

Tanárképző főiskolák 2002. évi Péter Rózsa matematika versenyének feladatai

1. Hány olyan 2002-nél nem nagyobb pozitív egész n szám van, amelyre az $\frac{5n+13}{11n+20}$ tört egyszerűsíthető?

2. Adjuk össze a Pascal háromszög harmadik sorától kezdve minden sor harmadik elemének reciprokát! Konvergens-e az így kapott végtelen sor, és ha igen, mennyi az összege?

3. Adott az egységnyi sugarú k kör, valamint a k kör két egymással párhuzamos érintője e_1 és e_2 . Szerkesztünk egy olyan s_1 kört, amely kívülről érinti k -t és érinti e_1 -t is. Majd szerkesztjük meg azt az s_2 kört, amely érinti k -t e_2 -t és s_1 -t. Hogyan függ az s_2 kör sugara az s_1 kör sugarának megválasztásától?

4. Határozzuk meg a valós számokon értelmezett, valós értékű f függvény periódusát, ha

$$f(x) = \sin ax - \cos \frac{x}{a}$$

és $a \neq 0$ rögzített valós szám!

5. Az $ABCD$ négyzet belsejében P és Q olyan pontok, amelyekre $PAQ \sphericalangle = PCQ \sphericalangle = 45^\circ$. Fejezzük ki a PQ szakasz hosszát a BP és a DQ szakasz hosszával!

6. Adjuk meg azokat az x racionális számokat, amelyekre teljesül, hogy $\sqrt{x^2 - x + 1}$ racionális szám!

7. Adott 11 pozitív egész szám, amelyek egyikének sincs 30-nál nagyobb prímosztója. Bizonyítsuk be, hogy a számok közül kiválasztható néhány különböző (esetleg csak egy, esetleg az összes) úgy, hogy a kiválasztott számok szorzata négyzetszám!