezzük.*

Megjegyzés: Ellentmondásos elméletben minden állítás (és az ellenkezője is) levezethető. Tegyük fel, hogy A az a zárt formula, amely az ellentmondást okozza, azaz $T \vdash A$ és $T \vdash \neg A$. C legyen egy tetszőleges zárt formula (C helyett $\neg C$-t is vehetünk), az implikáció eltávolításának szabályát (lásd modus ponens is) kétszer alkalmazva megmutatjuk, hogy $T \vdash C$ is teljesül.

$$\vdash A \supset (\neg A \supset C) \qquad \text{ismert logikai törvény (41. számú).}$$

$$T \vdash A \supset (\neg A \supset C) \qquad \text{bővítés szabálya.}$$

Majd az implikáció eltávolításának szabályát alkalmazzuk kétszer.

$$\frac{\begin{array}{l} T \vdash A \supset (\neg A \supset C) \\ T \vdash A \end{array}}{T \vdash (\neg A \supset C)}$$

és

$$\frac{\begin{array}{l} T \vdash \neg A \supset C \\ T \vdash \neg A \end{array}}{T \vdash C}$$

8.2. Tétel (Gödel-tétele). *Minden elsőrendű matematikai logikai nyelvet használó ellentmondástalan elméletnek van modellje.*

Megjegyzés: Ellentmondásos elméletnek nincs modellje.

8.5. Definíció. *A* $T =< \Omega, X >$ *formális axiomatikus elméletet* ***teljesnek*** *nevezzük, ha az* Ω *nyelv minden* A *zárt formulája esetén* $T \vdash A$ *vagy* $T \vdash \neg A$ *teljesül.*

Példa: (Formális axiomatikus elméletre) Az $\mathcal{A}r$ **elemi aritmetikai elmélet.**

Nyelve (Ω) az $\mathcal{A}r$ nyelv.

Nem logikai axiómák (X): (A formulák elé minden szabad változó szerint univerzális kvantort írunk.)

Az egyenlőség axiómái:

1.) $x = x$ (minden szám egyenlő önmagával)

2.) $((x = y) \wedge (x = z)) \supset (y = z)$ (tranzitivitás)

Peano-féle axiómák:

3.) $Sx \neq 0$ (a 0 egyetlen egy természetes számnak sem a rákövetkezője)

4.) $(Sx = Sy) \equiv (x = y)$

5.) $A(0) \wedge \forall x(A(x) \supset A(Sx)) \supset \forall x A(x)$ (a teljes indukció elve)

Az összeadás és a szorzás axiómái:

6.) $x + 0 = x$

7.) $x + Sy = S(x + y)$

8.) $x \cdot 0 = 0$

9.) $x \cdot Sx = x \cdot y + x$

Megjegyzés:

1. Az $\mathcal{A}r$ nyelv modellje a természetes számok halmaza (a műveletekkel), ez egyben az $\mathcal{A}r$ elemi aritmetikai elméletnek is modellje.
2. Az $\mathcal{A}r$ elemi aritmetikai elmélet nem teljes.

Példa: (További példák formális axiomatikus elméletre)

1. M^+ **naiv halmazelmélet.**
2. **Zermelo-Fraenkel-féle axiomatikus halmazelmélet** (ZF illetve a ZFC).

9. Naiv halmazelmélet nyelve (M^+)

Az M^+ nyelvben egyetlen típus van, ez a halmaz típus. Halmaz típusú változók: $x, y, z, ...$

9.1. Definíció. *(szintaktikai definíció) Az M^+ nyelv* ***termjei és formulái.***
Bázis:

a.) Minden változó term.

Indukciós lépés:

b.) Ha t, r termek, akkor $(t \in r)$ kifejezés formula.

c.) Ha φ, ψ formulák, akkor $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \supset \psi), \neg\varphi$ is formula.

d.) Ha x változó és φ formula, akkor $\forall x\varphi, \exists x\varphi$ is formula.

e.) Ha x változó és φ formula, akkor a $\{x|\varphi\}$ kifejezés term (absztrakció term).

Megjegyzés:

1. M^+ nem elsőrendű nyelv, mert a formulákat termek definiálására használjuk (lásd e.)), ezt elsőrendű nyelvben nem lehet megtenni.

2. $\{x|\varphi\}$ term kiolvasása: az ,,összes olyan x-k halmaza, amelyre a φ teljesül."

3. $\{x|\varphi\}$ termben az x kötött változó, tehát a $\{x| \quad \}$ szimbólum kvantorként viselkedik.

Jelölések:
$(x \notin y) \rightleftharpoons \neg(x \in y)$,
$(x \subseteq y) \rightleftharpoons \forall z((z \in x) \supset (z \in y))$,
$(x = y) \rightleftharpoons (x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x)$,
$(x \neq y) \rightleftharpoons \neg(x = y)$,
$(x \subset y) \rightleftharpoons (x \subseteq y) \wedge (x \neq y)$.

<u>Nem logikai axiómák (X):</u>

A.) Meghatározottsági axióma:

$$(x = y) \wedge (x \in z) \supset (y \in z)$$

B.) Absztrakció axióma: φ tetszőleges formula M^+-ban

$$(z \in \{y|\varphi(y)\}) \equiv \varphi(z)$$

Megjegyzés: Az M^+ elméletben levezethető formulákat a naiv halmazelmélet törvényeinek (tételeinek) nevezzük.

Jelölés: $M^+ \vdash A$, $\quad .A$

<u>Fogalmak:</u>

1.) Nem rendezett pár fogalma:

$$\{x, y\} \rightleftharpoons \{z|\ (z = x) \vee (z = y)\}$$

9.1. Lemma. $.(u \in \{x, y\}) \equiv (u = x) \vee (u = y)$
$.x \in \{x, y\}$
$.y \in \{x, y\}$
$.\{x, y\} = \{y, x\}$
$.(\{x, y\} = \{u, v\}) \equiv ((x = u) \wedge (y = v)) \vee ((x = v) \wedge (y = u))$

2.) Az egyelemű halmaz fogalma:

$$\{x\} \rightleftharpoons \{z|z = x\}$$

9.2. Lemma. $.(u \in \{x\}) \equiv (u = x)$
$.x \in \{x\}$
$.(\{x\} = \{y\}) \equiv (x = y)$
$.(\{x\} = \{u, v\}) \equiv ((x = u) \wedge (x = v))$

3.) Az üres halmaz fogalma:

$$\emptyset \rightleftharpoons \{x|x \neq x\}$$

9.3. Lemma. $.\forall z(z \notin \emptyset)$
$.\emptyset \neq \{\emptyset\}$
$.\forall u(\emptyset \subseteq u)$

4.) Két halmaz metszete, uniója, különbsége:

$$x \cap y \rightleftharpoons \{z|(z \in x) \wedge (z \in y)\}$$

$$x \cup y \rightleftharpoons \{z|(z \in x) \vee (z \in y)\}$$

$$x \backslash y \rightleftharpoons \{z|(z \in x) \wedge (z \notin y)\}$$

9.4. Lemma. $.u \in x \cap y \equiv (u \in x) \wedge (u \in y)$
$.u \in x \cup y \equiv (u \in x) \vee (u \in y)$
$.u \in x \backslash y \equiv (u \in x) \wedge (u \notin y)$

5.) A korlátozott kvantor fogalma:

$(\forall x \in y)\varphi(x) \rightleftharpoons \forall x((x \in y) \supset \varphi(x))$ minden y-beli x-re a $\varphi(x)$ teljesül.

$(\exists x \in y)\varphi(x) \rightleftharpoons \exists x((x \in y) \wedge \varphi(x))$ van olyan y-beli x elem, amelyre $\varphi(x)$ teljesül.

9.5. Lemma. $.\neg(\forall x \in y)\varphi(x) \equiv (\exists x \in y)\neg\varphi(x)$
$.\neg(\exists x \in y)\varphi(x) \equiv (\forall x \in y)\neg\varphi(x)$

6.) Az univerzális halmaz fogalma:

$$U \rightleftharpoons \{x|x = x\}$$

9.6. Lemma. $.\forall z(z \in U)$

7.) Az általános komplementer fogalma:

$$\overline{x} \rightleftharpoons U \backslash x$$

9.7. Lemma. $.(z \in \overline{x}) \equiv (z \notin x)$
$.\overline{x \cup y} = \overline{x} \cap \overline{y}$
$.\overline{x \cap y} = \overline{x} \cup \overline{y}$

8.) A hatványhalmaz fogalma:

$$\mathcal{P}x \rightleftharpoons \{z|z \subseteq x\}$$

9.8. Lemma. $.(u \in \mathcal{P}x) \equiv (u \subseteq x)$
$.\emptyset \in \mathcal{P}x$

9.) Kijelöléssel definiált halmaz fogalma:

$$\{x \in y|\varphi(x)\} \rightleftharpoons \{x|(x \in y) \wedge \varphi(x)\}$$

9.9. Lemma. $.u \in \{x \in y|\varphi(x)\} \equiv (u \in y) \wedge \varphi(u)$

10.) Russell-féle halmaz fogalma:

$$\mathcal{R} \rightleftharpoons \{x|(x \notin x)\}$$

Alaptulajdonsága:

$$.u \in \mathcal{R} \equiv u \notin u$$

$u = \mathcal{R}$-t helyettesítve:

$$.\mathcal{R} \in \mathcal{R} \equiv \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$$

Ellentmondásra jutottunk, ezt az ellentmondást Russell-féle paradoxonnak (antinómiának) is nevezik.
Megjegyzés:

1.) Az M^+ naiv halmazelmélet ellentmondásos, így benne bármely formula levezethető.

2.) Az M^+ naiv halmazelmélet ellentmondásos, így nincs modellje.

3.) A Russell-féle paradoxon főoka az, hogy ilyen $\mathcal{R}$ halmaz nem létezik, mégis tudtuk definiálni.

Irodalomjegyzék

[1.] Dragálin Albert, Buzási Szvetlána, Bevezetés a matematikai logikába, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 1997.

[2.] Pásztorné Varga Katalin, Várterész Magda, A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása, Panem Kiadó, Budapest 2003.

[3.] Sashalminé Kelemen Éva, A matematikai logika és a halmazelmélet elemei, EKTF Líceum Kiadó, Eger 1996.

[4.] Urbán János, Matematikai logika, Műszaki Könyvkiadó, 1983.

[5.] Ruzsa Imre, Logikai szintaxis és szemantika, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1988.