Valószínűségszámítás

Gát György

Nyíregyháza

2010

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék 2
1. fejezet: Előszó, bevezetés 3
2. fejezet: A Kolmogorov-féle valószínűségi mező 6
3. fejezet: A feltételes valószínűség 14
4. fejezet: Valószínűségi változó, eloszlásfüggvény 18
5. fejezet: Többdimenziós valószínűségi változók 25
6. fejezet: Várható Érték 28
7. fejezet: A szórás 41
8. fejezet: Speciális, diszkrét eloszlású valószínűségi változók 47
9. fejezet: Speciális, folytonos eloszlású valószínűségi változók 53
10. fejezet: A nagy számok törvényei, valószínűségi változó sorozatok konvergenciája 61
11. fejezet: centrális határeloszlás tétel 65
12. fejezet: A feltételes várható érték 70
Irodalomjegyzék 72
Index - Tárgymutató 73

1. fejezet

Előszó, bevezetés

Kérdés: Mennyi a valószínűsége?
Válasz: Mihez képest?

(Tartalomjegyzék) A jegyzet - elsősorban - a matematika (és programtervező informatikus) BSc szakos képzésben résztvevő hallgatók számára nyújt bevezetést a valószínűségszámításba. Nincs módunkban a valószínűségszámítás korszerű elveinek megfelelő teljes tárgyalásra, ugyanis a hallgatóságnak hiányoznak a szükséges mérték és integrálelméleti ismeretei. Ehelyett arra vállalkozunk, hogy precíz módon definiáljuk a Kolmogorov féle valószínűségi mezőt, és más valószínűségelméleti fogalmakat. Egzakt bizonyításokat adunk olyan esetekben, ahol ez egyszerű eszközökkel ("naív" halmazelmélet, differenciál és integrálszámítás) megtehető. Külön jelezzük, hogy, ha csak valamely speciális esetre adunk bizonyítást. A jegyzet célja, hogy általános bevezető betekintést adjon a valószínűségszámításba, annak modell jellegébe. A valószínűségszámítás célja, hogy a világ különféle jelenségeire, eseményeire modelleket adjon. Az egyes eseményekhez nulla és egy közötti számokat rendelve azt az esemény valószínűségének nevezzük. Egy esemény valószínűsége, tehát nem egy mindentől független az univerzumból eredő szám, hanem egy általunk választott modellből ered. Igen könnyű megadni olyan Kolmogorov féle valószínűségi mezőt, hogy annak a valószínűsége, hogy a Kolmogorov féle valószínűségi mezőben legelnek tehenek 1 legyen. Az más kérdés, hogy egy modell nem igazán jó semmire (de korrekt lehet), ha a tapasztalat ellentmond neki.

Történeti bevezetés. A szerencsejátékokkal kapcsolatos véletlen események matematikai vizsgálatával elsőként H. Cardano (1501-1576), G. Galilei (1564-1642), B. Pascal (1623-1662), P. Fermat (1601-1665) és Ch. Huygens (1629-1695) foglalkozott. Egy szenvedélyes szerencsejátékos, Ch. De Méré lovag a következő két problémával fordult Pascalhoz (1654):

> 1. Mi az oka annak, hogy egy kockával dobva előnyös arra fogadni, hogy az első négy dobás között megjelenik a hatos, de hátrányos arra fogadni, hogy két kockával dobva az első 24 dobás valamelyikében megjelenik a két hatos.
>
> 2. Két játékos megállapodik abban, hogy az nyeri a kitűzött pénzösszeget, aki először nyer k számmal játszmát. Hogyan kell méltányosan felosztani a kitűzött pénzösszeget, ha valamilyen okból akkor kell abbahagyniuk a játékot, amikor az első játékosnak $n < k$, a másodiknak $m < k$ győzelme van.

A problémák korábban is ismertek voltak, de helyes megoldást Pascal és Fermat adtak 1654-ben. Az említett problémákkal Huygens is foglalkozott, és a megoldásokat a *De ratiociniis in ludo aleae* c. értekezésében rögzítette, amely 1657-ben jelent meg. Jelentős eredmények fűződnek J. Bernoulli (1654-1788) munkásságához, aki felismerte, hogy a valószínűségszámítás jól alkalmazható a természet és a társadalom véletlen jelenségeinek a vizsgálatára.

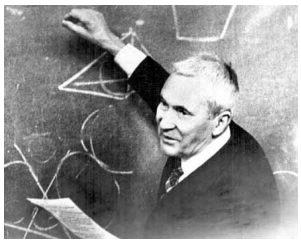
Pierre de Fermat

A 18. században A. de Moivre (1667-1754) , Th. Bayes (1702-1754) , G.L.L. Buffon (1707-1788) , J.L. Lagrange (1736-1813) és mások bővítik a valószínűségszámítást új eredményekkel.

A valószínűségszámítás klasszikus elméletét Laplace foglalta össze. Abban az időben a valószínűséget a kedvező esetek és az összes esetek számának hányadosaként definiálták, amely csak az úgynevezett egyenlően valószínű esetekre teljesül.

A 19. század elejétől a valószínűségszámítás igen gyors fejlődésnek indult S.D. Poisson (1781-1840), C.F. Gauss (1777-1855), P.L. Csebisev (1821-1894) munkássága következtében. A valószínűségszámítás töretlen fejlődését akadályozta az egzakt matematikai megalapozottságának a hiánya. A valószínűségszámítás matematikai megalapozásával foglalkoztak a 20. században - többek között - Sz.N. Bernstein (1880-1969), és R. Mises (1883-1953), azonban modern elméletét A.N. Kolmogorov (1903-1987) dolgozta ki. Kolmogorov E. Borelnek (1871-1956) , Jordan Károlynak (1871-1959), és másoknak az eredményeit továbbfejlesztve a halmaz és mértékelméletre alapozva 1933-ban alkotta meg a valószínűségszámítás axiomatikus elméletét. Kolmogorov elmélete elősegítette a valószínűségszámítás ugrásszerű fejlődését, mivel megszüntette azt a bizonytalanságot, amit az alapok tisztázatlansága okozott. Munkásságát követően a valószínűségszámítás feladatának megfogalmazása is módosult.

A valószínűségszámítás feladata olyan mérték bevezetése, amely a bizonytalanságot numerikusan méri, s erre alapozva olyan matematikai módszerek kidolgozása, amelyekkel bizonyos események (véletlen tömegjelenségek) modellezhetőek, illetve valószínűségük kiszámítható.


Andrey Nikolaevich Kolmogorov

A jegyzet 2. fejezete a Kolmogorov-féle valószínűségi mező bevezetésével, illetve néhány alapvető tétellel foglalkozik. Példákat adunk Kolmogorov-féle valószínűségi mezőkre.

A 3. fejezetben az úgynevezett feltételes valószínűséget tárgyaljuk. A 3. fejezetben bevezetjük a valószínűségi változó, illetve az eloszlásfüggvény fogalmakat. A 4. fejezetben a valószínűségi változó és az eloszlásfüggvény fogalmakat vezetjük be, valamint különféle rájuk vonatkozó állításokat mutatunk be.

A 5. fejezet a helye a többdimenziós valószínűségi változók bevezetésének, valamint a velük kapcsolatos néhány fogalom és állítás ismertetésének. Az hatodik és a hetedik fejezet a várható érték és a szórás bevezetéséből, illetve velük kapcsolatos néhány állítás igazolásából áll.

Az 8. fejezetben speciális, diszkrét eloszlású, a 9. fejezetben speciális, folytonos eloszlású valószínűségi változókkal foglalkozunk.

A 10. és 11. fejezetben a nagy számok különféle törvényeit tárgyaljuk. Tárgyaljuk az 1 valószínűségű, sztochasztikus és L^p-konvergencia kérdéseit, valamint kapcsolatukat. Itt tárgyaljuk a centrális határeloszlás-tételt.

Végezetül a 12. fejezetben a feltételes várható értéket tárgyaljuk, illetve a feltételes valószínűség általános fogalmát, legegyszerűbb tulajdonságait.

Az egyes fejezet végén az adott fejezet anyagával kapcsolatos feladatok olvashatóak.

2. fejezet

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

(Tartalomjegyzék)

Jelölés. Jelölje a természetes számok halmazát $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, ...\}$, valamint $\mathbb{N} := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a pozitív egészek halmazát.

2.1.Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$egy üres halmaztól különböző halmaz (, melynek az elemei is halmazok). Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ egy (halmaz) gyűrű, ha tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \cup B$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$ (, azaz, ha $\mathcal{A}$ zárt az unióra és kivonásra, mint halmazműveletekre nézve).*

2.2.Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ egy üres halmaztól különböző halmaz (, melynek az elemei is halmazok). Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ egy (halmaz) σ gyűrű, ha zárt a kivonásra, mint halmaz műveletre nézve, és tetszőleges $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$ esetén*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

(, azaz, $\mathcal{A}$ zárt a megszámlálható unióra, mint halmaz műveletre nézve is).

2.1. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ egy gyűrű vagy σ gyűrű. Ekkor $\emptyset \in \mathcal{A}$.*

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{A}$ nem üres halmaz, ezért van $A \in \mathcal{A}$. Mivel $\mathcal{A}$ zárt a kivonásra, mint halmaz műveletre nézve, ezért $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{A}$. $\square$

2.2. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ egy σ gyűrű. Ekkor $\mathcal{A}$ gyűrű.*

Bizonyítás. Definíció szerint azt kell belátnunk, hogy $\mathcal{A}$ zárt a kéttagú unióképzésre, mint műveletre nézve, azaz $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \cup B \in \mathcal{A}$. Legyen $A_1 := A, A_2 := B, A_3 := \emptyset, A_4 := \emptyset, \ldots$. Az 2.1 Állítás szerint $\emptyset \in \mathcal{A}$, esetén

$$A \cup B = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}. \quad \square$$

2.3. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ egy gyűrű, $A, B \in \mathcal{A}$. Ekkor, $A \cap B \in \mathcal{A}$ (,azaz egy gyűrű zárt a metszet képzésre, mint halmaz műveletre nézve).*

Bizonyítás. Mivel egy gyűrű zárt a különbség képzésre nézve, azaz két elem különbsége is elem, ezért $A \setminus B \in \mathcal{A}$, valamint ezt még egyszer alkalmazva kapjuk, hogy $A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$.Márpedig

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B,$$

ugyanis , ha $x \in A \cap B$, akkor $x \notin A \setminus B$, s így $x \in A \setminus (A \setminus B)$. Ha viszont a bal oldalról veszünk egy x -et, azaz $x \in A \setminus (A \setminus B)$, akkor $x \in A$ és $x \notin A \setminus B$, tehát ezért $x \in B$ is. Következésképpen $x \in A \cap B$ $\square$

2.4. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ egy σ gyűrű, valamint, $A_i \in \mathcal{A} \quad (i \in \mathbb{N})$. Ekkor*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

(, azaz egy σ gyűrű zárt a megszámlálhatóan véges metszet képzésre, mint halmazműveletre nézve).

Bizonyítás. Először lássuk be a következő halmazelméleti azonosságot.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_i) \right).$$

Legyen $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Ekkor x minden A_i-nek eleme, ezért $x \notin A_1 \setminus A_i$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén, ezért $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_i)$. De, mert $x \in A_1$, ezért $x \in A_1 \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_i))$. Másrészt, legyen $x \in A_1 \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_i))$. Ekkor, $x \in A_1$ és $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_i)$. Tehát x nem eleme egyetlen $A_1 \setminus A_i$ $(i \in \mathbb{N})$ halmaznak sem. Ebből adódik, hogy x eleme minden A_i $(i \in \mathbb{N})$ halmaznak, azaz a metszetüknek is, s ezzel a nevezett halmazelméleti azonosságot beláttuk. A bizonyítás többi része pedig azon alapszik, hogy mivel $\mathcal{A}$ egy σ gyűrű, ezért $A_1 \setminus A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$, azután $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_i) \in \mathcal{A}$, innen pedig $A_1 \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_i)) = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. $\square$

Jelölés. Legyen A egy tetszőleges halmaz. Az A halmaz részhalmazainak a halmazát a következőképpen fogjuk jelölni.

$$2^A := \{B | B \subset A\}.$$

2.3.Definíció. *Legyen $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ egy (halmaz) gyűrű (,azaz $\mathcal{A}$ elemei részhalmazai az Ω halmaznak). Ha $\Omega \in \mathcal{A}$ akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ egy (halmaz) algebra az Ω -ra (mint alaphalmazra) nézve.*

2.4.Definíció. *Legyen $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ egy (halmaz) σ gyűrű (,azaz a $\mathcal{A}$ σ gyűrű elemei részhalmazai az Ω halmaznak). Ha $\Omega \in \mathcal{A}$ akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ egy (halmaz) σ algebra az Ω -ra (mint alaphalmazra) nézve.*

2.5. Állítás. *Legyen Ω egy tetszőleges halmaz. Ekkor 2^{Ω} egy (halmaz) σ algebra az Ω -ra nézve.*

Bizonyítás. Először is 2^{Ω} nem üres halmaz, mert az üres halmaz eleme, ugyanis $\emptyset \subset \Omega$, azaz $\emptyset \in 2^{\Omega}$. Belátjuk, hogy 2^{Ω} zárt a különbség képzésre és a megszámlálható unióra, mint halmazműveletekre. Legyen $A, B \in 2^{\Omega}$. Ekkor $A, B \subset \Omega$, ezért $A \setminus B \subset \Omega$, következésképp $A \setminus B \in 2^{\Omega}$.

Valamint, legyen $A_i \in 2^{\Omega}$ $(i \in \mathbb{N})$. Ekkor, $A_i \subset \Omega$ $(i \in \mathbb{N})$. Tehát, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \Omega$, azaz $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in 2^{\Omega}$.

Tehát 2^{Ω} halmaz σ gyűrű. Mivel $\Omega \subset \Omega$, ezért $\Omega \in 2^{\Omega}$, ezzel igazoltuk, hogy 2^{Ω} egy halmaz σ algebra az Ω -ra nézve. $\square$

2.5.Definíció. *Az* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *hármast Kolmogorov féle valószínűségi mezőnek nevezzük, ha teljesülnek az alábbiak.* $\mathcal{A}$ *egy halmaz* σ *algebra az* Ω *-ra nézve,* $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_0^+$ *azaz, a* $\mathcal{A}$ *elemein értelmezett függvény, amely a* $[0, \infty)$ *intervallumba képez. Tovább ,*

i. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$,

ii. $\mathrm{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$, *tetszőleges* $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $(i, j \in \mathbb{N})$ *esetén. (Ezt az utóbbi tulajdonságot úgy mondják, hogy a* P *valószínűség* σ *additív.)*

kolmogorovmezo.mp3 ▷

2.6. Állítás. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov féle valószínűségi mező. Ekkor* $P(\emptyset) = 0$.

Bizonyítás. $\mathcal{A}$ egy σ algebra, amelynek eleme az $\emptyset$, ezt beláttuk. Így mindenesetre van valószínűsége. Legyen $A_n := \emptyset$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor persze az A_n halmazok diszjunktak, így alkalmazva *ii* -t kapjuk

$$\mathrm{P}(\emptyset) = \mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(\emptyset).$$

Mivel $\mathrm{P}(\emptyset)$ egy nemnegatív szám, ezért csakis 0 lehet. □

2.7. Állítás. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov féle valószínűségi mező, továbbá* $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$ *diszjunkt események (,azaz* $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$ *esetén). Ekkor*

$$\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i).$$

(Ezt az utóbbi tulajdonságot úgy mondják, hogy a P *valószínűség additív.)*

Bizonyítás. Legyen $A_{n+1} := A_{n+2} := ... := \emptyset$. Ekkor az A_i $(i \in \mathbb{N})$ események mind diszjunktak, mert az $A_1, ..., A_n$ halmazok azok, és csak üres halmazokat vettünk fel, ami ugyebár bármivel is összemetszve még mindig csak üres halmaz. Alkalmazható tehát a Kolmogorov féle valószínűségi mező *ii.* axiómája, valamint az előbbi állítás, miszerint az üres halmaz valószínűsége nulla, azaz

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) =& \mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \emptyset) \\
=& \mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i) \\
=& \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathrm{P}(\emptyset) \\
=& \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i).
\end{aligned}$$

□

2.8. Állítás. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov féle valószínűségi mező, továbbá* $A, B \in \mathcal{A}$ *események olyanok, hogy* $A \subset B$ *(ez akár úgy is mondható, hogy az* A *eseménynek következménye a* B *esemény). Ekkor* $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a B eseményt felbonthatjuk az alábbi két diszjunkt halmaz uniójára: $B = A \cup (B \setminus A)$. Következésképp az előbbi állítást, valamint azt a tényt, hogy a valószínűség nemnegatív kihasználva: $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \setminus A) \geq \mathrm{P}(A)$. □

Következmény. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov féle valószínűségi mező, továbbáA* $\in \mathcal{A}$ *egy tetszőleges esemény. Ekkor* $\mathrm{P}(A) \leq 1$*, azaz egy tetszőleges esemény valószínűsége egy* 1*-től nem nagyobb (és* 0*-nál nem kisebb) szám.*

Bizonyítás. Az 2.8 Állítás és az 2.5 Definíció *i.* része alapján, $A \subset \Omega$, $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(\Omega) = 1$. □

2.9. Állítás. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov féle valószínűségi mező, továbbá* $A \in \mathcal{A}$ *tetszőleges esemény. Ekkor* $\mathrm{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathrm{P}(A)$*. (Azaz, a komplementer esemény valószínűsége egyenlő 1 mínusz az esemény valószínűsége.)*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy A és $\Omega \setminus A$ diszjunkt események, valamit az uniójuk maga az egész alaphalmaz, ezért az 2.7 Állítás és az 2.5 Definíció *i.* alapján írható, hogy $1 = \mathrm{P}\ (\Omega) = \mathrm{P}\ (A \cup (\Omega \setminus A)) = \mathrm{P}\ (A) + \mathrm{P}\ (\Omega \setminus A)$. □

2.10. Állítás. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov féle valószínűségi mező, továbbá* $A, B \in \mathcal{A}$ *tetszőleges esemény. Ekkor:*

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Bizonyítás. Felbontjuk az $A \cup B$ halmazt két diszjunkt halmaz uniójára. $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. úgy a valószínűség véges additivitása miatt $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \setminus A)$. Másrészt a B halmaz is felbontható az $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ módon (két diszjunkt esemény uniójára), amiből $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \setminus A) + \mathrm{P}(B \cap A)$, azaz $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$ adódik. □

A következő két állítást úgy is lehet nevezni, hogy a valószínűség monoton halmazrendszerekre vonatkozó konvergenciája, vagy még inkább úgy, hogy a valószínűségi mérték folytonossága.

2.11. Állítás. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov féle valószínűségi mező,* $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ *olyan események, hogy* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$*. Ekkor,*

$$\mathrm{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(A_n).$$

2v11vallitasvI.mp3 ▷ 2v11vallitasvII.mp3 ▷

Bizonyítás. Először is, a $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ halmaz esemény, mivel korábban beláttuk, hogy egy σ algebra (és $\mathcal{A}$ az) zárt a megszámlálható metszet képzésre, így mindenesetre van valószínűsége.

Definiáljuk a következő eseményeket. $B_n := A_n \setminus A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Belátjuk, hogy a B_n, $n \in \mathbb{N}$ halmazok diszjunktak. Legyen $k, j \in \mathbb{N}$ és mondjuk $k > j$ (megjegyezzük, hogy a $k < j$ eset teljesen azonos módon tárgyalható). Ekkor $k \geq j+1$, $B_k = A_k \setminus A_{k+1} \subset A_k \subset A_{j+1}$. Valamint, mivel $A_{j+1} \cap (A_j \setminus A_{j+1}) = \emptyset$, így $B_k \cap B_j = \emptyset$. Valamint $A_{j+1} \cap B_j = \emptyset$ azt is adja, hogy $B_j \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \emptyset$.

Belátjuk, hogy

$$A_1 = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \bigcup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right). \tag{2.1}$$

Legyen először $\omega \in A_1$. Ekkor, ha $\omega \in A_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor készen vagyunk, mert $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Tegyük tehát fel, hogy van olyan A_n halmaz, amelynek nem eleme az ω. Legyen n a legkisebb ilyen index. Ezek szerint $\omega \notin A_n$, de $\omega \in A_1, ..., A_{n-1}$. Innen adódik, hogy $\omega \in B_n$.

Legyen most $\omega \in (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \bigcup (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$. Ha $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset A_1$, akkor készen vagyunk. Feltehető tehát, hogy $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, következésképpen van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\omega \in B_n \subset A_n \subset A_1$. Ezzel az (2.1) halmazelméleti azonosságot igazoltuk.

Alkalmazva a valószínűségi mező *ii.* axiómáját kapjuk, hogy

$$\mathrm{P}\ (A_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\ (B_n) + \mathrm{P}\ (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n). \tag{2.2}$$

Az 2.7 Állítás igazolása alapján adódik, hogy $\mathrm{P}\ (B_n) = \mathrm{P}(A_n) - \mathrm{P}(A_{n+1})$, tehát,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\ (B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (\mathrm{P}(A_n) - \mathrm{P}(A_{n+1}))$$

$$= \lim_{N\to\infty} (\mathrm{P}(A_1) - \mathrm{P}(A_{N+1})) = \mathrm{P}\ (A_1) - \lim_{N\to\infty} \mathrm{P}\ (A_N).$$

(2.2) adja, hogy

$$\mathrm{P}\ (A_1) = \mathrm{P}\ (A_1) - \lim_{N\to\infty} \mathrm{P}\ (A_N) + \mathrm{P}\ (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n),$$

ami pedig éppen a bizonyítandó állítás. □

2.12. Állítás. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*egy Kolmogorov féle valószínűségi mező,* $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ *olyan események, hogy* $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ....$ *Ekkor,*

$$\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

Bizonyítás. Először is a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ halmaz esemény, így mindenesetre van valószínűsége.

Definiáljuk a következő eseményeket. $B_n := \Omega \setminus A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor, $B_1 \supset B_2 \supset ...$, így alkalmazható az 2.11 Állítás. Eszerint, valamint alkalmazva a halmazelméleti De Morgan azonosságot, valamint azt, hogy a komplementer

esemény valószínűsége egyenlő 1 mínusz az esemény valószínűségével adódik, hogy

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \\
&\qquad = 1 - \mathrm{P}\,(\Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \\
&\qquad = 1 - \mathrm{P}\,(\bigcap_{n=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_n)) \\
&\qquad = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\,(\Omega \setminus A_n) \\
&\qquad = 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - \mathrm{P}\,(A_n)) \\
&\qquad = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\,(A_n). \quad \square
\end{aligned}$$

Az alábbiakban megemlítünk három példát Kolmogorov féle valószínűségi mezőre.

1. Példa. A klasszikus valószínűségi mező.

Legyen Ω egy véges halmaz; $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, valamint $\mathcal{A} := 2^{\Omega}$. Továbbá adjuk meg a P valószínűségi függvényt úgy, hogy definíció szerint legyen

$$\mathrm{P}(\emptyset) := 0, \quad \mathrm{P}(\{\omega_i\}) := \frac{1}{n} \quad (i = 1, ..., n),$$

és a többi $\mathcal{A}$ -beli halmazon pedig P legyen úgy megadva, hogy az additivitása teljesüljön. Ez azt jelenti, hogy ekkor tetszőleges $\mathcal{A} \ni A = \{\omega_1^A, ..., \omega_k^A\}$ esetén $A = \{\omega_1^A\} \cup \cdots \cup \{\omega_k^A\}$, azaz

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(\{\omega_i^A\}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Ezzel azt kaptuk, hogy a klasszikus valószínűségi mezőben (kissé pongyolán fogalmazva), amelyet azzal a jellemzővel kaphatunk, hogy az egyes elemi események egyenrangúak, azaz, mindegyik bekövetkezésének a valószínűsége az összes elemi esemény halmazának a számosságának reciproka, egy tetszőleges esemény valószínűsége éppen az eseményt alkotó elemi események számossága osztva az összes elemi események (Ω) számosságával. Még durvábban: kedvező esetek száma per összes esetek száma.

2. Példa. A geometriai valószínűségi mező. Ezt a példát egy "kissé elkenve" ismertetjük (, de legalább elmondva, hogy hogy és mit "kentünk" el). Legyen $\Omega := [0, 1] \times [0, 1]$, az egységnégyzet. Az események halmaza, pedig legyen az egységnégyzet Jordan mérhető részhalmazainak a halmaza, és egy Jordan mérhető halmaz, azaz esemény valószínűsége pedig az illető halmaz Jordan területe legyen. A "kenés" itt van, ugyanis igazából Jordan mérhető helyett Lebesgue mérhetőt, Jordan mérték helyett Lebesgue mértéket kellene mondani, az egységnégyzet Lebesgue mérhető részhalmazai alkotnak σ algebrát, a Jordan mérhetőek csak algebrát alkotnak (megszámlálhatóan végtelen sok Jordan

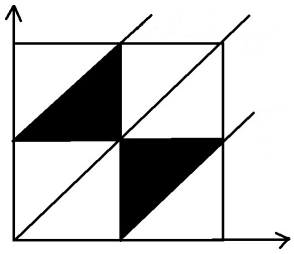
mérhető halmaz uniója már nem feltétlen lesz Jordan mérhető). De ez túl nagy gondot nem okoz (persze relatív, hogy mi a nagy) mert egy Jordan mérhető halmaz Lebesgue mérhető is , és a két mérték megegyezik (ebben az esetben).

Feladatok

1. Legyen $\mathrm{P}(A) = 0,2, \mathrm{P}(B) = 0,5, \mathrm{P}(A \cup B) = 0,6$. Mennyi lesz $\mathrm{P}(A \setminus B)$?
2. Egy csomag magyar kártyát jól összekeverünk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 4 ász egymás után helyezkedik el?
3. 100 alma közül 10 férges. Mennyi a valószínűsége, hogy válogatás nélkül 5 almát kivéve, közöttük lesz férges alma?
4. Egy urnában 6 piros, több fehér és fekete golyó van. Annak a valószínűsége, hogy egy golyót kihúzva, az fehér vagy fekete lesz 3/5, hogy piros vagy fekete színű lesz 2/3 . Hány fehér és fekete golyó van az urnában?
5. Egy pénzérmét 10-szer egymás után feldobunk. Ha fejet kapunk, azt F-fel, ha írást, azt I-vel jelöljük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az F és I betűknek ez a 10 elemű sorozata tartalmaz két azonos betűt egymás után?
6. Egy vendéglő egyik asztalánál 12 vendég ül. Összesen rendelnek 3 üveg sört, 4 tésztát, 3 kávét és 2 fagylaltot. (Minden vendég csak egy tételt rendel és a sörök, tészták, stb. teljesen egyformák.) A pincér emlékszik arra, hogy miből mennyit kell hoznia, de teljesen elfelejtette, hogy mit, kinek kell adnia. Találomra szétosztja amit hozott. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja amit kért?
7. Egy egységnyi hosszúságú szakaszt két ponttal felosztunk három részre. Mi a valószínűsége annak, hogy a keletkeze három szakasz felhasználásával lehet háromszöget szerkeszteni?

Megoldások

1. Ekkor $0,6 = \mathrm{P}(A \cup B) = 0,2 + 0,5 - \mathrm{P}(A \cap B)$. Ahonnan, $\mathrm{P}(A \cap B) = 0,1$. Így $\mathrm{P}(A \setminus B) = 0,2 - 0,1 = 0,1$.
2. $p = \frac{4!29!}{32!} = 0,0008$.
3. A: lesz férges a választottak között, $\bar{A}$: nem lesz férges a választottak között. $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} = 0,4162$.
4. Legyen az urnában a 6 piros golyó mellett x fehér és y fekete golyó. Meg kell oldani a következő egyenletrendszert. $3/5 = (x+y)/(6+x+y), 2/3 = (6+y)/(6+x+y)$. Megoldása: $x = 5, y = 4$.
5. $\mathrm{P}(\text{van két azonos betű}) = 1 - \mathrm{P}(\text{nincs két azonos betű}) = 1 - 2/2^{10} = 0,998$.
6. $3!4!3!2!/10! = 0,000476$.

7.  Jelölje x, illetve y a két felvett pont távolságát a $[0,1]$ intervallum kezdőpontjától, azaz a nullától. $\Omega = \{(x,y)|0 \leq x, y \leq 1\}$, azaz az összes elemi események halmaza az egységnégyzet pontjainak a halmaza, azon elemi események halmaza, amikor lehet háromszöget szerkeszteni, pedig a feketével satírozott rész a következőképpen áll elő.

Ha $x < y$, akkor a háromszög szerkeszthetősége a következő három egyenlőtlenség teljesülése esetén áll fenn. $x < 1 - x$, $y - x < x + 1 - y$, $1 - y < y$, azaz $x < \frac{1}{2}$, $y < x + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < y$.

Ha $y < x$, akkor a háromszög szerkeszthetősége a következő három egyenlőtlenség teljesülése esetén áll fenn $y < 1 - y$, $x - y < y + 1 - x$, $1 - x < x$, azaz $y < \frac{1}{2}$, $y > x - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x$.

A satírozott rész Jordan területe, azaz a keresett valószínűség $\frac{1}{4}$.

3. fejezet

A feltételes valószínűség

(Tartalomjegyzék)

3.1.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov féle valószínűségi mező, továbbá* $A, B \in \mathcal{A}$, $\mathrm{P}(B) > 0$ *tetszőleges események. Ekkor az*

$$\mathrm{P}(A|B) := \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

számot az A *esemény* B *eseményre, mint feltételre vonatkoztatott feltételes valószínűségének nevezik.*

feltetelesvaloszinuseg.mp3 ▷

3.1. Állítás. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov féle valószínűségi mező, továbbá* $A_1, ..., A_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *diszjunkt, és* $A, B \in \mathcal{A}$ *tetszőleges események, de* $\mathrm{P}(B) > 0$. *Ekkor*

$$0 \leq \mathrm{P}(A|B) \leq 1, \tag{3.1}$$

$$\mathrm{P}(B|B) = 1, \tag{3.2}$$

$$\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i|B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i|B). \tag{3.3}$$

Megjegyezzük, hogy a (3.1) tulajdonság azt jelenti, hogy a $\mathrm{P}(A|B)$ is, mint "afféle" valószínűség, 0 és 1 között veszi fel az értékeit, míg a (3.2) tulajdonság pedig azt, hogy annak a valószínűsége, hogy a B esemény bekövetkezik feltéve, hogy a B esemény biztosan bekövetkezik, vagy már be is következett éppen egy. A (3.3) akkor is igaz lenne, hogyha a összegzés nem n-ig, menne, hanem $\sum_{i=1}^{\infty}$ lenne.

Bizonyítás. Tekintve, hogy $A \cap B \subset B$, ezért az 2.7 Állítás alapján $\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \leq 1$, és mivel $\mathrm{P}(A \cap B) \geq 0$, $\mathrm{P}(B) > 0$, ezért $0 \leq \mathrm{P}(A|B)$, azaz (3.1) -et igazoltuk.

$\mathrm{P}(B|B) = \frac{\mathrm{P}(B \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = 1$, azaz (3.2) -t is igazoltuk.

A halmazelméleti disztributív tulajdonság, valamint a valószínűség véges additivitása alapján

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i|B) \\
&\qquad = \frac{1}{\mathrm{P}(B)} \mathrm{P}((\cup_{i=1}^{n} A_i) \cap B) = \\
&\qquad = \frac{1}{\mathrm{P}(B)} \mathrm{P}(\cup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)) \\
&\qquad = \frac{1}{\mathrm{P}(B)} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i \cap B) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i|B).
\end{aligned}$$

Közben kihasználtuk, hogy diszjunkt A_i halmazok esetében persze az $A_i \cap B$ halmazok is diszjunktak. Tehát (3.3) -t is igazoltuk. $\square$

3.2. Állítás. *(Szorzási szabály) Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov féle valószínűségi mező,*
$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ $n \in \mathbb{N}$ *olyan események, hogy az alábbi valószínűségek létezzenek. Ekkor:*

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)\\ &= \mathrm{P}(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})\\ &\cdot \mathrm{P}(A_{n-1} | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \cdot \cdots \cdot \mathrm{P}(A_2 | A_1)\mathrm{P}(A_1).\end{aligned}$$

Bizonyítás. A bizonyítandó egyenlőtlenség jobboldala:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)}{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})}\\ &\cdot \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})}{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2})}\\ &\cdot \cdots \cdot \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathrm{P}(A_1)} \mathrm{P}(A_1).\end{aligned}$$

Egyszerűsítés után (az egyes törtek nevezője megegyezik a következő tört számlálójával) látható, hogy ez éppen a bizonyítandó állítás bal oldala lesz. $\square$

3.2.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov valószínűtlenségi mező. Azt mondjuk, hogy a* $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ *események egy teljes eseményrendszert alkotnak, ha diszjunktak, azaz* $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, *másrészt* $\cup_{i=1}^n B_i = \Omega$, *azaz uniójuk maga az egész alaphalmaz.*

3.3. Állítás. *(A teljes valószínűség tétele.) Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov féle valószínűségi mező,* $B_1, \ldots, B_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *pozitív valószínűségi események egy teljes eseményrendszer ,* $A \in \mathcal{A}$ *tetszőleges esemény. Ekkor:*

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A|B_i)\mathrm{P}(B_i).$$

Bizonyítás. Tekintve, hogy $B_1, \ldots, B_n$ egy teljes eseményrendszer, így az $A \cap$

$B_1, \ldots, A \cap B_n$ halmazok is diszjunktak $(A \cap B_i \cap A \cap B_j \subset B_i \cap B_j = \emptyset)$, továbbá

$$A = A \cap \Omega = A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i),$$

ezért a Kolmogorov féle valószínűség *ii.* axiómája szerint, vagyis pontosabban

az abból következő 2.7 állítás, azaz a véges additivitás szerint

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \cap B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{P}(A \cap B_i)}{\mathrm{P}(B_i)} \mathrm{P}(B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A|B_i)\mathrm{P}(B_i). \quad \square\end{aligned}$$

3.4. Állítás. *(Bayes tétele) Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov féle valószínűségi mező,* $B_1, ..., B_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *pozitív valószínűségi események alkossanak egy teljes eseményrendszert,* $A \in \mathcal{A}$ *legyen egy pozitív valószínűségi esemény. Ekkor:*

$$\mathrm{P}(B_i|A) = \frac{\mathrm{P}(A|B_i)\mathrm{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(A|B_j)\mathrm{P}(B_j)} \quad (i = 1, ..., n).$$

Bizonyítás. A teljes valószínűség tétele alapján a bizonyítandó állítás jobb oldala egyenlő a következő törttel.

$$\frac{\mathrm{P}(A|B_i)\mathrm{P}(B_i)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{\mathrm{P}(A \cap B_i)\mathrm{P}(B_i)}{\mathrm{P}(B_i)}}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(B_i \cap A)}{\mathrm{P}(A)}$$

ami éppen a bizonyítandó állítás bal oldala. $\square$

3.3.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov valószínűtlenségi mező. Azt mondjuk, hogy az* A *és* B *események függetlenek, ha* $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$.

Thomas Bayes

Feladatok

1. Három kockát feldobunk. Feltéve, hogy a dobott számok között nincs két egyforma, mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyiken 6-os van?

2. Bizonyítsa be, hogy ha $\mathrm{P}(A) = 0,7$ és $\mathrm{P}(B) = 0,8$, akkor $\mathrm{P}(A|B) \geq 0,625$!

3. Péter pénzét 3 egyforma borítékban tartja; az elsőben két ezerforintos, a másodikban egy ezer- és egy ötezer forintos, a harmadikban egy ezer- és három ötezer forintos van. Péter találomra kivesz egy borítékot, és abból találomra kihúz egy bankjegyet. Mennyi a valószínűsége, hogy ezerforintost húzott ki?

4. Egy műhelyben három műszakban gyártanak azonos terméket. Egy napon az összes gyártott termékből az első műszakban 40%, a második és harmadik műszakban 30-30% készült. Az első műszakban 2%, a másodikban 3%, a harmadikban 5% hibás áru készült. A három műszakban elkészült teljes mennyiségből véletlenszerűen kiválasztunk egy darabot. Mennyi a valószínűsége, hogy ez hibátlan termék.

5. Egy városban ugyanannyi nő van, mint férfi. Minden 10000 nő közül 25 és minden 100 férfi közül 5 színvak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a színvakokról vezetett nyilvántartásból egy találomra választott karton egy férfi adatait tartalmazza?

6. Feldobunk egy érmét. Ha fej, akkor a 2 piros és 4 fehér lapú A kockával, ha írás akkor a 2 fehér és 4 piros lapú B kockával dobunk 2-szer egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy a második dobás eredménye piros?

Megoldások

1. $p = 11/12 \cdot 11/12 \cdot 1/12 = 0,07002$.

2. $1 \geq \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 1,5 - \mathrm{P}(A \cap B)$, azaz $\mathrm{P}(A \cap B) \geq 0,5$, $\mathrm{P}(A|B) \geq 0,5/0,8 = 0,625$.

3. A: Ezer forintost húzott ki. B_k: A k-adik borítékból húzta ki. $\mathrm{P}(A) = \sum_{k=1}^{3} \mathrm{P}(A|B_k)\mathrm{P}(B_k) = 1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 1/4 = 7/12$.

4. : A: A választott termék hibátlan. B_k: Az k edik műszakban gyártották. $\mathrm{P}(A) = \sum_{k=1}^{3} \mathrm{P}(A|B_k)\mathrm{P}(B_k) = 0,4 \cdot 0,98 + 0,3 \cdot 0,97 + 0,3 \cdot 0,95 = 0,968$.

5. $\mathrm{P}(\text{színvak}) = 0,5\frac{20}{10000} + 0,5\frac{5}{10000} = 0,0275$. $\mathrm{P}(\text{férfi, ha színvak}) = 0,5 \cdot 0,05/0,0275 = 0,9091$.

6. Az első dobás eredménye érdektelen. $\mathrm{P}(\text{a második piros}) = 0,5 \cdot 2/6 + 0,5 \cdot 4/6 = 0,5$.

4. fejezet

Valószínűségi változó, eloszlásfüggvény

(Tartalomjegyzék)

4.1.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov féle valószínűségi mező. A* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *függvényt valószínűségi változónak nevezzük, ha tetszőleges* x *valós szám esetén*

$$\{\omega | \omega \in \Omega, \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}.$$

A valószínűségi változó tehát egy olyan, az elemi eseményeken értelmezett függvény, melyre teljesül, hogy tetszőleges x *valós szám esetén esemény lesz az a halmaz - azaz lesz valószínűsége annak a halmaznak -, melyet azok az elemi események alkotnak, amelyeken a valószínűségi változó* x *-nél kisebb értéket vesz fel. Ennek a következőkben azonnal szerepe lesz, amikor is a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét definiáljuk.*

4.2.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov féle valószínűségi mező. A* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:*

$$F_\xi(x) := \mathrm{P}(\{\omega | \omega \in \Omega, \xi(\omega) < x\}) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Az $F_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény adott* x *esetén annak lesz a valószínűsége, hogy a* ξ *valószínűségi változó* x *-nél kisebb értéket vesz fel. A következő állítás a valószínűségi változók néhány tulajdonságát vizsgálja.*
eloszlasfuggveny.mp3 ▷

4.1. Állítás. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov féle valószínűségi mező,* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó. Ekkor*

$$F_\xi(x) \quad \textit{monoton növekedő függvény}, \tag{4.1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1, \tag{4.2}$$

$$F_\xi(x) \quad \textit{(minden pontban) balról folytonos függvény.} \tag{4.3}$$

eloszlasfuggvenytulajdonsagai.mp3 ▷

Bizonyítás. Legyenek $x_1 < x_2$ valós számok. Ekkor, mivel $\xi(\omega) < x_1$ esetén $\xi(\omega) < x_2$, ezért

$$\{\omega | \omega \in \Omega, \xi(\omega) < x_1\} \subset \{\omega | \omega \in \Omega, \xi(\omega) < x_2\}.$$

Következőképp, az 2.8 Állítás alapján, azaz a valószínűség monoton volta miatt

$$\begin{aligned} F_\xi(x_1) &= \mathrm{P}(\{\omega | \omega \in \Omega, \xi(\omega) < x_1\}) \\ &\le \mathrm{P}(\{\omega | \omega \in \Omega, \xi(\omega) < x_2\}) = F_\xi(x_2). \end{aligned}$$

Ezzel (4.1) igazolását befejeztük.

Legyen (x_n) $n \in \mathbb{N}$ egy tetszőleges szigorúan monoton fogyó módon $-\infty$ -hez konvergáló sorozat, továbbá

$$A_i := \{\omega | \omega \in \Omega, \xi(\omega) < x_i\} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Az előbbiek alapján $A_1 \supset A_2 \supset ....$ Alkalmazható az 2.11 Állítás.

$$\mathrm{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = \lim_{x\to-\infty} F_\xi(x).$$

Ha belátjuk, hogy $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, aminek az 2.6 Állítás következtében 0 a valószínűsége, akkor (4.2) elsórészével készen is vagyunk. Tegyük fel, hogy van $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Ekkor $\omega \in A_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, azaz $\xi(\omega) < x_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ez pedig, mert $x_n \searrow -\infty$ csak úgy lehetséges, ha $\xi(\omega) = -\infty$, ami pedig egyáltalán nem lehetséges, mert ξ minden $\omega \in \Omega$ esetén értelmezve van és véges. tehát (4.2) első részét beláttuk. A második rész teljesen azonos módon jön ki. Legyen $(x_n)\, n \in \mathbb{N}$ egy tetszőleges szigorúan monoton növekedő módon ∞ -hez konvergáló sorozat, továbbá

$$A_i := \{\omega | \omega \in \Omega, \xi(\omega) < x_i\} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Az előbbiek alapján $A_1 \subset A_2 \subset ....$ Alkalmazható az 2.12 Állítás.

$$\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = \lim_{x\to\infty} F_\xi(x).$$

Legyen ω egy tetszőleges elemi esemény. Ekkor, mivel $\xi(\omega)$ véges, ezért van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\xi(\omega) < x_n$, ebből pedig az adódik, hogy $\omega \in A_n$. Mivel ω egy tetszőleges elemi esemény, ezért $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, aminek a valószínűsége 1, s ezzel igazoltuk (4.2) másik részét is.

(4.3) igazolása az előbbihez teljesen hasonló módon történik Legyen x egy tetszőleges valós szám, valamint konvergáljon az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedve az x számhoz. Legyen

$$A_i := \{\omega | \omega \in \Omega, \xi(\omega) < x_i\} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Ekkor $A_1 \subset A_2 \subset ....$ Alkalmazható az 2.12 Állítás.

$$\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = \lim_{t\to x-0} F_\xi(t).$$

Belátjuk, hogy

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega | \omega \in \Omega, \xi(\omega) < x\}.$$

Legyen ω eleme a baloldali halmaznak. Ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\omega \in A_n$, azaz $\xi(\omega) < x_n$. Mivel $x_n < x$, ezért $\xi(\omega) < x$, azaz $\omega \in \{\omega | \omega \in \Omega, \xi(\omega) < x\}$. Ha viszont ω eleme a jobb oldali halmaznak, akkor $\xi(\omega) < x$. Mivel $x_n \nearrow x$ (azaz, szigorúan monoton növekedve tart a x számhoz), ezért van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\xi(\omega) < x_n$, azaz $\omega \in A_n$, tehát ω eleme a bal oldalnak, azaz a mondott halmazelméleti egyenlőséget beláttuk. Tehát,

$$\lim_{t\to x-0} F_\xi(t) = F_\xi(x),$$

azaz az $F_\xi(x)$ függvény balról folytonos a tetszőlegesen választott x pontban. Ezzel a 4.1 Állítás bizonyítását teljes egészében elvégeztük.

A bizonyítás legcsekélyebb igénye nélkül megjegyezzük, hogy, ha egy F függvény rendelkezik a fenti három tulajdonsággal, akkor van olyan valószínűségi változó, amelynek az eloszlásfüggvénye éppen ez az F függvény.

Innen kezdve kétfelé ágaznak (képletesen szólva) az ismertetendő valószínűségszámítási eredmények, nevezetesen csak kétféle valószínűségi változó, illetve eloszlásfüggvény típussal fogunk foglalkozni, az úgynevezett diszkrétekkel, és az úgynevezett folytonosokkal. Igazából lehetne úgy tárgyalni a valószínűségszámítást (sőt talán kellene is), hogy ez a két típus egy, sőt mindenféle valószínűségi változót, amely "tudja" a 4.1 definíciót lehetne tárgyalni, de ehhez olyan analízisbeli eszközök kellenének (mértékelmélet) , amelyet - jelenleg - a tanárképző főiskolákon nem tanítanak.

4.3.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*egy Kolmogorov féle valószínűségi mező. A* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó diszkrét eloszlás*ú *valószínűségi változó (vagy nevezhető egyszerűen diszkrétnek), ha értékkészlete véges, vagy megszámlálhatóan végtelen.*

Legyen a ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó értékkészlete az $\{x_1, x_2, ...\}$ halmaz. Ekkor a $p_i := \mathrm{P}(\{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) = x_i\})$ $i \in \mathbb{N}$ sorozatot a ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó eloszlásának nevezik. A (p_i) sorozatot valószínűség eloszlásnak nevezik. Itt tulajdonképpen bizonyításra szorul, hogy egyáltalán a $\{\omega|\omega \in \Omega,\, \xi(\omega) = x_i\}$ halmaz esemény, azaz van valószínűsége. A valószínűségi változók 4.1 definíciója alapján bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathcal{A} \ni \{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) < x_i + 1/n\} \setminus \{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) < x_i - 1/n\}$$

$$= \{\omega|\omega \in \Omega\,,\, x_i - 1/n \leq \xi(\omega) < x_i + 1/n\}.$$

Mivel $\mathcal{A}$ egy σ algebra, ezért

$$\{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) = x_i\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega|\omega \in \Omega\,,\, x_i - 1/n \leq \xi(\omega) < x_i + 1/n\} \in \mathcal{A}.$$

4.4.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*egy Kolmogorov féle valószínűségi mező. A* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó folytonos eloszlás*ú *valószínűségi változó (vagy nevezhető egyszerűen folytonosnak), ha van egy olyan* $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény, hogy*

$$F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha) = \int_\alpha^\beta f_\xi(x)dx$$

minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *esetén. Az* $f_\xi(x)$ *függvény neve: a* ξ *valószínűségi változó (, vagy az* $F_\xi(x)$ *eloszlásfüggvény) sűrűségfüggvénye.*

A továbbiakban kizárólag olyan folytonos eloszlású valószínűségi változókra fogunk szorítkozni, amelyek F_ξ eloszlásfüggvénye (esetleg véges számú pont kivételével) mindenhol deriválható. Az analízisbeli tanulmányokból ismerős , hogy az ilyen pontokban $F'_\xi(x) = f_\xi(x)$

4.2. Állítás. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*egy Kolmogorov féle valószínűségi mező. A* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *folytonos eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az* $f_\xi(x)$ *függvény. Ekkor*

$$f_\xi(x) \geq 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad \textit{esetleg véges számú pont kivételével,} \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1. \tag{2}$$

Bizonyítás. (1) igazolásából a jól ismert dologból következik, hogy egy monoton növekedő függvény (F) deriváltja nem negatív. (2) igazolás pedig a 4.1 Állítás segítségével a következő módon adódik.

$$\begin{aligned}
1 = 1 - 0 &= \lim_{t\to+\infty} F_\xi(t) - \lim_{s\to-\infty} F_\xi(s) \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(\lim_{s\to-\infty}(F_\xi(t) - F_\xi(s))\right) \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(\lim_{s\to-\infty}\left(\int_s^t f_\xi(u)du\right)\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(u)du.
\end{aligned}$$

4.3. Állítás. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*egy Kolmogorov féle valószínűségi mező,* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *egy folytonos eloszlású valószínűségi változó. Ekkor tetszőleges* x *valós sz m esetén* $\mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, \xi(\omega) = x\}) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $\epsilon > 0$. Ekkor,

$$F_\xi(x+\epsilon) - F_\xi(x-\epsilon) = \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f_\xi(t)dt.$$

Tekintve, hogy f_ξ Riemann integrálható, ezért korlátos, azaz van $K > 0$, hogy $|f_\xi(t)| \leq K$ $(t \in \mathbb{R})$. Tehát

$$0 \leq F_\xi(x+\epsilon) - F_\xi(x-\epsilon) \leq 2\epsilon K.$$

vegyük észre, hogy bármely $\epsilon > 0$ esetén

$$\{\omega \in \Omega \,|\, \xi(\omega) = x\} \subset \{\omega \in \Omega \,|\, \xi(\omega) < x+\epsilon\} \setminus \{\omega \in \Omega \,|\, \xi(\omega) < x-\epsilon\},$$

ezért

$$0 \leq \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, \xi(\omega) = x\}) \leq F_\xi(x+\epsilon) - F_\xi(x-\epsilon) \leq 2\epsilon K.$$

Mivel ez az egyenlőtlenség minden $\epsilon > 0$ esetén igaz, ezzel igazoltuk, hogy $\mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, \xi(\omega) = x\}) = 0$. □

A következő két állításban valószínűségi változók függvényeinek eloszlását, eloszlásfüggvényét fogjuk tárgyalni.

Legyen $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton, mindenhol differenciálható függvény.

4.4. Állítás. *Legyen* ξ *pedig egy diszkrét eloszlású valószínűségi változó, mégpedig* $p_i := \mathrm{P}(\xi = x_i)$ $i \in \mathbb{N}$. *Ekkor* $\mathrm{P}(\psi(\xi) = \psi(x_i)) = p_i$ $i \in \mathbb{N}$.

Bizonyítás. Legyen, mondjuk, ψ szigorúan monoton növekedő. Először is belátjuk, hogy $\psi(\xi)$ valószínűségi változó. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor, mivel ξ valószínűségi változó, ezért $\{\omega | \omega \in \Omega, \xi(\omega) < \psi^{-1}(x)\} \in \mathcal{A}$, így a ψ

függvény szigorú monotonitása miatt $\{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) < \psi^{-1}(x)\} = \{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \psi(\xi(\omega)) < x\} \in \mathcal{A}$.

másrészt,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\psi(\xi) = \psi(x_i)) \\
&\qquad = \mathrm{P}(\{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \psi(\xi(\omega)) = \psi(x_i)\}) \\
&\qquad = \mathrm{P}(\{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) = x_i\}) \\
&\qquad = p_i \quad i \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Ugyanis a ψ függvény szigorú monotonitása miatt a $\psi(\xi(\omega)) = \psi(x_i)$ egyenlőség ekvivalens a $\xi(\omega) = x_i$ egyenlőséggel. □

4.5. Állítás. *Legyen ξ egy folytonos eloszlású valószínűségi változó, f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor a $\psi(\xi)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye*

$$f_{\psi(\xi)}(x) = f_\xi(\psi^{-1}(x)) \left| \frac{d\psi^{-1}(x)}{dx} \right| \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Legyen először ψ függvény szigorúan monoton növekedő.

Tetszőleges x valós sz m esetén a ψ szigorúan monoton növekedő volta miatt

$$\{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \psi(\xi(\omega)) < x\} = \{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) < \psi^{-1}(x)\} \in \mathcal{A}.$$

Ez mindenesetre azt jelenti, hogy $\psi(\xi)$ valószínűségi változó. nézzük meg az eloszlásfüggvény

$$\begin{aligned}
F_{\psi(\xi)}(x) &= \mathrm{P}(\{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \psi(\xi(\omega)) < x\}) \\
&= \mathrm{P}(\{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) < \psi^{-1}(x)\}) \\
&= F_\xi(\psi^{-1}(x)).
\end{aligned}$$

Deriválva x szerint adódik, hogy

$$f_{\psi(\xi)}(x) = f_\xi(\psi^{-1}(x)) \frac{d\psi^{-1}(x)}{dx} = f_\xi(\psi^{-1}(x)) \left| \frac{d\psi^{-1}(x)}{dx} \right|.$$

A második egyenlőségnél kihasználtuk, hogy egy szigorúan monoton növekedő, mindenhol differenciálható függvény (ψ) deriváltja nem negatív.

Legyen most a ψ függvény szigorúan monoton fogyó. Tetszőleges x valós sz m esetén a ψ szigorúan monoton fogyó volta miatt

$$\begin{aligned}
&\{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \psi(\xi(\omega)) < x\} \\
&= \{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) > \psi^{-1}(x)\} \\
&= \Omega \setminus \{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) \leq \psi^{-1}(x)\} \\
&= \Omega \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} \{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) < \psi^{-1}(x) + \frac{1}{j}\} \\
&\in \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

Ez mindenesetre azt jelenti, hogy $\psi(\xi)$ valószínűségi változó. Itt két dolgot használtunk ki. Egyrészt, hogy ξ valószínűségi változó, másrészt, és talán ez "érdemel még egy sort", hogy

$$\{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) \leq \psi^{-1}(x)\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) < \psi^{-1}(x) + \frac{1}{j}\}.$$

Legyen ugyanis ω eleme a bal oldalnak. Ekkor $\xi(\omega) \leq \psi^{-1}(x)$, s ezért minden $j \in \mathbb{N}$ esetén $\xi(\omega) \leq \psi^{-1}(x) + \frac{1}{j}$, azaz ω eleme a jobb oldalnak. Ha pedig ω eleme a jobb oldalnak, akkor $\xi(\omega) \leq \psi^{-1}(x) + \frac{1}{j}$ minden $j \in \mathbb{N}$ esetén, ez pedig csak úgy lehetséges, ha $\xi(\omega) \leq \psi^{-1}(x)$, azaz, ha ω eleme a bal oldalnak.

nézzük meg az eloszlásfüggvény

$$\begin{aligned}
F_{\psi(\xi)}(x) &= \mathrm{P}(\{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \psi(\xi(\omega)) < x\}) \\
&= \mathrm{P}(\{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) > \psi^{-1}(x)\}) \\
&= \mathrm{P}(\Omega \setminus \{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) \leq \psi^{-1}(x)\}) \\
&= 1 - \mathrm{P}(\{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) \leq \psi^{-1}(x)\}) \\
&= 1 - \mathrm{P}(\{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) < \psi^{-1}(x)\}) \\
&- \mathrm{P}(\{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) = \psi^{-1}(x)\}) \\
&= 1 - \mathrm{P}(\{\omega|\omega \in \Omega\,,\, \xi(\omega) < \psi^{-1}(x)\}) \\
&= 1 - F_{\xi}(\psi^{-1}(x)).
\end{aligned}$$

Deriválva x szerint adódik, hogy

$$f_{\psi(\xi)}(x) = -f_{\xi}(\psi^{-1}(x))\frac{d\psi^{-1}(x)}{dx} = f_{\xi}(\psi^{-1}(x))\left|\frac{d\psi^{-1}(x)}{dx}\right|.$$

A második egyenlőségnél kihasználtuk, hogy egy szigorúan monoton fogyó, mindenhol differenciálható függvény (ψ) deriváltja nem pozitív. $\square$

Feladatok

1. András és Balázs egy-egy dobókockával dob. Aki kisebbet dob, kifizeti a dobott számok összegének ötszörösét a másiknak, döntetlen esetén senki sem fizet. Legyen ξ András nyereménye. Milyen értékeket vehet fel ξ? Hogyan fejezhetjük ki ξ-vel Balázs nyereményét?

2. Anna és Bea egy két méter hosszú cérna két végét húzzák. A cérna egyszer csak elszakad. Legyen ξ a cérna Annánál maradt részének hossza. Milyen értékeket vehet fel ξ? Fejezzük ki ξ segítségével a Beánál maradt rész hosszát!

3. Eloszlásfüggvények-e a következo függvények? $F(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}\mathrm{arctg}(x)$, $F(x) = e^{e^{-x}}$.

4. Melyik számsorozat alkot valószínűségeloszlást? $p^k(1-p)^2$, ahol $0 < p < 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Illetve: $\frac{1}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$.

5. Egy 22 fős osztályban 8-an nem készültek. A tanár 4 főt feleltet. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását!

Megoldások

1. $-55, -50, -45, -40, -35, -30, -25, -20, -15, 0, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55.$
   Illetve: $-\xi$.

2. A $(0, 2)$ intervallum bármely értékét felveheti. Illetve: $2 - \xi$.

3. Nem, mert $-\infty$-ben vett határérték nem nulla. Illetve ugyanezért nem a második esetben is.

4. Nem, mert $\sum p^k(1-p)^2 = \frac{p(1-p)^p}{1-p} \neq 1$. Illetve igen, mert $\sum \frac{1}{k(k+1)} = \sum(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1$.

5. $\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{\binom{14}{4}\binom{8}{0}}{\binom{22}{4}}$, $\mathrm{P}(\xi = 1) = \frac{\binom{14}{3}\binom{8}{1}}{\binom{22}{4}}$, $\mathrm{P}(\xi = 2) = \frac{\binom{14}{2}\binom{8}{2}}{\binom{22}{4}}$, $\mathrm{P}(\xi = 3) = \frac{\binom{14}{1}\binom{8}{3}}{\binom{22}{4}}$, $\mathrm{P}(\xi = 4) = \frac{\binom{14}{0}\binom{8}{4}}{\binom{22}{4}}$.

5. fejezet

Többdimenziós valószínűségi változók

(Tartalomjegyzék)

5.1.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*egy Kolmogorov féle valószínűségi mező,* ξ, η *valószínűségi változók. Ekkor a* (ξ, η) *rendezett párt kétdimenziós valószínűségi változónak nevezzük.*

Ebben a fejezetben kizárólag olyan esetekkel fogunk foglalkozni, amikor a kétdimenziós valószínűségi változót alkotó mindkét valószínűségi változó diszkrét, vagy mind a kettő folytonos.

5.2.Definíció. *Tegyük fel, hogy a* (ξ, η) *kétdimenziós diszkrét valószínűségi változó az* (x_i, y_k) *értékeket veheti fel, rendre* p_{ik} *valószínűséggel. Azaz,*

$$p_{ik} = \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_k) \quad i, k = 1, 2, \ldots.$$

A p_{ik} *valószínűségek összeségét a* (ξ, η) *kétdimenziós diszkrét valószínűségi változó eloszlásának nevezzük. Szokás röviden eloszlásnak is nevezni. A* $p_i = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} = \mathrm{P}(\xi = x_i)$, $q_k = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ik} = \mathrm{P}(\eta = y_k)$ *eloszlásokat peremeloszlásnak nevezzük.*

5.3.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*egy Kolmogorov féle valószínűségi mező,* ξ, η *valószínűségi változók. Ekkor a* (ξ, η) *valószínűségi vektor változó eloszlásfüggvénye a következő kétváltozós függvény lesz.*

$$F_{(\xi,\eta)}(x, y) = F(x, y) = \mathrm{P}(\xi < x, \eta < y).$$

A következő tételt egyes állításait nem igazoljuk, hanem az olvasóra bízzuk. Az egyes bizonyítások a megfelelő egy dimenziós esetekre vonatkozó bizonyítások egyszerű alkalmazásai, vagyis inkább átiratai, ezért igen egyszerűek.

5.1. Állítás.

1. *Az* $F(x, y)$ *eloszlásfüggvény mindkét változójának monoton növekedő függvénye,*
2. $\lim_{x\to-\infty} F(x, y) = 0$ *(minden* $y \in \mathbb{R}$*) és* $\lim_{y\to-\infty} F(x, y) = 0$ *(minden* $x \in \mathbb{R}$*) esetén,*
3. $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} F(x, y) = 1$,
4. *Az* $F(x, y)$ *eloszlásfüggvény mindkét változójában balról folytonos.*

ketdimeloszlasI.mp3 ▷ ketdimeloszlasII.mp3 ▷

5.4.Definíció. *Legyen* $F(x, y)$ *a* (ξ, η) *eloszlásfüggvény. Ha létezik olyan* $f(x, y)$ *az egész síkon Riemann integrálható függvény, amely minden valós* x, y *esetén*

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) dv du,$$

akkor azt mondjuk, hogy (ξ, η) folytonos eloszlású kétdimenziós valószínűségi változó. Az f kétváltozós függvényt szokás a ξ és η együttes sűrűségfüggvényének nevezni.

Igen könnyen lehet látni, hogy azokban a pontokban ahol az alábbi másodrendű derivált létezik,

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

A következő állításokat szintén nem igazoljuk, hanem csak utalunk arra, hogy az egydimenziós esetekben alkalmazott eljárásokat kellene itt is alkalmazni. **5.2. Állítás.** *Az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény (esetleg véges számú pointtól eltekintve) mindenhol nem negatív, továbbá:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = 1.$$

5.3. Állítás. *Az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény integrálja a sík egy Jordan mérhető T részhalmaza felett egyenlő annak a valószínűségével, hogy a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó értéke éppen beleesik a T halmazba. Azaz,*

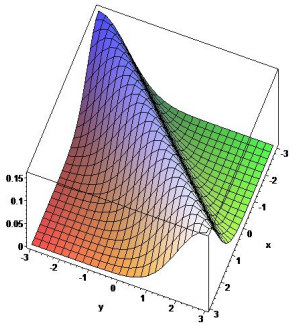
$$\mathrm{P}((\xi, \eta) \in T) = \int_T f(x, y) dx dy.$$

5.4. Állítás. *Mind a diszkrét, mind a folytonos esetben az úgynevezett peremeloszlás függvények:*

$$F_\xi(x) = \lim_{y \to \infty} F_{(\xi,\eta)}(x, y), \quad F_\eta(y) = \lim_{x \to \infty} F_{(\xi,\eta)}(x, y)$$

5.4. Állítás. *Az előbbi állítás a folytonos esetben az úgynevezett peremsűrűség függvényekre nézve következőt jelenti:*

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\xi,\eta)}(x, y) dy, \quad f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\xi,\eta)}(x, y) dx.$$



Kétdimenziós normális eloszlás sűrűség függvénye

Feladatok

1. Tegyük fel, hogy az F és G egyváltozós valós függvények közül legalább az egyik nem egy eloszlásfüggvény. Lehet-e az $F(x)G(y)$ kétváltozós függvény egy kétdimenziós valószínűségi változó eloszlásfüggvénye?

2. Legyen $F(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } < 0 \end{cases}$. Eloszlásfüggvény-e $F(x)F(y)$? Mi az együttes sűrűségfüggvény, ha igen?

3. Eloszlás-e a következő kétdimenziós sorozat: $p_{ik} = \frac{1}{2^{i+j}}, \quad i, j = 1, 2, \ldots$?

4. $f(x, y) = \begin{cases} a, & \text{ha } 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$ sűrűségfüggvény. Mennyi az a értéke?

5. Az előbbi példában mik a peremsűrűség függvények?

Megoldások

1. Nem, mert a peremeloszlások F illetve G lennének.

2. Igen.

3. Igen, mert $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{2^i} = 1$.

4. $1 = \int_0^1 \int_0^{1-x} a dy dx = \int_0^1 (1 - x) a dx = a(1 - 1^2/2) = a/2$. Azaz, $a = 2$.

5. $f_1(x) = 2(1-x)$ feltéve, hogy $0 < x < 1$. Máshol 0. A másik peremsűrűség függvény ugyanez.

6. fejezet

Várható Érték

(Tartalomjegyzék) A várható értéket kétszer is, vagyis, pontosabban szólva, két esetben is fogjuk definiálni, diszkrét és folytonos eloszlású valószínűségi változókra. Persze, ahogy ezt már többször is jeleztük, fel lehetne úgy is építeni a valószínűségszámítás előadásokat, hogy ez a definíció igazból egy legyen, de ehhez az kellene, hogy valószínűségi változó is csak egy legyen, nevezetesen, amitől csak annyit követelünk meg, hogy tudja a 4.1 definíciót. Ehhez, meg a rendelkezésre álló analízisbeli eszközök nem elegendőek. De, végül is nem követünk el "hibát" (inkorrektséget meg a legkisebb mértékben sem). Egy valószínűségi változó várható értéke, már persze, ha létezik egy valós szám lesz, ami bizonyos szemszögéből azt mutatja, hogy a valószínűségi változónak, mint függvénynek az értékei milyen "átlagos" érték körül ingadoznak. A szórás pedig azt, hogy mennyire ingadoznak az értékek a várható érték körül.

6.1.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*egy Kolmogorov féle valószínűségi mező, és* ξ *egy diszkrét eloszlású valószínűségi változó,*

$$\mathrm{P}(\xi = x_i) = p_i \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Ekkor, az $E(\xi) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ *számot, ha a* $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i p_i| < \infty$ *összeg véges, a* ξ *diszkrét eloszlású valószínűségi változó várható értékének nevezzük.*

varhatoertek.mp3 ▷

6.2.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*egy Kolmogorov féle valószínűségi mező, és* ξ *egy folytonos eloszlású valószínűségi változó. Ekkor az*

$$E(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx$$

számot, ha az $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_\xi(x) dx < \infty$ *integrál véges, a* ξ *valószínűségi változó várható értékének nevezzük.*

6.1. Állítás. *Legyen* ξ *egy (diszkrét vagy folytonos) valószínűségi változó olyan, hogy valamely* $k, K \in \mathbb{R}$ *számokkal* $k \leq \xi(\omega) \leq K$ *minden* $\omega \in \Omega$ *esetén (,azaz* ξ *korlátos). Ekkor* $E(\xi)$ *létezik, és* $k \leq E(\xi) \leq K$.

Bizonyítás. Legyen Először ξ **egy diszkrét eloszlású valószínűségi változó, mégpedig:** $\mathrm{P}(\xi = x_i) = p_i$, $i \in \mathbb{N}$. Ekkor egyrészt

$$\begin{aligned} k &= k \cdot 1 = k(p_1 + p_2 \dots) \\ &= kp_1 + kp_2 + \dots \\ &\leq x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots \\ &= E(\xi) \\ &\leq Kp_1 + Kp_2 + \dots \\ &= K \cdot 1 \\ &= K. \end{aligned}$$

Másrészt, létezik a várható érték, ugyanis, ha
$0 \le x_i \le K$, akkor $|x_i| \le |K| \le |k| + |K|$, és, ha
$0 > x_i \ge k$, akkor $|x_i| \le |k| \le |k| + |K|$, s, ezért

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i \le \sum_{i=1}^{\infty} (|k| + |K|) p_i = |k| + |K| < \infty.$$

Tehát a diszkrét esettel készen vagyunk.

Legyen most ξ egy folytonos eloszlású valószínűségi változó. Mivel $k \le \xi \le K$, ezért
ha $x > K$, akkor $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$,
ha $x \le k$, akkor $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0$.

Tehát az $F_\xi(x)$ eloszlásfüggvény a $(-\infty, k]$ intervallumon 0, még az $(K, +\infty)$ intervallumon az azonosan 1 függvény lesz. Tekintve, hogy a konstans függvény deriváltja nulla, így

$$F'_\xi(x) = f_\xi(x) = 0 \quad x \in (-\infty, k) \cup (K, +\infty).$$

Tehát a sűrűségfüggvény csak a $[k, K]$ intervallumon különbözhet nulltól. ezért

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx = \int_k^K f_\xi(x) dx.$$

Tehát rögtön adódik a felső becslés

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = \int_k^K x f_\xi(x) dx \le \int_k^K K f_\xi(x) dx = K$$

és ugyanígy az alsó becslés

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = \int_k^K x f_\xi(x) dx \ge \int_k^K k f_\xi(x) dx = k.$$

Másrészt belátjuk, hogy a várható érték létezéséhez szükséges integrál véges,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_\xi(x) dx \\
&= \int_k^K |x| f_\xi(x) dx \\
&\le \int_k^K (|k| + |K|) f_\xi(x) dx \\
&= |k| + |K| < \infty. \quad \square
\end{aligned}$$

6.2. Állítás. *Legyen ξ egy (diszkrét vagy folytonos) valószínűségi változó, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton, minden pontban differenciálható függvény,*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \psi^{-1}(x) = \pm\infty$$

(az előjelek annak megfelelően, hogy szigorúan monoton fogyó, vagy növekedő, illetve plusz vagy mínusz végtelenben vesszük a határérték). Tegyük fel, hogy $E(\psi(\xi))$ létezik. Ekkor

$$E(\psi(\xi)) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi(x_i) p_i, \quad (\mathrm{P}(\xi = x_i) = p_i \ i \in \mathbb{N}) \ \textit{diszkrét eset} \tag{1}$$

$$E(\psi(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) f_\xi(x) dx \quad \textit{folytonos eset} \tag{2}$$

Bizonyítás.

diszkrét eset. Itt igazából nincs is szükség arra, hogy ψ differenciálható.

$$\begin{aligned} E(\psi(\xi)) &= \sum_{i=1}^{\infty} \psi(x_i) \mathrm{P}(\psi(\xi(\omega)) = \psi(x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \psi(x_i) \mathrm{P}(\xi = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \psi(x_i) p_i. \end{aligned}$$

Nézzük a folytonos esetet. Legyen Először ψ szigorúan monoton növekedő.

Ekkor a 4.5 Állítás alapján

$$\begin{aligned} f_{\psi(\xi)}(x) = \\ &= f_\xi(\psi^{-1}(x)) \left| \frac{d\psi^{-1}(x)}{dx} \right| \\ &= f_\xi(\psi^{-1}(x)) \frac{d\psi^{-1}(x)}{dx}, \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} E(\psi(\xi)) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\psi(\xi)}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(\psi^{-1}(x)) \frac{d\psi^{-1}(x)}{dx} dx. \end{aligned}$$

Alkalmazzuk a $\psi^{-1}(x) = y$ helyettesítést. Ekkor,

$$E(\psi(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) f_\xi(y) dy.$$

Legyen most ψ szigorúan monoton fogyó. Ekkor szintén a 4.5 Állítás alkalmazásával adódik, hogy

$$\begin{aligned} f_{\psi(\xi)}(x) = \\ &= f_\xi(\psi^{-1}(x)) \left| \frac{d\psi^{-1}(x)}{dx} \right| \\ &= -f_\xi(\psi^{-1}(x)) \frac{d\psi^{-1}(x)}{dx}, \end{aligned}$$

következésképp

$$\begin{aligned} E(\psi(\xi)) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\psi(\xi)}(x) dx \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(\psi^{-1}(x)) \frac{d\psi^{-1}(x)}{dx} dx. \end{aligned}$$

Alkalmazzuk a $\psi^{-1}(x) = y$ helyettesítést. Ekkor, mivel

$$\lim_{x\to+\infty} \psi^{-1}(x) = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-\infty} \psi^{-1}(x) = +\infty$$

(ψ szigorúan monoton fogyó), az analízisből tanultak alapján

$$E(\psi(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) f_\xi(y) dy,$$

ahogy ez a szigorúan monoton növekedő esetben is adódott. □

6.3. Állítás. *Legyen ξ egy (diszkrét vagy folytonos) valószínűségi változó, $c \in \mathbb{R}$. Ha $E(\xi)$ létezik, akkor $E(c\xi)$ is létezik, és $E(c\xi) = cE(\xi)$.*

Bizonyítás. Legyen Először ξ diszkrét eloszlású.

Ha $c = 0$, akkor, $E(c\xi) = cE(\xi) = 0$, tehát a továbbiakban feltehető, hogy $c \neq 0$. Ekkor,

$$\begin{aligned} E(c\xi) &= \sum_{i=1}^{\infty} (cx_i) \mathrm{P}(c\xi = cx_i) \\ &= c \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathrm{P}(\xi = x_i) \\ &= cE(\xi). \end{aligned}$$

Másrészt,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\infty} |cx_i| \mathrm{P}(c\xi = cx_i) \\ &= |c| \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \mathrm{P}(\xi = x_i) \\ &< \infty, \end{aligned}$$

mert $E(\xi)$ létezik. Tehát $E(c\xi)$ is létezik. Ezzel a diszkrét eset igazolást be is fejeztük.

Legyen most ξ folytonos eloszlású.

Ha $c = 0$, akkor ugyanaz a helyzet, mint a diszkrét esetben. Tegyük fel, hogy $c > 0$. Legyen $\psi(x) := cx$. Ekkor a ψ függvény szigorúan monoton növekvő, minden pontban differenciálható, és így alkalmazható a 4.5 Állítás a $c\xi$ valószínűségi változóra.

$$f_{c\xi}(x) = f_\xi(\frac{x}{c}) \cdot |\frac{1}{c}| = f_\xi(\frac{x}{c}) \cdot \frac{1}{c},$$

ezért

$$E(c\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{c\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{c} f_\xi(\frac{x}{c}) dx.$$

Alkalmazzuk az $y := \frac{x}{c}$ helyettesítést, így adódik, hogy ($\frac{dx}{c} = dy$)

$$E(c\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} cy f_\xi(y) dy = cE(\xi).$$

Másrészt,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_{c\xi}(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{c} f_\xi(\frac{x}{c})dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x}{c}\right| f_\xi(\frac{x}{c})dx \\
&= |c| \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_\xi(y)dy \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

merthogy létezik az $E(\xi)$.

Legyen most $c < 0$. Legyen $\psi(x) := cx$. Ekkor a ψ függvény szigorúan monoton csökkenő, minden pontban differenciálható, és így alkalmazható a 6.5 Állítás a $c\xi$ valószínűségi változóra.

$$f_{c\xi}(x) = f_\xi(\frac{x}{c}) \cdot |\frac{1}{c}| = -f_\xi(\frac{x}{c}) \cdot \frac{1}{c},$$

ezért ugyanúgy, mint a $c > 0$ esetben

$$E(c\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{c\xi}(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{c} f_\xi(\frac{x}{c})dx.$$

Alkalmazzuk megint az $y := \frac{x}{c}$ helyettesítést, így adódik, hogy ($\frac{dx}{c} = dy$, $x \to +\infty \Leftrightarrow y \to -\infty$ és $x \to -\infty \Leftrightarrow y \to +\infty$)

$$E(c\xi) = -\int_{+\infty}^{-\infty} cy f_\xi(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} cy f_\xi(y)dy = cE(\xi).$$

Másrészt, teljesen ugyanúgy, mint a $c > 0$ esetben

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_{c\xi}(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x}{c}\right| f_\xi(\frac{x}{c})dx \\
&= |c| \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_\xi(y)dy \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

mivel létezik az $E(\xi)$. Ezzel az állításigazolást teljes egészében elvégeztük. □

6.4. Állítás. *Legyen ξ egy (diszkrét vagy folytonos) valószínűségi változó, $\xi(\omega) \geq 0$ $(\forall \omega \in \Omega)$. Ha $E(\xi) = 0$, akkor* $\mathrm{P}(\xi = 0) = 1$.

Bizonyítás. Először is igazoljuk, hogy ξ nem lehet folytonos eloszlású valószínűségi változó. Tegyük fel indirekten, hogy az. Mivel csak nemnegatív

értékeket vesz fel, ezért $x \leq 0$ esetén $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \,|\xi(\omega) < x\}) = 0$, ezért $f_\xi(x) = 0$. Tehát

$$\begin{aligned}
0 = E(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx \\
&= \int_0^{+\infty} x f_\xi(x) dx \\
&= \int_0^1 x f_\xi(x) dx + \int_1^{+\infty} x f_\xi(x) dx \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Tekintve, hogy a $[0, +\infty)$ intervallumon x és $f_\xi(x)$ is nemnegatív, ezért a szorzatuk integrálja bármely részintervallumon is nemnegatív, azaz $I_1, I_2 \geq 0$, de e két integrál összege nulla, azaz $I_1 = I_2 = 0$. Következésképpen

$$\begin{aligned}
0 = I_2 &= \int_1^{+\infty} x f_\xi(x) dx \geq \int_1^{+\infty} 1 \cdot f_\xi(x) dx \\
&= \int_1^{+\infty} f_\xi(x) dx \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Tehát, $\int_1^{+\infty} f_\xi(x) dx = 0$. Valamint, legyen $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
0 = I_1 &= \int_0^1 x f_\xi(x) dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} x f_\xi(x) dx \\
&\geq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \frac{i}{n} f_\xi(x) dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} f_\xi(x) dx \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Ebből, pedig az előbbiek alapján következik, hogy

$$\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} f_\xi(x) dx = 0 \quad i = 1, 2, \ldots n-1.$$

összegezve adódik, hogy

$$\begin{aligned}
0 &= \int_1^{+\infty} f_\xi(x) dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} f_\xi(x) dx \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} f_\xi(x) dx
\end{aligned}$$

bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén, ezért

$$\int_0^{+\infty} f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx.$$

Ez pedig ellentmond annak, hogy f_ξ egy sűrűségfüggvény. Tehát igazoljuk, hogy ξ nem lehet folytonos eloszlású valószínűségi.

Ezek szerint ξ diszkrét valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy van olyan $x_i > 0$, hogy $\mathrm{P}(\xi = x_i) > 0$. Ekkor

$$0 = E(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \mathrm{P}(\xi = x_j) \geq x_i \mathrm{P}(\xi = x_i) > 0.$$

Ez ellentmondás, tehát nincsen olyan $x_i > 0$, hogy $\mathrm{P}(\xi = x_i) > 0$. Azaz, minden $i \in \mathbb{N}$ esetén, ha $x_i > 0$, akkor $\mathrm{P}(\xi = x_i) = 0$. Következésképpen

$$\mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \,|\xi(\omega) > 0\}) = \sum_{x_i > 0} \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \,|\xi(\omega) = x_i\}) = 0.$$

Viszont, mivel $\mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \,|\xi(\omega) \geq 0\}) = 1$, ezért $\mathrm{P}(\xi = 0) = 1$. $\square$

6.5. Állítás. *Legyenek ξ, η diszkrét valószínűségi változók, olyanok, hogy léteznek a várható értékeik. Ekkor a $\xi + \eta$ valószínűségi változó várható értéke is létezik és*

$$E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta).$$

Bizonyítás. Legyen $\mathrm{P}(\xi = x_i) = p_i$ és $\mathrm{P}(\eta = y_j) = q_j$ $i, j \in \mathbb{N}$. Először is be kellene látni, hogy $\xi + \eta$ valószínűségi változó lesz. Ez nem nehéz feladat, ugyanis legyen $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&\{\omega \in \Omega \,|\xi(\omega) + \eta(\omega) < x\} \\
&= \bigcup_{\{i,j \in \mathbb{N} | x_i + y_j < x\}} \left(\{\omega \in \Omega \,|\xi(\omega) = x_i\} \cap \{\omega \in \Omega \,|\eta(\omega) = y_j\}\right).
\end{aligned}$$

Ennek a halmazelméleti egyenlőségnek a jobb oldala eleme az események szigma algebrájának (, mert abból a metszet és a megszámlálhatóan végtelen unióképzés nem vezet ki), így a bal oldali halmaz is esemény, ez pedig éppen azt jelenti, hogy $\xi + \eta$ valószínűségi változó.

Legyen $r_{i,j} = \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)$. Ekkor

$$\begin{aligned}
E(\xi + \eta) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} (x_i + y_j) r_{i,j} \\
&= \sum_{i,j=1}^{\infty} x_i r_{i,j} + \sum_{i,j=1}^{\infty} y_j r_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=1}^{\infty} r_{i,j} + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \sum_{i=1}^{\infty} r_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathrm{P}(\xi = x_i) + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \mathrm{P}(\eta = y_j) \\
&= E(\xi) + E(\eta).
\end{aligned}$$

Másrészt,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{\infty} |x_i + y_j| r_{i,j} \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{\infty} |x_i| r_{i,j} + \sum_{i,j=1}^{\infty} |y_j| r_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i + \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| q_j \\
&< \infty
\end{aligned}$$

mert $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty$, $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j| q_j < \infty$, mert $E(\xi)$, $E(\eta)$ létezik. □

6.6. Állítás. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, valamint legyenek* $\xi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változók,* $E(\xi_i)$ *várható értékkel* $(i = 1, ..., n)$*. Ekkor a* $\xi_1 + ... + \xi_n$ *valószínűségi változó várható értéke is létezik, és*

$$E(\xi_1 + ... + \xi_n) = E(\xi_1) + ... + E(\xi_n).$$

Bizonyítás. A bizonyítást csak diszkrét eloszlású valószínűségi változókra végezzük el, ugyanúgy, mint az előbbi, azaz a 5.5 Állítás esetében. Ekkor viszont ez az állítás a 5.5 Állítás egy igen egyszerű következménye. Például teljes indukcióval látható be. □

A következőkben néhány állítás (és persze definíció) erejéig valószínűségi változók függetlenségével fogunk foglalkozni.

6.3.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező. A* ξ *és* η *valószínűségi változók (sztochasztikusan) függetlenek, ha* $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\{\omega | \omega \in \Omega, \xi(\omega) < x, \eta(\omega) < y\}) \\
&= \mathrm{P}(\{\omega | \omega \in \Omega, \xi(\omega) < x\}) \cdot \mathrm{P}(\{\omega | \omega \in \Omega, \eta(\omega) < y\}),
\end{aligned}$$

azaz

$$\mathrm{P}(\xi < x, \eta < y) = F_\xi(x) F_\eta(y).$$

Illetve, általában

6.4.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező. A* $\xi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változók (sztochasztikusan) függetlenek, ha* $\forall x_i \in \mathbb{R}\,(i = 1, ..., n)$ *esetén*

$$\mathrm{P}(\xi_i < x_i, i = 1, ..., n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\xi_i < x_i) = \prod_{i=1}^{n} F_{\xi_i}(x_i).$$

A következő állítás mutatja, hogy, ha van például 5 független valószínűségi változónk, akkor abból tetszőlegesen kiválasztott 3 is független.

6.7. Állítás. *Legyenek* $\xi_i\,(i = 1, ..., n)$ *független valószínűségi változók. Ekkor tetszőleges* $k \in \mathbb{N}_0$ *,* $k < n$ *esetén* $\xi_1, ..., \xi_k$ *is független.*

Bizonyítás. Mit is kellene belátni? Kellene, hogy tetszőleges $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., k)$ esetén

$$\mathrm{P}(\xi_1 < x_1, ..., \xi_k < x_k) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot ... \cdot F_{\xi_k}(x_k).$$

Válasszunk tehát tetszőleges $x_1, ..., x_k$ számokat. Mivel $\xi_1, ..., \xi_n$ független, ezért tetszőleges $N \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(\xi_1 < x_1, ..., \xi_k < x_k, \xi_{k+1} < N, ..., \xi_n < N)\\ &= \prod_{i=1}^{k} F_{\xi_i}(x_i) \cdot \prod_{i=k+1}^{n} F_{\xi_i}(N).\end{aligned}$$

Alkalmazzuk a $N \to \infty$ határátmenetet.

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(\xi_1 < x_1, ..., \xi_k < x_k)\\ &= \lim_{N\to\infty} \mathrm{P}(\xi_1 < x_1, ..., \xi_k < x_k, \xi_{k+1} < N, ..., \xi_n < N)\\ &= \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{k} F_{\xi_i}(x_i) \cdot \prod_{i=k+1}^{n} F_{\xi_i}(N)\\ &= \prod_{i=1}^{k} F_{\xi_i}(x_i) \cdot \prod_{i=k+1}^{n} \lim_{N\to\infty} F_{\xi_i}(N)\\ &= \prod_{i=1}^{k} F_{\xi_i}(x_i).\end{aligned}$$

A bizonyítást befejeztük. □

Némely állításokban, jóllehet tetszőleges valószínűségi változókra fogalmaztuk meg az állításainkat, rendre csak diszkrét eloszlású valószínűségi változókra végeztük el a bizonyítást. Gondolunk itt a 5.4 , 5.5 Állításokra. Ennek oka az, hogy a folytonos esetek taglalásához (egyenlőre) hiányoznak az eszközeink. Ez lesz a helyzet a következő állítással is.

6.8. Állítás. *Legyen ξ, η diszkrét eloszlású valószínűségi változó, mégpedig*

$$p_i = \mathrm{P}(\xi = x_i), \quad q_j = \mathrm{P}(\eta = y_j) \ (i, j \in \mathbb{N}_0).$$

Ekkor ξ és η pontosan akkor függetlenek, ha

$$\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_i q_j \quad (i, j \in \mathbb{N}_0).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_i q_j$ $(i, j \in \mathbb{N}_0)$. Lássuk be, hogy független a két valószínűségi változó. Be kellene látni, hogy tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(\{\omega | \omega \in \Omega, \xi(\omega) < x, \eta(\omega) < y\})\\ &= \mathrm{P}(\{\omega | \omega \in \Omega, \xi(\omega) < x\})\\ &\cdot \mathrm{P}(\{\omega | \omega \in \Omega, \eta(\omega) < y\}).\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\{\omega|\omega \in \Omega, \xi(\omega) < x, \eta(\omega) < y\}) \\
&= \mathrm{P}(\bigcup_{\substack{x_i<x \\ y_j<y}} \{\omega|\omega \in \Omega, \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j\}) \\
&= \sum_{\substack{x_i<x \\ y_j<y}} \mathrm{P}(\{\omega|\omega \in \Omega, \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j\}) \\
&= \sum_{\substack{x_i<x \\ y_j<y}} p_i q_j \\
&= \sum_{x_i<x} \sum_{y_j<y} p_i q_j \\
&= \mathrm{P}(\xi < x)\mathrm{P}(\eta < y).
\end{aligned}$$

Tehát a két valószínűségi változó valóban független.

Most lássuk be a másik irányt, azaz tegyük fel, hogy a két valószínűségi változó független és lássuk be, hogy ekkor $\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_i q_j$ $(i, j \in \mathbb{N}_0)$.

Legyen $\epsilon > 0, x_i$ tetszőleges. Mivel ξ diszkrét eloszlású, ezért van olyan $n_\epsilon \in \mathbb{N}_0$, hogy

$$\sum_{k=n_\epsilon}^{\infty} p_k < \epsilon,$$

$$\sum_{l=n_\epsilon}^{\infty} q_l < \epsilon,$$

$$\sum_{k=n_\epsilon}^{\infty} \sum_{l=n_\epsilon}^{\infty} \mathrm{P}(\xi = x_k, \eta = y_l) < \epsilon.$$

Következésképpen megadható olyan $\delta > 0$, hogy az $[x_i - \delta, x_i + \delta)$ intervallumban nincs benne a (véges sok) $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n_\epsilon}$, az $[y_j - \delta, y_j + \delta)$ intervallumban nincs benne a (véges sok) y_1, y_2, ... , y_{j-1}, y_{j+1}, ... , y_{n_ϵ}, valamint a $[x_i - \delta, x_i + \delta) \times [y_j - \delta, y_j + \delta)$ téglában nincs benne a véges sok (x_k, y_l) $(k, l \in \{1, 2, ..., n_\epsilon\})$ pár. Következésképpen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{x_k \in [x_i - \delta, x_i + \delta)} p_k - p_i \\
&= \sum_{\substack{x_k \in [x_i - \delta, x_i + \delta) \\ k \neq i}} p_k \\
&\leq \sum_{k=n_\epsilon}^{\infty} p_k \\
&< \epsilon,
\end{aligned}$$

hasonlóképpen

$$0 \leq \sum_{y_l \in [y_j - \delta, y_j + \delta)} q_l - q_j < \epsilon$$

és

$$0 \leq \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{N}_0 \\ (x_k,y_l)\in[x_i-\delta,x_i+\delta)\times[y_j-\delta,y_j+\delta)}} \mathrm{P}(\xi = x_k, \eta = y_l) - \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) < \epsilon$$

egyenlőtlenség is teljesül. Egyszerű halmazelméleti megfontolás adja, hogy

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\xi < x_i + \delta, \eta < y_j + \delta) \\
&- \mathrm{P}(\xi < x_i + \delta, \eta < y_j - \delta) \\
&- \mathrm{P}(\xi < x_i - \delta, \eta < y_j + \delta) \\
&+ \mathrm{P}(\xi < x_i - \delta, \eta < y_j - \delta) \\
&= \mathrm{P}(\omega \in \Omega | (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in [x_i - \delta, x_i + \delta) \times [y_j - \delta, y_j + \delta)),
\end{aligned} \tag{6.6.1}$$

Tehát, a függetlenség felhasználásával (6.6.1) adja, hogy

$$\begin{aligned}
0 \leq\ &\mathrm{P}(\xi < x_i + \delta)\mathrm{P}(\eta < y_j + \delta) \\
&- \mathrm{P}(\xi < x_i + \delta)\mathrm{P}(\eta < y_j - \delta) \\
&- \mathrm{P}(\xi < x_i - \delta)\mathrm{P}(\eta < y_j + \delta) \\
&+ \mathrm{P}(\xi < x_i - \delta)\mathrm{P}(\eta < y_j - \delta) \\
&- \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) < \epsilon
\end{aligned} \tag{6.6.2}$$

Vegyük észre, hogy

$$\mathrm{P}(\xi < x_i + \delta) - \mathrm{P}(\xi < x_i - \delta) = \sum_{x_k \in [x_i - \delta, x_i + \delta)} p_k.$$

Ez, valamint a hasonló megfontolás az η valószínűségi változóra adja, hogy

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\xi < x_i + \delta) &= \mathrm{P}(\xi < x_i - \delta) + p_i + \epsilon_1, \\
\mathrm{P}(\eta < y_j + \delta) &= \mathrm{P}(\eta < y_j - \delta) + q_j + \epsilon_2,
\end{aligned} \tag{6.6.3}$$

ahol az ϵ_1, ϵ_2 számokról annyit tudunk, hogy az abszolút értékük kisebb, mint ϵ (lehetnek negatívak is). (6.6.2) és (6.6.3) adja, hogy

$$\begin{aligned}
0 \leq\ &(\mathrm{P}(\xi < x_i - \delta) + p_i + \epsilon_1)(\mathrm{P}(\eta < y_j - \delta) + q_j + \epsilon_2) \\
&- (\mathrm{P}(\xi < x_i - \delta) + p_i + \epsilon_1)\mathrm{P}(\eta < y_j - \delta) \\
&- \mathrm{P}(\xi < x_i - \delta)(\mathrm{P}(\eta < y_j - \delta) + q_j + \epsilon_2) \\
&+ \mathrm{P}(\xi < x_i - \delta)\mathrm{P}(\eta < y_j - \delta)) \\
&- \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) < \epsilon.
\end{aligned} \tag{6.6.4}$$

(6.6.4) rendezés (összevonás) után azt adja, hogy

$$0 \leq p_i q_j - \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) + \epsilon_1 q_j + \epsilon_2 p_i + \epsilon_1 \epsilon_2 < \epsilon.$$

Mivel, $|\epsilon_1|, |\epsilon_2| < \epsilon$, valamint természetesen $0 \leq p_1, q_j \leq 1$, ezért kapjuk, hogy

$$|p_i q_j - \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)| \leq 4\epsilon.$$

Viszont, tekintve, hogy az $\epsilon > 0$ számot tetszőlegesen választottuk, ezért kapjuk a kívánt $p_i q_j = \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)$ egyenlőséget. Ezzel az Állítás igazolását teljes egészében elvégeztük. □

6.9. Állítás. *Legyenek ξ és η független valószínűségi változók, olyanok, hogy létezik a várható értékük. Ekkor a $\xi \cdot \eta$ valószínűségi változónak is létezik a várható értéke, és $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$.*

Bizonyítás. Először is megmutatjuk, hogy $\xi\eta$ valószínűségi változó, hiszen már ez sem magától értetődő, bár végül is nem nehezen adódik. Legyen ugyanis $x \in \mathbb{R}, \mathrm{P}(\xi = x_i) = p_i, \mathrm{P}(\eta = y_j) = q_j$. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\{\omega \in \Omega | \xi(\omega)\eta(\omega) < x\} \\
&= \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}_0 \text{ ahol } x_i y_j < x} \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j\} \\
&= \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}_0 \text{ ahol } x_i y_j < x} (\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) = x_i\} \cap \{\omega \in \Omega | \eta(\omega) = y_j\}) \\
&\in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

(emlékeztetünk, hogy $\mathcal{A}$ zárt a megszámlálhatóan végtelen metszetre és unióképzésre nézve). Tehát megmutattuk, hogy $\xi\eta$ valószínűségi változó. Nézzük a várható értékét! Használjuk ki, hogy a két valószínűségi változó független így alkalmazható a 6.8 Állítás.

$$\begin{aligned}
E(\xi\eta) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} x_i y_j \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{\infty} x_i y_j p_i q_j \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} y_j q_j \\
&= E(\xi)E(\eta).
\end{aligned}$$

Másrészt,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{\infty} |x_i y_j| \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) \\
&\qquad = \sum_{i,j=1}^{\infty} |x_i||y_j| p_i q_j \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| q_j \\
&\qquad < \infty,
\end{aligned}$$

mert ξ és η valószínűségi változóknak létezik a várható értékük. Ezzel a 6.9 Állítás igazolását (persze csak a diszkrét esetben, de hát másra nem is vállalkoztunk) elvégeztük. □

6.10. Állítás. *Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független valószínűségi változók, olyanok, hogy létezik a várható értékük. Ekkor a $\xi_1 \cdot \cdots \cdot \xi_n$ valószínűségi változónak is létezik a várható értéke, és $E(\xi_1 \cdot \cdots \cdot \xi_n) = E(\xi_1) \cdot \cdots \cdot E(\xi_n)$.*

Bizonyítás. Az igazolás teljes indukcióval következik az előző, azaz a 6.9 Állítás segítségével. □

Feladatok

1. Milyen valószínuségi változó lehet független önmagától?
2. A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei -1,0,1, és 2. Az ezekhez tartozó valószínűségek rendre 1/12, 5/12, 1/4 és 1/4. Mennyi ξvárható értéke?
3. Legyen $x_k = (-1)^k \frac{2^k}{k}, p_k = \frac{1}{2^k}$ ahol $k = 1, 2, \ldots$. Létezik-e a várható érték?
4. Legyen $f(x) = 2x$, ha $0 < x < 1$ és nulla különben. Mennyi a várható érték?
5. Legyen $x_k = k, p_k = \frac{1}{2^k}$ ahol $k = 1, 2, \ldots$. Mennyi a valószínűségi változó várható értéke?
6. Egy kockát addig dobálunk amit hatost nem dobunk. Mennyi a dobások számának várható értéke?

Megoldások

1. Legyen $x \leq y$. $\mathrm{P}(\xi < x) = \mathrm{P}(\xi < x, \xi < y) = \mathrm{P}(\xi < x)\mathrm{P}(\xi < y)$. Legyen $x = y$. Adódik, hogy $F(x)$ csak nulla vagy egy lehet. Innen kapjuk, hogy ξ konstans valószínűségi változó. Azaz egy valószínűséggel egy állandó.
2. -1/12+1/4+2/4=8/12.
3. Nem, mert $\sum |(-1)^k \frac{2^k}{k}| \frac{1}{2^k} = \infty$.
4. $\int_0^1 x2xdx = 2/3$.
5. 2. Segítség: $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \frac{1}{1-x}$ mindkét oldalát deriválva kapunk számunkra hasznos formulát. Ez a következő megoldásban is hasznos lesz.
6. $\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{5^{k-1}}{6^k} = 6$.

7. fejezet

A szórás

(Tartalomjegyzék)

7.1.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, A* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó szórása (amennyiben létezik) a*

$$D(\xi) := \sqrt{E((\xi - E(\xi))^2)}$$

szám.

Valami olyasmiről van szó, hogy a várható érték egyfajta mérőszám, azt méri, hogy a valószínűségi változó értékei milyen átlagos szám körül ingadoznak, a szórás pedig szintén egyfajta mérőszám, ő azt méri, hogy a valószínűségi változó értékei mennyire ingadoznak az átlagos érték, azaz a várható érték körül. Nem az a jó lövész, aki, ha céltáblára lő, a találatainak az átlagos értéke /várható értéke/ nagy, hanem az, akinek a szórása kicsi, azaz lövései egy pont körül csoportosulnak.

7.1. Állítás. *Legyen* ξ *egy valószínűségi változó létező szórással, valamint* $a, b \in \mathbb{R}$ *valós számok. Ekkor* $D(a\xi + b) = |a|D(\xi)$.

Bizonyítás. A várható érték tulajdonságai alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} D^2(a\xi + b) &= E\left((a\xi + b - E(a\xi + b))^2\right) \\ &= E\left((a\xi + b - E(a\xi) - E(b))^2\right) \\ &= E\left((a\xi + b - aE(\xi) - b)^2\right) \\ &= E\left((a^2(\xi - E(\xi))^2\right) \\ &= a^2 E\left(\xi - E(\xi))^2\right) \\ &= a^2 D^2(\xi). \end{aligned}$$

□

7.2.Definíció. *A* ξ *és* η *valószínűségi változók kovarienciája*

$$\mathrm{cov}\ (\xi, \eta) := E((\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta)))$$

szám, már, amennyiben a leírt várható érték létezik (v.ö. a várható érték definíciója).

7.2. Állítás. *A* ξ *és* η *valószínűségi változók kovarienciája*

$$\mathrm{cov}\ (\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta).$$

Bizonyítás. A bizonyítás rendkívül egyszerű, a következőképpen néz ki. A várható érték tulajdonságait alkalmazzuk.

$$\begin{aligned} &\mathrm{cov}\ (\xi, \eta) \\ &= E((\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))) \\ &= E(\xi\eta - E(\xi)\eta - \xi E(\eta) + E(\xi)E(\eta)) \\ &= E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) - E(\xi)E(\eta) + E(\xi)E(\eta) \\ &= E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta). \end{aligned}$$

□

Ha két valószínűségi változó koverienciája nulla, akkor azt mondjuk, hogy a szóban forgó két valószínűségi változó korrelálatlan.

7.3. Állítás. *Legyenek ξ, η független valószínűségi változók, olyanok, hogy létezik a koverienciájuk. Ekkor korrelálatlanok.*

Bizonyítás. Az 7.2 Állítás , valamint a függetlenségből adódó 6.9 Állítás alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cov}(\xi, \eta) \\
&= E((\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))) \\
&= E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

7.4. Állítás. *Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ olyan valószínűségi változók, hogy páronként korrelálatlanok, azaz* $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ $(i, j = 1, ..., n)$. *Ekkor*

$$D^2(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} D^2(\xi_i).$$

Bizonyítás. Elvégezve a kijelölt műveleteket, alkalmazva azt, hogy összeg várható értéke a várható értékek összege, valamint az 7.3 Állítást kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&D^2(\xi_1 + \cdots + \xi_n) \\
&= E\left((\xi_1 + \cdots + \xi_n) - E(\xi_1 + \cdots + \xi_n)\right)^2 \\
&= E\left((\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E(\xi_i)))^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left((\xi_i - E(\xi_i))^2\right) \\
&+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} E((\xi_i - E(\xi_i))(\xi_j - E(\xi_j))) \\
&= \sum_{i=1}^{n} D^2(\xi_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} D^2(\xi_i).
\end{aligned}$$

□

Az 7.3 és 7.4 Állítás alapján következményként adódik, hogy független valószínűségi változók összegének szórásnégyzete egyenlő az egyes szórásnégyzetek összegével. Az 7.3 Állítás mutatja, hogy független valószínűségi változók korrelálatlanok. Kérdés, hogy ez visszafelé is igaz-e. Nem igaz, ezt mutatja a következő példa.

7.5. Állítás. *Megadható két korrelálatlan valószínűségi változó úgy, hogy nem függetlenek.*

Megadunk először is egy Kolmogorov féle valószínűségi mezőt. Legyen $\Omega := \{(-1,0),(1,0),(0,-1),(0,1)\}$, $\mathcal{A} := 2^{\Omega}$.

$$P(-1,0) = P(1,0) = P(0,-1) = P(0,1) = \frac{1}{4}.$$

Az $\mathcal{A}$ többi elemein pedig úgy megadva, hogy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ egy Kolmogorov féle valószínűségi mező legyen. Ekkor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ egy klasszikus Kolmogorov féle valószínűségi mező. Egy tetszőleges $\omega = (x,y)$ esetén legyen $\xi(\omega) = x$, $\eta(\omega) = y$. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cov}\ (\xi,\eta) \\
&\qquad = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) \\
&\qquad = 0 - ((-1)\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4})\cdot E(\eta) \\
&\qquad = 0.
\end{aligned}$$

(Közben felhasználtuk, hogy $\xi\eta = 0$ mindenhol, ezért $E(\xi\eta) = 0$.) Másrészt vegyük észre, hogy $\mathrm{P}(\xi = 0) = \mathrm{P}(\eta = 0) = \frac{2}{4}$, és $\mathrm{P}(\xi = 0, \eta = 0) = 0$, azaz

$$\mathrm{P}(\xi = 0, \eta = 0) \neq \mathrm{P}(\xi = 0)\cdot\mathrm{P}(\eta = 0),$$

ezért a 7.6 Állítás alapján adódik, hogy ξ és η nem függetlenek. □

7.3.Definíció. *Legyenek ξ és η olyan valószínűségi változók, hogy $D(\xi), D(\eta) > 0$. Az $r(\xi,\eta) := \frac{cov(\xi,\eta)}{D(\xi)D(\eta)}$ számot a ξ és η valószínűségi változók korrelációjának nevezzük.*

Néhány dolog közvetlen a definícióból látszik. Például az, hogy $r(\xi,\eta) = r(\eta,\xi)$, másrészt az (korábbi állításaink alapján) hogy, ha a két valószínűségi változó független, akkor a korrelációs együttható nulla, azaz jogos volt korrelálatlanoknak nevezni őket. A következő két állítás mutatja, hogy a korrelációs együtthatót lehet alkalmazni, mint egyfajta mérőszámot egy bizonyos fajta függőség mérésére.

7.6. Állítás. *Legyenek ξ és η olyan valószínűségi változók, hogy létezik a korrelációs együtthatójuk. Ekkor,*

$$|r(\xi,\eta)| \leq 1.$$

Bizonyítás. Legyen λ egy tetszőleges valós szám. Ekkor, mivel

$$(\xi(\omega) - \lambda\eta(\omega))^2 \geq 0$$

bármely $\omega \in \Omega$ elemi esemény esetén, ezért $E((\xi(\omega) - \lambda\eta(\omega))^2) \geq 0$. Innen adódik, hogy

$$\begin{aligned}
0 &\leq E(\xi^2 - 2\lambda\xi\eta + \lambda^2\eta^2) \\
&= \lambda^2 E(\eta^2) - \lambda 2E(\xi\eta) + E(\xi^2)
\end{aligned}$$

bármely λ egy valós szám esetén, ezért a megfelelő másodfokú egyenlet diszkriminánsa nem pozitív, azaz

$$4E^2(\xi\eta) - 4E(\xi^2)E(\eta^2) \leq 0,$$

azaz

$$E^2(\xi\eta) \leq E(\xi^2)E(\eta^2).$$

Ezt az egyenlőtlenséget alkalmazzuk úgy, hogy ξ helyére $\xi - E(\xi)$ -t, η helyére $\eta - E(\eta)$ -t írunk:

$$\begin{aligned} &E^2((\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))) \\ &\leq E((\xi - E(\xi))^2 E((\eta - E(\eta))^2), \end{aligned}$$

azaz

$$cov^2(\xi, \eta) \leq D^2(\xi)D^2(\eta),$$

tehát

$$|r(\xi, \eta)| \leq 1. \quad \square$$

7.7. Állítás. *Legyenek ξ és η olyan valószínűségi változók, hogy $D(\xi)$, $D(\eta) > 0$. $|r(\xi, \eta)| = 1$ akkor és csak is akkor, ha $\eta = a\xi + b$ 1 valószínűséggel, ahol a és b valós számok ($a \neq 0$). $r(\xi, \eta) = 1$, ha $a > 0$, $r(\xi, \eta) = -1$, ha $a < 0$.*

korrelaciosegyutthato.mp3 ▷

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\eta = a\xi + b$ 1 valószínűséggel, azaz, hogy $\mathrm{P}(\omega \in \Omega\,,\, \eta(\omega) = a\xi(\omega) + b) = 1$. Ekkor 7.1 , 7.2 állítások alapján

$$\begin{aligned} r(\xi, \eta) &= \frac{cov(\xi, \eta)}{D(\xi)D(\eta)} \\ &= \frac{E((a\xi + b)(\xi)) - E(a\xi + b)E(\xi)}{D(\xi)D(a\xi + b)} \\ &= \frac{E((a\xi + b)(\xi)) - E(a\xi + b)E(\xi)}{|a|D^2(\xi)} \\ &= \frac{aE(\xi^2) - aE^2(\xi)}{|a|D^2(\xi)} \\ &= \frac{a}{|a|}, \end{aligned}$$

azaz a tétel egyik felének bizonyítása már meg is van. tegyük most fel, hogy $r(\xi, \eta) = 1$. Vezessük be a következő jelöléseket.

$$\xi' := \frac{\xi - E(\xi)}{D(\xi)}, \quad \eta' := \frac{\eta - E(\eta)}{D(\eta)}.$$

A ξ' és η' valószínűségi változókat úgy fogjuk nevezni, hogy a ξ , illetve az η valószínűségi változó standardizáltja. A várható érték tulajdonságai és az 7.1 állítás alapján adódik, hogy $E(\xi') = E(\eta') = 0$, valamint $D(\xi') = D(\eta') = 1$. Következésképp $E((\xi')^2) = D^2(\xi\prime) + E^2(\xi\prime) = 1$, valamint ugyanígy $E((\eta')^2) = 1$.

Továbbá

$$E(\xi'\eta') = \\ = \frac{1}{D(\xi)D(\eta)} E((\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))) \\ = r(\xi, \eta) = 1.$$

Ezért

$$E((\xi' - \eta')^2) = \\ E((\xi')^2) + E((\eta')^2) - 2E(\xi'\eta') \\ = 1 + 1 - 2 \cdot 1 = 0.$$

A 7.3 állítás szerint ekkor $\xi' = \eta'$ 1 valószínűséggel, azaz

$$\frac{\xi - E(\xi)}{D(\xi)} = \frac{\eta - E(\eta)}{D(\eta)}$$

1 valószínűséggel, ami átrendezve azt adja, hogy

$$\eta = \frac{D(\eta)}{D(\xi)} \cdot \xi + E(\eta) - \frac{D(\eta)}{D(\xi)} E(\xi).$$

1 valószínűséggel. A felírásból pedig látszik, hogy

$$a = \frac{D(\eta)}{D(\xi)}, \quad b = E(\eta) - \frac{D(\eta)}{D(\xi)} E(\xi)$$

esetén teljesül a tétel állítása. Az $r(\xi, \eta) = -1$ eset tárgyalását az olvasóra bízzuk. □

Feladatok

1. A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei -1,0,1, és 2. Az ezekhez tartozó valószínűségek rendre 1/12, 5/12, 1/4 és 1/4. Mennyi ξ szórása?

2. Legyen $f(x) = 2x$, ha $0 < x < 1$ és nulla különben. Mennyi a szórás?

3. Legyen $x_k = k, p_k = \frac{1}{2^k}$ ahol $k = 1, 2, \ldots$. Mennyi a valószínűségi változó szórása?

4. Egy kockát addig dobálunk amit hatost nem dobunk. Mennyi a dobások számának szórása?

5. A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó értékei, illetve a hozzátartozó valószínűségek: $\mathrm{P}(\xi = 0, \eta = 0) = p$, $\mathrm{P}(\xi = 0, \eta = 1) = 2p$, $\mathrm{P}(\xi = 2, \eta = 0) = 3p$, $\mathrm{P}(\xi = 2, \eta = 1) = 4p$. Mennyi a p értéke? Mennyi a korrelációs együttható értéke?

Megoldások

1. Várható érték: -1/12 + 1/4 + 2/4 = 8/12. A valószínűségi változó négyzetének várható értéke: 1/12 + 1/4 + 4/4 = 16/12. A szórás: $\sqrt{16/12 - 64/144} = \sqrt{8/9}$.

2. $E(\xi) = \int_0^1 x2xdx = 2/3$. $E(\xi^2) = \int_0^1 x^2 2xdx = 2/4$, $D(\xi) = \sqrt{1/2 - 4/9} = \sqrt{1/18}$.

3. Segítség: $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \frac{1}{1-x}$ mindkét oldalát kétszer deriválva kapunk számunkra hasznos formulát. Ez a következő megoldásban is hasznos lesz. Az előző fejezetben feladat volt ennek a valószínűségi változónak a várható értékének a meghatározása, ami épp 2 volt. $E(\xi) = 6$. Így a szórás $\sqrt{2}$.

4. Az előző fejezetben feladat volt ennek a valószínűségi változónak a várható értékének a meghatározása, ami épp 6 volt. $E(\xi^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{5^{k-1}}{6^k} = 66$. Így a szórás $\sqrt{30}$.

5. $p = 0,1$. $E(\xi\eta) = 8p = 0,8$. $E(\xi) = 14p = 1,4$. $E(\eta) = 6p = 0,6$. $cov(\xi, \eta) = 0,8 - 1,4 \cdot 0,6 = -0,04$. $E(\xi^2) = 28p = 2,8$, $E(\eta^2) = 6p = 0,6$. $r(\xi, \eta) = \frac{-0,04}{\sqrt{2,8-1,4^2}\sqrt{0,6-0,6^2}} = -0,0890870$.

8. fejezet

Speciális, diszkrét eloszlású valószínűségi változók

(Tartalomjegyzék)

8.1.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, továbbá legyenek* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *valós számok. Azt mondjuk, hogy a* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *diszkrét valószínűségi változó diszkrét egyenletes eloszlású az* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *számokon, ha* $\mathrm{P}(\xi = x_i) = \frac{1}{n}$ *minden* $i = 1, ..., n$ *esetén.*

Az, hogy az említett módon valóban valószínűségi eloszlást kaptunk, nem nehéz belátni, hiszen az $1/n$ számot, ha n szer összeadjuk valóban 1 -et kapunk. Nézzük meg , hogy mennyi lesz (és persze , hogy lesz-e) a várható értéke és a szórása a 8.1. definícióban megadott valószínűségi változónak.

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

amit szokás az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok számtani átlagának is nevezni. Másrészt

$$\begin{aligned} D^2(\xi) &= E(\xi^2) - E^2(\xi) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \frac{1}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2, \end{aligned}$$

ami , hogy ha bevezetjük az $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ jelölést, akkor egyenlő a következő kifejezéssel, amit szokás az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok szórásának is nevezni

$$D^2(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

8.2.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, továbbá legyen* $0 < p < 1$ *és* $A \in \mathcal{A}$ *egy olyan esemény, hogy* $\mathrm{P}(A) = p$*. Azt mondjuk, hogy a* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *diszkrét valószínűségi változó az* A *esemény indikátor valószínűségi változója, hogy, ha*

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } \omega \in A, \\ 0 & , \text{ ha } \omega \notin A. \end{cases}$$

Nézzük meg, hogy mennyi lesz a várható értéke és a szórása a 8.2. definícióban megadott valószínűségi változónak. $E(\xi) = 1 \cdot \mathrm{P}(A) + 0 \cdot \mathrm{P}(\Omega \backslash A) = p$. $D^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = 1^2 p + 0^2(1-p) - p^2 = p(1-p)$.

8.3.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, továbbá legyen* $0 < p < 1$ *és* $n \in \mathbb{N}_0$*. Ekkor azt mondjuk, hogy a* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *diszkrét valószínűségi változó* (n, p) *paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, hogy, ha*

$$\mathrm{P}(\xi = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Az adott módon valóban valószínűségeloszlást kaptunk, ugyanis a binomiális tétel alapján látható, hogy

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = (p + (1-p))^n = 1.$$

Számoljuk ki az (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórását! Ehhez fel fogjuk használni a 8.2. definícióban megadott indikátor valószínűségi változóra kiszámoltakat. Legyen $A \in \mathcal{A}$ egy olyan esemény, hogy $\mathrm{P}(A) = p$, valamint $\xi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ az A esemény indikátor valószínűségi változója, minden $i = 1, ..., n$ esetén, méghozzá úgy, hogy az egyes ξ_i-k legyenek függetlenek. Ekkor a $\eta := \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ diszkrét valószínűségi változó (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó lesz, ugyanis

$$\mathrm{P}(\eta = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

$i = 0, ..., n$. Mivel az η és a ξ valószínűségi változó várható értéke és szórása megegyezik, ezért elég az előbbiét kiszámolni. $E(\eta) = \sum_{i=1}^{n} E(\xi_i) = np$. Az 8.4 állítás segítségével adódik, hogy $D^2(\eta) = \sum_{i=1}^{n} D^2(\xi_n) = np(1-p)$. Tehát az (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értéke np és a szórása $\sqrt{np(1-p)}$.

8.4.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, továbbá legyen* $N, K, n \in \mathbb{N}_0$ *és* $n \leq K \leq N$, $n \leq N - K$. *Azt mondjuk, hogy a* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *diszkrét valószínűségi változó* (N, K, n) *paraméterű hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó, hogy, ha*

$$\mathrm{P}(\xi = i) = \frac{\binom{K}{i}\binom{N-K}{n-i}}{\binom{N}{n}}, \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Az adott módon valóban valószínűségeloszlást kaptunk, ugyanis az ismert

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{a}{i}\binom{b}{n-i} = \binom{a+b}{n}$$

kombinatorikai összefüggés ($a, b, n \in \mathbb{N}_0$, $n \leq a, b$) alapján látható, hogy

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{K}{i}\binom{N-K}{n-i}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}} = 1.$$

Számoljuk ki az (N, K, n) paraméterű hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórását!

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \sum_{i=0}^{n} i \cdot \frac{\binom{K}{i}\binom{N-K}{n-i}}{\binom{N}{n}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{K!}{(i-1)!(K-i)!}\binom{N-K}{n-i}}{\binom{N}{n}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{K\binom{K-1}{i-1}\binom{N-K}{n-i}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{K\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{Kn}{N}. \end{aligned}$$

Nézzük meg, hogy mivel egyenlő $E(\xi^2)$!

$$\begin{aligned}
E(\xi^2) &= \sum_{i=0}^{n} i^2 \cdot \frac{\binom{K}{i}\binom{N-K}{n-i}}{\binom{N}{n}} \\
&= \sum_{i=0}^{n} i(i-1) \cdot \frac{\binom{K}{i}\binom{N-K}{n-i}}{\binom{N}{n}} + \sum_{i=0}^{n} i \cdot \frac{\binom{K}{i}\binom{N-K}{n-i}}{\binom{N}{n}} \\
&= \sum_{i=2}^{n} i(i-1) \cdot \frac{\binom{K}{i}\binom{N-K}{n-i}}{\binom{N}{n}} + \frac{Kn}{N} \\
&= K(K-1) \sum_{i=2}^{n} \frac{\binom{K-2}{i-2}\binom{N-K}{n-i}}{\binom{N}{n}} + \frac{Kn}{N} \\
&= \frac{K(K-1)\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} + \frac{Kn}{N} \\
&= \frac{K(K-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{Kn}{N}.
\end{aligned}$$

Ezt felhasználva adódik, hogy

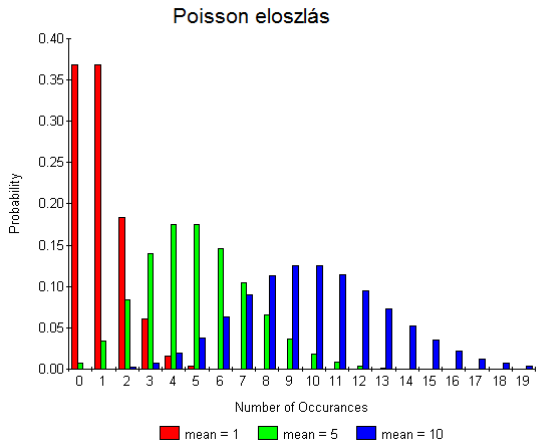
$$\begin{aligned}
D^2(\xi) &= E(\xi^2) - E^2(\xi) \\
&= \frac{K(K-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{Kn}{N} - \left(\frac{Kn}{N}\right)^2 \\
&= \frac{Kn}{N}\left(\frac{(K-1)(n-1)}{N-1} + 1 - \frac{Kn}{N}\right) \\
&= n\frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Mintavétel. Legyen adott N számú tárgy, melyből K számú rendelkezik egy bizonyos tulajdonsággal, mondjuk, hogy selejtes. Kiválasztunk n számú tárgyat ezekből. Kérdés, hogy mennyi lesz annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott tárgyak között pontosan i számú selejtes lesz, ahol $i = 0, 1, ..., n$? Először a mintavételt visszatevéssel valósítsuk meg, azaz, hogy minden egyes kiválasztott tárgyat visszatesszük rögtön azután, hogy kiválasztottuk (és persze egyesével választunk). Ekkor a kérdéses valószínűség éppen $\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$, ahol $p = \frac{K}{N}$. Másodszor a mintavételt visszatevés nélkül valósítsuk meg, azaz, a kiválasztott tárgyat nem tesszük vissza azután, hogy kiválasztottuk (és itt lényegtelen lesz, hogy egyesével, vagy egyszerre választunk, de az egyszerűség kedvéért, azaz, hogy az előzővel megegyező legyen a feltétel, tegyük fel, hogy egyesével választunk). Ekkor a kérdéses valószínűség éppen $\frac{\binom{K}{i}\binom{N-K}{n-i}}{\binom{N}{n}}$. Vagyis a binomiális és a hipergeometrikus eloszlás éppen az úgynevezett visszatevéses és az úgynevezett vissza nem tevéses mintavételnél alkalmazható. Egyszerű határérték számítással igazolható, minden rögzített $n \in \mathbb{N}_0$ esetén, hogy, ha K és N tart a végtelenbe úgy, hogy közben a hányadosuk (nevezzük p -nek) állandó, akkor a $\frac{\binom{K}{i}\binom{N-K}{n-i}}{\binom{N}{n}}$ valószínűség konvergálni fog a $\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$ értékhez. Ez azt jelenti, hogy, ha nagyszámú tárgyból választunk, akkor mindegy, hogy a kiválasztott elemeket menet közben visszatesszük vagy sem, vagyis "nagy

populációból kiválasztott kis számú egyed nem változtatja meg a populáció összetételét."

8.5.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, továbbá legyen* $\lambda > 0$ *egy állandó. Azt mondjuk, hogy a* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *diszkrét valószínűségi változó* λ *paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, hogy, ha*

$$\mathrm{P}(\xi = i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}, \quad i \in \mathbb{N}_0.$$



Possion eloszlás ($\lambda = 1$, $\lambda = 5$ és $\lambda = 10$ esetén)

Először is lássuk be, hogy a megadott módon valóban valószínűségeloszlást kaptunk! Az analízis előadáson elhangzott, hogy az e^x függvény $0-$körüli Taylor sora egyenlő $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$-vel, ezért innen adódik, hogy $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} = 1$.

Számoljuk ki a λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórását!

$$
\begin{aligned}
E(\xi) &= \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \cdot e^{-\lambda} \\
&= \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \\
&= \lambda.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\xi^2) &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \\
&= \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) \frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!(i-1)i} \cdot e^{-\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 + \lambda.
\end{aligned}
$$

Tehát, $D(\xi) = \sqrt{E(\xi^2) - E^2(\xi)} = \sqrt{\lambda^2 + \lambda - \lambda^2} = \sqrt{\lambda}$. A következőkben a Poisson eloszlással mint a binomiális eloszlás határértékével fogunk foglalkozni. Legyen $p_k^{(n)} := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k \in \mathbb{N}_0$ rögzített, és n tartson a végtelenbe úgy, hogy közben az $np = \lambda$ legyen állandó (azaz $p = \lambda/n$). Ekkor

8.1. Állítás. $\lim p_k^{(n)} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$.

binomialispoisson.mp3 ▷

Bizonyítás. Egyszerű átalakításokkal adódik, hogy

$$
\begin{aligned}
p_k^{(n)} &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.
\end{aligned}
$$

Rögzített $k \in \mathbb{N}_0$ és $n \to \infty$ esetén

$$
\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{nn...n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \to 1.
$$

Valamint $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to 1$. Az analízisből ismeretes, hogy $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \to e^{-\lambda}$. Ezek alapján kapjuk, hogy

$$\lim p_k^{(n)} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}. \quad \square$$

Megjegyezzük, hogy a $np = \lambda$ állandó reláció helyett elegendő lett volna csupán a $\lim_{n\to\infty} np = \lambda$ relációt feltenni. Az állítás már ebből is következett volna. A bizonyítást az olvasóra bízzuk.

Feladatok

1. Egy kockával n-szer dobunk. Adjuk meg a dobott hatosok számának eloszlását, várható értékét és szórását! Mennyi a valószínusége, hogy legalább 2 hatost dobtunk?

2. Hány dobókocka esetén lesz a legnagyobb a valószínusége annak, hogy pontosan egy hatos van a dobott számok között?

3. Ha az A esemény valószínusége k/n, akkor mennyi a valószínusége, hogy az A esemény n kísérlet közül pontosan k-ban következik be?

4. Igazoljuk, hogy ha ξ_1 hipergeometrikus eloszlású valószínuségi változó, akkor $\xi_2 = n - \xi_1$ is az!

5. Almafánk egyes gyümölcseit megtámadó férgek száma 1,5 paraméteru Poisson eloszlást követ. 10 almát leszedünk. Mi a bennük lévo férgek számának várható értéke? Mennyi a valószínusége, hogy egy almában legalább két féreg lesz?

Megoldások

1. $\mathrm{P}(\xi = k) = p_k = \binom{n}{k}\frac{5^{n-k}}{6^n}$, $E(\xi) = n/6, D(\xi) = \sqrt{n6/36}$. $1 - p_0 - p_1 = 1 - (5/6)^n - n5^{n-1}/6^n$.

2. $\mathrm{P}(\xi = 1) = p_1 = \binom{n}{1}\frac{5^{n-1}}{6^n} = \frac{n(5/6)^n}{5}$ maximális, ha n 5 vagy 6. Min a két esetben éppen 3125/7776.

3. $p = k/n$, $\mathrm{P}(\xi = k) = p_k = \binom{n}{k}(k/n)^k(1-k/n)^{n-k}$.

4. $\mathrm{P}(\xi_2 = k) = \mathrm{P}(\xi_1 = n-k) = \frac{\binom{K}{n-k}\binom{N-K}{k}}{\binom{N}{n}}$ szintén hipergeometrikus eloszlású. Csak amig ξ_1 (N, K, n) paraméterű, addig ξ_2 pedig $(N, N-K, n)$ paraméterű lesz.

5. $E(\xi) = 15$. $1 - \frac{1}{1}e^{-1,5} - \frac{1,5}{1}e^{-1,5} = 0,442174$.

9. fejezet

Speciális, folytonos eloszlású valószínűségi változók

(Tartalomjegyzék)

9.1.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, továbbá legyen* (a, b) *egy intervallum. Azt mondjuk, hogy a* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *folytonos eloszlású valószínűségi változó egyenletes eloszlású az* (a, b) *egy intervallumon, ha sűrűségfüggvénye*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Először is lássuk be, hogy a megadott módon valóban sűrűségfüggvényt kaptunk!

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx &= \int_a^b \frac{1}{b-a} dx \\ &= \left[\frac{1}{b-a} x\right]_a^b = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1. \end{aligned}$$

Számoljuk ki a valószínűségi változó várható értékét és szórását!

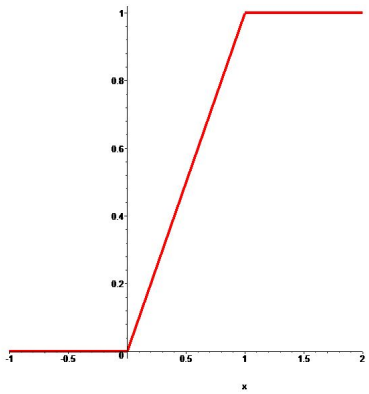
$$\begin{aligned} E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx \\ &= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx \\ &= \left[\frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b+a}{2}. \end{aligned}$$

Másrészt

$$\begin{aligned} E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx \\ &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx \\ &= \left[\frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3}\right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} D(\xi) &= \sqrt{E(\xi^2) - E^2(\xi)} \\ &= \sqrt{\frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4}} \\ &= \frac{b-a}{\sqrt{12}}. \end{aligned}$$



$(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

9.2.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, továbbá legyen* $\lambda > 0$ *egy valós szám. Azt mondjuk, hogy a* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *folytonos eloszlású valószínűségi változó* λ *paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, ha sűrűségfüggvénye*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Először is lássuk be, hogy a megadott módon valóban sűrűségfüggvényt kaptunk!

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[\lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} \\ &= \lim_{x \to +\infty} (-e^{-\lambda x}) + e^{-\lambda 0} = 1. \end{aligned}$$

Számoljuk ki (parciális integrálással) a valószínűségi változó várható értéket

és szórását!

$$
\begin{aligned}
E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx & \\
&= \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \left[\lambda x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx \\
&= \lim_{x\to+\infty} (-xe^{-\lambda x}) + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \\
&= 0 + \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{+\infty} \\
&= \lim_{x\to+\infty} (-e^{-\lambda x}/\lambda) + e^{-\lambda 0}/\lambda = \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

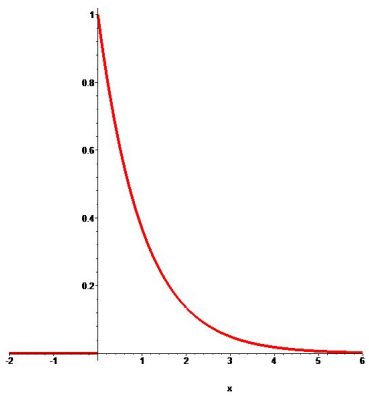
exponencialis.mp3 ▷

Továbbá, szintén parciálisan integrálva, valamit alkalmazva az imént kapottakat adódik, hogy

$$
\begin{aligned}
E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x) dx & \\
&= \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \left[\lambda x^2 \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x\lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx \\
&= \lim_{x\to+\infty} (-x^2 e^{-\lambda x}) + \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= 0 + \frac{2}{\lambda}\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

Ahonnan adódik a ξ szórása

$$
\begin{aligned}
D(\xi) &= \sqrt{E(\xi^2) - E^2(\xi)} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2} = \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}
$$



Sűrűség függvény

Megjegyzés. Egyes, főleg véletlen időtartamokat jelölő ξ valószínűségi változókra teljesül az, hogy bármely x időpontot választva is ki, ha az a véletlen időtartam az x időpontig nem ért véget, akkor úgy tekinthető, hogy mintha az egész folyamat az x időpontban kezdődött volna. Ezt a tulajdonságot matematikailag a következő egyenlőség fejezi ki.

$$\mathrm{P}(\xi \geq x + y | \xi \geq x) = \mathrm{P}(\xi \geq y), \quad x, y \geq 0, \tag{9.1}$$

ami viszont a feltételes valószínűség definíciója szerint ekvivalens azzal, hogy

$$\mathrm{P}(\xi \geq x + y, \xi \geq x) = \mathrm{P}(\xi \geq x)\mathrm{P}(\xi \geq y), \quad x, y \geq 0.$$

Mivel pedig a $\xi \geq x + y$ esemény maga után vonja a $\xi \geq x$ eseményt, ezért (9.1) melyet örökifjú tulajdonságnak is neveznek, ekvivalens azzal, hogy

$$\mathrm{P}(\xi \geq x + y) = \mathrm{P}(\xi \geq x)\mathrm{P}(\xi \geq y), \quad x, y \geq 0.$$

Belátjuk, hogy az örökifjú tulajdonsággal rendelkező nem negatív folytonos eloszlású valószínűségi változók nem mások, mint az exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\xi \geq 0$ egy folytonos eloszlású valószínűségi változó, olyan, amely rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Legyen $G(x) := 1 - F_\xi(x)$. Ekkor $G(x + y) = G(x)G(y)$. Legyen $x = y = 0$. Ez azt adja, hogy $G(0) = G(0)G(0)$. $G(0) = 0$ nem lehetséges, mert ellenkező esetben $F_\xi(0) = 1$ lenne, ami viszont ellentmondana annak, hogy $\xi \geq 0$, azaz, hogy $\mathrm{P}(\xi \geq 0) = 1$ -nek. Tehát $G(0) = 1$. Legyen, $n \in \mathbb{N}_0$. Ekkor $G(n) = G(n-1)G(1) = ... = (G(1))^n$, és $G(0) = G(1)^0$. Legyen most $k, n \in \mathbb{N}_0$. Ekkor

$$(G(1))^k = G(k) = G(\frac{k}{n})G((n-1)\frac{k}{n}) = ... = \left(G(\frac{k}{n})\right)^n,$$

Tehát, $G(\frac{k}{n}) = (G(1))^{\frac{k}{n}}$. Tekintve, hogy ξ egy folytonos eloszlású valószínűségi változó, ezért a G egy folytonos függvény, tehát legyen $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ tetszőleges, és $(x_n) \to x$ egy nem negatív racionális számokból álló x -hez konvergáló sorozat. Ekkor $G(x_n) \to G(x)$. Az előzőek szerint $G(x_n) = G(1)^{x_n}$. Mivel $G(1)^{x_n} \to G(1)^x$,így $G(x) = G(1)^x$. Jelölje $\lambda = -\ln G(1)$. Tehát $G(x) = e^{-\lambda x}$, azaz $F_\xi(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$. Tehát beláttuk, hogy az örökifjú tulajdonsággal rendelkező folytonos eloszlású valószínűségi változók, azok exponenciálisak. Annak a belátása, hogy az exponenciális eloszlású valószínűségi változók rendelkeznek az örökifjú tulajdonsággal pedig annyira egyszerű, hogy az olvasóra bízzuk.

9.3.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, továbbá legyenek* $m, \sigma > 0$ *valós számok. Azt mondjuk, hogy a* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *folytonos eloszlású valószínűségi változó* (m, σ) *paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó, ha sűrűségfüggvénye*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Először is lássuk be, hogy a megadott módon valóban sűrűségfüggvényt kaptunk! Ehhez felhasználjuk a következő formulát

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{9.2}$$

amelyet szintén igazolunk. I^2 felírható a következő alakban

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Alkalmazva az $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ transzformációt, melynek függvénydeterminánsa

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r.$$

Az előbbiek alapján

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr d\phi \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

amivel a (9.2) formulát igazoltuk. Visszatérve a (9.3) definícióban megadott függvényhez, az $u = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$ helyettesítéssel és a (9.2) formulával adódik, hogy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 1. \end{aligned}$$

Számoljuk ki a (m, σ) paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó

várható értékét és szórását az $u = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$ helyettesítéssel!

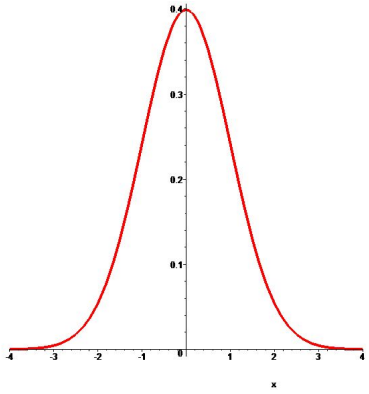
$$\begin{aligned}
E(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= m + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-u^2} du = m,
\end{aligned}$$

tekintve, hogy az ue^{-u^2} egy páratlan függvény, és mivel létezik az integrálja a $(-\infty, +\infty)$ halmazon, ezért nullával egyenlő. Továbbá alkalmazva a fentieket

$$\begin{aligned}
E(\xi^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} m^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} 2xm \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= -m^2 + 2m \cdot m + \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= m^2 + \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du \\
&= m^2 + \frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} (-u) \cdot (-u) e^{-u^2} du \\
&= m^2 + \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left[(-u) e^{-u^2} \right]_0^{+\infty} + \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \\
&= m^2 + 0 + \sigma^2
\end{aligned}$$

(9.2) alapján. Innen adódik a ξ szórása

$$D(\xi) = \sqrt{E(\xi^2) - E^2(\xi)} = \sqrt{m^2 + \sigma^2 - m^2} = \sigma.$$



$(0,1)$ paraméterű normális eloszlás sűrűség függvénye

Feladatok

1. Egy egyenletes eloszlású valószínuségi változó várható értéke 3, szórása 2. Adjuk meg az eloszlás- és sűrűségfüggvényt! Mennyi a valószínűsége, hogy a változó értéke nagyobb, mint 5?

2. A ξ valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású. Milyen eloszlású $\eta = 1 - \xi$?

3. A $[0,1]$ intervallumon választunk egy ξ számot egyenletes eloszlás szerint. Írjuk fel ξ^2 eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!

4. Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású. Átlagosan 2 évig működik. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy új villanykörte?

5. Egy műszer élettartama exponenciális eloszlású. Annak a valószínűsége, hogy legalább 2 évig működik: 0,9. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 3 évig lesz működőképes?

6. Egy mérés hibája normális eloszlású, várható értéke 2, szórása 4. Mennyi a valószínűsége, hogy a hiba -2 és 2 közé esik? Adjuk meg azt az x értéket, amelyre igaz, hogy 1/2 valószínűséggel legalább x a hiba!

Megoldások

1. $E = (a+b)/2 = 3, D = (b-a)/(2\sqrt{3}) = 2$. Azaz, $a = 3-2\sqrt{3}, a = 3+2\sqrt{3}$. A sűrűségfüggvény az $[a,b]$ intervallumon éppen $1/(b-a) = 1/(4\sqrt{3})$, máshol nulla. $\mathrm{P}(\xi > 5) = 1 - F(5) = 1 - \frac{5-a}{b-a} = 0,211324$.

2. Ha $x \leq 0$, akkor $F(x) = \mathrm{P}(\eta < x) = 0$. Ha $0 < x \leq 1$, akkor $F(x) = \mathrm{P}(\eta < x) = \mathrm{P}(\xi > 1-x) = \frac{1-(1-x)}{1} = x$. Ha $1 < x$, akkor $F(x) = \mathrm{P}(\eta < x) = \mathrm{P}(\xi > 1-x) = 1$. Azaz, η a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású.

3. $F(x) = F_{\xi^2}(x) = F_\xi(\sqrt{x})$. Tehát, Ha $x \leq 0$, akkor $F(x) = 0$. Ha $x \leq 0$, akkor $F(x) = \sqrt{x}$. Ha $1 < x$, akkor $F(x)1$. Ha $x \in (0,1)$, akkor $f(x) = 1/(2\sqrt{x})$. Máskülönben nulla. $E(\xi) = 1/3$, $D(\xi) = 2/(3\sqrt{5})$.

4. $E = 1/\lambda = 2$. $\mathrm{P}(\xi \geq 1) = 1 - F(1) = 1 - (1 - e^{-0,5}) = e^{-0,5} = 0,606530$.

5. $0,9 = \mathrm{P}(\xi \geq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-2\lambda}) = e^{-2\lambda}$. $F(3) = 1 - e^{-3\lambda} = 1 - 0,9^{3/2} = 0,146185$.

6. $m = 2, \sigma = 4$. $\mathrm{P}(-2 < \xi < 2) = F(2) - F(-2) = \Phi(\frac{2-2}{4}) - \Phi(\frac{-2-2}{4}) = \Phi(0) - \Phi(-1) = 0,341344$. $1/2 = 1 - F(x) = 1 - \phi(\frac{x-2}{4})$. Innen $x = 2$.

10. fejezet

A nagy számok törvényei, valószínűségi változó sorozatok konvergenciája

(Tartalomjegyzék) Ha egy kísérlettel kapcsolatban egy tetszőleges A eseményt kiválasztunk, majd a kísérletet igen sokszor egymástól függetlenül elvégezzük, akkor a k_A/n relatív gyakoriság stabilitást mutat. Ezt az empirikus adatok által igen erősen alátámasztott tényt a nagy számok törvényének nevezzük. E törvény lehetővé teszi a valószínűség fogalmának gyakorlati interpretációit, továbbá a valószínűségelmélet gyakorlati alkalmazását.

10.1. Állítás. *(Markov egyenlőtlenség) Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, továbbá legyen $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ egy nem negatív értékeket felvevő valószínűségi változó olyan, hogy $E(\xi)$ létezik, és $\epsilon > 0$. Ekkor*

$$\mathrm{P}(\xi \geq \epsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\epsilon}.$$

Bizonyítás. Legyen először ξ egy diszkrét eloszlású valószínűségi változó. Azaz,

$\mathrm{P}(\xi = x_i) = p_i$ $(i \in \mathbb{N})$. Ekkor

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \geq \sum_{\{i \in \mathbb{N} : x_i \geq \epsilon\}} x_i p_i \\ &\geq \sum_{\{i \in \mathbb{N} : x_i \geq \epsilon\}} \epsilon p_i \geq \epsilon \sum_{\{i \in \mathbb{N} : x_i \geq \epsilon\}} p_i \\ &= \epsilon \mathrm{P}(\xi \geq \epsilon). \end{aligned}$$

Legyen most ξ egy folytonos eloszlású valószínűségi változó.

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx \\ &= \int_{0}^{+\infty} x f_\xi(x) dx \\ &\geq \int_{\epsilon}^{+\infty} x f_\xi(x) dx \\ &\geq \int_{\epsilon}^{+\infty} \epsilon f_\xi(x) dx \\ &= \epsilon \int_{\epsilon}^{+\infty} f_\xi(x) dx \\ &= \epsilon \mathrm{P}(\xi \geq \epsilon). \end{aligned}$$

Azaz, ebben az esetben is készen vagyunk a bizonyítással. □

Egy más elven működő bizonyítás lehetett volna a következő. Legyen $\xi'(\omega) := \begin{cases} 0, & \text{ha } \xi(\omega) < \epsilon, \\ \epsilon, & \text{ha } \xi(\omega) \geq \epsilon \end{cases}$ $(\omega \in \Omega)$. Könnyen be lehet látni, hogy ξ' diszkrét eloszlású

valószínűségi változó. Másrészt szintén nem nehéz igazolni, hogy $E(\xi') \leq E(\xi)$. Tekintve, hogy $E(\xi') = \epsilon \mathrm{P}(\xi \geq \epsilon)$, így a bizonyítással készen vagyunk. $\square$

10.2. Állítás. *(Csebisev egyenlőtlenség) Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, továbbá legyen $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó olyan, hogy $E(\xi), D(\xi)$ létezik, és $\epsilon > 0$. Ekkor*

$$\mathrm{P}(|\xi - E(\xi)| \geq \epsilon) \leq \frac{D^2(\xi)}{\epsilon^2}.$$

Bizonyítás. Használjuk az imént igazolt Markov egyenlőtlenséget a $|\xi - E(\xi)|^2$ nem negatív valószínűségi változóra és az $\epsilon^2 > 0$ számra.Tekintve, hogy $E(|\xi - E(\xi)|^2) = D^2(\xi)$, ezért a bizonyítással készen vagyunk. $\square$

10.1.Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, továbbá legyenek $\xi_n, \xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók ($n \in \mathbb{N}$). Azt mondjuk, hogy a (ξ_n) sorozat sztochasztikusan konvergál a ξ valószínűségi változóhoz, ha tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|\xi_n - \xi| > \epsilon) = 0.$$

Jelölés. $\xi_n \Rightarrow \xi$. A nagy számok gyenge törvényei a sztochasztikus konvergenciával kapcsolatosak.

10.3. Állítás. *(Bernoulli) Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, továbbá legyen $A \in \mathcal{A}$, $\xi_n : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változók függetlenek, az A esemény indikátor valószínűségi változói $n \in \mathbb{N}$. Legyen $\eta_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$. Ekkor $\eta_n/n \Rightarrow \mathrm{P}(A)$.*

Jacob Bernoulli

A Bernoulli féle nagy számok törvényét így lehetne interpretálni, hogy a relatív gyakoriság (ez a η_n/n, amely "számolja, hogy az n számú kísérlet folyamán hányszor következett be" az A esemény) sztochasztikusan konvergál az illető esemény (A) valószínűségéhez ($\mathrm{P}(A)$).
bernoulli.mp3 $\triangleright$

Bizonyítás. Legyen $p := \mathrm{P}(A)$. Ekkor η_n egy (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, ezért $E(\eta_n) = np$, $D^2(\eta_n) = np(1-p)$. Tehát $E(\eta_n/n) = p$, $D^2(\eta_n/n) = p(1-p)/n$. A Csebisev egyenlőtlenséget alkalmazva adódik, hogy

$$\mathrm{P}(|\eta_n/n - p| > \epsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}.$$

$p(1-p) \leq 1/4$, ezért

$$\mathrm{P}(|\eta_n/n - p| > \epsilon) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}.$$

Tehát, $\eta_n/n \Rightarrow \mathrm{P}(A)$. $\square$

Bernoulli tétele speciális esete az alábbi tételnek, mely a várható érték számtani átlaggal való közelítését indokolja.

10.4. Állítás. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, továbbá legyenek* $\xi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ *azonos várható értéké (jelölje* m*) és szórású független valószínűségi változók* $(i = 1, ..., n\,(n \in \mathbb{N}))$ *Ekkor* $\xi_n \Rightarrow m$.

Bizonyítás. Legyen $E(\xi_i) = m$, $D(\xi_i) = \sigma$, $i = 1, ..., n$. Alkalmazzuk a Csebisev egyenlőtlenséget a

$$\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n}$$

valószínűségi változóra, melynek várható értéke m és szórása pedig σ/n. Eszerint tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} - m\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n}.$$

Ha $n \to \infty$, akkor $\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n} \to 0$ tehát a bizonyítást befejeztük. $\square$

Feladatok

1. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye csak a $(0, 6)$ intervallumban különbözik a nullától és várható értéke 1. Igazolja, hogy $\mathrm{P}(\xi < 5) \geq 4/5$.

2. Mutassuk meg, hogy a Csebisev egyenlőtlenség a következő alakban is írható: $\mathrm{P}(|\xi - E(\xi)| < \epsilon) \geq 1 - D^2(\xi)/\epsilon^2$.

3. Legyen a ξ folytonos valószínűségi változó várható értéke illetve szórása m illetve σ. Igazoljuk, hogy $k > 0$ esetén: $\int_{-\infty}^{m-k\sigma} (x-m)^2 f(x)dx \geq k^2\sigma^2 \mathrm{P}(\xi < m - k\sigma)$.

4. Valamely társadalmi rétegben meg kívánjuk határozni a szeszfogyasztók arányát. Hány megfigyelést kell ahhoz végezni, hogy a megfigyelésekből adódó arány a valódi aránytól 95% valószínűséggel legfeljebb 0,01-dal térjen el?

5. Egy csavargyártó automatánál megvizsgálunk 5000 csavart és azt tapasztaljuk, hogy 80 darab selejtes. Határozzuk meg, hogy az ebből adódó relatív gyakoriság az ismeretlen selejtgyártási valószínűséget 90% biztonsággal mennyire közelíti meg.

Megoldások

1. A Markov egyenlőtlenség alapján: $\mathrm{P}(\xi < 5) = 1 - \mathrm{P}(\xi \geq 5) \geq 1 - E(\xi)/5 = 4/5$.

2. $\mathrm{P}(|\xi - E(\xi)| < \epsilon) = 1 - \mathrm{P}(|\xi - E(\xi)| \geq \epsilon) \geq 1 - D^2(\xi)/\epsilon^2$.

3. Ha $x \leq m - k\sigma$, akkor $x - m \leq -k\sigma$, azaz $(x - m)^2 \geq k^2\sigma^2$. Ezért $\int_{-\infty}^{m-k\sigma} (x - m)^2 f(x)dx \geq k^2\sigma^2 \int_{-\infty}^{m-k\sigma} f(x)dx = k^2\sigma^2 \mathrm{P}(\xi < m - k\sigma)$.

4. A nagy számok törvénye alapján: $\mathrm{P}(|k/n - p| > \epsilon) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$. A következő egyenletrendszert kell megoldanunk: $\epsilon = 0,01, 0,95 = \frac{1}{4n\epsilon^2}$. Ahonnan $n = 2631,578947$. Tehát $n \geq 2632$.

5. Szintén a nagy számok Bernoulli féle törvénye alapján a következő egyenletet kell megoldani: $0,1 = \frac{1}{4n\epsilon^2} = \frac{1}{4\cdot 5000\epsilon^2}$. Ahonnan, $\epsilon = \sqrt{5}/100 = 0,0223606$. Tehát $p \in [80/5000 - \sqrt{5}/100, 80/5000 + \sqrt{5}/100] = [-0,006360, 0,038360]$.

11. fejezet

centrális határeloszlás tétel

(Tartalomjegyzék) Az ebben a fejezetben tárgyalandó centrális határeloszlás tétel, illetve tételek azt fejezik ki, hogy sok független valószínűségi változó összege igen általános feltételek mellett közelítőleg normális eloszlású. Ez, illetve ezek a tételek világítják meg, hogy miért találkozunk a különböző alkalmazási területeken olyan gyakran normális vagy közel normális eloszlással.

Tipikus példa erre a mérések pontatlansága; a teljes mérési hiba nagyon sok kis hibából tevődik össze. A centrális hatáéreloszlás tételek tehát igazolják azt a feltevést, hogy a mérési hiba normális eloszlású, ezért a normális eloszlást ,,hibatörvénynek" is szokták nevezni. Ehhez meglehetősen sok előkészületet kell tennünk. Kicsit ki is ,,lóg" ez a fejezet abban az értelemben, hogy talán ez igényli a legfigyelmesebb olvasást, ez a ,,legnehezebb" fejezet.

11.1.Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *egy Kolmogorov féle valószínűségi mező. A* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó karakterisztikus függvénye:*

$$\psi_\xi(t) = E(e^{\imath \xi t}) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

eixit.mp3 ▷

11.1. Állítás. $|\psi_\xi(t)| \leq 1$ *minden* $t \in \mathbb{R}$ *esetén. Továbbá,* $\psi_\xi(0) = 1$ *és a* $\psi_\xi(t)$ *függvény egyenletesen folytonos a* $\mathbb{R}$ *számegyenesen.*

Bizonyítás. $\psi_\xi(0) = E(1) = 1$. Miért létezik minden $t \in \mathbb{R}$ esetén a $\psi_\xi(t)$ szám?

Először legyen ξ diszkrét. $|e^{\imath x_k t}| = 1$, ezért mivel $\sum_k p_k = 1$, a $\sum_k e^{\imath x_k t} p_k$ sor abszolút konvergens és így $\psi_\xi(t) = \sum_k e^{\imath x_k t} p_k$ szám létezik és $|\psi_\xi(t)| \leq \sum_k |e^{\imath x_k t}| p_k = 1$.

Ha ξ folytonos, akkor $e^{\imath x t}$ folytonos lévén az $x \in (-\infty, +\infty)$ intervallumon, valamint $|e^{\imath x t}| = 1$ az

$$\psi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\imath x t} f_\xi(x) dx$$

integrál abszolút konvergens és ezért létezik a $\psi_\xi(t) = E(e^{\imath \xi t})$ szám. Továbbá,

$$|\psi_\xi(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{\imath x t}| f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx = 1.$$

Végezetül vizsgáljuk a ψ_ξ folytonosságát.

Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges. Legyen $\lambda > 0$ olyan, hogy $\mathrm{P}(|\xi| > \lambda) < \epsilon/3$ teljesüljön. jelölje A_λ az eseményt. Ekkor a feltételes várható értékre vonatkozó tétel alapján:

$$\psi_\xi(t) = E(e^{\imath \xi t}) = E(e^{\imath \xi t} | \bar{A}_\lambda) \mathrm{P}(\bar{A}_\lambda) + E(e^{\imath \xi t} | A_\lambda) \mathrm{P}(A_\lambda).$$

Hasonlóképp, ahogy beláttuk, hogy $|E(e^{\imath \xi t}| \leq 1$, ugyanúgy igazolható, hogy $|E(e^{\imath \xi t} | A_\lambda| \leq 1$. Tehát

$$|\psi_\xi(t) - E(e^{\imath \xi t} | \bar{A}_\lambda) \mathrm{P}(\bar{A}_\lambda)| \leq \mathrm{P}(A_\lambda) < \epsilon/3.$$

Ahonnan kapjuk, hogy

$$|\psi_\xi(t_2) - \psi_\xi(t_1)| \le E(|e^{\imath\xi t_2} - e^{\imath\xi t_1}||\bar{A}_\lambda) + 2\epsilon/3.$$

Mivel $a < b$ esetén $|e^{\imath b} - e^{\imath a}| = |\imath \int_a^b e^{\imath z} dz| \le b - a$, ezért, ha $|t_2 - t_1| < \epsilon/3 = \delta$, akkor $\xi \in \bar{A}_\lambda$ esetén

$$|e^{\imath\xi t_2} - e^{\imath\xi t_1}| < \lambda \frac{\epsilon}{3\lambda} = \frac{\epsilon}{3}.$$

Tehát $|t_2 - t_1| < \delta$ esetén

$$|\psi_\xi(t_2) - \psi_\xi(t_1)| \le E(|e^{\imath\xi t_2} - e^{\imath\xi t_1}||\bar{A}_\lambda) + 2\frac{\epsilon}{3\lambda} < \epsilon.$$

Ezzel $\psi_\xi(t)$ egyenletes folytonosságát igazoltuk. □

11.2. Állítás. *Ha a, b konstansok, akkor $\eta = a\xi + b$ esetén $\psi_\eta(t) = e^{\imath bt}\psi_\xi(at)$.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\psi_\eta(t) = E(e^{\imath(a\xi+b)}) = e^{\imath bt}E(e^{\imath a\xi t}) = e^{\imath bt}\psi_\xi(at)$. □

11.3. Állítás. *Legyenek a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek. Ekkor*

$$\psi_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \psi_{\xi_k}(t).$$

Bizonyítás. Azon az elven, miszerint független valószínűségi változók ($e^{\imath\xi_1 t}, \dots, e^{\imath\xi_n t}$ is azok) szorzatának várható értéke megegyezik a várható értékek szorzatával. □

11.4. Állítás. *Ha a ξ valószínűségi változó esetében létezik $E(\xi^k) = M_k$ ($k = 1, \dots, n$) akkor $\psi_\xi(t)$ n-szer differenciálható és*

$$\psi_\xi^{(k)}(0) = \imath^k M_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Bizonyítás. Ha ξ folytonos eloszlású és az $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_\xi(x)dx$ integrál létezik, akkor a $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{\imath xt} f_\xi(x)dx$ integrál t-ben egyenletesen konvergens, ezért

$$\psi_\xi^{(1)}(t) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\imath xt} f_\xi(x)dx\right]^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \imath xe^{\imath xt} f_\xi(x)dx,$$

így $\psi_\xi^{(1)}(0) = \imath M_1$. A gondolatmenetet megismételve kapjuk, hogy

$$\psi_\xi^{(k)}(t) = \imath^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{\imath xt} f_\xi(x)dx = \imath^k M_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Hasonló okoskodással adódik diszkrét esetben, hogy

$$\psi_\xi^{(1)}(t) = \left(\sum_l e^{\imath x_l t} p_l\right)^{(1)} = \sum_l \imath x_l e^{\imath x_l t} p_l.$$

Azaz, $\psi_\xi^{(1)}(0) = \imath M_1$. Megismételve

$$\psi_\xi^{(k)}(t) = \sum_l \imath^k x_l^k e^{\imath x_l t} p_l = \imath^k M_k \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Tehát, $\psi_\xi^{(k)}(0) = \imath^k M_k \, (k = 1, \ldots, n)$. □

11.5. Állítás. *Ha ξ első n momentuma, azaz $E(\xi^k)$ $(k = 1, \ldots, n)$ létezik, akkor $M_0 := 1$ jelölés és $t \to 0$ mellett*

$$\psi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{M_k (\imath t)^k}{k!} + o(t^n).$$

Bizonyítás. (A $o(t)$ azt jelenti, hogy $\lim_{t\to 0} o(t)/t = 0$.) Közvetlenül az előző tételből és a Taylor formulából [7]. □

A [2] könyvben található az alábbi Fourier transzformációra vonatkozó inverziós formula: (Itt egy kicsit ki fogunk lépni a jegyzet kereteiből.)

11.6. Állítás. *([2]) Legyen f (Legesgue) integrálható $\mathbb{R}$-en. f Fourier transzformáltja:*

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{\imath t x} dx \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ha az $\hat{f}(t)$ függvény is (Legesgue) integrálható $\mathbb{R}$-en, akkor érvényes a következő inverziós formula:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{-\imath x t} dt$$

majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Ezek után térjünk rá magára a centrális határeloszlás tételre.

11.7. Állítás. *Legyenek a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak. Tegyük fel, hogy $M = E(\xi_n), D = D(\xi_n) > 0$ léteznek. legyen továbbá, $\zeta_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \zeta_n^* = \frac{\zeta_n - E(\zeta_n)}{D(\zeta_n)}$ Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} F_{\zeta_n^*}(x) = \Phi(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

centralis.mp3 ▷

Bizonyítás. ($\Phi(x)$ a standard normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.) 11.7 Állítás igazolását csak a folytonos esetben végezzük el. (feltesszük tehát, hogy $\xi_1, \ldots, \xi_n$ folytonos.) A diszkrét esetet (pontosabban az e jegyzet keretein túlmutató általános esetet, tárgyalást) illetően lásd például a [5] könyvet.Legyen $\psi(t)$ az $\eta_k = \xi_k - M$ valamint $\psi_n(t)$ a ζ_n^* karakterisztikus függvénye. Mivel $E(\zeta_n^*) = nM$ és $D(\zeta_n^*) = D\sqrt{n}$ (emlékeztetünk a

független valószínűségi változók összege szórására vonatkozó tételre) így 11.5 és 11.4 Állítás alapján

$$\begin{aligned}\psi_n(t) &= \psi_{\frac{\eta_1}{\sqrt{n}}+\dots+\frac{\eta_n}{\sqrt{n}}}(t)\\ &= \prod_{k=1}^{n}\psi_{\frac{\eta_k}{\sqrt{n}}}(t)\\ &= \left(\psi(\frac{t}{D\sqrt{n}})\right)^n.\end{aligned}$$

A 11.5 Állítás alapján ($E(\eta_k) = M_1 = 0$)

$$\psi(\frac{t}{D\sqrt{n}}) = M_0 + \frac{M_1\frac{\imath t}{D\sqrt{n}}}{1!} + \frac{M_2\frac{(\imath t)^2}{D^2 n}}{2!} + o(\frac{t^2}{D^2 n}).$$

Mivel $M_0 = 1, M_1 = 0, M_2 = E(\eta_k^2) = D^2$, így

$$\psi(\frac{t}{D\sqrt{n}}) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o(1/n) \quad (n \to \infty).$$

Ebből adódik, hogy

$$\psi_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(1/n)\right)^n \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Alkalmas (t-től független) elég nagy n esetén $e^{-c_1 t^2/2} \leq (1 - \frac{t^2}{2n} + o(1/n))^n \leq^{-c_2 t^2/2}$ valamely pozitív c_1, c_2 abszolút állandókkal, így tehát $\psi_n(t)$, $\psi(t) = \lim_{n\to\infty}\psi_n(t) = e^{-t^2/2}$ is (Legesgue) integrálható $\mathbb{R}$-en. Alkalmazva a 11.6 Állítás-t az $f_{\zeta_n^*}$ sűrűségfüggvényre:

$$\psi_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\imath tx} f_{\zeta_n^*}(x)dx, \quad f_{\zeta_n^*}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(1/n)\right)^n e^{-\imath tx}dt.$$

Itt alkalmazunk még egy a jegyzet határain kissé túlterjeszkedő tételt. Nevezetesen Lebesgue tételét, mely jelen esetben azt mondja ki, hogy az $n \to \infty$ határérték és az integrál felcserélhető. Azaz,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} f_{\zeta_n^*}(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{t^2}{2n} + o(1/n))^n e^{-\imath tx}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}e^{-\imath tx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.\end{aligned}$$

ami éppen a standard normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Ez az utolsó számolás meglehetősen egyszerű, az olvasóra bízzuk. □

Feladatok

1. Legyen $\lambda > 0$. Igazoljuk, hogy $\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{\sqrt{N}}\frac{N^i}{i!}e^{-N\lambda} = 1/2$.

2. Legyen η_n (n, p) paraméterű binomiális eloszlású. Igazolja a következő közelítés létjogosultságát:

$$\mathrm{P}(\eta_n < x) \approx \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

3. Egy kisforgalmú üzletbe egy napon 100 látogató érkezik. Mindegyik látogató (egymástól függetlenül) p = 0,2 valószínuséggel vásárol valamit. Mi a valószínusége, hogy az adott napon az üzletben vásárlók száma 15 és 25 között lesz?

4. Egy acélkábelen a méterenként előforduló anyaghibák száma Poisson eloszlást követ 1/4 várható értékkel. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy 1000 méteres darabon 200-nál kevesebb anyaghibát találunk?

5. Feldobok 100 dobókockát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 335 és 365 között van?

Megoldások

1. Nem nehéz belátni, hogy a független λ_1 paraméterű ξ_1 Poisson eloszlású és a λ_2 paraméterű ξ_2 Poisson eloszlású valószínűségi változók összege $\lambda_1+\lambda_2$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó lesz, ezért ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változók, akkor az összegük η_n egy $n\lambda$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Alkalmazzuk a centrális határeloszlás tételt.

$$1/2 = \Phi(0) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\frac{\eta_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} < 0) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\eta_n < \sqrt{n\lambda})$$
$$= \lim_{N\to\infty} \mathrm{P}(\eta_n < \sqrt{N}) = \sum_{i=0}^{\sqrt{N}} \frac{N^i}{i!} e^{-N\lambda}.$$

2. Legyen az A esemény olyan, hogy p valószínűséggel következik be és $1-p$-vel nem. Legyen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független az A esemény karakterisztikus valószínűségi változói. Ekkor az összegük η_n egy (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó $\sqrt{np(1-p)}$ szórással. Alkalmazzuk a centrális határeloszlás tételt.

3. Jelölje ξ a vásárlók számát. Ekkor ξ binomiális eloszlású n = 100 és p = 0,2 paraméterekkel. Várható érték, szórás: 20, 4. $\mathrm{P}(15 < \xi < 25) = \mathrm{P}(-5/4 < \xi - 20 < 5/4) \approx \Phi(1,25) - \Phi(-1,25) = 2\Phi(1,25) - 1 \approx 0,7888$.

4. 1000 méteren $\lambda = 250$ várható érték, szórás $= \sqrt{250}$. $\mathrm{P}(\xi < 200) = \mathrm{P}(\frac{\xi-250}{\sqrt{250}} < -50/\sqrt{250}) \approx \Phi(-\sqrt{10}) \approx 0,00078270$.

5. ξ_i az i-edik dobás eredménye $(i = 1, \ldots 100)$, $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_{100}$. Ekkor $E(\eta) = 100 \cdot 3,5 = 350$. $D(\xi_1) = \sqrt{35/12}, D(\eta) = \sqrt{3500/12} = \sqrt{875/3}$. A centrális határeloszlás tétele alapján

$$\mathrm{P}(335 < \eta < 365) = \mathrm{P}(\frac{335-350}{\sqrt{875/3}} < \frac{\eta - 350}{\sqrt{875/3}} < \frac{365-350}{\sqrt{875/3}})$$
$$\approx \Phi\left(365/\sqrt{875/3} - 350/\sqrt{875/3}\right)$$
$$- \Phi\left(335/\sqrt{875/3} - 350/\sqrt{875/3}\right) \approx 0,620224.$$

12. fejezet

A feltételes várható érték

(Tartalomjegyzék) Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$egy Kolmogorov féle valószínűségi mező, ξ, η két (diszkrét vagy folytonos) valószínűségi változó. Ebben a fejezetben definiálni fogjuk (és az $E(\xi|\eta = y)$ szimbólummal fogjuk jelölni) a ξ valószínűségi változónak az η valószínűségi változóra vonatkozó feltételes várható értékét. feltetelesvarhato.mp3 ▷

12.1.Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$egy Kolmogorov féle valószínűségi mező, ξ, η egy diszkrét eloszlású valószínűségi változó, a szokásos jelölésekkel. Azaz,*

$$\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = r_{ij}, \qquad (i, j \in \mathbb{N}).$$

Ekkor, az $E(\xi|\eta = y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y)$ számot, ha a szumma abszolút konvergens a ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó η diszkrét eloszlású valószínűségi változó y értékére vonatkoztatott feltételes várható értékének nevezzük.

Azaz, a A $g = E(\xi|\eta), g(y) = E(\xi|\eta = y)$ függvény $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{R}$-be képez. Továbbá, ha $\mathrm{P}(\eta = y) > 0$

$$E(\xi|\eta = y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathrm{P}(\xi = x_i|\eta = y).$$

12.2.Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$egy Kolmogorov féle valószínűségi mező, és (ξ, η) egy kétdimenziós folytonos eloszlású valószínűségi változó $f_{(\xi,\eta)}(x, y)$ együttes sűrűségfüggvénnyel. Ekkor az $f_{\xi|\eta}$ feltételes sűrűségfüggvényét a*

$$f_{(\xi|\eta=y)}(x) := \frac{f_{\xi,\eta}(x, y)}{f_\eta(y)} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

képlettel értelemezzük, amennyiben $f_\eta(y) > 0$. Máskülönben legyen nulla.

12.3.Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$egy Kolmogorov féle valószínűségi mező,*

és (ξ, η) egy kétdimenziós folytonos eloszlású valószínűségi változó $f_{\xi,\eta}(x, y)$ együttes sűrűségfüggvénnyel. Ekkor az

$$E(\xi|\eta = y) := \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{(\xi|\eta=y)}(x) dx$$

számot, ha az $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_{(\xi,\eta)}(x, y) dx$ integrál véges, a ξ (folytonos) valószínűségi változó η (folytonos) eloszlású valószínűségi változó y értékére vonatkoztatott feltételes várható értékének nevezzük.

Tehát,a A $g = E(\xi|\eta), g(y) = E(\xi|\eta = y)$ $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{R}$-be képező függvény.

Mire is jó a feltételes várható érték? Ugyanarra mint a várható érték. A különbség annyi, hogy megfigyeltük egy ,,másik" valószínűségi változó értékét és ezt az információt szeretnénk felhasználni. Ha a két valószínűségi változó

független, akkor az „egész persze semmire sem jó”. Marad a „közönséges” várható érték.

12.1. Állítás. *(Jensen). Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex függvény, ξ véges várható értékű valószínüségi változó, és ugyanígy $f(\xi)$ is, akkor $E(f(\xi)|\eta) \leq f(E(\xi|\eta))$.*

Feladatok

1. $f_{(\xi,\eta)}(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{ha } 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$ együttes sűrűségfüggvény. Határozzuk meg a $E(\eta|\xi = x)$ feltételes várható értéket.

2. A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó értékei, illetve a hozzátartozó valószínűségek: $\mathrm{P}(\xi = 0, \eta = 0) = 0,1$, $\mathrm{P}(\xi = 0, \eta = 1) = 0,2$, $\mathrm{P}(\xi = 2, \eta = 0) = 0,3$, $\mathrm{P}(\xi = 2, \eta = 1) = 0,4$. Határozzuk meg a $E(\xi|\eta = y)$ feltételes várható értéket.

3. Legyen ξ, η két független folytonos eloszlású valószínűségi változó. Igazolja, hogy $E(\xi|\eta = y) = E(\xi)$.

4. $\mathrm{P}(\xi = i, \eta = j) = \begin{cases} \frac{3}{2^{1+i+j}}, & \text{ha } \ j \leq i (i, j \in \{1, 2, \dots\}), \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$. Határozzuk meg a $E(\eta|\xi = i)$ feltételes várható értéket.

Megoldások

1. Ha $x \notin (0,1)$, akkor $E(\eta|\xi = x) = 0$. Legyen tehát $x \in (0,1)$. $f_\xi(x) = \int_0^x 2dy = 2x$, $f_{(\eta|\xi=x)}(y) = 1/x$ hacsak $0 < y < x$, különben nulla.

   Tehát $E(\eta|\xi = x) = \int_0^1 y f_{(\eta|\xi=x)}(y)dy = \int_0^x y/x dy = x/2$.

2. Ha $y \notin \{0,1\}$ akkor nulla. $E(\xi|\eta = 0) = \sum x_i \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = 0)/\mathrm{P}(\eta = 0) = 0 \cdot 0,1/0,4 + 2 \cdot 0,3/0,4 = 1,5$, $E(\xi|\eta = 1) = \sum x_i \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = 1)/\mathrm{P}(\eta = 1) = 0 \cdot 0,2/0,6 + 2 \cdot 0,4/0,6 = 4/3$.

3. Független valószínűségi változók esetében $f(x,y) = \frac{\partial^2 F_{(\xi,\eta)}(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_\xi(x) F_\eta(y)}{\partial x \partial y} = f_\xi(x) f_\eta(y)$, ezért $f_{(\xi|\eta=y)} = f_\xi(x)$, így $E(\xi|\eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = E(\xi)$.

4. $\mathrm{P}(\xi = i) = \sum_{j=1}^i \frac{3}{2^{1+i+j}} = 3 \cdot 2^{-i-1}(1 - 2^{-i})$. $E(\eta|\xi = i) = \sum_{j=1}^i j\mathrm{P}(\eta = j|\xi = i) = \sum_{j=1}^i j\mathrm{P}(\eta = j, \xi = i)/\mathrm{P}(\xi = i) = \sum_{j=1}^i j \frac{3}{2^{1+i+j}} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^{-i-1}(1-2^{-i})} = 2 - \frac{i}{2^i - 1}$.

Irodalom

(Tartalomjegyzék)

[1] Fazekas, I., *Bevezetés a valószínűségszámításba*, KLTE, Természettudományi Kar, Debrecen, 1992.

[2] Kolmogorov, A. N. – Fomin, Sz. V., *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Typotex Kft., 2010.

[3] Nagy, M., Sztrik, J., *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika feladatgyűjtemény*, KLTE, Természettudományi Kar, Debrecen, 1991.

[4] Prékopa, A., *Valószínűségelmélet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.

[5] Rényi, A., *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

[6] Solt, Gy., *Valószínűségszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971.

[7] Szőkefalvi-Nagy, Gy., *Valós függvények és függvénysorok*, Egyetemi tankönyv. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

[8] Wintsche, G., *Valószínűségszámítás és statisztika*, ELTE TFK, Budapest, 1993.

Index

σ additív, 8
σ gyűrű, 6
(halmaz) σ algebra, 7
(halmaz) algebra, 7

additív, 8

A Bernoulli féle nagy számok törvény, 62
A geometriai valószínűségi mező, 11
A klasszikus valószínűségi mező, 11
A teljes valószínűség tétele, 15

Bayes tétele, 16
binomiális eloszlású valószínűségi változó, 47

centrális határeloszlás tétel, 67
Csebisev egyenlőtlenség, 62

diszkrét egyenletes eloszlás, 47
diszkrét eloszlás, 20

együttes sűrűségfüggvény, 26
egyenletes eloszlású az (a, b) egy intervallumon, 53
exponenciális eloszlású valószínűségi változó, 54

feltételes sűrűségfüggvény, 70
feltételes várható érték, 70
feltételes valószínűség, 14
folytonos eloszlás, 20

gyűrű, 6

halmaz részhalmazainak a halmaza, 7
hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó, 48

Index - Tárgymutató, 72
indikátor valószínűségi változó, 47

kétdimenziós diszkrét valószínűségi változó, 25
kétdimenziós valószínűségi változó, 25
Kolmogorov féle valószínűségi mező, 8
korreláció, 43

Markov egyenlőtlenség, 61

normális eloszlású valószínűségi változó, 56

peremeloszlás függvények, 26
peremsűrűség függvények, 26
Poisson eloszlású valószínűségi változó, 50

sűrűségfüggvény, 20
sztochasztikusan konvergál, 62

teljes eseményrendszer, 15

várható érték, 28
valószínűségi változó, 18
valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, 18
valószínűségi változó karakterisztikus függvénye, 65
valószínűségi változó szórása, 41
valószínűségi változók (sztochasztikusan) függetlenek, 35
valószínűségi változók kovarianciája, 41
vektor változó eloszlásfüggvénye, 25

(Tartalomjegyzék)