SZÁMELMÉLET FELADATSOR

Oszthatóság

1. Az $123x4$ számban milyen számjegy állhat x helyén, ha a szám osztható

a) 3-mal;
b) 9-cel;
c) 4-gyel;
d) 8-cal;
e) 6-tal;
f) 24-gyel;
g) 36-tal;
h) 72-vel?

2. Határozd meg a felírt szám hiányzó számjegyeit úgy, hogy teljesüljön az oszthatóság! Keresd meg az összes megoldást!

a) $36 \mid 52x2y$; *b)* $72 \mid x378y$; *c)* $45 \mid 24x68y$.

3. Írj egy-egy számjegyet az 1995 elé is, után is úgy, hogy a kapott 6-jegyű szám osztható legyen 99-cel!

4. Írj egy-egy számjegyet az 1995 elé is, után is úgy, hogy a kapott 6-jegyű szám osztható legyen 88-cal!

5. Mutasd meg, hogy $72 \mid 10^{20} + 8$.

6. Milyen számjegyeket kell írni a $\star$-ok helyére, hogy a tízes számrendszerben felírt $32\star35717\star$ szám osztható legyen 72-vel?

Kalmár László Matematikaverseny, 2000., 6. osztályosok versenye, országos döntő

7. Mennyi a 22 227 777 szám legnagyobb kétjegyű osztója?

8. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek valamilyen sorrendjével fel lehet-e írni egy hatjegyű prímszámot?

9. Hány olyan háromjegyű szám van, melyben a számjegyek összege 15, és a szám osztható 15-tel?

(A) 4 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 13

Zrínyi Ilona Matematikaverseny, 1997., 6. osztályosok versenye, országos döntő

10. A 15 elé is, után is írj egy-egy számjegyet úgy, hogy a kapott négyjegyű szám osztható legyen 15-tel. Hány ilyen négyjegyű szám készíthető?

11. A 97 elé is, után is írj egy-egy számjegyet úgy, hogy a kapott négyjegyű szám osztható legyen 45-tel. Melyek ezek a négyjegyű számok?

12. Írd fel a legkisebb olyan 36-tal osztható számot, mely számban mind a tíz számjegy pontosan egyszer szerepel.

13. Melyik az a legkisebb 9-jegyű szám, melyben az első két jegyből álló szám osztható 2-vel, az első 3 jegyből álló szám osztható 3-mal, ... , az első 8 jegyből álló szám osztható 8-cal, és a 9-jegyű szám osztható 9-cel?

14. Add meg 45 legkisebb pozitív többszörösét, melyben csak 0 és 8 számjegyek vannak!

15. Egy különböző számjegyekből álló hatjegyű szám számjegyei (valamilyen sorrendben) 1, 2, 3, 4, 5, 6. Az első két számjegyből álló szám osztható 2-vel, első három számjegyből álló háromjegyű szám osztható 3-mal és így tovább, maga a szám osztható 6-tal. Melyik ez a szám?

Varga Tamás Matematikaverseny, 1990/91., 7. osztályosok versenye, II. forduló

16. Határozd meg azokat a 4-jegyű 9-re végződő számokat, amelyek oszthatók számjegyeik mindegyikével!

17. Határozd meg az összes olyan 4-gyel osztható $\overline{abcd}$ 4-jegyű számot, melyre teljesül az, hogy $\overline{bacd}$ osztható 7-tel, $\overline{acbd}$ osztható 5-tel, és $\overline{abdc}$ 9-cel osztható.

18. Mutasd meg, hogy egy 99-cel osztható pozitív egész számban a számjegyek összege legalább 18.

19. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek megfelelő sorrendjével írd fel a legkisebb 99-cel osztható 9-jegyű számot!

20. Keresd meg a legkisebb olyan 56-ra végződő számot, mely osztható 56-tal, és a szám jegyeinek összege 56!

Oszthatóság 9-cel

21. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek megfelelő sorrendjével fel lehet-e írni 6-jegyű prímszámot?

22. Melyik a 45 legkisebb olyan többszöröse, amely csak 0 és 8 számjegyekből áll?

23. Hány olyan szám van, amelyből elvéve a szám számjegyeinek összegét, az eredmény 2003?

24. Egy sorozatot a következő módon képezünk. A sorozat első tagja 1997. Minden következő tagot úgy kapunk, hogy az előző tagból kivonjuk a számjegyeinek összegét (pl. 1997, $1997-26=1971$, ...) Mi lesz a sorozat első olyan tagja, amelyik egyjegyű szám?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1997., 7. osztályosok versenye
Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1993., 7. osztályosok versenye

25. Hét rabló a zsákmányolt aranyat úgy osztja el, hogy névsor szerint vesznek belőle annyit, amennyi az ott levő aranyak számának számjegyösszege. (Pl. ha a soron következő zsivány előtt 182 arany van, akkor ő $1+8+2=11$ darabot vesz el.) Miután mind a heten pontosan kétszer vettek, az arany elfogyott. Hatuknak egyformán jutott az aranyból, míg a főnök bármelyiküknél többet vett el.

Hányadik a névsorban a főnök, és hány arany jutott neki?

Varga Tamás Matematikaverseny országos döntője, 1993/94., 7. osztályosok versenye

26. Az a természetes szám számjegyeinek összege b, a b szám számjegyeinek összege c, és $a+b+c=100$. Határozd meg a értékét.

27. Egy 9-cel osztható 2003-jegyű szám számjegyeinek összege A, az A szám jegyeinek összege B, és B számjegyeinek összege C. Állapítsd meg C értékét.

28. Van-e olyan pozitív egész szám, melyet megszorozva számjegyei összegével, az eredményt 300 003?

29. Fel lehet-e írni az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek két különböző sorrendjével két olyan hétjegyű számot, hogy egyik szám a másik kétszerese legyen?

30. Felírtunk néhány pozitív számot a tízes számrendszerben, miközben a 10 számjegy mindegyikét pontosan egyszer használtuk fel.

Lehet-e a számok összege 100?

Oszthatóság 11-gyel

31. Van-e olyan 11-gyel osztható szám, amely mind a tíz számjegyet pontosan egyszer tartalmazza?

32. Fel lehet-e írni az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből olyan hatjegyű számot, amely osztható 11-gyel?

33. Határozd meg azt a különböző jegyekből álló legkisebb hatjegyű számot, amely osztható 11-gyel.

34. Legyenek a, b, c, d különböző számjegyek. Mutasd meg, hogy $\overline{cdcdcdcd}$ nem osztható az $\overline{aabb}$ számmal.

35. Pisti azt tapasztalta, hogy ha egy négyjegyű számhoz hozzáadja a fordítottját (azt a számot, amelyet az eredeti szám jegyeinek fordított sorrendbe írásával kaptunk), akkor az összeg mindig osztható 11-gyel. A két szám különbségéről azt találta, hogy mindig osztható 9-cel. Igaza van-e? Magyarázd meg a tapasztalatot! Mit tapasztalsz, ha ötjegyű számokkal is próbálkozol?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1980., 8. osztályosok versenye

36. Kiválasztunk egy tetszőleges háromjegyű számot és négyzetreemeljük. Ezután a kiválasztott szám számjegyeit fordított sorrendben leírjuk, és a kapott számot emeljük négyzetre. A két négyzet közül a nagyobbikból kivonjuk a kisebbiket. Igaz-e, hogy az eredmény mindig osztható 99-cel?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1993., 8. osztályosok versenye

37. Hány olyan 15-jegyű szám van, amely csak a 3-as és 8-as számjegyeket tartalmazza, és osztható 11-gyel?

38. Határozd meg az összes olyan 275-tel osztható $\overline{abcde}$ ötjegyű számot, melynek a fordítottja, az $\overline{edcba}$ ötjegyű szám is osztható 275-tel.

39. Az adott 975 312 468 számból egy számjegy hozzáírása útján 33-mal osztható számot kellene képeznünk, az új jegyet két eddigi közé is iktathatjuk, az első elé és az utolsó után is. Lehetséges-e ez?

Oszthatóság 13-mal, 37-tel, ...

40. Írj fel egy tetszőleges háromjegyű számot (például: 235), majd készítsd el azt a 6-jegyű számot, ami ennek a számnak a kétszeri egymás után írásával keletkezik (235 235). A kapott szám mindig osztható 13-mal! Magyarázd meg, miért igaz ez mindig!

Kalmár László Matematikaverseny megyei döntője, 1993., 6. osztályosok versenye

41. Bizonyítsd be, hogy ha egy tetszőleges kétjegyű számot háromszor egymás után írsz, az így kapott hatjegyű szám osztható lesz 13-mal!

Kalmár László Matematikaverseny megyei döntője, 1982., 8. osztályosok versenye

42. Egy tetszőleges kétjegyű szám után írjunk egy nullát, majd újra a kétjegyű számot. Mutasd meg, hogy az így kapott ötjegyű szám mindig osztható 11-gyel és 13-mal is!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1991., 6. osztályosok versenye

43. Két háromjegyű szám különbsége osztható 7-tel. Ha ezt a két számot egymás mellé írjuk, egy hatjegyű számot kapunk. Igazoljuk, hogy ez a hatjegyű szám is osztható 7-tel!

44. Béla azt állítja, hogy a hatjegyű számokra ismer egy 37-tel való oszthatósági szabályt. Például: 413364 osztható 37-tel, mert $413 + 364 = 777$ osztható 37-tel. Ugyanakkor 113231 nem osztható 37-tel, mert $113 + 231 = 344$ nem osztható 37-tel.

Fogalmazd meg a szabályt és bizonyítsd be, hogy a szabály helyes!

Kalmár László Matematikaverseny megyei döntője, 1994., 6. osztályosok versenye
Kalmár László Matematikaverseny megyei döntője, 1995., 7. osztályosok versenye

45. Mutasd meg, ha $37 \mid \overline{abc}$, akkor $37 \mid \overline{bca}$.

46. Igazoljuk, hogy ha az $\overline{abcabc}$ hatjegyű szám osztható 37-tel, akkor a $\overline{bcabca}$ hatjegyű szám is osztható 37-tel!

Kalmár László Matematikaverseny megyei döntője, 1996., 8. osztályosok versenye

47. Mutasd meg, hogy egy 7-tel osztható hatjegyű szám utolsó jegyét elsőnek írva, az így kapott hatjegyű szám is osztható lesz 7-tel!

Osztási maradékok

48. Hány tojás van a kosárban, ha a tojásokat hármasával kirakva megmarad 2 tojás, ha a tojásokat négyesével rakjuk ki, akkor 3 tojás marad meg, és ha ötösével rakjuk sorokba, akkor 4 tojás marad ki?

49. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely 3-mal osztva 1-et, 4-gyel osztva 2-t, 5-tel osztva 3-at és 6-tal osztva 4-et ad maradékul?

Kalmár László Matematikaverseny, 1995., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

50. Melyik az a legkisebb, 1-nél nagyobb egész szám, amely 2-vel, 3-mal, 5-tel, 7-tel és 11-gyel osztva is 1 maradékot ad?

Kalmár László Matematikaverseny, 2001., 5. osztályosok versenye, országos döntő

51. Hány tojás van a kosárban, ha a tojásokat ötösével kirakva megmarad 3 tojás, ha a tojásokat hetesével rakjuk ki, akkor 4 tojás marad meg, és ha kilencesével rakjuk sorokba, akkor 5 tojás marad ki?

52. Egy A pozitív egész szám 3-mal osztva 1 maradékot, 37-tel osztva 33 maradékot ad. Mennyi maradékot ad A, ha 111-gyel osztjuk?

Kalmár László Matematikaverseny, 1993., 7. osztályosok versenye, országos döntő

53. Van-e olyan egész szám, amely 16-tal osztva 4-et, 20-szal osztva 5-öt ad maradékul?

Kalmár László Matematikaverseny, 1997., 7. osztályosok versenye, országos döntő

54. Sorold fel az összes olyan háromjegyű számot, amelyek 7-tel oszthatók, és amelyek 4-gyel, 6-tal, 8-cal és 9-cel osztva ugyanazt a maradékot adják.

55. Ha egy számot 8-cal osztunk 3 a maradék. Ezt a számot 5-tel osztva a hányados 8-cal nagyobb és a maradék 2. Melyik ez a szám?

56. A 948 és a 417 mindegyikét ugyanazzal a kétjegyű számmal elosztva egyenlő maradékokat kapok. Mekkora a maradék?

Varga Tamás Matematikaverseny, 1992/93., 6. osztályosok versenye

57. Ugyanazzal az egész számmal osztva az 1200, 1640 és 1960 számokat, maradékul sorra 3-at, 2-t, ill. 7-et kapunk. Mi lehetett az osztó?

58. Adott két szám: 273 437 és 272 758. Határozd meg azt a természetes számot, amellyel az elsőt elosztva 17-et, a másodikat elosztva 13-at kapunk maradékul.

59. Melyik az a 3-jegyű szám, mellyel a 22 022-t és a 20 222-t osztva ugyanazt a maradékot kapjuk, ha a szám és a maradék kölcsönösen megadják egymást.

60. Valahányadik ükapám születési évszámát elosztom 11-gyel, 12-vel és 13-mal is, s a kapott osztási maradékokat összeadom, eredményül 33-at kapok. Melyik évben született az ősöm?

61. Határozd meg az összes olyan ötjegyű A számot, amely a következő tulajdonsággal rendelkezik: ha leírjuk balról jobbfele haladva az összes maradékot, amelyet A ad 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal osztva, megkapjuk az eredeti A számot.

Közös osztó, közös többszörös

62. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely osztható az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok mindegyikével?

63. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely osztható a 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 számok mindegyikével?

64. Melyek azok a legkisebb a, b, c természetes számok, amelyekre $(a, b) = 4$, $(b, c) = 6$, $(c, a) = 10$? [Itt (m, n) az m és n számok legnagyobb közös osztóját jelöli.]

65. Hány olyan 100-nál kisebb n természetes szám van, amelyre $(n, 72) = 6$ és $(n, 35) = 5$ teljesül?

66. Az a és b pozitív egészek legnagyobb közös osztója 4, szorzatuk 80. Melyek ezek a számok?

67. Az a és b pozitív egészekre $(a, b) = 8$ és $a + b = 80$. Hány ilyen számpár van?

68. Melyik lehet az a két pozitív egész szám, amelyek összege 168 és legnagyobb közös osztója 24?

Kalmár László Matematikaverseny 1997., 6. osztályosok versenye, országos döntő

69. Hány olyan pozitív számokból alkotott számpár van, amelyben szereplő két számnak az összege 216, a legnagyobb közös osztójuk pedig 24? (A számpárban a számok sorrendje nem számít.)

(A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Zrínyi Ilona Matematikaverseny 2001., 7. osztályosok versenye, országos döntő

70. Két páratlan szám, a és b különbsége 64. Mennyi lehet legfeljebb a és b legnagyobb közös osztója?

Kalmár László Matematikaverseny 1994., 8. osztályosok versenye, megyei forduló

71. Három különböző pozitív egész szám összege 100. A legnagyobb és a legkisebb szám különbsége 66, és a legnagyobb szám többszöröse a legkisebb számnak. Hány ilyen számhármas van?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Zrínyi Ilona Matematikaverseny 2002., 5. osztályosok versenye, országos döntő

72. Adj meg három olyan számot, amelyeknek nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk, azonban bármely két számnak van 1-nél nagyobb közös osztója.

73. Igazoljuk, hogy bármely $n \geq 1$ egész számra $21n + 4$ és $14n + 3$ legnagyobb közös osztója 1.

Kalmár László Matematikaverseny 1992., 8. osztályosok versenye, országos döntő

74. Milyen számok lehetnek az $n + 11$ és $n - 9$ számok legnagyobb közös osztói?

75. Milyen számok lehetnek az $3n + 5$ és $n + 3$ számok legnagyobb közös osztói?

76. A $7n + 1$ és $8n + 3$ számoknak bizonyos n természetes számok esetén van 1-nél nagyobb közös osztója. Mi lehet ez a közös osztó?

77. Bizonyítsd be, hogy két pozitív egész szám legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének összege legalább akkora, mint a két szám összege.

78. 10 pozitív egész szám összege 1001. Határozd meg ezen számok legnagyobb közös osztójának lehetséges legnagyobb értékét!

79. Az a_1, a_2, a_3, ... , a_{49} pozitív egész számok összege 999. Legfeljebb mennyi lehet ennek a 49 számnak a legnagyobb közös osztója?

Kalmár László Matematikaverseny 2001., 8. osztályosok versenye, országos döntő

80. Négy pozitív egész szám összege 1995. Mennyi a négy szám legkisebb közös többszörösének legkisebb értéke?

Osztók száma

81. Számold össze, hány pozitív osztója van a 72-nek!

82. Számold össze, hány pozitív osztója van 16 200-nak!

Kalmár László Matematikaverseny 1991., 5. osztályosok versenye, országos döntő

83. Melyek azok a háromjegyű számok, amelyeknek pontosan 5 pozitív osztója van?

84. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek 12 osztója van?

85. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek 18 osztója van?

86. Határozd meg azt a legkisebb természetes számot, amelynek pontosan 42 osztója van és osztható 42-vel!

87. Hány különböző alakú téglalapot lehet összeállítani 72 darab egyforma (egybevágó) négyzetlapból, ha egy-egy téglalaphoz mindegyik négyzetlapot fel kell használni?

Kalmár László Matematikaverseny, 2001., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

88. Hány olyan téglalap van, melynek oldalhosszai egész számok, és a területe 1995 területegység?

89. Petinek 100-nál kevesebb egységnégyzete van. Ezek mindegyikének felhasználásával pontosan négy különböző téglalapot tudott kirakni egyrétűen és hézagmentesen úgy, hogy a téglalap mindkét oldala legalább 2 egységnyi volt.

Ha az eredeti egységnégyzetekből egyet elvett, akkor a megmaradtakból már csak egyféle téglalapot tudott összerakni, persze most is úgy, hogy a téglalap mindkét oldala legalább 2 egységnyi volt.

Hány egységnégyzete volt eredetileg Petinek?

Varga Tamás Matematikaverseny, 1999., 8. osztályosok versenye, országos döntő

90. Mutasd meg, hogy egy szám osztóinak száma pontosan akkor páratlan, ha az a szám négyzetszám!

91. Lehetséges-e, hogy a 7 777 777 számnak pontosan 2003 osztója legyen?

92. A szultán születésnapján néhány rabot szabadon akar bocsátani. A 100 cellás börtönben 100 börtönőr van. Az 1. őr minden ajtót kinyit. A 2. őr minden 2. ajtót bezár. A 3. őr minden 3. ajtót kinyit, ha zárva volt, s bezár, ha nyitva volt. Hasonlóan nyit-zár a többi őr is. Mely cellák ajtaja marad nyitva?

93. Két prímszám különbsége 2001. Hány osztója van a két prím összegének?

94. Keress olyan pozitív egész számot, amely osztható 2-vel és 9-cel, és amelynek pontosan
a) 14;
b) 15;
c) 13 osztója van!

95. Egy természetes számnak 1991 osztója van. Mutasd meg, hogy nem lehet osztható 1990-nel!

96. Melyek azok a kétjegyű természetes számok, amelyeknek legtöbb osztójuk van?

97. Számold ki a 10 000 összes osztójának szorzatát!

Mi az utolsó számjegye?

98. Milyen számjegyre végződik 2^{1986}? Állításodat indokold meg!

Kalmár László Matematikaverseny 1986., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

99. Határozd meg az $N = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{2003}$ szám utolsó számjegyét!

100. Milyen számjegyre végződik 1992^{1991}?

Kalmár László Matematikaverseny 1991., 5. osztályosok versenye, országos döntő

101. Milyen számjegyre végződik az $1^{1994} \cdot 2^{1994} \cdot 997^{1994}$ szorzat?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 9

Zrínyi Ilona Matematikaverseny 1994., 8. osztályosok versenye, országos döntő

102. Milyen számjegyre végződik a következő szorzat: $246^{16} \cdot 315^{18} \cdot 417^{20}$?

Kalmár László Matematikaverseny 1997., 6. osztályosok versenye, országos döntő

103. Mivel egyenlő a következő szorzat utolsó számjegye: $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5 \cdot 6^6 \cdot 7^7 \cdot 8^8 \cdot 9^9$?

104. Lehet-e $172^{1996} + 7$ egy egész szám négyzete?

Kalmár László Matematikaverseny 1996., 7. osztályosok versenye, országos döntő

105. Felbontható-e két egymást követő pozitív egész szám szorzatára $3^{11} + 1$?

Kalmár László Matematikaverseny 1997., 6. osztályosok versenye, országos döntő

106. Igazoljuk, hogy három egymást követő egész szorzata, ha a középső négyzetszám, mindig osztható 10-zel!

Kalmár László Matematikaverseny 1988., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

107. Osztható-e 10-zel a $73^{73} + 37^{37}$ szám?

Kalmár László Matematikaverseny 1981., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

108. Milyen számjegyre végződik: $32^{23} + 23^{32}$ szám?

109. Mutasd meg, hogy $10 \mid 43^{43} - 17^{17}$.

110. Bizonyítsd be, hogy a $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \cdots + 7^{18} + 7^{19} + 7^{20}$ összeg osztható 100-zal!

Kalmár László Matematikaverseny 1985., 8. osztályosok versenye, megyei forduló

111. Az $N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 2001^2 + 2002^2 + 2003^2$ szám milyen számjegyre végződik?

112. Mutasd meg, hogy öt egymást követő négyzetszám összege mindig osztható 5-tel!

113. Mutasd meg, hogy ha két szám összege osztható 10-zel, akkor a két szám négyzetének különbsége is osztható 10-zel!

114. Mutasd meg, hogy az $N = 100! + 7$ szám nem lehet négyzetszám!

115. Mutasd meg, hogy az $N = 1! + 2! + 3! + \cdots + 100!$ szám nem lehet négyzetszám!

116. Mutasd meg, hogy az $N = 11^7 + 11^6 + 11^5 + 11^4 + 11^3 + 11^2 + 11 + 1$ szám nem lehet négyzetszám!

117. Mutasd meg, hogy ha $5 \nmid a \cdot b$, akkor $5 \mid a^4 - b^4$!

118. Mutasd meg, hogy ha a egy egész számot jelöl, akkor vagy $a^3 - a$, vagy $a^3 + a$ osztható 10-zel!

119. Az alábbiak közül mely n érték esetén osztható az $1^n + 9^n + 9^n + 6^n$ kifejezés 5-tel?

(A) 1994 (B) 1995 (C) 1996 (D) 1998 (E) 2000

Zrínyi Ilona Matematikaverseny 1996., 8. osztályosok versenye, országos döntő

120. Mutasd meg, hogy ha $4 \nmid n$, akkor $10 \mid 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$!

121. Legfeljebb hány nullára végződik egy $9^n + 1$ alakú szám, ahol n pozitív egész?

Kalmár László Matematikaverseny 1992., 7. osztályosok versenye, országos döntő

Nyomozzunk a számok után!

122. Négy egymást követő egész szám szorzata 3024. Melyek ezek a számok?

123. A következő szorzásban a $\star$-ok helyén álló számjegyek elmosódtak: $\star 2 \star \cdot 13 = 2 \star \star 1$. Határozd meg a hiányzó számjegyeket!

Kalmár László Matematikaverseny, 1987., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

124. A következő osztásban a $\star$-ok helyén álló számjegyek elmosódtak: $20 \star \star : 13 = \star \star 7$. Határozd meg a hiányzó számjegyeket!

Kalmár László Matematikaverseny, 1998., 5. osztályosok versenye, országos döntő

125. Milyen számjegyeket kell írni a, b és c helyére, hogy a (tízes számrendszerben felírt) $\overline{2abc6}$ alakú szám maradék nélkül osztható legyen 1986-tal?

Kalmár László Matematikaverseny, 1986., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

126. Határozd meg a szorzat utolsó két számjegyét (lehetőleg a szorzás elvégzése nélkül):

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360\,3xy.$$

127. Határozd meg a szorzat hiányzó két számjegyét (lehetőleg a szorzás elvégzése nélkül):

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = 10\,x9y.$$

128. Összeszoroztuk az 1, 2, 3, … , 34, 35 számokat, az eredmény: $10333147966386144929ab66513375232c0000000$. Három számjegyet az a, b, c betűkkel helyettesítettünk. Melyek ezek a számjegyek?

129. Egy háromjegyű szám számjegyeit összeszorozzuk, majd a kapott szám számjegyeit szorozzuk össze. A kiinduló számot és a két szorzatot a következő módon ábrázolhatjuk: $\triangle\bigcirc\bigcirc$, $\triangle\square$, $\square$ (azonos alakú jelek azonos számjegyeket jelölnek).

Mi volt a kiinduló szám? Indokold meg válaszodat!

Kalmár László Matematikaverseny, 1980., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

130. Két egész számot nevezzünk egymás tükörképének, ha ugyanazokból a számjegyekből áll, csak fordított sorrendben (például 246 és 642 egymás tükörképei). Két tükörkép szám szorzata 92 565. Melyik ez a két szám?

Kalmár László Matematikaverseny, 1988., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

131. Az a, b, c számjegyekre igaz, hogy a következő tízes számrendszerben felírt számok mind négyzetszámok: a, $\overline{ab}$, $\overline{cb}$, $\overline{cacb}$. Melyek ezek a számjegyek?

Kalmár László Matematikaverseny, 1985., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

132. Adott egy háromjegyű szám. Számjegyeit összeadjuk, majd a kapott szám jegyeit ismét összeadjuk. A kiinduló számot és a két összeget így szemléltetjük: $\overline{ABA}$, $\overline{BC}$, $\overline{B}$. (Azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.)

Mi volt a kiinduló szám?

133. Három egymást követő páros szám szorzata $\overline{87XXXXX8}$ alakú. (X nem feltétlenül azonos számjegyeket jelöl.)

Add meg az öt hiányzó számjegyet!

Varga Tamás Matematikaverseny, 1989., 7. osztályosok versenye

134. Három egymást követő páratlan számot összeszoroztunk, majd a kapott eredményt megszoroztuk 5-tel. Így egy következő alakú hatjegyű számot kaptunk: $\overline{ABABAB}$, ahol A és B számjegyek. Mi volt az eredeti három páratlan szám?

Kalmár László Matematikaverseny, 1993., 6. osztályosok versenye, országos döntő
Varga Tamás Matematikaverseny, 1996., 8. osztályosok versenye, országos döntő

135. Melyek azok a négyjegyű számok, amelyeket megszorozva a tükörképével (a számjegyek fordított sorrendben való felírásával kapott számmal), a szorzat 3 darab 0 számjegyre végződik?

(Olyan számokat keressünk, melynek a tükörképe is négyjegyű szám.)

136. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek utolsó számjegye 6, és ha az utolsó helyről a 6-os számjegyet az első helyre tesszük (a többi számjegy változatlan marad), akkor a négyszeresét kapjuk?

Kalmár László Matematikaverseny, 1991., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

137. Van-e olyan természetes szám, amelynek az értéke megötszöröződik, ha az első számjegyét az elejéről töröljük, és a végére írjuk?

Varga Tamás Matematikaverseny 1988/89., 6. osztályosok versenye, I. forduló

138. Melyik az a tízes számrendszerben felírt legkisebb pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy 2-esre végződik, és ha ezt a 2-est a szám végéről áthelyezzük a szám elejére, akkor éppen a szám kétszeresét kapjuk?

Kalmár László Matematikaverseny, 1993., 5. osztályosok versenye, országos döntő

139. Melyik az a tízes számrendszerben felírt legkisebb pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy 3-asra végződik, és ha ezt a 3-ast a szám végéről áthelyezzük a szám elejére, akkor éppen a szám háromszorosát kapjuk?

140. Egy ötjegyű szám elejére 1-est írunk. A kapott hatjegyű számot 3-mal megszorozva azt a hatjegyű számot kapjuk, amely az előbbi ötjegyű számból úgy is előállítható, hogy az 1-est a végére írjuk. Melyik ez az ötjegyű szám?

Kalmár László Matematikaverseny, 1992., 6. osztályosok versenye, megyei forduló
Kalmár László Matematikaverseny, 1995., 7. osztályosok versenye, országos döntő

141. Add meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amellyel az 1993-at megszorozva olyan többszörösét kapod, amelynek 1994 az utolsó négy jegye?

Varga Tamás Verseny 1993/94., 7. osztályosok versenye, III. forduló

142. Van-e olyan háromjegyű pozitív egész szám, amelynek minden pozitív egész kitevőjű hatványa ugyanarra a három számjegyre végződik?

Kalmár László Matematikaverseny 1993., 8. osztályosok versenye, országos döntő

143. Gondoltam egy számra, amely osztható

3-mal, 4-gyel, 6-tal, 9-cel, e) 12-vel.

a) Az 5 állításból 1 hamis volt. Melyik? Mi lehetett a gondolt szám?

b) Az 5 állításból 2 hamis volt. Melyek? Mi lehetett a gondolt szám?

c) Az 5 állításból 3 hamis volt. Melyek? Mi lehetett a gondolt szám?

d) Az 5 állításból 4 hamis volt. Melyik igaz? Mi lehetett a gondolt szám?

144. Egy matematikaórán a tanár felírt egy számot a táblára. Az egyik diák így szólt: „A szám osztható 31-gyel." A második: „A szám 30-cal is osztható." Egy harmadik diák szerint a szám osztható 29-cel, és így tovább, végül a harmincadik diák azt mondta, hogy a szám osztható 2-vel. A tanár ezek után közölte, hogy csak két állítás nem volt igaz, s ez a kettő egymás után hangzott el. Melyik volt ez a két téves állítás?

145. A tanár egy 50 000-nél kisebb természetes számot írt fel a táblára. Az első tanuló szerint a szám osztható 2-vel, a második diák szerint osztható 3-mal, ... , a 12. tanuló szerint osztható 13-mal. Két egymás után megszólaló diák kivételével mindenki igazat mondott.

A tanár melyik számot írta fel a táblára?

146. Melyik az a háromjegyű tízes számrendszerbeli szám, amely 5-szöröse számjegyei szorzatának?

147. Melyik az az ötjegyű szám, mely egyenlő számjegyei szorzatának 45-szörösével?

148. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, mely egyenlő számjegyei összegének 1995-szörösével?

149. Keresd meg az olyan háromjegyű számpárokat, amelyek különbsége 100, és amelyek közül az egyik 6-tal, a másik pedig 7-tel osztható! Hány ilyen számpár van?

150. Írjuk fel azt az 1, 2, ..., 9 számjegyek valamilyen sorrendjéből álló 9-jegyű számot, melynek első 2 jegyéből álló szám osztható 2-vel, az első 3 jegyből álló szám osztható 3-mal, ..., az első 8 jegyből álló szám osztható 8-cal, és maga a szám osztható 9-cel!

151. Melyik az a legkisebb 7-esekből és 3-asokból álló szám, melyben a számjegyek összege, s maga a szám is osztható 7-tel és 3-mal?

152. Melyik a legkisebb 999-cel osztható, 9-es számjegyet nem tartalmazó pozitív egész szám?

153. Melyik az a (tízes számrendszerbeli) hatjegyű szám, amelyet a 2, 3, 4, 5, 6 számok bármelyikével megszorozva olyan számot kapunk, mely az eredetiből „elcsúsztatással" is megkapható, azaz úgy, hogy a szám utolsó néhány jegyét elhagyjuk, és azokat ugyanolyan sorrendben a szám elejére írjuk? (Pl.: $\overline{abcdef} \to \overline{efabcd}$.)

További oszthatósági feladatok

154. Tudjuk, hogy p és q olyan pozitív egész számok, amelyekre $3p + 4q$ osztható 11-gyel. Igaz-e, hogy ekkor $p + 5q$ is osztható 11-gyel?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1991., 7. osztályosok versenye

155. Mutassuk meg, hogy ha a és b olyan egész számok, amelyekre $13 \mid 2a+b$ és $13 \mid 5a-4b$, akkor $13 \mid a-6b$.

156. Mutassuk meg, hogy ha a és b olyan egész számok, amelyekre $17 \mid 5a+2b$, akkor $17 \mid 9a+7b$.

157. Mutassuk meg, hogy az a és b egész számokra $7 \mid 10a+b$ pontosan akkor teljesül, ha $7 \mid 10b+2a$.

158. Mutassuk meg, hogy az a és b egész számokra $7 \mid 10a+b$ pontosan akkor teljesül, ha $7 \mid a-2b$.

159. Keressünk oszthatósági szabályt 7-re! Használjuk fel az előző feladatot. Az osztás elvégzése nélkül állapítsuk meg, hogy

a) 1393;
b) 2 401 343;
c) 2003 osztható-e 7-tel.

160. Mutassuk meg, hogy az a és b egész számokra $7 \mid 100a+b$ pontosan akkor teljesül, ha $7 \mid a+4b$.

161. Keressünk oszthatósági szabályt 7-re! Használjuk fel az előző feladatot. Az osztás elvégzése nélkül állapítsuk meg, hogy

a) 1393;
b) 2 401 343;
c) 2003 osztható-e 7-tel.

162. Mutassuk meg, hogy az a és b egész számokra $13 \mid 10a+b$ pontosan akkor, ha $13 \mid a+4b$. Milyen 13-mal való oszthatósági szabályt olvashatunk le az állításból?

163. Mutassuk meg, hogy az a és b egész számokra $11 \mid 10a+b$ pontosan akkor, ha $11 \mid b-a$. Milyen 11-gyel való oszthatósági szabályt olvashatunk le az állításból?

164. Mutassuk meg, hogy az a és b egész számokra $17 \mid 10a+b$ pontosan akkor, ha $17 \mid a-5b$. Milyen 17-tel való oszthatósági szabályt olvashatunk le az állításból?

165. Keressünk az előbbiekhez hasonló oszthatósági szabályt pl. 37-re.

166. A 9-re, a 11-re vonatkozó oszthatósági szabály átgondolásával keressünk szabályt más számmal (pl. 7-tel) való oszthatóságra.

167. Határozd meg a felírt szám hiányzó számjegyeit úgy, hogy teljesüljön az oszthatóság!
a) $7 \mid \overline{a0b0}$;
b) $7 \mid \overline{54a\,321}$.

168. Mutassuk meg, hogy az $A = 1000B + C$ szám pontosan akkor osztható 1001-gyel, ha $(B - C)$ osztható 1001-gyel.

Tesztfeladatok

169. Milyen számjegyet írhatunk x helyébe, hogy a $34\,32x$ ötjegyű szám osztható legyen 18-cal?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 0

170. A háromjegyű $2x3$ számhoz adjunk hozzá 326-ot. Eredményül a 9-cel osztható $5y9$ számot kapjuk. Ekkor $x + y$ értéke:

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 9

171. Hány olyan szám van 2003-ig, melyben a számjegyek összege 27 és a szám nem osztható 27-tel?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

172. Az A a páros számok halmazát jelöli, a B pedig 9 pozitív többszöröseinek halmaza, a C halmazban pedig a kétjegyű egészek találhatók. Hány eleme van az A, B és a C halmazok közös részének?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 9

173. 1-től 1000-ig tekintve a számokat, hány osztható 5-tel vagy 9-cel, de nem mind a kettővel?

(A) 311 (B) 289 (C) 267 (D) 200 (E) 100

174. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával hány olyan hatjegyű számot tudnál képezni, amely 6-tal osztható?

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 360 (E) 720

175. Kiválasztjuk a 7-tel osztható kétjegyű számok közül azokat, melyekben a számjegyek összege 10. Mennyi ezen számok összege?

(A) 119 (B) 126 (C) 140 (D) 175 (E) 189

176. Hány olyan kétjegyű szám van, amelyhez ha hozzáadjuk a számjegyek felcserélésével kapott számot, akkor 7-tel osztható számot kapunk?

(A) 2 (B) 5 (C) 7 (D) 11 (E) 12

177. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely osztható a négy legkisebb prímszámmal és a négy legkisebb összetett számmal is?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 10

178. A 2002-t 2004-szer leírjuk egymás mellé. Az alábbi számok közül melyikkel osztható az így kapott szám?

(A) 9 (B) 15 (C) 33 (D) 55 (E) 99

179. Mennyi a számjegyek összege abban a legnagyobb háromjegyű páros számban, amelynek minden jegye egymástól különböző prímszám?

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 18 (E) 21

180. Gyermekeim életkorának szorzata 1664 év. A legfiatalabb legalább fele annyi idős, mint a legidősebb. Én 50 éves vagyok. Hány gyermekem van?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

181. Édesanyám életkorát ma ugyanazzal a két számjeggyel kell leírni, mint születésemkor, csak fordított sorrendben. Én általános iskolás vagyok, és soha nem buktam meg. Hány éves vagyok?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 18

182. Az alábbi számok között pontosan egy olyan van, mely nem lehet egy természetes szám számjegyeinek szorzata. Melyik az?

(A) 243 (B) 343 (C) 2520 (D) 14 641 (E) 16 384

183. Tekintsük azon számokat 1-től 100-ig, amelyeknek a prímtényezős felbontásában a 7 a legkisebb prímtényező. Hány ilyen szám van?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7 (E) 14

184. Hány olyan természetes szám van, melynek és a 16-nak a legkisebb közös többszöröse 48?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

185. Az alábbi számok mindegyikéhez van olyan szorzó (sőt több is), amellyel összeszorozva, a szorzat négyzetszám lesz. Ezen szorzók közül a legkisebb melyik számhoz tartozik?

(A) 22 (B) 24 (C) 26 (D) 28 (E) 30

186. Öt gyerek ül körben, egymás után A, B, C, D és E. Egy labdát dobálnak egymásnak, mindenki a tőle balra harmadik helyen ülőnek adja a labdát. Először A dobja a labdát D-nek, majd D továbbadja B-nek, és így tovább. Ha a labdát összesen 12-szer adják tovább, utoljára kinél lesz a labda?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

Számkitaláló játékok
a 9-es oszthatósági szabály alapján

187. Minden diák gondol egy négyjegyű számra, leírja a szám „fordítottját”, s kiszámolja a két szám különbségét. A kapott eredmény egy nullától különböző számjegyét letörli, és megmondja a többi számjegy összegét nekem. Én erre megmondom a letörölt számjegyet.

Példa. A gondolt szám: 1999; fordítottja: 9991. A különbség: 9991 − 1999 = 7992. A diák letörli a 2-est, nekem csak ennyit mond: 25 (=7+9+9). Erre a válaszom: 2.

Változatok:

– A szám „fordítottja” helyett lehet olyan szám is, amelyet az eredeti szám jegyeinek valamilyen más sorrendjével írtunk fel.

– A szám „fordítottja” helyett a szám számjegyeinek összegét vonjuk le a számból.

188. Minden diák írjon fel egy pozitív egész számot, szorozza meg 18-cal, adjon ehhez 63-at. Majd húzza át az eredmény bármelyik, de nullától különböző számjegyét. A megmaradó számból kitalálható a törölt számjegy.

Példa. A gondolt szám: 1999; $18 \cdot 1999 = 35\,982$; $35\,982 + 63 = 36\,045$. Töröljük pl. a 4-es számjegyet, a megmaradó szám: 3605.

Változat: Válassz egy többjegyű számot, szorozd meg 10-zel. Vedd el belőle a gondolt számot. A különbséget szorozd meg 2-vel. Adj ehhez 36-ot, majd töröld az eredmény valamelyik, nullától különböző számjegyét, és a megmaradó számot mutasd meg nekem. (Itt is a törlés előtti szám osztható 9-cel, mert a gondolt x számon elvégezve a megadott műveleteket, eredményül $(10x - x) \cdot 2 + 36 = 18x + 36$-ot kapunk.) A számjegytörlés után kapott szám ismeretében megmondom a letörölt számjegyet.

189. *A narancsszínű róka:*

Gondolj valamelyik számra az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok közül!

Szorozd meg ezt a számot 9-cel, és add össze az eredményül kapott szám számjegyeit!

Az utóbbi eredményből vonj ki 3-at, és keresd meg az ABC annyiadik betűjét, amennyi a most kapott szám. (A – 1, Á – 2, B – 3, C – 4, Cs – 5, D – 6, E – 7, É – 8, F – 9, G – 10, . . .)

Ezzel a betűvel gondolj egy országra!

Az ország harmadik betűjével gondolj egy gyümölcsre!

A gyümölcs harmadik betűjével pedig gondolj egy állatra!

Most összpontosítok . . . Látok egy állatot . . . Ez az állat a róka.

Példa. Legyen a gondolt szám a 7. $9 \cdot 7 = 63$; összeadjuk a szám számjegyeit: $6 + 3 = 9$; ebből elveszünk 3-at: $9 - 3 = 6$; a 6. betű a: D; egy ország D-vel: Dánia; egy gyümölcs az ország harmadik betűjével: narancs; egy állat a gyümölcs harmadik betűjével: róka.

190. *Mennyi legyen a számolás végeredménye?* Válasszunk közösen egy 10-nél kisebb pozitív számot. Legyen ez például a 7.

Most felírok tetszés szerint több számot, melyek mindegyike páratlan számú számjegyből áll. Ezek: 2357467, 31964753086 és még folytathatnám.

Kezdjetek el számolni. Mindegyik szám esetén adjátok össze a szám számjegyeit, majd az így kapott szám számjegyeit is, és így tovább, mindaddig, amíg az eredmény egyjegyű szám lesz.

Mindegyik esetben 7 lesz a végeredmény, ahogyan ígértem.

Vegyes feladatok

191. Az $123x45$ számban milyen számjegy állhat x helyén, ha a szám osztható

a) 5-tel *b)* 25-tel *c)* 45-tel?

192. Mutasd meg, hogy

a) $9 \mid 10^{33} + 8$; *b)* $6 \mid 10^{10} + 14$.

193. A csillagok helyére írjatok olyan számjegyeket, hogy az így kapott 9-jegyű szám osztható legyen 45-tel: $32 \star 35717\star$.

Kalmár László Matematikaverseny, 1987., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

194. Ha egy háromjegyű számból elveszünk 7-et, akkor 7-tel osztható, ha 8-at, akkor 8-cal osztható, ha pedig 9-et, akkor 9-cel osztható számot kapunk. Melyik ez a háromjegyű szám?

Kalmár László Matematikaverseny, 1983., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

195. Az 1, 2, 4, 5 és egy tetszés szerint választott számjeggyel írd fel azt a legnagyobb ötjegyű számot, amelyik 12-vel osztható!

Varga Tamás Matematikaverseny, 1989., 8. osztályosok versenye, országos döntő

196. Melyik az a legkisebb 7-tel osztható pozitív egész szám, amely 3-mal osztva 1-et, 4-gyel osztva 2-t, 5-tel osztva 3-at és 6-tal osztva 4-et ad maradékul?

197. A 13934-et és a 16121-et ugyanazzal a háromjegyű számmal elosztva ugyanazt a maradékot kapjuk. Mennyi a maradék számjegyeinek összege?

(A) 7 (B) 8 (C) 11 (D) 15 (E) 18

Zrínyi Ilona Matematikaverseny, 1995., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

198. Melyik a 36 legkisebb olyan többszöröse, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában csak 0 és 5 számjegy szerepel?

199. Legkevesebb hány jegyű az a 36-tal osztható szám, amelynek minden számjegye 2 vagy 3?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Zrínyi Ilona Matematikaverseny, 2001., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

200. Két mutató közös tengely körül forog egyenletesen. Az egyik 12 perc alatt, a másik 16 perc alatt fordul körbe. Most mindkettő a skála 0 pontjára mutat. Hány perc múlva fordul ez újra elő?

Kalmár László Matematikaverseny 1998., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

201. Egy 1200 m hosszú kör alakú versenypályán két kerékpáros egyszerre indul el a rajtvonalról, ellenkező irányban. Amíg az egyik 300 m-t tesz meg, addig a másik 400 m-t. Hány kört tesznek meg, amíg újra a rajtvonalon találkoznak?

Kalmár László Matematikaverseny 1991., 6. osztályosok versenye, országos döntő

202. Hány olyan különböző számpár létezik, amelyek legnagyobb közös osztója 7, legkisebb közös többszöröse 16 940?

203. Két szám legkisebb közös többszöröse 240, legnagyobb közös osztója 8. Tudjuk még, hogy a kisebbik szám törzstényezői közül csak az 5 nincs meg a nagyobb számban. Mik ezek a számok?

Kalmár László Matematikaverseny 1990., 6. osztályosok versenye, megyei forduló

204. Határozd meg mindazokat az a és b természetes számokat, amelyekre igaz, hogy $a \cdot b = 7875$ és a és b legnagyobb közös osztója 15.

Kalmár László Matematikaverseny 1983., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

205. Két pozitív egész szám közül az egyik a 100. Mi lehet a másik szám, ha a két szám legkisebb közös többszöröse tízszer nagyobb, mint a két szám legnagyobb közös osztója?

Varga Tamás Matematikaverseny, 1995., 8. osztályosok versenye

206. Tudjuk, hogy tíz pozitív egész szám összege 1998. Mennyi lehet legfeljebb a 10 szám legnagyobb közös osztója?

Kalmár László Matematikaverseny 1998., 8. osztályosok versenye, megyei forduló

207. Mutasd meg, hogy $n \geq 1$ esetén a $3n + 1$ és az $5n + 2$ számok legnagyobb közös osztója mindig 1.

208. Igazoljuk, hogy a következő két szám legnagyobb közös osztója 1: $1998 \cdot 1999$ és $1998^{1999} + 1999^{1998}$.

Kalmár László Matematikaverseny 1998., 8. osztályosok versenye, országos döntő

209. Igaz-e, hogy $1995^2 + 2^{1995}$ és 1995 legnagyobb közös osztója 1? Állításodat indokold!

Kalmár László Matematikaverseny 1996., 6. osztályosok versenye, országos döntő

210. Mennyi a legnagyobb közös osztója az $A = 2001^{2000} + 2000^{2001}$ és a $B = 2000 \cdot 2001$ számoknak?

Kalmár László Matematikaverseny 2001., 7. osztályosok versenye, országos döntő

211. Két testvér életkorának összege legalább 10, de legfeljebb 20 esztendő. Az életkorok összegének 6 pozitív osztója van. Hány évesek a testvérek, ha egyikük háromszor olyan idős, mint a másik?

Varga Tamás Matematikaverseny, 1995., 7. osztályosok versenye

212. Melyik az a háromjegyű szám, amelynek legtöbb osztója van?

213. 1-től 20-ig összeszoroztuk az egész számokat. A kapott szorzatnak hány különböző pozitív osztója van?

Kalmár László Matematikaverseny 1990., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

214. Van 60 darab egybevágó (egyforma) kis kockánk. Hányféle különböző méretű téglatestet lehet ezekből összerakni? (A téglatesthez mindegyik kis kockát fel kell használni!)

Kalmár László Matematikaverseny, 1993., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

215. Van 48 darab egyforma (egybevágó) kockánk. Hányféle különböző alakú téglatestet lehet ezekből összerakni, ha egy-egy téglatestnél mindet fel kell használni?

Kalmár László Matematikaverseny, 1997., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

216. Van 36 darab egyforma (egybevágó) fakockánk. Hány különböző tömör téglatestet lehet ezekből építeni, ha egy-egy téglatesthez mindet fel kell használni?

Kalmár László Matematikaverseny, 1998., 5. osztályosok versenye, megyei forduló

217. Mi az utolsó két számjegye a 7^{1999} hatvány értékének?

Kalmár László Matematikaverseny 1999., 7. osztályosok versenye, országos döntő

218. Határozd meg a 7^{9^9} szám tízes számrendszerbeli alakjának utolsó két számjegyét!

Kalmár László Matematikaverseny 1997., 7. osztályosok versenye, országos döntő

219. Milyen számjegyre végződik a $19^{95} + 95^{19}$ összeg?
(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 9

Zrínyi Ilona Matematikaverseny, 1995., 6. osztályosok versenye, országos döntő

220. Négy egymást követő páratlan szám szorzata 9-re végződik. Milyen számjegy áll a szorzatban a 9 előtt?

Kalmár László Matematikaverseny 1986., 8. osztályosok versenye, megyei forduló

221. Melyik n pozitív egész számra igaz, hogy az $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ összeg értéke olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyei egyenlők?

Kalmár László Matematikaverseny, 1992., 7. osztályosok versenye, országos döntő

222. Kiválasztunk egy háromjegyű számot: $\overline{abc}$. Ezután képezzük a $\overline{cab}$, majd a $\overline{bca}$ számokat, majd elvégezzük az összeadást: $\overline{abc} + \overline{cab} + \overline{bca}$. Melyik két egymás utáni pozitív egész szám szorzata lehet ez az összeg?

Kalmár László Matematikaverseny, 1999., 7. osztályosok versenye, megyei forduló

223. Valaki három különböző, nem 0 számjegyből elkészítette az összes, különböző számjegyekből álló háromjegyű számot, majd a kapott számokat összeadta. Kiderült, hogy az összeg két szomszédos egész szám szorzata. Melyek lehettek a kiinduló számjegyek?

Kalmár László Matematikaverseny, 2000., 8. osztályosok versenye, megyei forduló

224. Adott egy tízes számrendszerbeli ötjegyű szám. A szám osztható 5-tel és felbontható egymásutáni prímszámok négyzetének szorzatára. Mi lehet ez a szám?

Varga Tamás Matematikaverseny, 1989., 8. osztályosok versenye

225. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek a kétszerese négyzetszám, és a háromszorosa egy egész szám harmadik hatványa (köbszám)?

Varga Tamás Matematikaverseny, 1991/92., 7. osztályosok versenye

226. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek fele egy egész szám négyzete, ötöde pedig egy egész szám köbe (harmadik hatványa)?

Kalmár László Matematikaverseny 1998., 6. osztályosok versenye, országos döntő

227. Keress olyan pozitív egész számot, amelyet 2-vel szorozva négyzetszámot, 3-mal szorozva köbszámot, 5-tel szorozva teljes ötödik hatványt kapunk!

Kalmár László Matematikaverseny, 1989., 8. osztályosok versenye, megyei forduló

228. Igazoljuk, hogy a 376 bármely pozitív egész kitevőjű hatványa 376-ra végződik!

Kalmár László Matematikaverseny 1995., 6. osztályosok versenye, országos döntő

229. Az A kétjegyű pozitív egész számról tudjuk, hogy bármelyik pozitív egész kitevőjű hatványának utolsó két számjegyéből alkotott szám A-val egyenlő. Mi lehet A?

Kalmár László Matematikaverseny 1996., 6. osztályosok versenye, országos döntő
Kalmár László Matematikaverseny 1998., 8. osztályosok versenye, országos döntő

230. A következő szorzásban azonos betűk azonos számjegyeket, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek: $\overline{BIT} \cdot \overline{BIT} = \overline{SOKBIT}$.

Mi lehet a szorzat értéke?

Kalmár László Matematikaverseny 1996., 8. osztályosok versenye, országos döntő

231. Egy háromjegyű számot megszoroztunk 512-vel, a szorzat utolsó három számjegye: 592. Melyik háromjegyű számot szoroztuk meg?

232. Két padon 6-6 gyerek ült. Valamennyien különböző életkorúak (az életkorok egész számok), és az egyik padon ülő gyerekek életkorának összege és szorzata is megegyezik a másik padon ülők életkorának összegével és szorzatával. A legidősebb gyerek 16 éves. Hány évesek azok a gyerekek, akik vele egy padon ülnek?

Kalmár László Matematikaverseny, 1993., 6. osztályosok versenye, országos döntő

Párosország

Az egész számok világában megszokott oszthatósági tulajdonságokat nyilvánvalónak tekintjük. Például azt, hogy maradékos osztásnál az osztási maradék kisebb az osztónál, és az is megszokott számunkra, hogy egy egész számot sorrendtől eltekintve csak egyféleképp bonthatunk prímszámok szorzatára. Látogassunk el egy olyan számországba, ahol ezek nem teljesülnek.

Párosország egy olyan ország, ahol a páratlan számokat olyan csúnyának tartják, hogy nem is nevezik őket számoknak. Itt tehát csak páros számok vannak: a 2, a 4, a 6, a 8 stb.

Ne gondoljuk azonban, hogy itt nem lehet számolni. Itt is tudnak összeadni vagy kivonni, hiszen két páros szám összege is, különbsége is páros szám. (Bezzeg „Páratlanországban" nem így lenne.) A szorzásnál sem jönnének zavarba, mert két páros szám szorzata is páros szám.

Az egész számok szokásos világában jól ismerjük a maradékos osztást. Például a 37-et 8-cal osztva a hányados 4, a maradék 5: $37 = 4 \cdot 8 + 5$. (A maradék mindig kisebb a hányadosnál.)

Párosországban ez másképp van. Ha például 12-t osztanánk el 6-tal, még mindig minden rendben lenne, mert $12 = 2 \cdot 6$, és a 2-t itt is ismerik. Osszuk el azonban 18-at 6-tal! 18-ban a 6 2-szer megvan, de a következő számszor – ami Párosországban már 4 – nincs meg. (Persze, hiszen *mi* tudjuk, hogy 18-ban a 6 3-szor van meg.) Így azután a maradékos osztást így kell írni: $18 = 2 \cdot 6 + 6$, tehát itt a maradék nem lesz mindig kisebb az osztónál. Sőt olyan furcsa eset is lehet, amikor a maradék az osztónál nagyobb. Osszuk el például a 20-at 6-tal: $20 = 2 \cdot 6 + 8$.

Természetesen Párosországban is vannak „prímszámok", ezek olyanok, amelyeket nem lehet felbontani két – természetesen páros – szám szorzatára. Ilyen számok például a 2, 6, 10, 14, 18, 22, ... A 4, 8, 12, 16, 20, 24, ... számok összetettek.

A 4-gyel osztható számok felbonthatók két páros szám szorzatára, ezért összetett számok. A 4-gyel nem osztható páros számokat nem tudjuk felbontani két páros szám szorzatára, ezek a prímszámok.

Az egész számok szokásos világában a prímszámok szabálytalanul helyezkednek el. A prímek 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ... sorozatát nem tudjuk képlettel kényelmesen leírni. Tehát nincs olyan képletünk, amely egyszerűen megmondaná, hogy melyik a 10., a 100., vagy a 10 000. prímszám. Más a helyzet Párosországban. Előbbi megállapításunk szerint Párosországban azok a prímek, amelyek 4-gyel osztva 2 maradékot adnak. Ebben az országban a prímszámok „szabályosan" helyezkednek el.

Az egész számok szokásos világában ha egy prímszám osztója egy szorzatnak, akkor osztója valamelyik tényezőnek (ez a *prímtulajdonság*).

Például, ha $a \cdot b$ osztható 5-tel, akkor vagy a, vagy b osztható 5-tel.

Ez jellemzi is a prímeket, mert összetett számokra ez nem igaz. Ha $a \cdot b$ osztható 6-tal, akkor nem biztos, hogy a vagy b osztható 6-tal. Hiszen $3 \cdot 8$ osztható 6-tal, de 3 sem, 8 sem osztható 6-tal.

Párosországban a prímekre nem teljesül az egészek szokásos világában meglevő prímtulajdonság. Párosországban a 30 prímszám, és a 30 osztója a $6 \cdot 10$ szorzatnak, ám nem osztója 6-nak, és nem osztója 10-nek sem.

Itt is igaz, hogy bármely számot fel lehet bontani „prímszámok" szorzatára.

Végezzük el ezt a felbontást például a 60 esetén: $60 = 2 \cdot 30$ és $60 = 6 \cdot 10$.

A két felbontás mindegyikében „prímszámok" szerepelnek már, és ennek ellenére az egyik felbontás egyetlen tényezője sem szerepel a másik felbontásban.

Az egész számok szokásos világában jól ismert tulajdonság *a számelmélet alaptétele:* Egy 1-nél nagyobb egész számot bárhogyképpen is bontunk fel prímszámok szorzatára, a felbontásokban mindig ugyanazok a prímtényezők szerepelnek, és mindegyik ugyanannyiszor.

Ez a fontos tétel nem teljesül Párosországban. (Ezt láttuk a 60 prímtényezős felbontásainál.)

Ez az útikalauz Fried Ervin: Oszthatóság és számrendszerek (Tankönyvkiadó, 1971) c. könyvét felhasználva készült.