# Interpoláció

Dr. Blahota István

## 1. Mi az interpoláció?

Az interpoláció egy olyan matematikai eljárás, melynek során pontokat kötünk össze egy adott függvényosztályból származó görbével.

Amennyiben a pontok valamilyen függvényhez tartoznak, az interpolációs görbe az adott függvénygörbét approximálja. Ahhoz, hogy egy függvényt közelítsünk, nyilvánvalóan információkkal kell rendelkeznünk róla. Ezen információk fajtái alapján különféle függvényközelítő eljárásokat kaphatunk. Ezek egyikének tekinthető tehát az interpoláció. Az interpolációnak számtalan gyakorlati alkalmazása van. Gyakran használják például mintavételi eljárásokból származó „szögletes" grafikonok „kisimítására". Egy ehhez hasonló technológiával javítják a felnagyított képeket, ahogy azt az 1. ábrán láthatjuk.

## 2. Általános interpoláció

### 2.1. Alapfogalmak

*Jelölés:* $\mathbb{R}$ jelentse a valós, $\mathbb{P}$ a pozitív egész és $\mathbb{N}$ a nemnegatív egész számok halmazát.

1. ábra. Kép nagyítása interpolációval (balra) és anélkül

**1. Definíció.** *Legyen* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *egy valódi intervallum. A* $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *úgynevezett alapfüggvények tetszőleges lineáris kombinációjaként előálló* $L(x)$ *függvényt az alapfüggvények általánosított polinomjának nevezzük.*

*Megjegyzés:* Mi kizárólag valós függvényekkel, illetve valós lineáris kombinációkkal fogunk foglalkozni, tehát esetünkben

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x), \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

*Megjegyzés:* A „polinom” elnevezés nyilván onnan ered, hogy a $\psi_n(x) = x^{n-1}$ választás a klasszikus polinomokat adja.

Ilyen $L(x)$ általánosított polinomokkal akarunk közelíteni egy $f(x)$ függvényt.

**2. Definíció.** *Tekintsük az* $f(x)\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvényt, amelyről annyit tudunk, hogy az* $x_1, \ldots, x_N \in [a, b]$ *különböző pontokban (az úgynevezett alappontokban) ismertek a függvény értékei. Az interpoláció során keressük azokat a* $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ *rögzített alapfüggvényekhez tartozó* $c_1, \ldots, c_n$ *valós konstansokat, melyek azt az*

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x)$$

*függvényt állítják elő, ahol*

$$L(x_i) = f(x_i), \qquad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

*Ekkor az $L(x)$ függvényt az alapfüggvények (általánosított) interpolációs polinomjának nevezzük.*

*Megjegyzés:* $L(x)$ létezése nem nyilvánvaló, ahogy az sem, hogy ha van ilyen függvény, akkor az milyen feltételekkel egyértelmű.

*Megjegyzés:* Előfordulhat, hogy nem az $f(x)$ függvény ismert, csupán különböző abcisszájú pontok adottak a síkon, melyekhez bizonyos feltételekkel görbét szeretnénk húzni. Ekkor nyugodtan használhatunk $f(x_i)$ helyett $y_i$-t, ahol $y_i$ jelöli $x_i$-hez tartozó ordinátát.

*Megjegyzés:* Az alappontok indexelése nem feltétlenül jelenti nagyság szerinti sorrendjüket is.

## 2.2. Megoldhatóság, megoldás

**3. Definíció.** *Akkor mondjuk, hogy egy $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ alapfüggvény-rendszer Csebisev-féle, ha a belőle származó tetszőleges, de nem azonosan nulla $L(x)$ általánosított polinomnak legfeljebb $n-1$ különböző zérushelye van az $[a, b]$ intervallumon.*

**1. Tétel.** *Ha egy alapfüggvény-rendszer Csebisev-féle, akkor a rendszer lineárisan független.*

*Bizonyítás.* Azt kell megmutatnunk, hogy

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x) = 0, \qquad \forall x \in [a, b]$$

esetén

$$c_1 = \dots = c_n = 0.$$

Ellenkező esetben ugyanis létezne $L(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$-re nem csupa 0 együtthatókkal, ami ellentmondana annak, hogy $L(x)$-nek legfeljebb $n-1$ különböző zérushelye van $[a, b]$-n. □

Mostantól a jegyzet hátralévő részében feltesszük, hogy az alappontok és az alaprendszer függvényeinek száma megegyezik, vagyis $N = n$.

**2. Tétel.** *Egy $f(x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényhez és tetszőleges $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ alappontokhoz pontosan akkor létezik általánosított interpolációs polinom, ha a $\psi_1, \ldots, \psi_n$ alapfüggvény-rendszer Csebisev-féle $[a,b]$-n. Ha ez a feltétel teljesül, az interpolációs polinom egyértelmű.*

*Bizonyítás.* A $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x_i) = f(x_i),\ i \in \{1, \ldots, n\}$ egyenlőségeket mátrixos alakban is felírhatjuk:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x_1) & . & . & . & \psi_n(x_1) \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ \psi_1(x_n) & . & . & . & \psi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ . \\ . \\ . \\ f(x_n) \end{pmatrix},$$

vagy még rövidebben: $\Psi \underline{c} = \underline{f}$.

Mivel a bal oldalon szereplő $\Psi$ mátrix négyzetes, a keresett együtthatókat akkor kapjuk meg egyértelműen, ha $\Psi$ determinánsa nem nulla, rövid jelöléssel $|\Psi| \neq 0$.

Megmutatjuk, hogy a $|\Psi| \neq 0$ feltétel, és az, hogy a $\psi_1, \ldots, \psi_n$ alapfüggvény-rendszer Csebisev-féle, ekvivalensek.

Tegyük fel először, hogy $|\Psi| = 0$. Ekkor a $\Psi$ mátrix oszlopai lineárisan függőek, így léteznek olyan, nem csupa nulla $d_1, \ldots, d_n$ együtthatók, melyekre $L(x_i) = \sum_{k=1}^{n} d_k \psi_k(x_i) = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén. Ez azt jelenti, hogy $L(x)$-nek legalább $n$ zérushelye van, így $\psi_1, \ldots, \psi_n$ nem Csebisev-féle $[a,b]$-n.

Másrészt ha $\psi_1, \ldots, \psi_n$ nem Csebisev-féle alapfüggvény-rendszer $[a,b]$-n, akkor van olyan $L(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x)$ függvény legalább egy nullától különböző $c_k$ együtthatóval, melynek legalább $n$ zérushelye van $[a,b]$-n. Válasszunk a zérushelyek közül $n$-et alappontnak, legyenek ezek $x_1, \ldots, x_n$. Ekkor a $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x_i) = 0,\ i \in \{1, \ldots, n\}$ egy olyan homogén lineáris egyenletrendszer, melynek van nemtriviális megoldása. Ekkor azonban $|\Psi| = 0$.

Az interpolációs polinom egyértelműsége pedig $|\Psi| \neq 0$-ból azonnal következik. $\square$

*Megjegyzés:* Vegyük észre, hogy a megoldás egyértelműsége érdekében az alappontok és az alaprendszer függvényeinek számát ugyanannak választottuk. Ha túl sok alappontot választunk az alaprendszer függvényeihez képest, lehet, hogy nem keletkezik interpoláló polinom, míg fordított esetben, ha túl kevés az alappontot, túl sok (végtelen sok) megoldást kaphatunk.

Az első szituációra példa, hogy három általános helyzetű ponton keresztül nem húzhatunk egyenest (ekkor az alaprendszer a 1 és $x$ függvényekből áll), míg a másodikra az, hogy két ponton keresztül végtelen sok parabola (az alaprendszer az 1, $x$ és $x^2$ hármas) haladhat át.

**1. Feladat.** *Legyen* $\psi_1(x) = 1,\ \psi_2(x) = x,\ \psi_3(x) = 2^x,\ \psi_4(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, *az alappontok legyenek* $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$, *továbbá ismert, hogy* $f(x_1) = 1,\ f(x_2) = -1,\ f(x_3) = 1,\ f(x_4) = 2$. *Írjuk fel az általánosított interpolációs polinom egyenletét!*

*Megoldás.* A feladat megoldásához szükséges egyenletrendszer felírásához a 2. Tétel bizonyításának első lépéseit használjuk. Mivel

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2^{-1} & \sin\left(\frac{\pi\cdot(-1)}{2}\right) \\ 1 & 0 & 2^0 & \sin\left(\frac{\pi\cdot 0}{2}\right) \\ 1 & 1 & 2^1 & \sin\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}\right) \\ 1 & 2 & 2^2 & \sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

az egyenletrendszer a következő:

$$\left.\begin{array}{lllll} c_1 & -c_2 & +\frac{1}{2}c_3 & -c_4 & = & 1 \\ c_1 & & +c_3 & & = & -1 \\ c_1 & +c_2 & +2c_3 & +c_4 & = & 1 \\ c_1 & +2c_2 & +4c_3 & & = & 2 \end{array}\right\}.$$

A kapott egyenletrendszer egyértelműen megoldható, megoldása a $c_1 = -9$, $c_2 = -\frac{21}{2}$, $c_3 = 8$, $c_4 = \frac{9}{2}$ számnégyes, vagyis a keresett általánosított polinom egyenlete:

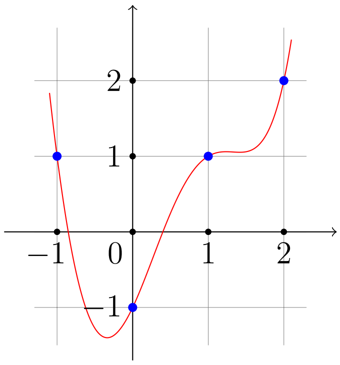
$$L(x) = -9 - \frac{21}{2}x + 8\cdot 2^x + \frac{9}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Könnyű látni, hogy $L(-1) = 1,\ L(0) = -1,\ L(1) = 1,\ L(2) = 2$, tehát az $L(x)$ függvény tényleg a kívánt tulajdonságú, ahogy az a 2. ábrán látszik is. □

# 3. Polinom interpoláció

Amint azt az 1. Feladatban láthattuk, az alapfüggvények speciális megválasztásával konkrét interpoláló függvényt kaphatunk.

Leggyakrabban klasszikus polinomokkal interpolálunk, vagyis $\psi_1(x) = 1$, $\psi_2(x) = x,\ \psi_3(x) = x^2, \ldots, \psi_n(x) = x^{n-1}$, röviden legyen $\psi_k(x) = x^{k-1}$,




2. ábra. Az $L(x) = -9 - \frac{21}{2}x + 8 \cdot 2^x + \frac{9}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ függvény

ahol $k \in \{1, \ldots, n\}$. A továbbiakban csak ezzel az esettel fogunk foglalkozni, így ha interpolációról beszélünk, akkor mostantól kezdve kizárólag polinom interpolációra gondolunk.

*Megjegyzés:* A $k = 1$ és $x = 0$ esetben előálló $0^0$ most legyen értelmezett, értéke pedig 1.

## 3.1. Unicitás és egzisztencia

**3. Tétel.** *A* $\psi_k(x) = x^{k-1}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *alapfüggvény-rendszer Csebisev-féle.*

*Bizonyítás.* Polinom interpoláció esetén az $n$ elemű alapfüggvény-rendszerhez tartozó interpolációs polinom legfeljebb $n-1$-ed fokú. Így amennyiben az nem az azonosan nulla függvény, az algebra alaptétele miatt gyökeinek száma sem lehet $n-1$-nél több. Ez éppen a bizonyítandó állítást jelenti. □

*Megjegyzés:* Ebből következik (felhasználva a 2. Tételt), hogy polinom interpoláció esetén mindig létezik interpoláló polinom, és az egyértelmű.

*Megjegyzés:* Figyeljük meg, hogy polinom interpoláció esetén a keletkező $\Psi$ mátrix – jelöljük a továbbiakban $V(x_1, \ldots, x_n)$-nel – az alábbi alakot ölti:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

**4. Definíció.** *Legyen* $x_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, \dots, n\}$. *A* $V(x_1, \dots, x_n)$ *mátrixot Vandermonde-mátrixnak nevezzük.*

**4. Tétel.** *A Vandermonde-mátrix determinánsa*

$$|V(x_1, \dots, x_n)| = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

*Bizonyítás.* A bizonyítást $n$-re vonatkozó teljes indukció szerint végezzük.

Amennyiben $n = 2$, akkor

$$|V(x_1, x_2)| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1,$$

épp amit vártunk.

Tegyük fel, hogy a Vandermonde-determináns $n-1$-re a megfelelő alakú, vagyis hogy

$$|V(x_1, \dots, x_{n-1})| = \prod_{1 \le j < i \le n-1} (x_i - x_j).$$

Számoljuk ki

$$|V(x_1, \dots, x_n)| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

értékét. Először vonjuk ki az utolsó sort az összes többi sorból. Ekkor a determináns értéke nem változik:

$$|V(x_1, \dots, x_n)| = \begin{vmatrix} 0 & x_1 - x_n & \dots & x_1^{n-1} - x_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{n-1} - x_n & \dots & x_{n-1}^{n-1} - x_n^{n-1} \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

A determinánst az első oszlop szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$|V(x_1, \dots, x_n)| = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & \dots & x_1^{n-1} - x_n^{n-1} \\ x_2 - x_n & \dots & x_2^{n-1} - x_n^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} - x_n & \dots & x_{n-1}^{n-1} - x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Az első sorból $(x_1 - x_n)$-et, a másodikból $(x_2 - x_n)$-et, és így tovább, az utolsóból $(x_{n-1} - x_n)$-et kiemelve az alábbi determináns keletkezik:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 + x_n & x_1^2 + x_1 x_n + x_n^2 & \dots & x_1^{n-2} + x_1^{n-3} x_n + \dots + x_n^{n-2} \\ 1 & x_2 + x_n & x_2^2 + x_2 x_n + x_n^2 & \dots & x_2^{n-2} + x_2^{n-3} x_n + \dots + x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} + x_n & x_{n-1}^2 + x_{n-1} x_n + x_n^2 & \dots & x_{n-1}^{n-2} + x_{n-1}^{n-3} x_n + \dots + x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Ennek pedig az utolsó oszlopából, utolsó előtti oszlopából, és így tovább egészen a másodikig, egymás után levonva az előző oszlop $x_n$-szeresét, éppen $|V(x_1, \dots, x_{n-1})|$-t kapjuk. A következő lépésben felcseréljük a zárójelben lévő kisebbítendőket és kivonandókat, majd felhasználjuk az indukciós feltételt:

$$\begin{aligned} |V(x_1, \dots, x_n)| &= (x_1 - x_n) \dots (x_{n-1} - x_n)(-1)^{n+1} |V(x_1, \dots, x_{n-1})| \\ &= (x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) |V(x_1, \dots, x_{n-1})| \\ &= (x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) \prod_{1 \le j < i \le n-1} (x_i - x_j) \\ &= \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j). \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

*Megjegyzés:* Mivel alappontjaink különbözőek, a polinom interpoláció esetén keletkező Vandermonde-mátrix determinánsa mindig különbözik nullától. Ebből is következik tehát, hogy polinom interpoláció esetén mindig létezik legfeljebb $n-1$-ed fokú interpolációs polinom, és az egyértelmű.

## 3.2. Az interpolációs polinom meghatározása

### 3.2.1. Klasszikus módszer

Az interpolációs polinomot meghatározhatjuk a kapott reguláris lineáris egyenletrendszer megoldásával. Nevezzük ezt klasszikus módszernek. Magának az egyenletrendszernek a megoldása történhet tetszőleges ismert módszer felhasználásával, például Gauss-eliminációval vagy Cramer-szabállyal.

**2. Feladat.** *Tekintsük az $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$ alappontokat, valamint tegyük fel, hogy $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$, $f(x_3) = 1$, $f(x_4) = 2$. Adjuk meg az interpolációs függvényt!*

*Megoldás.* Mivel

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & (-1)^2 & (-1)^3 \\ 1 & 0 & 0^2 & 0^3 \\ 1 & 1 & 1^2 & 1^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

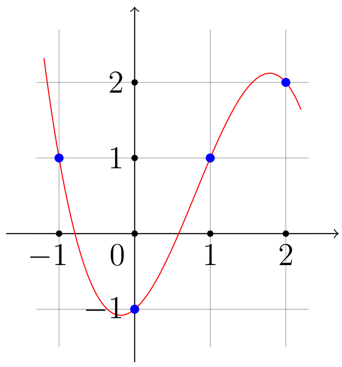
az egyenletrendszer a következő:

$$\left.\begin{array}{lllllr} c_1 & -c_2 & +c_3 & -c_4 & = & 1 \\ c_1 & & & & = & -1 \\ c_1 & +c_2 & +c_3 & +c_4 & = & 1 \\ c_1 & +2c_2 & +4c_3 & +8c_4 & = & 2 \end{array}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása $c_1 = -1,\ c_2 = \frac{5}{6},\ c_3 = 2,\ c_4 = -\frac{5}{6}$, vagyis a keresett polinom egyenlete:

$$L(x) = -1 + \frac{5}{6}x + 2x^2 - \frac{5}{6}x^3.$$

Láthatjuk, hogy $L(-1) = 1,\ L(0) = -1,\ L(1) = 1,\ L(2) = 2$, vagyis a kapott polinom tényleg rendelkezik az elvárt tulajdonságokkal, amint az a 3. ábrán látszik is. □




3. ábra. Az $L(x) = -1 + \dfrac{5}{6}x + 2x^2 - \dfrac{5}{6}x^3$ függvény

### 3.2.2. Lagrange-interpoláció

A Lagrange interpoláció segítségével más módszerrel, konstruktív eljárással készítjük el az interpolációs függvényt.

Legyenek $-\infty < a \leq x_1, \ldots, x_n \leq b < \infty$ alappontok. Első lépésben olyan $l_k(x)$ függvényeket állítunk elő, melyekre

$$l_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = x_k \\ 0 & \text{ha } x = x_i, \text{ ahol } i \in \{1, \ldots n\}, \text{ de } i \neq k. \end{cases}$$

Ilyen tulajdonságú, legfeljebb $n-1$-ed fokú polinomot kapunk a következőképpen:

$$l_k(x) = \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Könnyű látni, hogy ezek a függvények éppen a várt tulajdonságúak.

Mivel az $x_1, \ldots, x_n$ alappontokban ismertek a közelítendő $f(x)$ függvény értékei, az így definiált $l_k(x)$ függvények segítségével könnyen megkaphatjuk azt a legfeljebb $n-1$-ed fokú, $L(x)$-el jelölt polinomot, amely ugyanazokat az értékeket veszi fel az alappontokban, mint $f(x)$, ahogy azt az 5. Definícióban láthatjuk is.

**5. Definíció.** *Az*

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) l_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \left( f(x_k) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right)$$

*függvényt az $x_1, \ldots, x_n$ alappontokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinomnak nevezzük.*

*Megjegyzés:* Ha $n = 1$, akkor $L(x) = f(x_1)$.

*Megjegyzés:* Vegyük észre, hogy $n$ számú alappont esetén a Lagrange-interpolációs polinom egy legfeljebb $n-1$-ed fokú polinom, sőt ahogy az konstrukciójából látszik, meg kell hogy egyezzen a megfelelő interpolációs polinommal, hiszen az egyértelmű.

**3. Feladat.** *Tekintsük az $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$ alappontokat, valamint tegyük fel, hogy $f(x_1) = 1,\ f(x_2) = -1,\ f(x_3) = 1,\ f(x_4) = 2$. Adjuk meg a Lagrange-interpolációs polinomot!*

*Megoldás.* Írjuk fel először az $l_k(x),\ k \in \{1,2,3,4\}$ függvényeket:

$$\begin{aligned}
l_1(x) &= \frac{x(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{x(x-1)(x-2)}{6},\\
l_2(x) &= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0-(-1))(0-1)(0-2)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2},\\
l_3(x) &= \frac{(x+1)x(x-2)}{(1-(-1))(1-0)(1-2)} = -\frac{(x+1)x(x-2)}{2},\\
l_4(x) &= \frac{(x+1)x(x-1)}{(2-(-1))(2-0)(2-1)} = \frac{(x+1)x(x-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned}
L(x) &= 1\cdot\left(-\frac{x(x-1)(x-2)}{6}\right) - 1\cdot\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2}\\
&\quad +1\cdot\left(-\frac{(x+1)x(x-2)}{2}\right) + 2\cdot\frac{(x+1)x(x-1)}{6}\\
&= -1+\frac{5}{6}x+2x^2-\frac{5}{6}x^3,
\end{aligned}$$

ahogy azt vártuk is, hiszen nem kaphattunk más eredményt, mint a 3. Feladat esetén. □

### 3.2.3. Neville-féle iterált interpoláció

Az eddigiekben ismertetett módszerek közös gyengesége, hogy ha új alappontot veszünk fel, minden számolást újra kell kezdenünk, a korábbiakban keletkezett részletszámításoknak nem vesszük hasznát.

Ezt a problémát orvosolják az iterált interpolációs módszerek. A következőekben megismerkedünk egyikükkel, a Neville-féle iterált interpolációval. Hasonló módszert dolgozott ki Aitken is.

*Jelölés:* Jelölje $L_{(n_1,\dots,n_k)}(x)$ az $x_{n_1},\dots,x_{n_k}$ alappontok által generált interpolációs polinomot.

Neville módszere az alábbi azonosságon alapul.

**5. Tétel.** *Legyen* $1 \le k < n$. *Ekkor*

$$L_{(k,\dots,n)}(x) = \frac{1}{x_n - x_k}\begin{vmatrix} L_{(k,\dots,n-1)}(x) & x_k - x \\ L_{(k+1,\dots,n)}(x) & x_n - x \end{vmatrix}.$$

*Bizonyítás.* Jelöljük az egyenlőség jobb oldalán álló kifejezést $\tilde{L}_{(k,\ldots,n)}(x)$-el.
Először tegyük fel, hogy $x = x_l$, ahol $k < l < n$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{(k,\ldots,n)}(x) &= \frac{1}{x_n - x_k} \begin{vmatrix} f(x_l) & x_k - x_l \\ f(x_l) & x_n - x_l \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{x_n - x_k} f(x_l)(x_n - x_k) = f(x_l) \\
&= L(x_l).
\end{aligned}$$

Másodjára legyen $x = x_k$. Ez esetben

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{(k,\ldots,n)}(x) &= \frac{1}{x_n - x_k} \begin{vmatrix} f(x_k) & 0 \\ L_{(k+1,\ldots,n)}(x_k) & x_n - x_k \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{x_n - x_k} f(x_k)(x_n - x_k) = f(x_k) \\
&= L(x_k).
\end{aligned}$$

Hasonlóképpen, ha $x = x_n$, akkor

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{(k,\ldots,n)}(x) &= \frac{1}{x_n - x_k} \begin{vmatrix} L_{(k,\ldots,n-1)}(x_n) & x_k - x_n \\ f(x_n) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{x_n - x_k} (-f(x_n)(x_k - x_n)) = f(x_n) \\
&= L(x_n).
\end{aligned}$$

Beláttuk tehát, hogy $\tilde{L}_{(k,\ldots,n)}(x_l) = f(x_l)$, $\forall l \in \{k, \ldots, n\}$ esetén. Másrészt mivel $L_{(k,\ldots,n-1)}(x)$ és $L_{(k+1,\ldots,n)}(x)$ legfeljebb $n - k - 1$-ed fokú polinomok, ezért $\tilde{L}_{(k,\ldots,n)}(x)$ egy legfeljebb $n - k$-ad fokú polinom.

Mindezeket összegezve kapjuk, hogy $\tilde{L}_{(k,\ldots,n)}(x)$ az egyértelműség miatt nem lehet más, mint az $x_k, \ldots, x_n$ alappontokra illeszkedő interpolációs polinom, vagyis

$$\tilde{L}_{(k,\ldots,n)}(x) = L_{(k,\ldots,n)}(x).$$

Ezt akartuk bizonyítani. □

A fenti tétel felhasználásával – sorról sorra haladva, és felhasználva korábbi számításainkat – a kívánt mélységig kiszámolhatjuk az alábbi, Neville-féle táblázat adatait:

$$\begin{array}{llllll}
x_1 & x_1 - x & L_{(1)}(x) & & & \\
x_2 & x_2 - x & L_{(2)}(x) & L_{(1,2)}(x) & & \\
x_3 & x_3 - x & L_{(3)}(x) & L_{(2,3)}(x) & L_{(1,2,3)}(x) & \\
x_4 & x_4 - x & L_{(4)}(x) & L_{(3,4)}(x) & L_{(2,3,4)}(x) & L_{(1,2,3,4)}(x) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

**4. Feladat.** *Tekintsük az $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$ alappontokat, valamint tegyük fel, hogy $f(x_1) = 1,\ f(x_2) = -1,\ f(x_3) = 1,\ f(x_4) = 2$. Adjuk meg a interpolációs polinomot Neville módszerét használva!*

*Megoldás.* Töltsük ki a Neville-féle táblázat első négy sorát! A sorok kitöltésekor balról jobbra haladva használjuk fel az aktuális sor és az előző sorok elemeit is!

A első sor kitöltése triviális:

$$-1 \qquad -1 - x \qquad 1.$$

Mivel

$$\begin{aligned}
L_{(1,2)}(x) &= \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{vmatrix} L_{(1)}(x) & x_1 - x \\ L_{(2)}(x) & x_2 - x \end{vmatrix} = \frac{1}{0 - (-1)} \begin{vmatrix} 1 & -1 - x \\ -1 & 0 - x \end{vmatrix} \\
&= -1 - 2x,
\end{aligned}$$

a második sor a következőképpen alakul:

$$0 \qquad 0 - x \qquad -1 \qquad -1 - 2x.$$

Most következik $L_{(2,3)}(x)$ és $L_{(1,2,3)}(x)$:

$$\begin{aligned}
L_{(2,3)}(x) &= \frac{1}{x_3 - x_2} \begin{vmatrix} L_{(2)}(x) & x_2 - x \\ L_{(3)}(x) & x_3 - x \end{vmatrix} = \frac{1}{1 - 0} \begin{vmatrix} -1 & 0 - x \\ 1 & 1 - x \end{vmatrix} \\
&= -1 + 2x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{(1,2,3)}(x) &= \frac{1}{x_3 - x_1} \begin{vmatrix} L_{(1,2)}(x) & x_1 - x \\ L_{(2,3)}(x) & x_3 - x \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{1 - (-1)} \begin{vmatrix} -1 - 2x & -1 - x \\ -1 + 2x & 1 - x \end{vmatrix} \\
&= -1 + 2x^2,
\end{aligned}$$

ezért a harmadik sor:

$$1 \quad 1-x \quad 1 \quad -1+2x \quad -1+2x^2.$$

Hátra van $L_{(3,4)}(x)$, $L_{(2,3,4)}(x)$ és $L_{(1,2,3,4)}(x)$ kiszámolása:

$$\begin{aligned}
L_{(3,4)}(x) &= \frac{1}{x_4-x_3}\begin{vmatrix} L_{(3)}(x) & x_3-x \\ L_{(4)}(x) & x_4-x \end{vmatrix} = \frac{1}{2-1}\begin{vmatrix} 1 & 1-x \\ 2 & 2-x \end{vmatrix} \\
&= x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{(2,3,4)}(x) &= \frac{1}{x_4-x_2}\begin{vmatrix} L_{(2,3)}(x) & x_2-x \\ L_{(3,4)}(x) & x_4-x \end{vmatrix} = \frac{1}{2-0}\begin{vmatrix} -1+2x & 0-x \\ x & 2-x \end{vmatrix} \\
&= -1+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}x^2
\end{aligned}$$

és végül

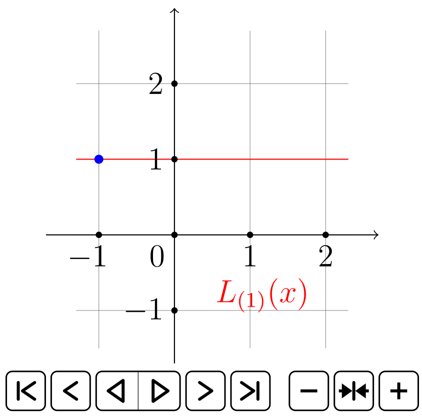
$$\begin{aligned}
L_{(1,2,3,4)}(x) &= \frac{1}{x_4-x_1}\begin{vmatrix} L_{(1,2,3)}(x) & x_1-x \\ L_{(2,3,4)}(x) & x_4-x \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2-(-1)}\begin{vmatrix} -1+2x^2 & -1-x \\ -1+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}x^2 & 2-x \end{vmatrix} \\
&= -1+\frac{5}{6}x+2x^2-\frac{5}{6}x^3.
\end{aligned}$$

Nyilván ebben az esetben is ugyanazt kaptuk, mint a 2. és a 3. Feladat esetében.

A teljesség kedvéért álljon itt a negyedik sor is:

$$2 \quad 2-x \quad 2 \quad x \quad -1+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}x^2 \quad -1+\frac{5}{6}x+2x^2-\frac{5}{6}x^3.$$

A 4. ábrán az $x_1$ pontra illeszkedő $L_{(1)}(x)$, az $x_1, x_2$ pontokra illeszkedő $L_{(1,2)}(x)$, az $x_1, x_2, x_3$ pontokra illeszkedő $L_{(1,2,3)}(x)$ és az $x_1, x_2, x_3, x_4$ pontokra illeszkedő $L_{(1,2,3,4)}(x)$ interpolációs polinomokat láthatjuk animált megjelenítésben (a nyomtatott változatban $L_{(1)}(x)$ látható). $\square$




4. ábra. Az iterált interpoláció lépései

## 3.3. Hibabecslések, konvergencia

### 3.3.1. Általános helyzetű alappontok

*Jelölés:*

$$\omega(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k).$$

**6. Tétel.** *Legyen az $f(x)$ függvény $n$-szer deriválható az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor $\forall x \in [a, b]$-hez $\exists \xi \in [a, b]$, hogy*

$$f(x) - L(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega(x).$$

*Bizonyítás.* Ha $x = x_k$ teljesül valamely $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén, akkor $f(x_k) = L(x_k)$ és $\omega(x_k) = 0$, így a bizonyítandó egyenlőség teljesül.

Tegyük fel tehát, hogy $x \in [a, b]$ nem alappont. Ekkor $\omega(x) \neq 0$, ezért definiálhatjuk az alábbi függvényt:

$$g(z) = f(z) - L(z) - \frac{\omega(z)}{\omega(x)}(f(x) - L(x)), \quad z \in [a, b],$$

amely a tétel feltételei miatt szintén $n$-szer deriválható $[a, b]$-n. Vegyük észre, hogy $g(x_1) = \dots = g(x_n) = g(x) = 0$, tehát $g(z)$-nek legalább $n+1$ különböző zérushelye van $[a, b]$-n.

A Rolle-tétel szerint deriválható függvény zérushelyei közé mindig esik olyan pont, melyben a differenciálhányados nulla. Ezt $g(z)$-re alkalmazva kapjuk, hogy $g'(z)$-nek legalább $n$, majd $g'(z)$-re alkalmazva azt kapjuk, hogy

$g''(z)$-nek legalább $n-1$, és így tovább $g^{(n)}(z)$-nek legalább egy (természetesen $x$-től függő) $\xi$ zérushelye létezik $[a,b]$-n.

Mivel $L(z)$ legfeljebb $n-1$-ed fokú, így $L^{(n)}(z)=0$. Könnyű látni továbbá, hogy $\omega(z)$ egy olyan pontosan $n$-ed fokú polinom, melynek főegyütthatója 1, így világos, hogy $\omega^{(n)}(z)=n!$. Mindezeket összegezve

$$g^{(n)}(z)=f^{(n)}(z)-\frac{n!}{\omega(x)}(f(x)-L(x)), \quad z\in[a,b]$$

adódik, ahonnan $z=\xi$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$0=g^{(n)}(\xi)=f^{(n)}(\xi)-\frac{n!}{\omega(x)}(f(x)-L(x)).$$

A kapott egyenlőséget átrendezve a bizonyítandó állításhoz jutunk. □

**5. Feladat.** *A 6. Tétel segítségével adjunk becslést a $\sqrt{x}$ függvény 2 abcisszájú helyen vett interpolációs közelítésének hibájára, ha alappontokként az $x_1=1$, $x_2=\frac{36}{25}$, $x_3=\frac{49}{25}$, $x_4=\frac{64}{25}$, $x_5=\frac{81}{25}$, $x_6=4$ helyeket választottuk!*

*Megoldás.* Mivel $(\sqrt{x})^{(6)}=-\frac{945}{64x^{\frac{11}{2}}}$, ezért $x\geq 1$ esetén $\left|(\sqrt{x})^{(6)}\right|\leq\frac{945}{64}$, valamint egyszerű számítás mutatja, hogy $\omega(2)=-\frac{12152}{390625}$. Így a 6. Tétel alapján

$$\left|\sqrt{2}-L(2)\right|\leq\frac{\frac{945}{64}}{6!}\frac{12152}{390625}=\frac{31899}{50000000}<7\cdot 10^{-4}.$$ □

*Megjegyzés:* Az alappontok választását az indokolhatja, hogy mivel azok racionális számok négyzetei, $L(2)$ a $\sqrt{2}$ irracionális szám egy racionális közelítését adja.

*Jelölés:* Legyen $L_n(x)$ a $-\infty<a\leq x_1^{(n)},\ldots,x_n^{(n)}\leq b<\infty$ alappontok sorozatára illeszkedő interpolációs függvénysorozat. Ez esetben $\omega(x)$ helyett az

$$\omega_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(x-x_k^{(n)}\right)$$

kifejezést használjuk.

*Megjegyzés:* Természetesen az olyan interpolációs függvénysorozatok értékesek számunkra, melyek esetén $\lim\limits_{n\to\infty}L_n(x)=f(x)$ teljesül az olyan $x\in[a,b]$ pontokra, melyekben az $f(x)$ értékeket becsülni szeretnénk.

A legjobb persze az lenne, ha sikerülne olyan feltételeket találni, melyekkel a konvergencia minden $x \in [a,b]$ pontra teljesül. Erről (és még többről is) szól a következő tétel, mely igen sokat vár el $f(x)$-től: feltesszük róla, hogy akárhányszor differenciálható az egész $[a,b]$-n.

**7. Tétel.** *Ha $\exists M > 0$, melyre $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M^n$ teljesül $\forall x \in [a,b]$ esetén $\forall n \in \mathbb{N}$-re, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - L_n(x)| = 0.$$

*Bizonyítás.* A 6. Tételt felhasználva kapjuk, hogy

$$|f(x) - L_n(x)| = \frac{\left|f^{(n)}(\xi)\right|}{n!}|\omega_n(x)| < \frac{M^n}{n!}(b-a)^n = \frac{c^n}{n!} \to 0.$$

A maximum nyilván létezik, hiszen az $|f(x) - L_n(x)|$ függvény az $[a,b]$ zárt intervallumon folytonos, így a konvergencia nem csak hogy pontonkénti, hanem egyenletes is. $\square$

*Megjegyzés:* A 7. Tételt tehát úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha $\exists M > 0$, melyre $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M^n$ teljesül $\forall x \in [a,b]$ esetén, akkor az $L_n(x)$ interpolációs függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f(x)$ függvényhez $[a,b]$-n.

*Megjegyzés:* Vegyük észre, hogy az alappontokról csupán annyit tettünk fel, hogy számuk a végtelenhez tart. Nem szükséges, hogy egyenletesen helyezkedjenek el, akár az $[a,b]$ intervallum kis részére is korlátozhatjuk őket. A 3.3.2. alfejezetben látni fogjuk, hogy speciális helyzetű alappontrendszerrel gyorsabban konvergáló interpolációs polinomsorozatot is kaphatunk.

**6. Feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy az interpoláló polinomsorozat egyenletesen konvergál az $f(x) = e^{2x}$ függvényhez, ha a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallumbeli alappontok száma $n \to \infty$! Mi a helyzet akkor, ha $f(x) = \frac{1}{x+1}$? Segít-e ennek eldöntésében a 7. Tétel?*

*Megoldás.* Amennyiben $f(x) = e^{2x}$, könnyű látni, hogy $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$, így ha $x \leq \frac{1}{2}$, akkor az exponenciális függvény monotonitása miatt

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 2^n e < 6^n,$$

amiből a 7. Tétel alapján következik az egyenletes konvergencia.

Ha $f(x) = \frac{1}{x+1}$, egyszerű számítás mutatja, hogy $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$, ahonnan $f^{(n)}(x)$ monotonitása miatt $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ esetén

$$\frac{n!}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}} \leq \left|f^{(n)}(x)\right|$$

következik. A 7. Tétel feltételeinek teljesüléséhez az kellene, hogy létezzen $M > 0$, melyre $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M^n$ teljesül $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$-re. Ha lenne ilyen $M$, akkor arra $\frac{n!}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}} \leq M^n$, és így $\frac{n!}{\left(\frac{3M}{2}\right)^n} \leq \frac{3}{2}$ is igaz lenne, de ez nem lehetséges minden $n$-re, hiszen $\frac{n!}{c^n} \to \infty$.

Vagyis a 7. Tételt használva nem tudunk dönteni az egyenletes konvergencia teljesülése felől.

Vegyük észre, hogy valójában az egyenletes konvergencia itt is fennáll. Ugyanis $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$ miatt

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq n!$$

is teljesül, ha $x \geq 0$. Innen pedig a 6. Tétel miatt

$$|f(x) - L_n(x)| = \frac{\left|f^{(n)}(\xi)\right|}{n!}|\omega_n(x)| \leq |\omega_n(x)| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0. \qquad \square$$

*Jelölés:* Legyen

$$h = \max_{k\in\{1,\ldots,n-1\}}(x_{k+1} - x_k),$$

illetve alappontok sorozata esetén

$$h_n = \max_{k\in\{1,\ldots,n-1\}}\left(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}\right).$$

**1. Lemma.** *Ha $x \in [a, b]$, akkor*

$$|\omega(x)| \leq \frac{h^n(n-1)!}{4}.$$

*Bizonyítás.* Ha $x = x_k$ teljesül valamely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén, akkor ez esetben a bizonyítandó egyenlőtlenség nyilván igaz, hiszen $\omega(x_k) = 0$.

Könnyű látni, hogy ha $x \in (x_k, x_{k+1}),\ k \in \{1, \ldots, n-1\}$, akkor a számtani-mértani egyenlőtlenség miatt $\sqrt{(x-x_k)(x_{k+1}-x)} \leq \frac{x_{k+1}-x_k}{2}$, ahonnan

$$|x-x_k||x-x_{k+1}| = (x-x_k)(x_{k+1}-x) \leq \left(\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)^2 \leq \frac{h^2}{4}.$$

Használjuk fel, hogy

$$|\omega(x)| = |x-x_1|\dots|x-x_n|.$$

Így ha $x \in (x_1, x_2)$, akkor

$$|\omega(x)| \leq \frac{h^2}{4} \cdot 2h \cdot 3h \cdot \ldots \cdot (n-1)h = \frac{h^n(n-1)!}{4},$$

ha $x \in (x_2, x_3)$, akkor

$$|\omega(x)| \leq 2h \cdot \frac{h^2}{4} \cdot 2h \cdot 3h \cdot \ldots \cdot (n-2)h = \frac{h^n 2!(n-2)!}{4},$$

ha $x \in (x_3, x_4)$, akkor

$$|\omega(x)| \leq 3h \cdot 2h \cdot \frac{h^2}{4} \cdot 2h \cdot 3h \cdot \ldots \cdot (n-3)h = \frac{h^n 3!(n-3)!}{4},$$

és így tovább, ha $x \in (x_{n-2}, x_{n-1})$, akkor

$$|\omega(x)| \leq (n-2)h \cdot \ldots \cdot 2h \cdot \frac{h^2}{4} \cdot 2h = \frac{h^n 2!(n-2)!}{4},$$

valamint ha $x \in (x_{n-1}, x_n)$, akkor

$$|\omega(x)| \leq (n-1)h \cdot \ldots \cdot 3h \cdot 2h \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{h^n(n-1)!}{4}.$$

Mivel $1 \leq k \leq n$ esetén $k!(n-k)! \leq (n-1)!$, láthatjuk, hogy az $|\omega(x)|$ függvényt az első és az utolsó intervallum esetén becsültük felülről a legnagyobb kifejezéssel. Ez pontosan a bizonyítandó állítást adja. □

**8. Tétel.** *Minden olyan $x \in [a, b]$-re, melyre $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M_n$ teljesül, fennáll*

$$|f(x) - L(x)| \leq \frac{M_n h^n}{4n}.$$

*Bizonyítás.* A 6. Tétel és az 1. Lemma alapján nyilvánvaló, hogy

$$|f(x) - L(x)| = \frac{\left|f^{(n)}(\xi)\right|}{n!}|\omega(x)| \leq \frac{M_n}{n!}\frac{h^n(n-1)!}{4} = \frac{M_n h^n}{4n}. \qquad \square$$

*Megjegyzés:* A 8. Tétel állítását nyilván úgy is kimondhattuk volna, hogy

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_n h_n^n}{4n}.$$

**7. Feladat.** *A* $\sin x$ *függvény értékeit akarjuk meghatározni a* $[0,1]$ *intervallumon, legalább* 6 *tizedes jegyre pontosan. E célból interpolációs polinomot illesztünk az intervallum végpontjaira, valamint azokra a pontokra, melyek az intervallum egyenlő részekre osztásakor keletkeznek. Legalább hány alappontot vegyük fel ily módon?*

*Megoldás.* Mivel a $(\sin x)^{(n)}$ függvények mindegyike a $\pm \sin x$ és a $\pm \cos x$ függvények közül kerül ki, ezért tetszőleges $x$-re $\left|(\sin x)^{(n)}\right| \leq 1$. Másrészt akkor keletkezik $n$ osztópont a kívánt módon, ha a $[0,1]$ intervallumot $n-1$ egyenlő részre osztjuk, ezért a szomszédos osztópontok távolsága $\frac{1}{n-1}$ lesz, vagyis $h_n = \frac{1}{n-1}$.

Így a 8. Tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$|\sin x - L_n(x)| \leq \frac{1 \cdot \left(\frac{1}{n-1}\right)^n}{4n} = \frac{1}{4n(n-1)^n}.$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalán keletkező sorozat szigorúan monoton csökkenő, értéke $n = 6$-ra nagyobb, mint $2 \cdot 10^{-6}$, $n = 7$-re kisebb, mint $2 \cdot 10^{-7}$, így a 8. Tétel alapján legalább 7 alappontot kell felvennünk a feladatban meghatározott módon az elvárt pontosság teljesüléséhez. $\square$

### 3.3.2. Csebisev-alappontok

**6. Definíció.** *A*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \;\; x \in [-1,1], \;\; n \in \mathbb{N}$$

*függvényt* $n$*-ed fokú Csebisev-polinomnak nevezzük.*

*Megjegyzés:* Az, hogy $T_n(x)$ polinom, és még ráadásul $n$-ed fokú, egyáltalán nem nyilvánvaló. Viszont igaz, ahogy ezt a 9. Tétel ki is mondja.

**9. Tétel.** *A $T_n(x)$ függvény n-ed fokú polinom $[-1,1]$-en, melynek főegyütthatója $n \in \mathbb{P}$ esetén $2^{n-1}$.*

*Bizonyítás.* Vezessük be a $\theta = \arccos x$ jelölést. Ekkor

$$\begin{aligned} T_{n\pm 1}(x) &= \cos((n \pm 1)\theta) = \cos(n\theta \pm \theta) = \cos(\theta)\cos(n\theta) \mp \sin(\theta)\sin(n\theta) \\ &= xT_n(x) \mp \sin(\theta)\sin(n\theta), \end{aligned}$$

ahonnan

$$T_{n-1}(x) + T_{n+1}(x) = 2xT_n(x),$$

vagyis

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad \forall x \in [-1,1]$$

esetén. Vegyük ehhez hozzá, hogy $T_0(x) = \cos 0 = 1$, valamint azt, hogy $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$, és így rekurzív előállítást kaptunk $T_n(x)$-re. A rekurzív képletből leolvasható, hogy $T_n(x)$ minden $n$-re polinom, fokszáma minden lépésben eggyel nő, és hogy $n \geq 2$ esetén minden tag főegyütthatója az előzőének 2-szerese. Ezzel beláttuk a tétel állításait. □

**7. Definíció.** *A*

$$\tilde{T}_n(x) = 2^{1-n}T_n(x), \ n \in \mathbb{P}, \ \tilde{T}_0(x) = 1, \ x \in [-1,1]$$

*függvényt* 1*-re normált n-ed fokú Csebisev-polinomnak nevezzük.*

*Megjegyzés:* Az elnevezést indokolja a 9. Tételből következő tény, miszerint a $\tilde{T}_n(x)$ függvény 1 főegyütthatós $n$-ed fokú polinom.

*Megjegyzés:* A Csebisev-polinomok különlegességét, egyben hasznosságát mutatja a következő tétel.

**10. Tétel.** *Az* 1 *főegyütthatós n-ed fokú polinomok közül az* 1*-re normált n-ed fokú Csebisev-polinom lesz az, amelynek abszolút értéke a legkisebb maximális értéket veszi fel a* $[-1,1]$ *intervallumon.*

*Bizonyítás.* A $\cos x$ függvény tulajdonságai miatt $T_n(x)$ maximuma 1, minimuma $-1$, valamint ezeket az értékeket felváltva veszi fel összesen $n+1$-szer, hiszen a $\cos(n \arccos x) = \pm 1$ egyenletek megoldásai $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$, ahol $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Nyilván $\tilde{T}_n(x)$ szélsőértékhelyei is ugyanitt vannak.

Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan $p(x)$-el jelölt 1 főegyütthatós $n$-ed fokú polinom, melyre

$$\max_{x\in[-1,1]} |p(x)| < \max_{x\in[-1,1]} \left|\tilde{T}_n(x)\right|.$$

Ekkor az $r(x) = p(x) - \tilde{T}_n(x)$ polinom legfeljebb $n-1$-ed fokú, viszont a szélsőértékhelyek közt előjelet kellene váltania, az $n+1$ hely között legalább $n$-szer. Ez pedig ellentmondás, hiszen egy legfeljebb $n-1$-ed fokú polinomnak csak akkor lehet $n-1$-nél több gyöke, ha azonosan nulla, de egy 1 főegyütthatójú polinom nem lehet ilyen. □

*Megjegyzés:* Szintén a $\cos x$ függvény tulajdonságaiból következik, hogy

$$-2^{1-n} \leq \tilde{T}_n(x) \leq 2^{1-n}.$$

*Megjegyzés:* Az $n$-ed fokú Csebisev-polinom gyökei (melyek pontosan az 1-re normált $n$-ed fokú Csebisev-polinom gyökei is) a $\cos(n \arccos x) = 0$ egyenlet megoldásai. Ekkor $n \arccos x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahonnan (figyelembe véve, hogy $0 \leq \arccos x \leq \pi$) az alábbi $n$ különböző megoldást kapjuk:

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

**8. Definíció.** *Az Csebisev-polinom gyökeit a $[-1, 1]$ intervallum Csebisev-alappontjainak nevezzük.*

*Megjegyzés:* $n$ számú Csebisev-alappontot éppen $n$-ed fokú Csebisev-polinomból kapunk.

**11. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M_n$ teljesül $\forall x \in [-1, 1]$ esetén. Ha az interpoláció alappontjai Csebisev-félék, akkor $\forall x \in [-1, 1]$-re*

$$|f(x) - L(x)| \leq \frac{M_n}{2^{n-1} n!}.$$

*Bizonyítás.* Legyenek az interpoláció alappontjai Csebisev-félék. Ebben az esetben $\omega(x) = \tilde{T}_n(x)$, hiszen azonosak a gyökeik és mindketten 1 főegyütthatós, pontosan $n$-ed fokú polinomok. Mivel $\left|\tilde{T}_n(x)\right| \leq 2^{1-n}$, a 6. Tételt felhasználva

$$|f(x) - L(x)| = \frac{\left|f^{(n)}(\xi)\right|}{n!} |\omega(x)| \leq \frac{M_n}{2^{n-1} n!}$$

teljesül $\forall x \in [-1, 1]$-ra. □

*Megjegyzés:* A Csebisev-alappontok jelentőségét az adja, hogy (amint az a 10. Tételből látszik) $\max\limits_{x\in[a,b]}|\omega(x)|$ velük lesz a legkisebb, ezért velük érhető el $|f(x)-L(x)|$ egyenletes közelítésének legjobb becslése. Tehát amennyiben lehetőségünk van rá, érdemes az alappontokat Csebisev-féléknek választani, nyilván $n$ alapponthoz az $n$-ed fokú Csebisev-polinom gyökeit.

*Megjegyzés:* Amennyiben a $[-1,1]$ intervallum helyett tetszőleges $[a,b]$ valódi intervallumon interpolálunk, alkalmazzuk a Csebisev-alappontokon ugyanazt a lineáris transzformációt, ami segítségével $[-1,1]$-ből $[a,b]$-t kapjuk. Az így kapott alappontok fogják $[a,b]$-n betölteni a Csebisev-alappontok szerepét.

Első lépésben a 2 hosszúságú $[-1,1]$ intervallumot növeljük $b-a$ hosszúságúra. Ekkor a $[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}]$ intervallum keletkezik, ami már a megfelelő hosszú, de még el kell tolni úgy, hogy alsó végpontja $a$-ban legyen, vagyis az intervallum mindkét végpontjához adjunk $a-\left(-\frac{b-a}{2}\right)$-t. Ugyanezt a transzformációt a Csebisev-alappontokra alkalmazva kapjuk az $[a,b]$ intervallumhoz tartozó Csebisev-alappontokat:

$$x_k\frac{b-a}{2}+a-\left(-\frac{b-a}{2}\right)=x_k\frac{b-a}{2}+\frac{a+b}{2},$$

ahol $k\in\{1,\ldots,n\}$, valamint $x_k$-val a $[-1,1]$ intervallum Csebisev-alappontjait jelöltük.

Mindezek alapján indokolt a 9. Definíció.

**9. Definíció.** *Az*

$$\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},\quad k\in\{1,\ldots,n\}$$

*pontokat az $[a,b]$ intervallum Csebisev-alappontjainak nevezzük.*

**12. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M_n$ teljesül $\forall x\in[a,b]$ esetén. Ha az interpoláció alappontjai Csebisev-félék $[a,b]$-n, akkor $\forall x\in[a,b]$-re*

$$|f(x)-L(x)|\le\frac{M_n(b-a)^n}{2^{2n-1}n!}.$$

*Bizonyítás.* Jelölje $x_1,\ldots,x_n$ a $[-1,1]$ intervallum Csebisev-alappontjait, továbbá $\omega_{[-1,1]}(x)$ a $[-1,1]$, míg $\omega_{[a,b]}(x)$ az $[a,b]$ intervallum Csebisev-alappontjaiból generált $\omega(x)$ függvényt. Ekkor

$$\begin{aligned}\omega_{[a,b]}(x) &= \prod_{k=1}^{n}\left(x-\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}x_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{2x-a-b}{b-a}-x_k\right)\frac{b-a}{2}\right)\\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^n\omega_{[-1,1]}\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right),\end{aligned}$$

ahonnan $\left|\omega_{[-1,1]}(x)\right| = \left|\tilde{T}_n(x)\right| \le 2^{1-n}$ miatt következik

$$\max_{x\in[a,b]}\left|\omega_{[a,b]}(x)\right| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n\max_{x\in[-1,1]}\left|\omega_{[-1,1]}(x)\right| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^n 2^{1-n}.$$

Végül a 6. Tétel miatt

$$|f(x)-L(x)| = \frac{\left|f^{(n)}(\xi)\right|}{n!}\left|\omega_{[a,b]}(x)\right| \le \frac{M_n(b-a)^n}{2^{2n-1}n!}$$

teljesül $\forall x\in[a,b]$-re. □

**8. Feladat.** *Oldjuk meg a 7. Feladatot Csebisev-alappontokkal! Tapasztalunk-e változást az eredményben?*

*Megoldás.* Ez esetben is felhasználhatjuk, hogy $\left|(\sin x)^{(n)}\right| \le 1$. A 12. Tétel miatt

$$|\sin x - L_n(x)| \le \frac{M_n(b-a)^n}{2^{2n-1}n!} \le \frac{1}{2^{2n-1}n!}.$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalán keletkező sorozat szigorúan monoton csökkenő, értéke $n=5$-re nagyobb, mint $10^{-5}$, $n=6$-ra kisebb, mint $7\cdot 10^{-7}$, így a 12. Tétel alapján legalább 6 Csebisev-alappontot (vagyis a 6-od fokú Csebisev-polinom gyökeit) kell felvennünk az elvárt pontosság teljesüléséhez.

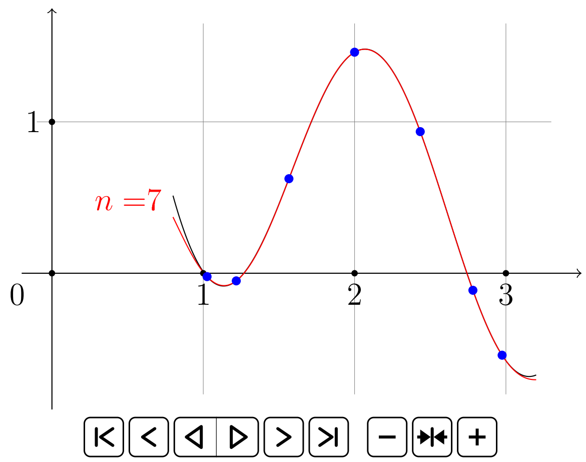
Vagyis Csebisev-alappontokat használva eggyel kevesebb alappont elegendő a feladat feltételeinek teljesüléséhet, mint abban az esetben, amikor alappontjainkat a vizsgált intervallumot egyenlő részekre osztva kaptuk. □

**9. Feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy az interpoláló polinomsorozat egyenletesen konvergál az $f(x)=\frac{1}{x}+\cos(3x)$ függvényhez, amennyiben az $[1,3]$ intervallum Csebisev-alappontjainak száma $n\to\infty$! Segít-e a bizonyításban a 7. Tétel?*

*Megoldás.* Mivel $f^{(n)}(x)$ a $-\frac{n!}{x^{n+1}} \pm 3^n\sin(3x)$ és az $\frac{n!}{x^{n+1}} \pm 3^n\cos(3x)$ függvények valamelyike, ezért $\left|f^{(n)}(x)\right| \le n!+3^n = M_n$, ha $x\ge 1$. Így a 12. Tétel alapján

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{(n! + 3^n)2^n}{2^{2n-1}n!} = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n}{n!} \to 0,$$

ami a polinomsorozat egyenletesen konvergenciáját jelenti. Illusztrációul tekintsük az 5. ábrát!




5. ábra. Az $f(x) = \frac{1}{x} + \cos(3x)$ függvényhez tartozó, az $[1, 3]$ intervallum Csebisev-alappontjai és a rájuk illeszkedő interpolációs polinomsorozat

Mivel $f^{(4n+2)}(1) = (4n+2)! - 3^{4n+2}\cos(3) \geq (4n+2)!$, ezért a 7. Tétel feltétele, vagyis $f^{(n)}(x) \leq M^n$, $\forall x \in [1, 3]$ esetén nem teljesülhet, így a 7. Tétel ennél a feladatnál nem használható. $\square$

# Hivatkozások

[1] Móricz Ferenc: Numerikus analízis I-II. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1993.

[2] Szidarovszky Ferenc: Bevezetés a numerikus módszerekbe. Közgazdasági és Jogi könyvkiadó, Budapest, 1974.

# Tartalomjegyzék