

Tanárképző főiskolák 2005. évi Péter Rózsa matematika versenyének feladatai

Száz éve született PÉTER RÓZSA akadémikus (1905-1977).

1. Igazoljuk, hogy $8 \cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \operatorname{tg} 80^\circ$!
2. Egy háromszög belsejében lévő P ponton áthaladó, és a háromszög oldalával párhuzamos három egyenes a háromszöget három kisebb háromszögre és három paralelogrammára osztja. A paralelogrammák területe rendre 4, 6 és 10 területegység. Mekkora a nagyháromszög területe?
3. Hányféleképpen lehet kiválasztani a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek közül hármat úgy, hogy ne legyenek közöttük szomszédosak?
4. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 3$, egész szám, akkor

$$2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1$$

osztható 65793-mal!

5. Az ABC háromszög belsejében úgy helyezkedik el a P pont, hogy

$$\angle PAB = 30^\circ, \angle PAC = 10^\circ, \angle PBC = 20^\circ,$$

továbbá $\angle ABC = 40^\circ$. Mekkora a $\angle BPC$?

6. Mutassuk meg, hogy a $(\sqrt{37} + 6)^{1000}$ szám tizedestört alakjában a tizedesvessző után következő első 1000 számjegy 9!
7. Egy játékkockával addig dobunk, de legfeljebb százszor, amíg néhány egymás utáni dobás összege 6 vagy 7 lesz. Melyiknek nagyobb a valószínűsége?

Pécs, 2005. március 24.