

Numerikus analízis

előadásvázlat

Dr. Blahota István

Nyíregyházi Egyetem

2026. február 13.

A hibaszámítás általános elmélete

Legyen x a pontos, a a közelítő érték. Jelölés: $a \approx x$.

Ha $a < x$, alsó közelítő értékről, $x < a$ esetén felső közelítő értékről beszélünk. Például $3,141 < \pi < 3,142$.

A hibaszámítás általános elmélete

Legyen x a pontos, a a közelítő érték. Jelölés: $a \approx x$.

Ha $a < x$, alsó közelítő értékről, $x < a$ esetén felső közelítő értékről beszélünk. Például $3,141 < \pi < 3,142$.

Közelítés abszolút hibája

$$\Delta = |x - a|$$

A hibaszámítás általános elmélete

Legyen x a pontos, a a közelítő érték. Jelölés: $a \approx x$.

Ha $a < x$, alsó közelítő értékről, $x < a$ esetén felső közelítő értékről beszélünk. Például $3,141 < \pi < 3,142$.

Közelítés abszolút hibája

$$\Delta = |x - a|$$

Abszolút hibakorlát

$$\Delta_a \geq \Delta$$

A hibaszámítás általános elmélete

Legyen x a pontos, a a közelítő érték. Jelölés: $a \approx x$.

Ha $a < x$, alsó közelítő értékről, $x < a$ esetén felső közelítő értékről beszélünk. Például $3,141 < \pi < 3,142$.

Közelítés abszolút hibája

$$\Delta = |x - a|$$

Abszolút hibakorlát

$$\Delta_a \geq \Delta$$

Vagyis $a - \Delta_a \leq x \leq a + \Delta_a$.

A hibaszámítás általános elmélete

Legyen x a pontos, a a közelítő érték. Jelölés: $a \approx x$.

Ha $a < x$, alsó közelítő értékről, $x < a$ esetén felső közelítő értékről beszélünk. Például $3,141 < \pi < 3,142$.

Közelítés abszolút hibája

$$\Delta = |x - a|$$

Abszolút hibakorlát

$$\Delta_a \geq \Delta$$

Vagyis $a - \Delta_a \leq x \leq a + \Delta_a$.

Relatív hiba (és a relatív hibakorlát)

$$\delta = \frac{\Delta}{|x|} \leq \frac{\Delta_a}{|x|} \approx \frac{\Delta_a}{|a|} = \delta_a.$$

A hibaszámítás általános elmélete

Legyen x a pontos, a a közelítő érték. Jelölés: $a \approx x$.

Ha $a < x$, alsó közelítő értékről, $x < a$ esetén felső közelítő értékről beszélünk. Például $3,141 < \pi < 3,142$.

Közelítés abszolút hibája

$$\Delta = |x - a|$$

Abszolút hibakorlát

$$\Delta_a \geq \Delta$$

Vagyis $a - \Delta_a \leq x \leq a + \Delta_a$.

Relatív hiba (és a relatív hibakorlát)

$$\delta = \frac{\Delta}{|x|} \leq \frac{\Delta_a}{|x|} \approx \frac{\Delta_a}{|a|} = \delta_a.$$

Függvénysorozat, függvény sor, konvergenciatartomány, hatványsor, konvergenciasugár.

Taylor-polinom

$$T_n(x, a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Függvénysorozat, függvény sor, konvergenciatartomány, hatványsor, konvergenciasugár.

Taylor-polinom

$$T_n(x, a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Taylor-sor. Maclaurin-polinom, -sor ($a = 0$).

Függvénysorozat, függvény-sor, konvergenciatartomány, hatványsor, konvergenciasugár.

Taylor-polinom

$$T_n(x, a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Taylor-sor. Maclaurin-polinom, -sor ($a = 0$).

Lagrange-féle maradéktag

$$\begin{aligned} f(x) - T_n(x, a) &= L_n(x, a) = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}, \quad \min(a, x) \leq \xi \leq \max(a, x) \end{aligned}$$

Függvénysorozat, függvénysor, konvergenciatartomány, hatványsor, konvergenciasugár.

Taylor-polinom

$$T_n(x, a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Taylor-sor. Maclaurin-polinom, -sor ($a = 0$).

Lagrange-féle maradéktag

$$\begin{aligned} f(x) - T_n(x, a) &= L_n(x, a) = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}, \quad \min(a, x) \leq \xi \leq \max(a, x) \end{aligned}$$

Polinomok, trigonometrikus, exponenciális és logaritmikus függvények közelítése.

Függvénysorozat, függvénysor, konvergenciatartomány, hatványsor, konvergenciasugár.

Taylor-polinom

$$T_n(x, a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

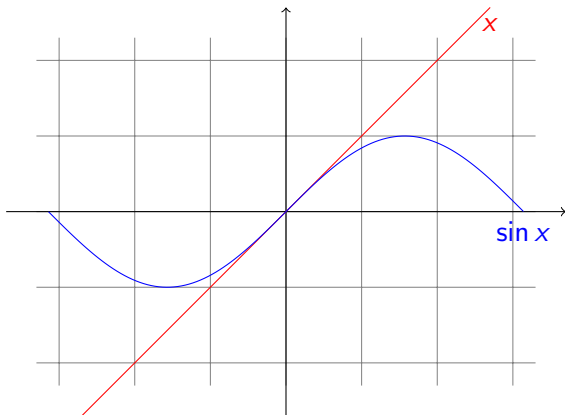
Taylor-sor. Maclaurin-polinom, -sor ($a = 0$).

Lagrange-féle maradéktag

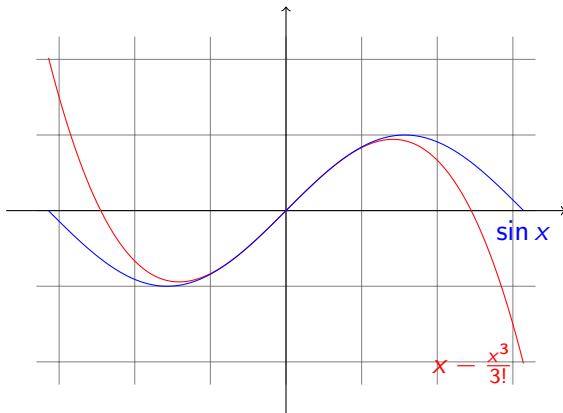
$$\begin{aligned} f(x) - T_n(x, a) &= L_n(x, a) = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}, \quad \min(a, x) \leq \xi \leq \max(a, x) \end{aligned}$$

Polinomok, trigonometrikus, exponenciális és logaritmikus függvények közelítése.

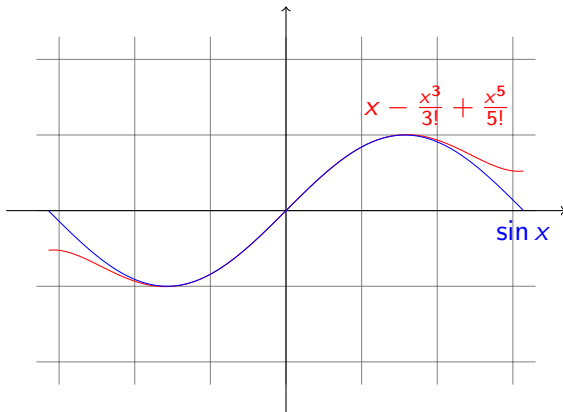
A szinusz és Maclaurin-polinomjai:



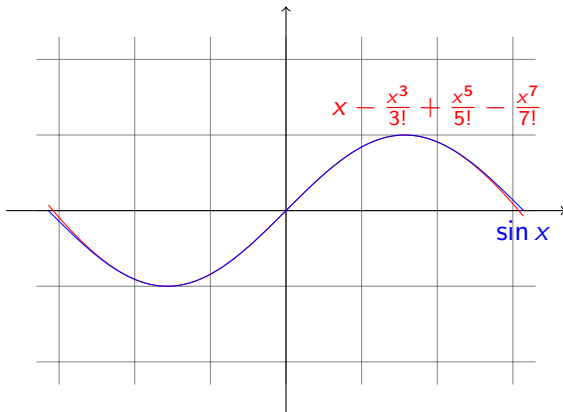
A szinusz és Maclaurin-polinomjai:



A szinusz és Maclaurin-polinomjai:

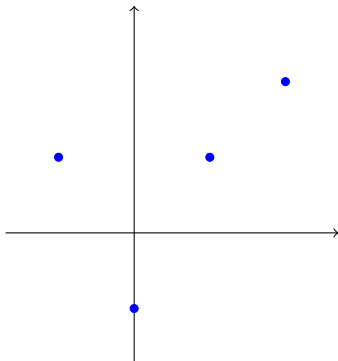


A szinusz és Maclaurin-polinomjai:



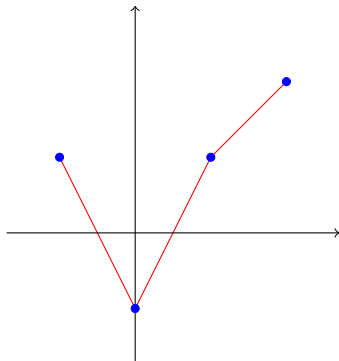
Mi az interpoláció?

Az interpoláció egy olyan eljárás, melynek során pontokat kötünk össze egy adott függvényosztályból származó görbével.



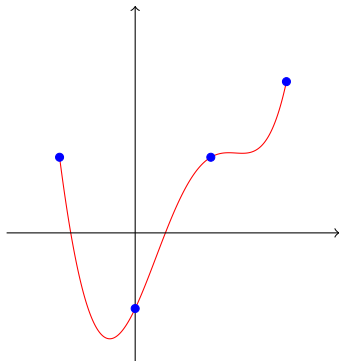
Mi az interpoláció?

Az interpoláció egy olyan eljárás, melynek során pontokat kötünk össze egy adott függvényosztályból származó görbével.



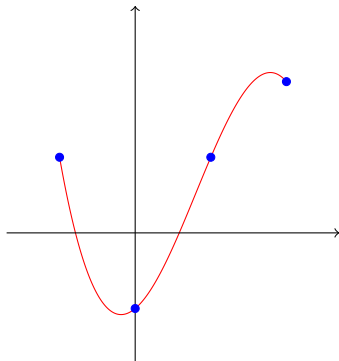
Mi az interpoláció?

Az interpoláció egy olyan eljárás, melynek során pontokat kötünk össze egy adott függvényosztályból származó görbével.



Mi az interpoláció?

Az interpoláció egy olyan eljárás, melynek során pontokat kötünk össze egy adott függvényosztályból származó görbével.



Mi az interpoláció?

Gyakran használják például „szögletes” grafikonok „kisimítására”.



Kép nagyítása interpolációval (balra) és anélkül

Adottak a $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ún. alapfüggvények.

Alapfüggvények interpolációs polinomja

Ismerjük $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ értékeit az $x_1, \dots, x_N \in [a, b]$ különböző helyeken, úgynevezett alappontokban. Keressük az $c_1, \dots, c_n$ konstansokat, melyek azt az

$$L(x) = \sum_{k=1}^n c_k \psi_k(x)$$

általánosított polinomot állítják elő, melyre

$$L(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Ekkor $L(x)$ függvényt az alapfüggvények interpolációs polinomjának nevezzük.

Adottak a $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ún. alapfüggvények.

Alapfüggvények interpolációs polinomja

Ismerjük $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ értékeit az $x_1, \dots, x_N \in [a, b]$ különböző helyeken, úgynevezett alappontokban. Keressük az $c_1, \dots, c_n$ konstansokat, melyek azt az

$$L(x) = \sum_{k=1}^n c_k \psi_k(x)$$

általánosított polinomot állítják elő, melyre

$$L(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Ekkor $L(x)$ függvényt az alapfüggvények interpolációs polinomjának nevezzük.

A

$$\sum_{k=1}^n c_k \psi_k(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

egyenlőségeket mátrixos alakban is felírhatjuk:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & \psi_n(x_1) \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \psi_1(x_N) & \cdot & \cdot & \cdot & \psi_n(x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

Az n és N viszonya.

A

$$\sum_{k=1}^n c_k \psi_k(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

egyenlőségeket mátrixos alakban is felírhatjuk:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & \psi_n(x_1) \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \psi_1(x_N) & \cdot & \cdot & \cdot & \psi_n(x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

Az n és N viszonya. Mostantól legyen $n = N$.

A

$$\sum_{k=1}^n c_k \psi_k(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

egyenlőségeket mátrixos alakban is felírhatjuk:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & \psi_n(x_1) \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \psi_1(x_N) & \cdot & \cdot & \cdot & \psi_n(x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

Az n és N viszonya. Mostantól legyen $n = N$.

Csebisev-féle alapfüggvény-rendszer

Akkor mondjuk, hogy egy $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ alapfüggvény-rendszer Csebisev-féle, ha a belőle származó tetszőleges, de nem azonosan nulla $L(x)$ általánosított polinomnak legfeljebb $n - 1$ különböző zérushelye van az $[a, b]$ intervallumon.

Csebisev-rendszer szükséges feltétele

Ahhoz, hogy egy alapfüggvény-rendszer Csebisev-féle legyen, szükséges feltétel annak lineáris függetlensége.

Csebisev-féle alapfüggvény-rendszer

Akkor mondjuk, hogy egy $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ alapfüggvény-rendszer Csebisev-féle, ha a belőle származó tetszőleges, de nem azonosan nulla $L(x)$ általánosított polinomnak legfeljebb $n - 1$ különböző zérushelye van az $[a, b]$ intervallumon.

Csebisev-rendszer szükséges feltétele

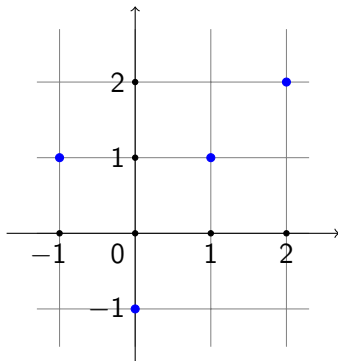
Ahhoz, hogy egy alapfüggvény-rendszer Csebisev-féle legyen, szükséges feltétel annak lineáris függetlensége.

Interpolációs polinom létezése és egyértelműsége

Ahhoz, hogy az $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és az $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ alappontok tetszőleges választása esetén létezzen általánosított interpolációs polinom, szükséges és elegendő, hogy a $\psi_1, \dots, \psi_n$ alappfüggvény-rendszer Csebisev-féle legyen $[a, b]$ -n. Ha ez a feltétel teljesül, az interpolációs polinom egyértelmű.

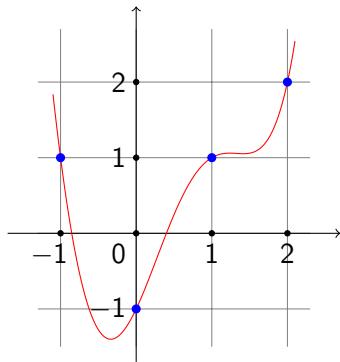
$$\psi_1(x) = 1, \psi_2(x) = x, \psi_3(x) = 2^x, \psi_4(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$f(-1) = 1, f(0) = -1, f(1) = 1, f(2) = 2$$



$$\psi_1(x) = 1, \psi_2(x) = x, \psi_3(x) = 2^x, \psi_4(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$f(-1) = 1, f(0) = -1, f(1) = 1, f(2) = 2$$



$$L(x) = -9 - \frac{21}{2}x + 8 \cdot 2^x + \frac{9}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Polinom interpoláció alapfüggvényei

$$\psi_i(x) = x^{i-1}, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{most } 0^0 = 1)$$

Vandermonde-mátrix

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & . & . & . & x_1^{n-1} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & . & . & . & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Polinom interpoláció alapfüggvényei

$$\psi_i(x) = x^{i-1}, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{most } 0^0 = 1)$$

Vandermonde-mátrix

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & . & . & . & x_1^{n-1} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & . & . & . & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

A Vandermonde-mátrix determinánsa

$$|V| = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

Így alappontokhoz tartozó Vandermonde-determináns nullától különböző.

A Vandermonde-mátrix determinánsa

$$|V| = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

Így alappontokhoz tartozó Vandermonde-determináns nullától különböző.

Unicitás és egzisztencia

Polinom interpoláció esetén – n alappontot véve – mindig létezik legfeljebb $n - 1$ -edfokú interpolációs polinom, és az egyértelmű.

A Vandermonde-mátrix determinánsa

$$|V| = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

Így alappontokhoz tartozó Vandermonde-determináns nullától különböző.

Unicitás és egzisztencia

Polinom interpoláció esetén – n alappontot véve – mindig létezik legfeljebb $n - 1$ -edfokú interpolációs polinom, és az egyértelmű.

Az alrendszer Csebisev-féle.

A Vandermonde-mátrix determinánsa

$$|V| = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

Így alappontokhoz tartozó Vandermonde-determináns nullától különböző.

Unicitás és egzisztencia

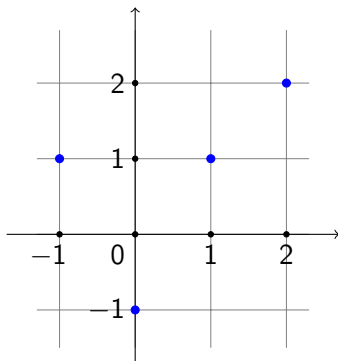
Polinom interpoláció esetén – n alappontot véve – mindig létezik legfeljebb $n - 1$ -edfokú interpolációs polinom, és az egyértelmű.

Az alrendszer Csebisev-féle.

Példa polinom interpolációra

$$\psi_1(x) = 1, \psi_2(x) = x, \psi_3(x) = x^2, \psi_4(x) = x^3$$

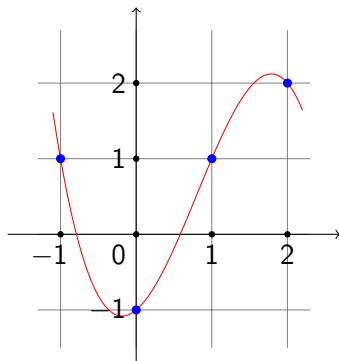
$$f(-1) = 1, f(0) = -1, f(1) = 1, f(2) = 2$$



Példa polinom interpolációra

$$\psi_1(x) = 1, \psi_2(x) = x, \psi_3(x) = x^2, \psi_4(x) = x^3$$

$$f(-1) = 1, f(0) = -1, f(1) = 1, f(2) = 2$$



$$L(x) = -1 + \frac{5}{6}x + 2x^2 - \frac{5}{6}x^3$$

Egyik megoldási lehetőség: klasszikus módszer.

Konstruktív módszer: előállítjuk azon $l_i(x)$ függvényeket, melyekre

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = i \\ 0 & \text{ha } k \neq i. \end{cases}$$

Egyik megoldási lehetőség: klasszikus módszer.

Konstruktív módszer: előállítjuk azon $l_i(x)$ függvényeket, melyekre

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = i \\ 0 & \text{ha } k \neq i. \end{cases}$$

Ilyen, $n - 1$ -edfokú polinomot kapunk így:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Egyik megoldási lehetőség: klasszikus módszer.

Konstruktív módszer: előállítjuk azon $l_i(x)$ függvényeket, melyekre

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = i \\ 0 & \text{ha } k \neq i. \end{cases}$$

Ilyen, $n - 1$ -edfokú polinomot kapunk így:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

A Lagrange-interpolációs polinom

$$L(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=1}^n \left(f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Egyik megoldási lehetőség: klasszikus módszer.

Konstruktív módszer: előállítjuk azon $l_i(x)$ függvényeket, melyekre

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = i \\ 0 & \text{ha } k \neq i. \end{cases}$$

Ilyen, $n - 1$ -edfokú polinomot kapunk így:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

A Lagrange-interpolációs polinom

$$L(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=1}^n \left(f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Jelölje $L_{(k,\dots,n)}(x)$ az $x_k, \dots, x_n$, $1 \leq k \leq n$ alappontok által generált Lagrange-interpolációs polinomot ($L_{(j)}(x) = f(x_j)$, $k \leq j \leq n$).

Neville-féle iterált interpoláció tétele

Ha $1 \leq k < n$, akkor

$$L_{(k,\dots,n)}(x) = \frac{1}{x_n - x_k} \begin{vmatrix} L_{(k,\dots,n-1)}(x) & x_k - x \\ L_{(k+1,\dots,n)}(x) & x_n - x \end{vmatrix}.$$

Polinom interpoláció megoldása

Jelölje $L_{(k,\dots,n)}(x)$ az $x_k, \dots, x_n$, $1 \leq k \leq n$ alappontok által generált Lagrange-interpolációs polinomot ($L_{(j)}(x) = f(x_j)$, $k \leq j \leq n$).

Neville-féle iterált interpoláció tétele

Ha $1 \leq k < n$, akkor

$$L_{(k,\dots,n)}(x) = \frac{1}{x_n - x_k} \begin{vmatrix} L_{(k,\dots,n-1)}(x) & x_k - x \\ L_{(k+1,\dots,n)}(x) & x_n - x \end{vmatrix}.$$

Módszer

x_1	$x_1 - x$	$L_{(1)}$			
x_2	$x_2 - x$	$L_{(2)}$	$L_{(1,2)}$		
x_3	$x_3 - x$	$L_{(3)}$	$L_{(2,3)}$	$L_{(1,2,3)}$	
x_4	$x_4 - x$	$L_{(4)}$	$L_{(3,4)}$	$L_{(2,3,4)}$	$L_{(1,2,3,4)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Polinom interpoláció megoldása

Jelölje $L_{(k,\dots,n)}(x)$ az $x_k, \dots, x_n$, $1 \leq k \leq n$ alappontok által generált Lagrange-interpolációs polinomot ($L_{(j)}(x) = f(x_j)$, $k \leq j \leq n$).

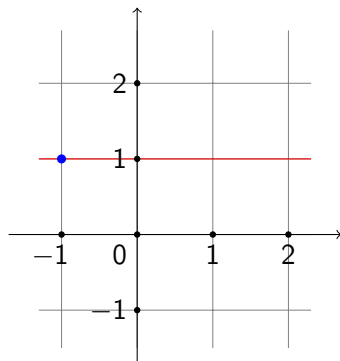
Neville-féle iterált interpoláció tétele

Ha $1 \leq k < n$, akkor

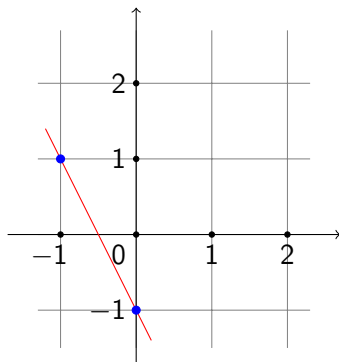
$$L_{(k,\dots,n)}(x) = \frac{1}{x_n - x_k} \begin{vmatrix} L_{(k,\dots,n-1)}(x) & x_k - x \\ L_{(k+1,\dots,n)}(x) & x_n - x \end{vmatrix}.$$

Módszer

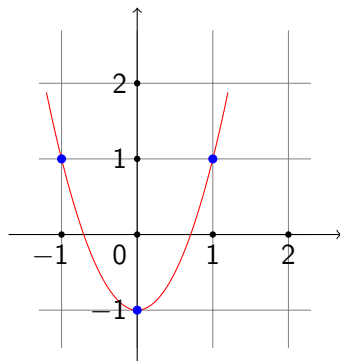
x_1	$x_1 - x$	$L_{(1)}$			
x_2	$x_2 - x$	$L_{(2)}$	$L_{(1,2)}$		
x_3	$x_3 - x$	$L_{(3)}$	$L_{(2,3)}$	$L_{(1,2,3)}$	
x_4	$x_4 - x$	$L_{(4)}$	$L_{(3,4)}$	$L_{(2,3,4)}$	$L_{(1,2,3,4)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$



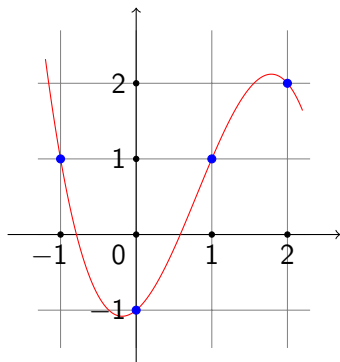
$$L_{(1)}(x) = 1$$



$$L_{(1,2)}(x) = -1 - 2x$$



$$L_{(1,2,3)}(x) = -1 + 2x^2$$



$$L_{(1,2,3,4)}(x) = -1 + \frac{5}{6}x + 2x^2 - \frac{5}{6}x^3$$

Tekintsük az $x_1, \dots, x_n$ alappontokat. Jelölés:

$$\omega(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k).$$

A polinom interpoláció hibabecslése I.

Legyen az f függvény n -szer differenciálható az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor $\forall x \in [a, b]$ -hez $\exists \xi \in [a, b]$, hogy

$$f(x) - L(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega(x).$$

Tekintsük az $x_1, \dots, x_n$ alappontokat. Jelölés:

$$\omega(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k).$$

A polinom interpoláció hibabecslése I.

Legyen az f függvény n -szer differenciálható az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor $\forall x \in [a, b]$ -hez $\exists \xi \in [a, b]$, hogy

$$f(x) - L(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega(x).$$

Tekintsük az $x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ alappontsorozatot. Jelölés:

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k^{(n)}).$$

Egyenletes konvergencia

Legyen $L_n(x)$ az $a \leq x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} \leq b$ alappontrendszerre illeszkedő polinom interpolációs függvényt sorozat. Ha $\exists M > 0$, melyre $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ teljesül $\forall x \in [a, b]$ esetén, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - L_n(x)| = 0.$$

Legyen

$$h = \max_{k=1,\dots,n-1} (x_{k+1} - x_k).$$

A polinom interpoláció hibabecslése II.

Minden olyan $x \in [a, b]$ -re, melyre $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$ teljesül, fennáll

$$|f(x) - L(x)| \leq \frac{M_n h^n}{4n}.$$

Legyen

$$h = \max_{k=1, \dots, n-1} (x_{k+1} - x_k).$$

A polinom interpoláció hibabecslése II.

Minden olyan $x \in [a, b]$ -re, melyre $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$ teljesül, fennáll

$$|f(x) - L(x)| \leq \frac{M_n h^n}{4n}.$$

n -ed fokú Csebisev-polinom

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}$$

A $T_n(x)$ függvény n -ed fokú polinom $[-1, 1]$ -en, melynek főegyütthatója $n \in \mathbb{P}$ esetén 2^{n-1} .

n -ed fokú Csebisev-polinom

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}$$

A $T_n(x)$ függvény n -ed fokú polinom $[-1, 1]$ -en, melynek főegyütthatója $n \in \mathbb{P}$ esetén 2^{n-1} .

1-re normált n -ed fokú Csebisev-polinom

$$\tilde{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x), \quad n \in \mathbb{P}, \quad \tilde{T}_0(x) = 1, \quad x \in [-1, 1]$$

n -ed fokú Csebisev-polinom

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}$$

A $T_n(x)$ függvény n -ed fokú polinom $[-1, 1]$ -en, melynek főegyütthatója $n \in \mathbb{P}$ esetén 2^{n-1} .

1-re normált n -ed fokú Csebisev-polinom

$$\tilde{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x), \quad n \in \mathbb{P}, \quad \tilde{T}_0(x) = 1, \quad x \in [-1, 1]$$

Csebisev-polinom különlegessége

Az 1 főegyütthatós n -ed fokú polinomok közül az 1-re normált n -ed fokú Csebisev-polinom lesz az, amelynek abszolút értéke a legkisebb maximális értéket veszi fel a $[-1, 1]$ intervallumon.

n -ed fokú Csebisev-polinom

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}$$

A $T_n(x)$ függvény n -ed fokú polinom $[-1, 1]$ -en, melynek főegyütthatója $n \in \mathbb{P}$ esetén 2^{n-1} .

1-re normált n -ed fokú Csebisev-polinom

$$\tilde{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x), \quad n \in \mathbb{P}, \quad \tilde{T}_0(x) = 1, \quad x \in [-1, 1]$$

Csebisev-polinom különlegessége

Az 1 főegyütthatós n -ed fokú polinomok közül az 1-re normált n -ed fokú Csebisev-polinom lesz az, amelynek abszolút értéke a legkisebb maximális értéket veszi fel a $[-1, 1]$ intervallumon.

Csebisev-polinom gyökei: Csebisev-alappontok (a $[-1, 1]$ -en)

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Hibabecslés Csebisev-alappontokkal $[-1, 1]$ -en

Tegyük fel, hogy $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$ teljesül $\forall x \in [-1, 1]$ esetén. Ha az interpoláció alappontjai Csebisev-félék $[-1, 1]$ -en, akkor $\forall x \in [-1, 1]$ -ra

$$|f(x) - L(x)| \leq \frac{M_n}{2^{n-1}n!}.$$

Csebisev-polinom gyökei: Csebisev-alappontok (a $[-1, 1]$ -en)

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Hibabecslés Csebisev-alappontokkal $[-1, 1]$ -en

Tegyük fel, hogy $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$ teljesül $\forall x \in [-1, 1]$ esetén. Ha az interpoláció alappontjai Csebisev-félék $[-1, 1]$ -en, akkor $\forall x \in [-1, 1]$ -ra

$$|f(x) - L(x)| \leq \frac{M_n}{2^{n-1}n!}.$$

Ha a $[-1, 1]$ intervallum helyett tetszőleges $[a, b]$ intervallumot veszünk, a Csebisev-alappontok $[a, b]$ -n

$$\tilde{x}_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Hibabecslés Csebisev-alappontokkal $[a, b]$ -n

Tegyük fel, hogy $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$ teljesül $\forall x \in [a, b]$ esetén. Ha az interpoláció alappontjai Csebisev-félék $[a, b]$ -n, akkor $\forall x \in [a, b]$ -re

$$|f(x) - L(x)| \leq \frac{M_n(b-a)^n}{2^{2n-1}n!}.$$

Hibabecslés Csebisev-alappontokkal

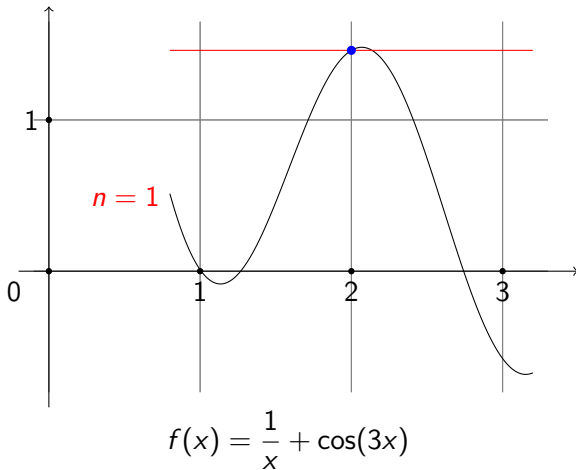
Ha a $[-1, 1]$ intervallum helyett tetszőleges $[a, b]$ intervallumot veszünk, a Csebisev-alappontok $[a, b]$ -n

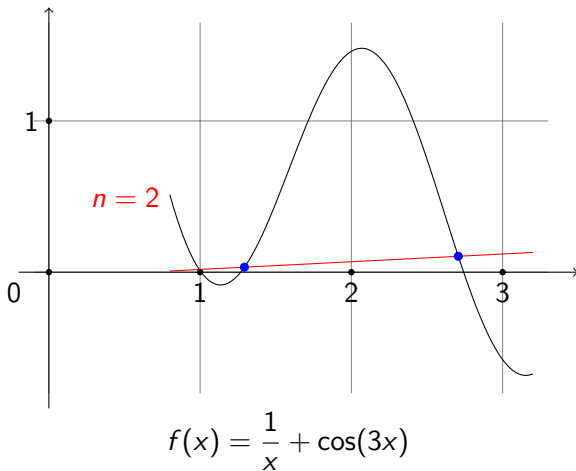
$$\tilde{x}_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

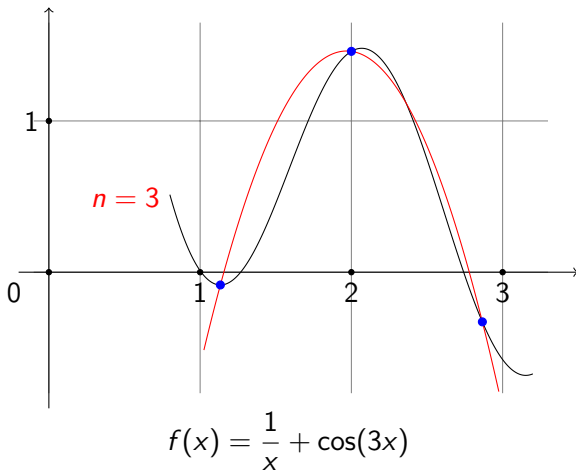
Hibabecslés Csebisev-alappontokkal $[a, b]$ -n

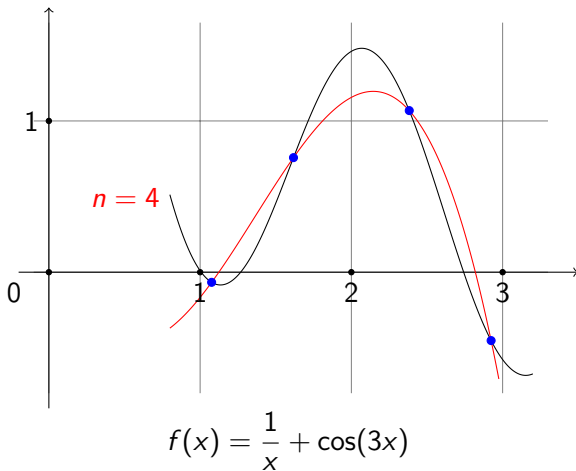
Tegyük fel, hogy $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$ teljesül $\forall x \in [a, b]$ esetén. Ha az interpoláció alappontjai Csebisev-félék $[a, b]$ -n, akkor $\forall x \in [a, b]$ -re

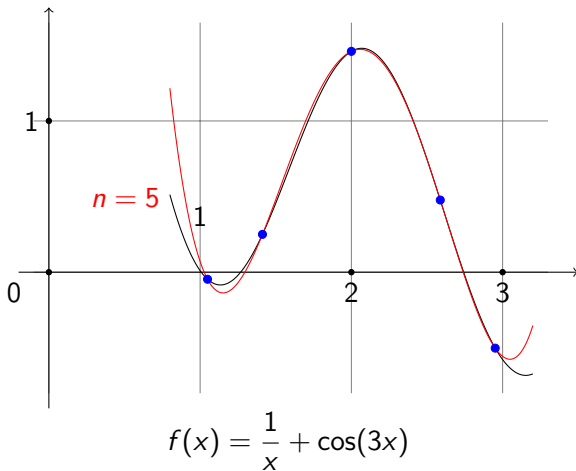
$$|f(x) - L(x)| \leq \frac{M_n(b-a)^n}{2^{2n-1}n!}.$$

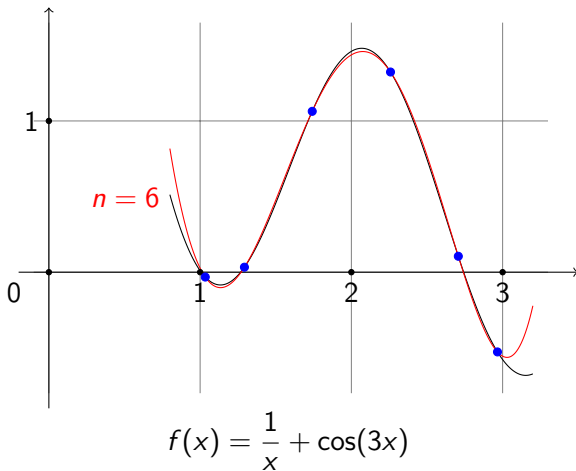


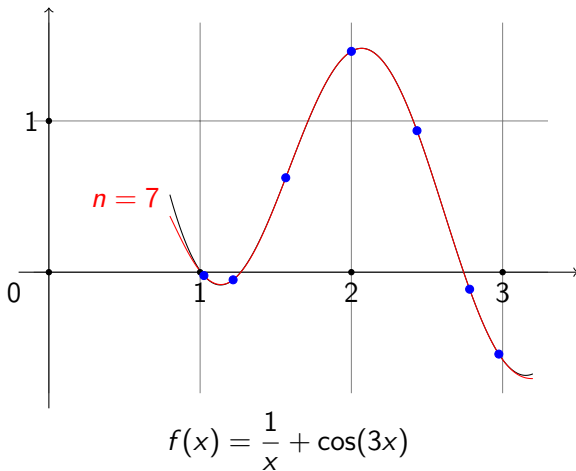












A spline interpoláció alapötlete, hogy a szomszédos alappontok közt polinomokkal interpolálunk.

A köbös spline egyenlete

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x), & \text{ha } a = x_1 \leq x < x_2 \\ s_2(x), & \text{ha } x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x), & \text{ha } x_{n-1} \leq x \leq x_n = b \end{cases}$$

A spline interpoláció alapötlete, hogy a szomszédos alappontok közt polinomokkal interpolálunk.

A köbös spline egyenlete

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x), & \text{ha } a = x_1 \leq x < x_2 \\ s_2(x), & \text{ha } x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x), & \text{ha } x_{n-1} \leq x \leq x_n = b \end{cases}$$

ahol

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

A spline interpoláció alapötlete, hogy a szomszédos alappontok közt polinomokkal interpolálunk.

A köbös spline egyenlete

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x), & \text{ha } a = x_1 \leq x < x_2 \\ s_2(x), & \text{ha } x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x), & \text{ha } x_{n-1} \leq x \leq x_n = b \end{cases}$$

ahol

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

A köbös spline négy definiáló tulajdonsága

1. $S(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$
2. $s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n-1\} \quad (S(x) \in C[a, b]),$

A köbös spline négy definiáló tulajdonsága

1. $S(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$
2. $s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n-1\} \quad (S(x) \in C[a, b]),$
3. $s'_i(x_i) = s'_{i-1}(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n-1\} \quad (S'(x) \in C[a, b]),$

A köbös spline négy definiáló tulajdonsága

1. $S(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$
2. $s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n-1\} \quad (S(x) \in C[a, b]),$
3. $s'_i(x_i) = s'_{i-1}(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n-1\} \quad (S'(x) \in C[a, b]),$
4. $s''_i(x_i) = s''_{i-1}(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n-1\} \quad (S''(x) \in C[a, b]).$

A köbös spline négy definiáló tulajdonsága

1. $S(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$
2. $s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n-1\} \quad (S(x) \in C[a, b]),$
3. $s'_i(x_i) = s'_{i-1}(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n-1\} \quad (S'(x) \in C[a, b]),$
4. $s''_i(x_i) = s''_{i-1}(x_i) \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n-1\} \quad (S''(x) \in C[a, b]).$

Köbös spline interpoláció

Az egyszerűség kedvéért mostantól tételezzünk fel ekvidisztáns alappontválasztást, tehát $h = x_{i+1} - x_i$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ esetén.

$s_i(x)$ -ek együtthatói $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ esetén

$$a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h}$$

$$b_i = \frac{M_i}{2}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - h \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6}$$

$$d_i = y_i$$

Köbös spline interpoláció

Az egyszerűség kedvéért mostantól tételezzünk fel ekvidisztáns alappontválasztást, tehát $h = x_{i+1} - x_i$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ esetén.

$s_i(x)$ -ek együtthatói $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ esetén

$$a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h}$$

$$b_i = \frac{M_i}{2}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - h \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6}$$

$$d_i = y_i$$

$$\text{ahol } M_i + 4M_{i+1} + M_{i+2} = 6 \frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{h^2} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n-2\},$$

$$\text{és } M_i = S''(x_i) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Köbös spline interpoláció

Az egyszerűség kedvéért mostantól tételezzünk fel ekvidisztáns alappontválasztást, tehát $h = x_{i+1} - x_i$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ esetén.

$s_i(x)$ -ek együtthatói $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ esetén

$$a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h}$$

$$b_i = \frac{M_i}{2}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - h \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6}$$

$$d_i = y_i$$

$$\text{ahol } M_i + 4M_{i+1} + M_{i+2} = 6 \frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{h^2} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n-2\},$$

$$\text{és } M_i = S''(x_i) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Utóbbi összefüggést mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ . \\ . \\ . \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix}$$

A lineáris egyenletrendszer alul determinált: a bal oldali mátrixnak n oszlopa és $n - 2$ sora van.

Utóbbi összefüggést mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ . \\ . \\ . \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix}$$

A lineáris egyenletrendszer alul determinált: a bal oldali mátrixnak n oszlopa és $n - 2$ sora van.

Néhány gyakori köbös spline típus

1. Természetes spline

Utóbbi összefüggést mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ . \\ . \\ . \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix}$$

A lineáris egyenletrendszer alul determinált: a bal oldali mátrixnak n oszlopa és $n - 2$ sora van.

Néhány gyakori köbös spline típus

1. Természetes spline
2. Parabolikus lefutású spline

Utóbbi összefüggést mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ . \\ . \\ . \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix}$$

A lineáris egyenletrendszer alul determinált: a bal oldali mátrixnak n oszlopa és $n - 2$ sora van.

Néhány gyakori köbös spline típus

1. Természetes spline
2. Parabolikus lefutású spline
3. Köbös lefutású spline

Utóbbi összefüggést mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ . \\ . \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix}$$

A lineáris egyenletrendszer alul determinált: a bal oldali mátrixnak n oszlopa és $n - 2$ sora van.

Néhány gyakori köbös spline típus

1. Természetes spline
2. Parabolikus lefutású spline
3. Köbös lefutású spline

Természetes spline

$$M_1 = M_n = 0$$

Az egyenlőség bal oldala ekkor így alakul (a jobb oldal nem változik):

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix}$$

Természetes spline

$$M_1 = M_n = 0$$

Az egyenlőség bal oldala ekkor így alakul (a jobb oldal nem változik):

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix}$$

Parabolikus lefutású spline

$$M_1 = M_2 \text{ és } M_{n-1} = M_n$$

Az egyenlőség bal oldala ekkor így alakul (a jobb oldal nem változik):

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix}$$

Parabolikus lefutású spline

$$M_1 = M_2 \text{ és } M_{n-1} = M_n$$

Az egyenlőség bal oldala ekkor így alakul (a jobb oldal nem változik):

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix}$$

Köbös lefutású spline

$$M_1 = 2M_2 - M_3 \quad \text{és} \quad 2M_{n-1} - M_{n-2} = M_n$$

Az egyenlőség bal oldala ekkor így alakul (a jobb oldal nem változik):

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix}$$

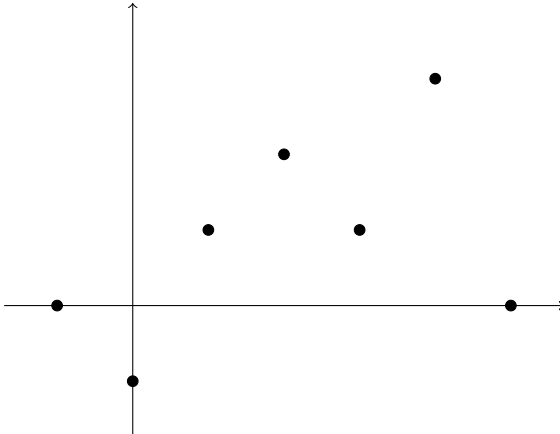
Köbös lefutású spline

$$M_1 = 2M_2 - M_3 \quad \text{és} \quad 2M_{n-1} - M_{n-2} = M_n$$

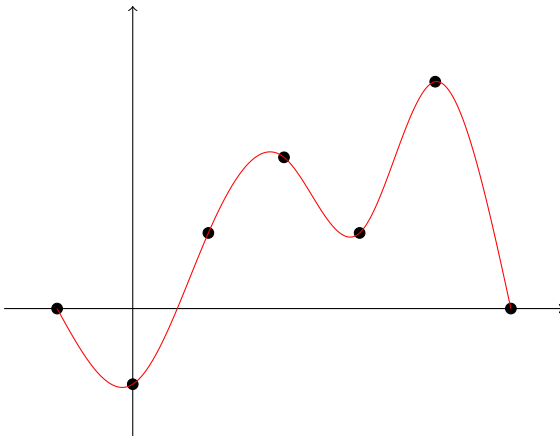
Az egyenlőség bal oldala ekkor így alakul (a jobb oldal nem változik):

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ . \\ . \\ . \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix}$$

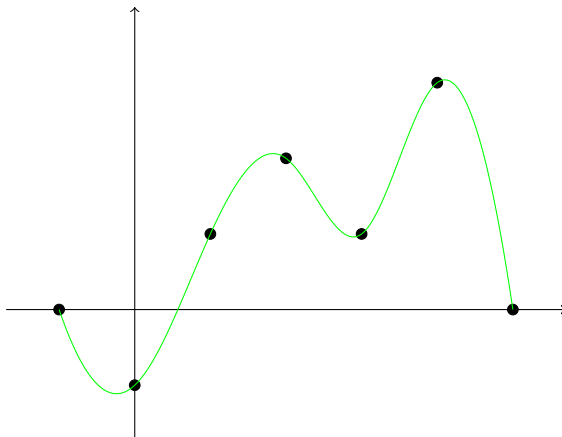
Köbös spline interpoláció



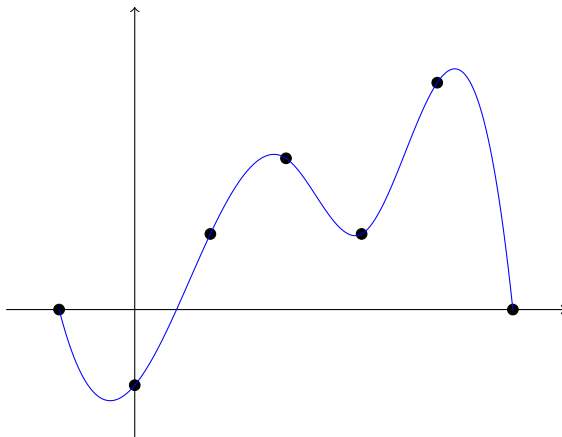
Természetes spline



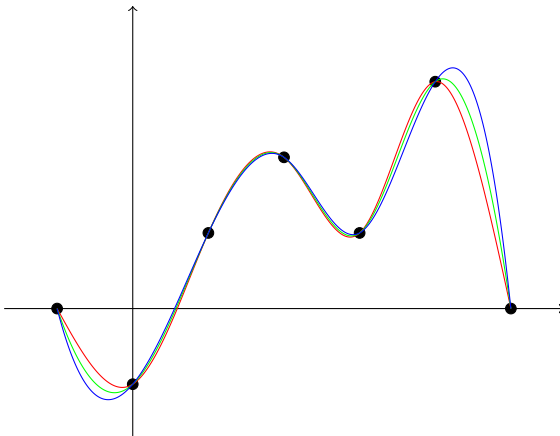
Parabolikus lefutású spline



Köbös lefutású spline



Természetes, parabolikus lefutású és köbös lefutású spline



Rögzítsük a $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ alapfüggvényeket. Tekintsük az $x_1, \dots, x_N$ nem feltétlenül különböző alappontokat és a hozzájuk tartozó $y_1, \dots, y_N$ értékeket. A legkisebb négyzetek módszerének használata során keressük azokat az $c_1, \dots, c_n$ együtthatókat, melyekre

$$\sum_{k=1}^N \left(y_k - \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x_k) \right)^2$$

minimális.

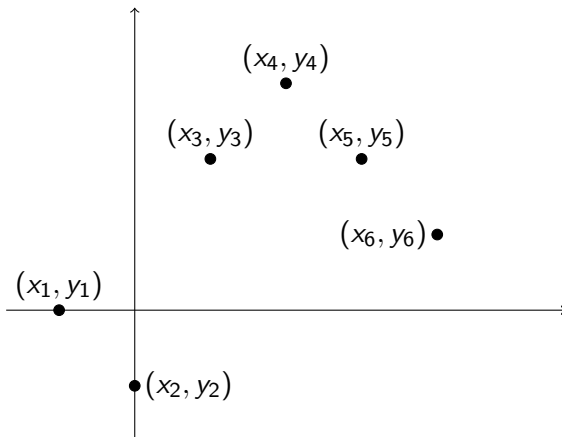
Az interpolációval összehasonlítva fontos különbség, hogy nem várjuk el a közelítő függvénytől, hogy átmenjen a megadott pontokon.

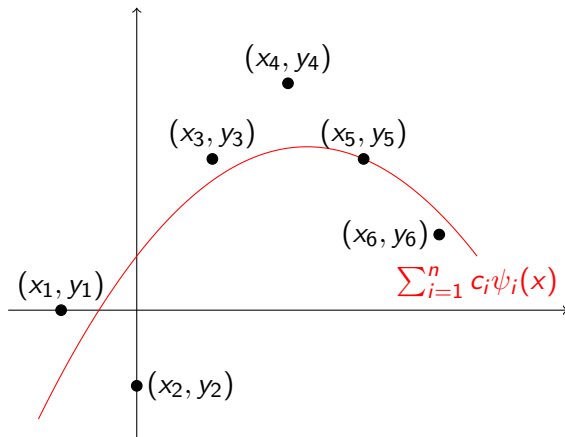
Rögzítsük a $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ alapfüggvényeket. Tekintsük az $x_1, \dots, x_N$ nem feltétlenül különböző alappontokat és a hozzájuk tartozó $y_1, \dots, y_N$ értékeket. A legkisebb négyzetek módszerének használata során keressük azokat az $c_1, \dots, c_n$ együtthatókat, melyekre

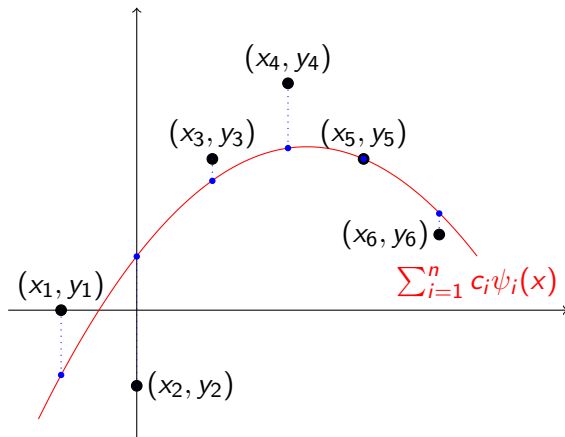
$$\sum_{k=1}^N \left(y_k - \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x_k) \right)^2$$

minimális.

Az interpolációval összehasonlítva fontos különbség, hogy nem várjuk el a közelítő függvénytől, hogy átmenjen a megadott pontokon.







A megoldás:

$$\sum_{i=1}^n c_i \left(\sum_{k=1}^N \psi_i(x_k) \psi_j(x_k) \right) = \sum_{k=1}^N y_k \psi_j(x_k) \quad (1 \leq j \leq n)$$

Ha $\psi_i(x) = x^{i-1}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, polinommal közelítünk:

A megoldás:

$$\sum_{i=1}^n c_i \left(\sum_{k=1}^N \psi_i(x_k) \psi_j(x_k) \right) = \sum_{k=1}^N y_k \psi_j(x_k) \quad (1 \leq j \leq n)$$

Ha $\psi_i(x) = x^{i-1}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, polinommal közelítünk:

Normál egyenletrendszer

$$\sum_{i=1}^n c_i \left(\sum_{k=1}^N x_k^{i+j-2} \right) = \sum_{k=1}^N y_k x_k^{j-1} \quad (1 \leq j \leq n)$$

A megoldás:

$$\sum_{i=1}^n c_i \left(\sum_{k=1}^N \psi_i(x_k) \psi_j(x_k) \right) = \sum_{k=1}^N y_k \psi_j(x_k) \quad (1 \leq j \leq n)$$

Ha $\psi_i(x) = x^{i-1}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, polinommal közelítünk:

Normál egyenletrendszer

$$\sum_{i=1}^n c_i \left(\sum_{k=1}^N x_k^{i+j-2} \right) = \sum_{k=1}^N y_k x_k^{j-1} \quad (1 \leq j \leq n)$$

Az n és N viszonya.

A megoldás:

$$\sum_{i=1}^n c_i \left(\sum_{k=1}^N \psi_i(x_k) \psi_j(x_k) \right) = \sum_{k=1}^N y_k \psi_j(x_k) \quad (1 \leq j \leq n)$$

Ha $\psi_i(x) = x^{i-1}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, polinommal közelítünk:

Normál egyenletrendszer

$$\sum_{i=1}^n c_i \left(\sum_{k=1}^N x_k^{i+j-2} \right) = \sum_{k=1}^N y_k x_k^{j-1} \quad (1 \leq j \leq n)$$

Az n és N viszonya. Tegyük fel, hogy $n < N$.

A megoldás:

$$\sum_{i=1}^n c_i \left(\sum_{k=1}^N \psi_i(x_k) \psi_j(x_k) \right) = \sum_{k=1}^N y_k \psi_j(x_k) \quad (1 \leq j \leq n)$$

Ha $\psi_i(x) = x^{i-1}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, polinommal közelítünk:

Normál egyenletrendszer

$$\sum_{i=1}^n c_i \left(\sum_{k=1}^N x_k^{i+j-2} \right) = \sum_{k=1}^N y_k x_k^{j-1} \quad (1 \leq j \leq n)$$

Az n és N viszonya. Tegyük fel, hogy $n < N$.

Mátrixos alakban felírva:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N x_k^0 & \cdot & \cdot & \cdot & \sum_{k=1}^N x_k^{n-1} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \sum_{k=1}^N x_k^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \sum_{k=1}^N x_k^{2n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N y_k x_k^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{k=1}^N y_k x_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

Lineáris, polinomiális regresszió.

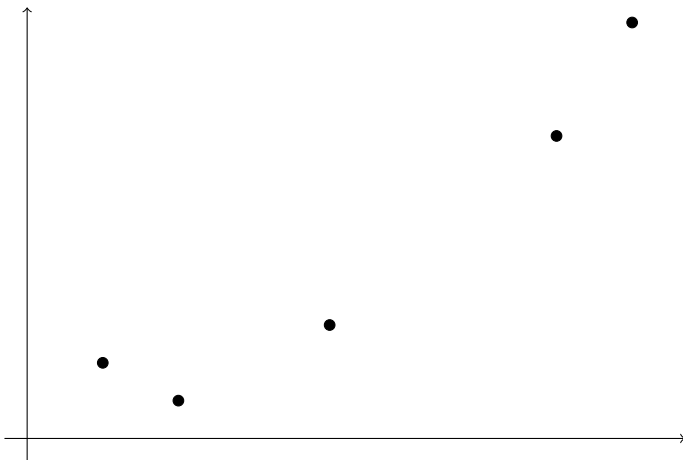
Mátrixos alakban felírva:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N x_k^0 & \cdot & \cdot & \cdot & \sum_{k=1}^N x_k^{n-1} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \sum_{k=1}^N x_k^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \sum_{k=1}^N x_k^{2n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N y_k x_k^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{k=1}^N y_k x_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

Lineáris, polinomiális regresszió.

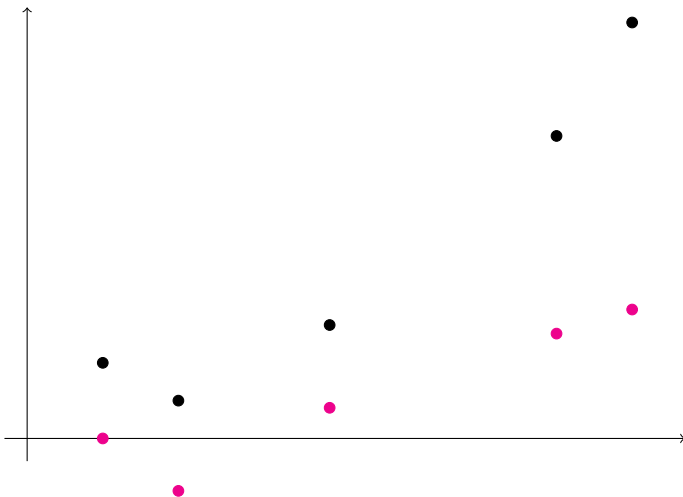
Exponenciális regresszió (visszavezetése lineáris regresszióra)

$$y = a \cdot m^x$$



Exponenciális regresszió (visszavezetése lineáris regresszióra)

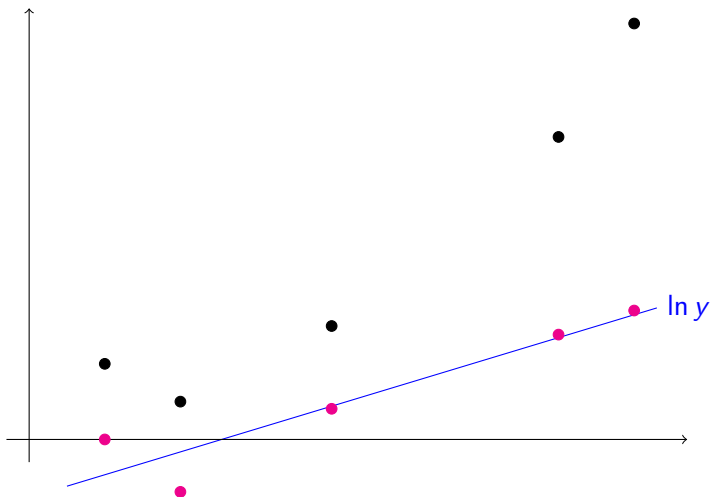
$$y = a \cdot m^x \Rightarrow \ln y = \ln a + x \cdot \ln m = A + xM$$



Legkisebb négyzetek módszere

Exponenciális regresszió (visszavezetése lineáris regresszióra)

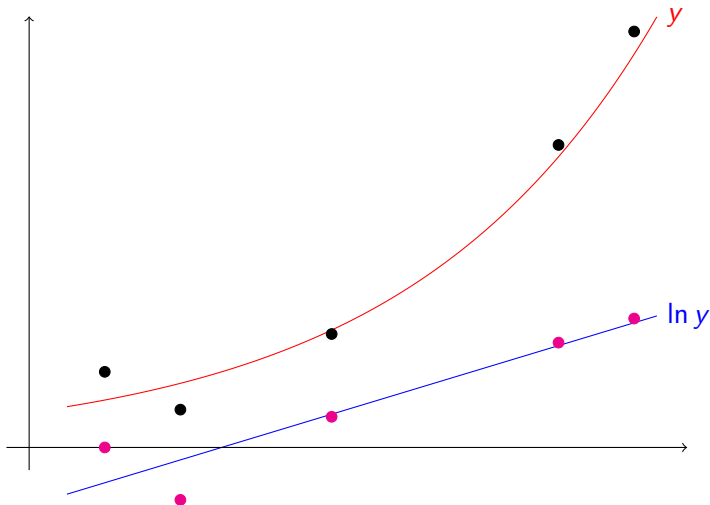
$$y = a \cdot m^x \Rightarrow \ln y = \ln a + x \cdot \ln m = A + xM$$



Legkisebb négyzetek módszere

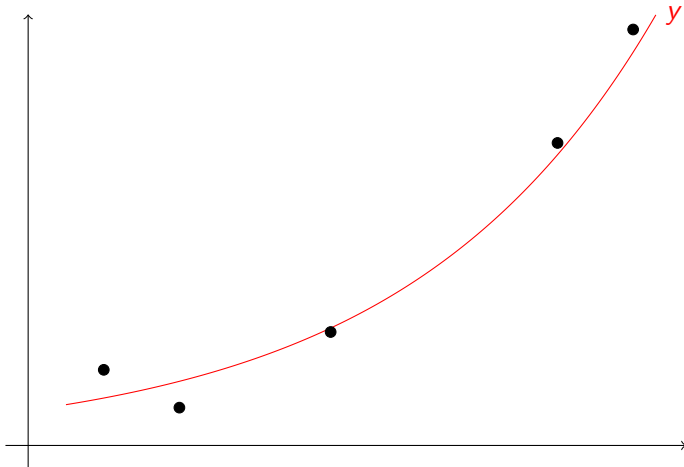
Exponenciális regresszió (visszavezetése lineáris regresszióra)

$$y = a \cdot m^x \Rightarrow \ln y = \ln a + x \cdot \ln m = A + xM \Rightarrow y = e^A \cdot (e^M)^x = a \cdot m^x$$



Exponenciális regresszió (visszavezetése lineáris regresszióra)

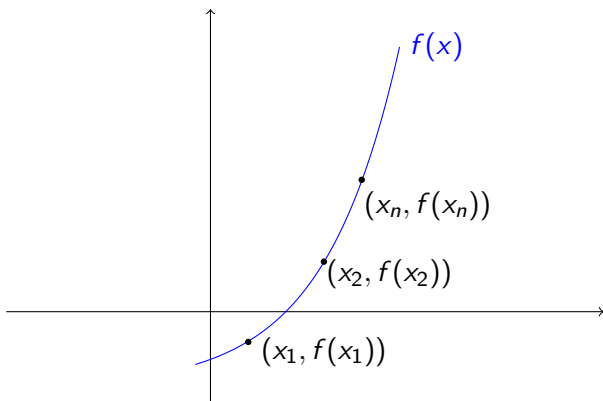
$$y = a \cdot m^x \Rightarrow \ln y = \ln a + x \cdot \ln m = A + xM \Rightarrow y = e^A \cdot (e^M)^x = a \cdot m^x$$



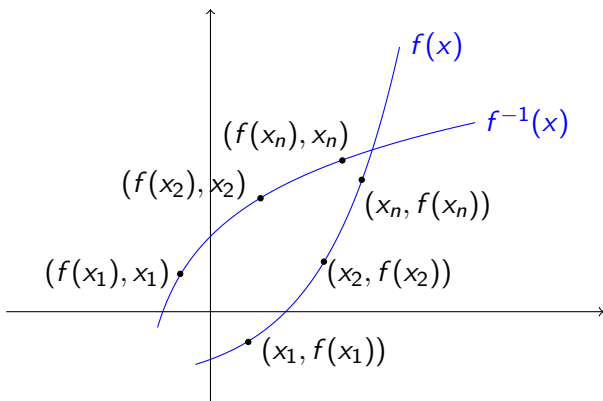
Inverz interpoláció

Tegyük fel, hogy ismerjük az $[a, b]$ intervallumon folytonos és szigorúan monoton, valamint előjelet váltó $f(x)$ függvény értékeit az $a \leq x_1 < \cdots < x_n \leq b$ pontokban. Az $f(x)$ gyökét az $f^{-1}(x)$ függvény közelítésének 0 helyen vett értékével becsüljük.

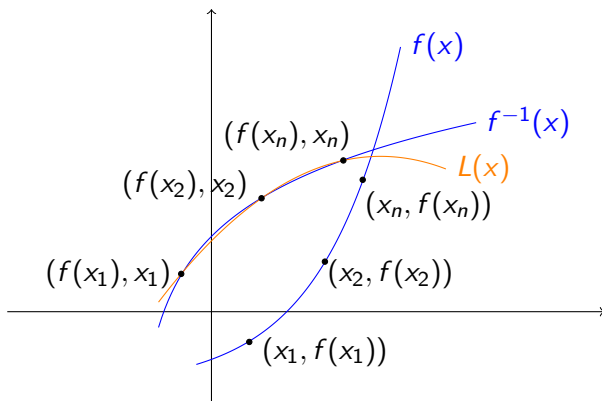
Inverz interpoláció



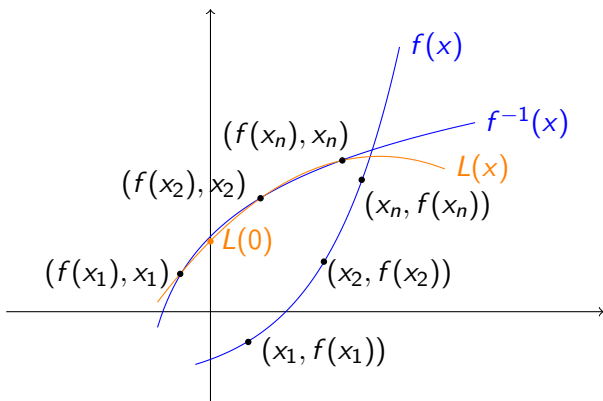
Inverz interpoláció



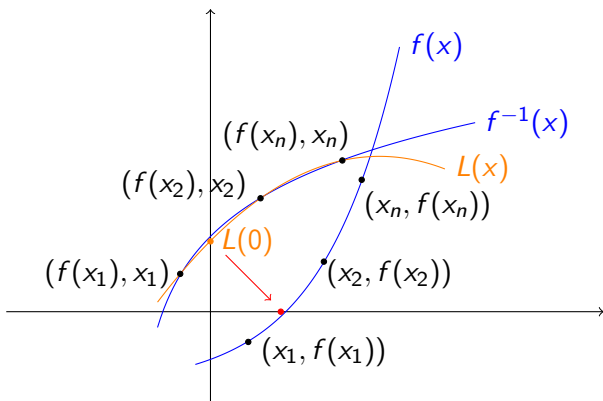
Inverz interpoláció



Inverz interpoláció



Inverz interpoláció



Inverz interpoláció

Lagrange-interpolációt használva

$$L(0) = \sum_{i=1}^n x_i l_i(0) = \sum_{i=1}^n \left(x_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_i)} \right).$$

Ha szükséges, $L(0)$ -al kicseréljük a gyökhöz legtávolabbi alappontot és újra kezdjük az eljárást.

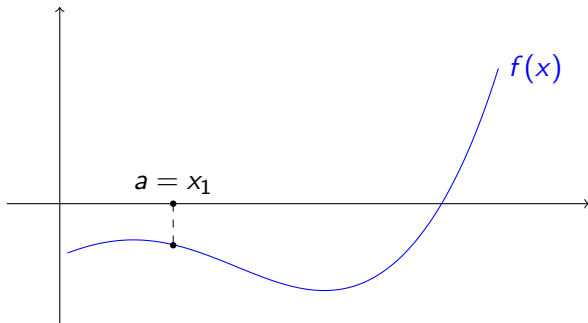
Inverz interpoláció

Lagrange-interpolációt használva

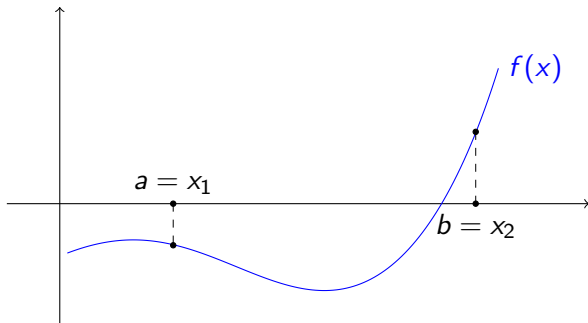
$$L(0) = \sum_{i=1}^n x_i l_i(0) = \sum_{i=1}^n \left(x_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_i)} \right).$$

Ha szükséges, $L(0)$ -al kicseréljük a gyökhöz legtávolabbi alappontot és újra kezdjük az eljárást.

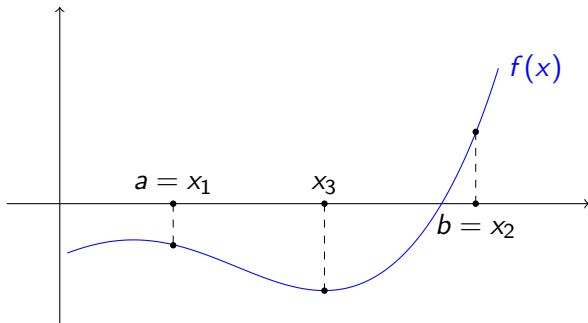
Intervallumfelezés



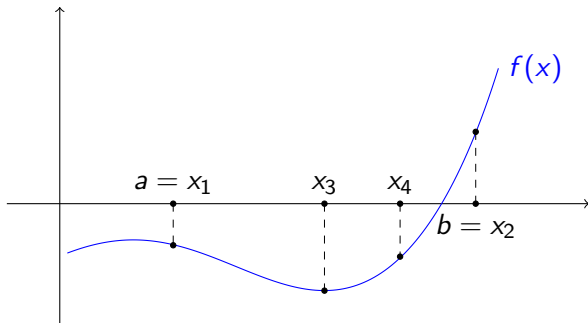
Intervallumfelezés



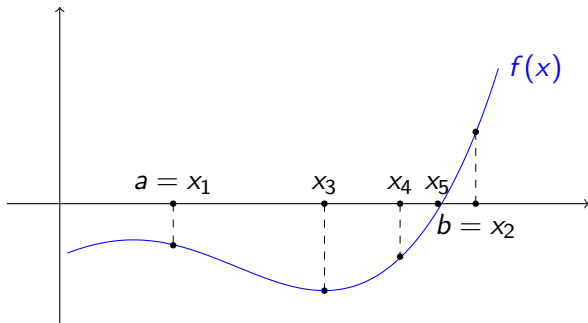
Intervallumfelezés



Intervallumfelezés



Intervallumfelezés



A intervallumfelezéssel keletkező sorozat konvergenciája, hibabecslése

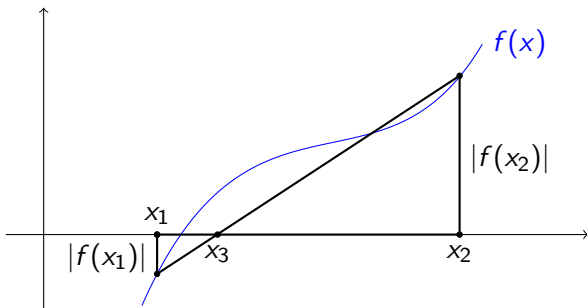
Tekintsük az $[a, b]$ intervallumot, amin az $f(x)$ folytonos függvénynek pontosan egy zérushelye van. Legyen $x_1 = a$ és $x_2 = b$, valamint jelöljük x^* -gal $f(x)$ zérushelyét $[a, b]$ -ben. Ha x_n az intervallumfelezési módszerrel keletkezett sorozat, akkor $x_n \rightarrow x^*$, valamint

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b - a}{2^{n-2}}.$$

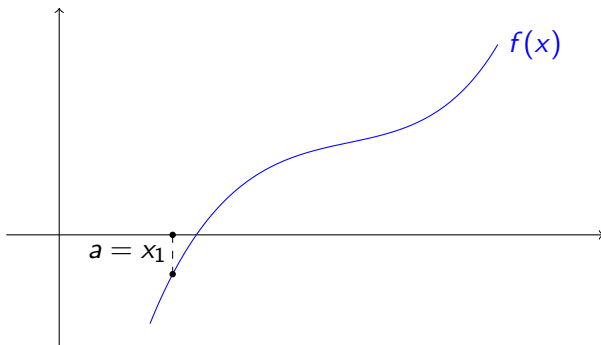
Húrmódszer

Tekintsük az $[a, b]$ intervallumot, amin az $f(x)$ folytonos függvény egyszer előjelet vált. Legyen $x_1 = a$ és $x_2 = b$, valamint x_3 az a pont, mely az $[x_1, x_2]$ intervallumot végpontjaiban felvett függvényértékei abszolút értékének arányában osztja. Ekkor

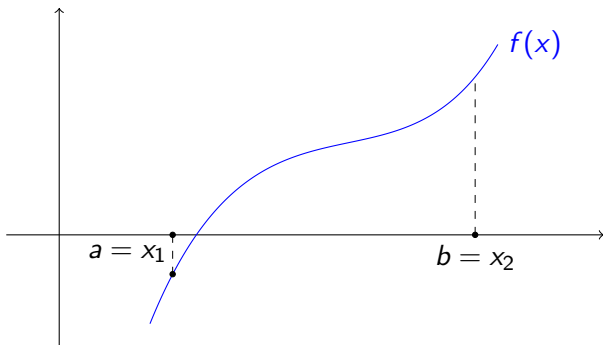
$$x_3 = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}.$$



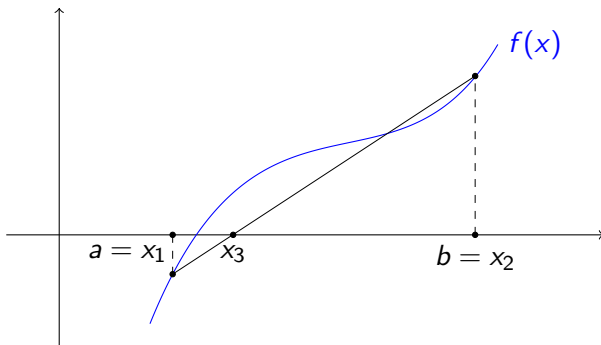
Húrmódszer



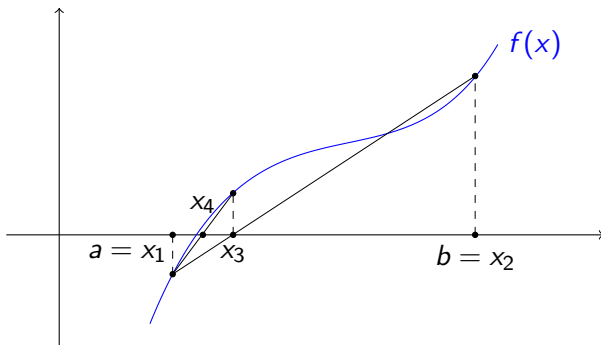
Húrmódszer



Húrmódszer



Húrmódszer



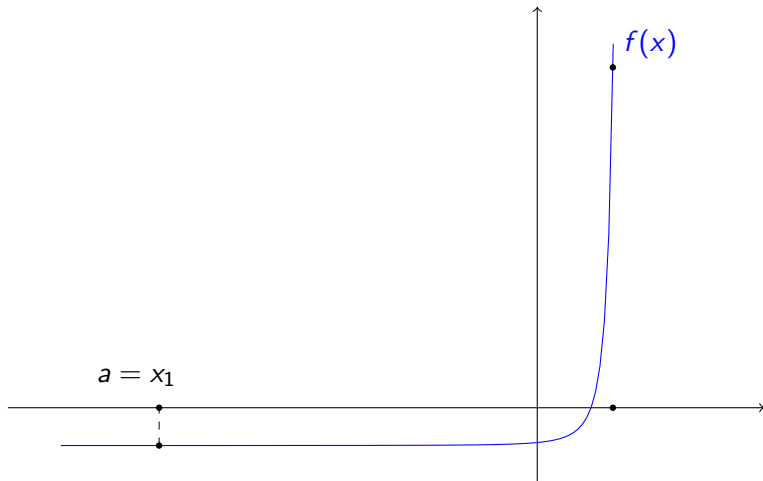
A húrmódszer általános képlete:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_k)}{f(x_{n-1}) - f(x_k)}.$$

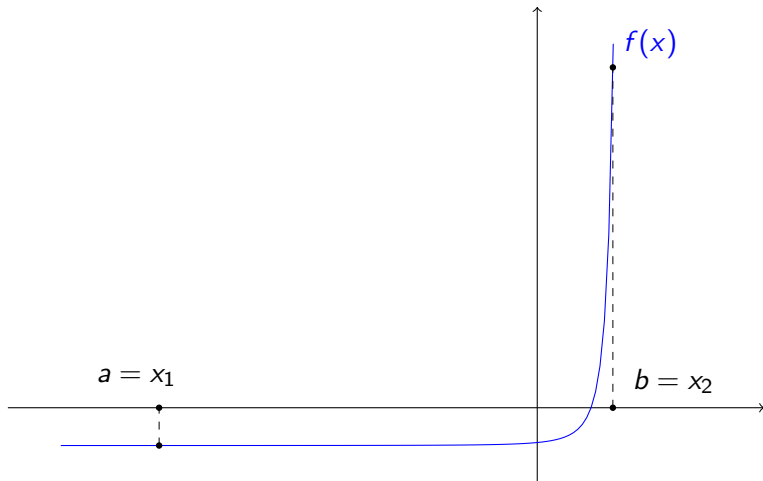
A sorozat konvergenciája

Legyen $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelynek pontosan egy x^* zérushelye van $[a, b]$ -n. Ekkor ha x_n a húrmódszerrel keletkező sorozat, akkor $x_n \rightarrow x^*$.

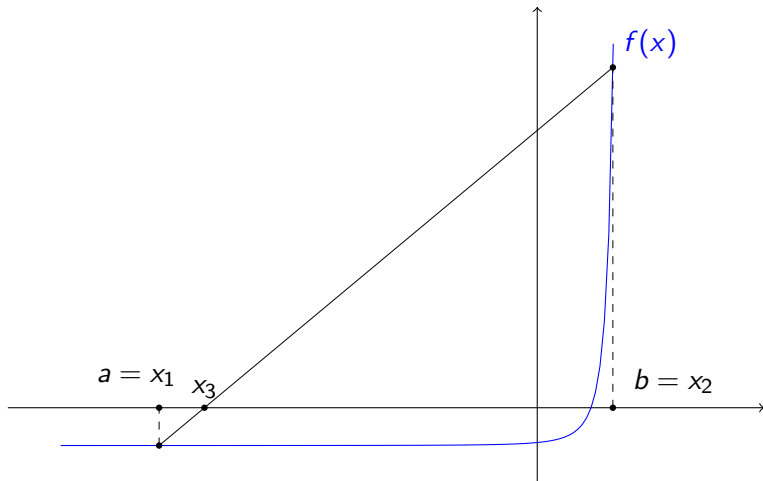
A húrmódszer konvergenciája nem mindig gyors.



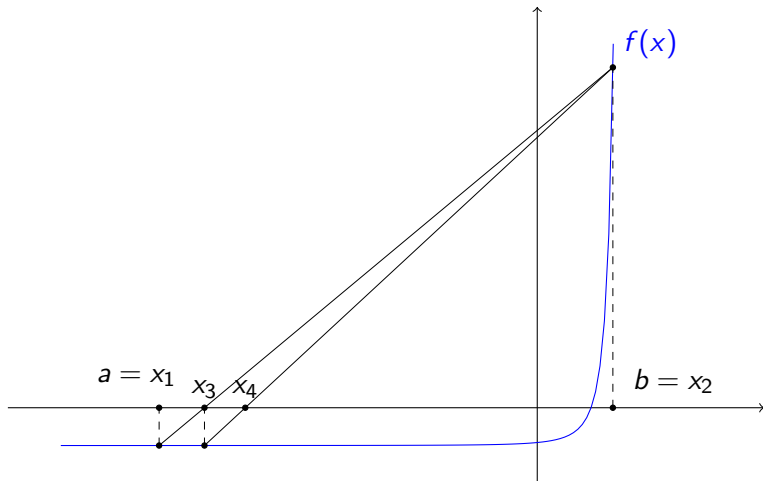
A húrmódszer konvergenciája nem mindig gyors.



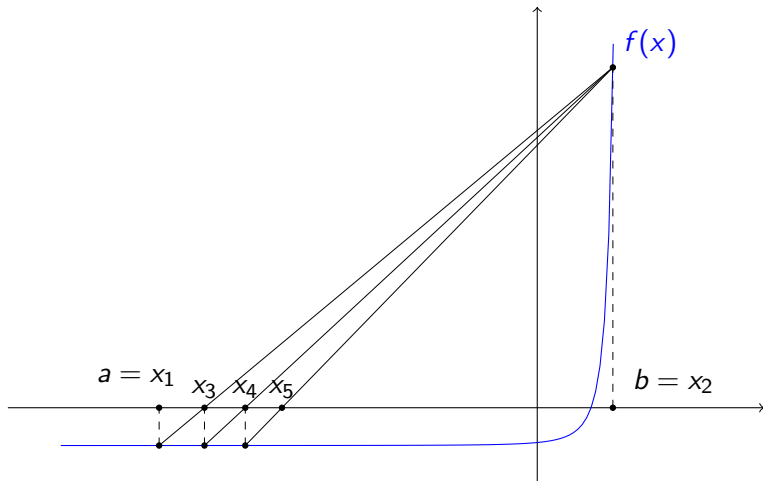
A húrmódszer konvergenciája nem mindig gyors.



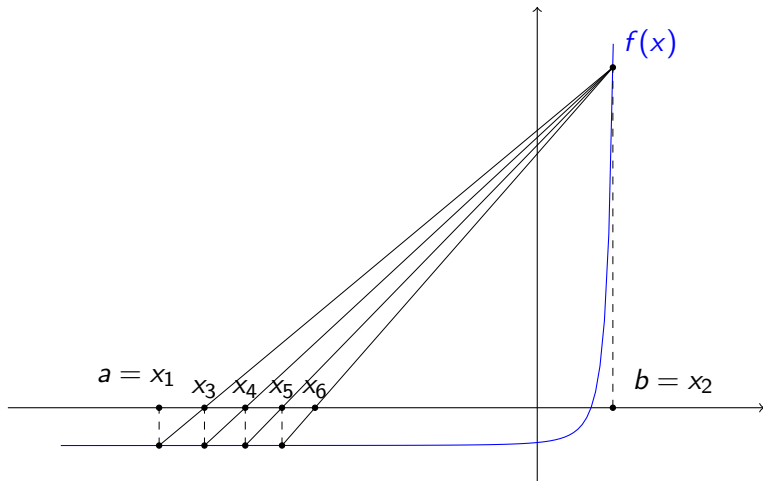
A húrmódszer konvergenciája nem mindig gyors.



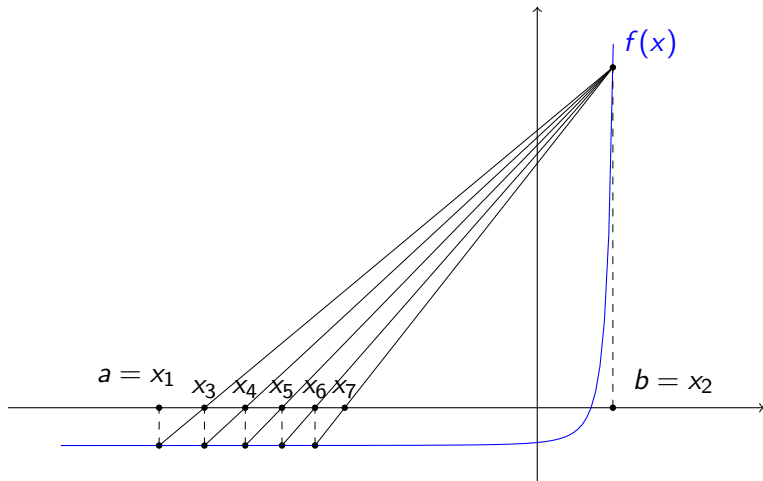
A húrmódszer konvergenciája nem mindig gyors.



A húrmódszer konvergenciája nem mindig gyors.



A húrmódszer konvergenciája nem mindig gyors.

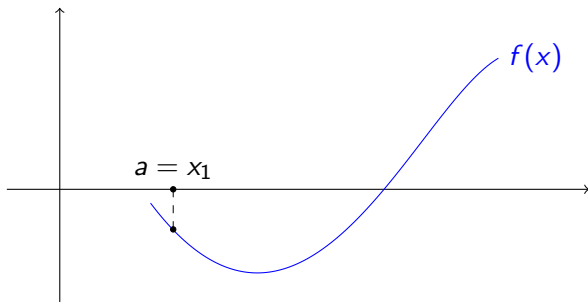


Szelőmódszer

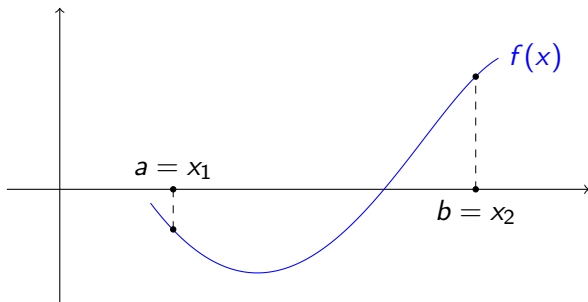
Legyen $x_1 = a$ és $x_2 = b$, valamint

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}.$$

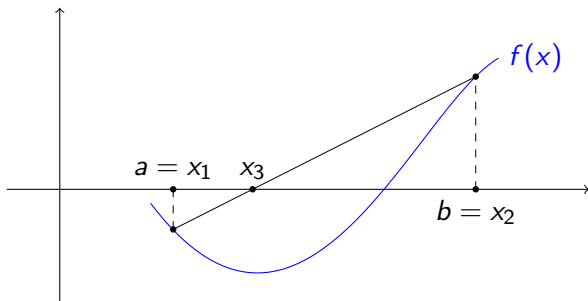
Szelőmódszer



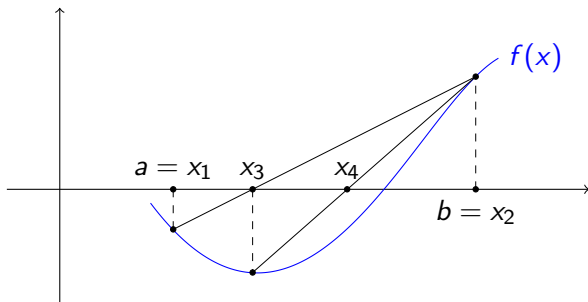
Szelőmódszer



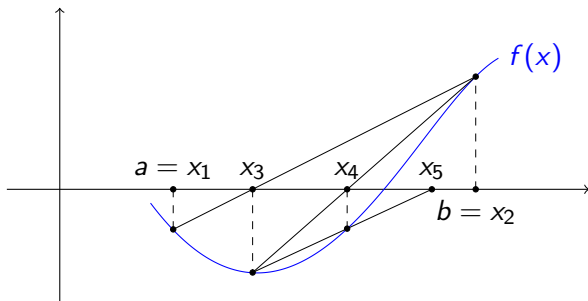
Szelőmódszer



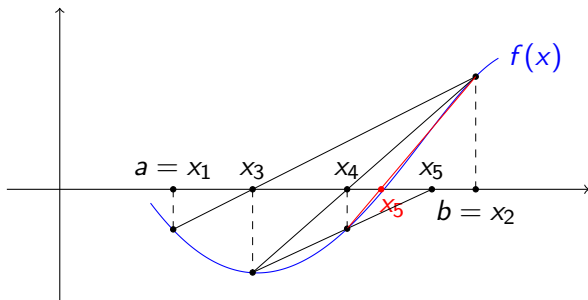
Szelőmódszer



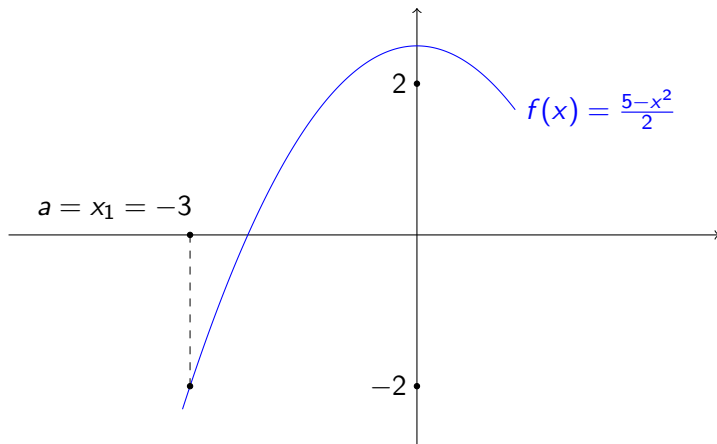
Szelőmódszer



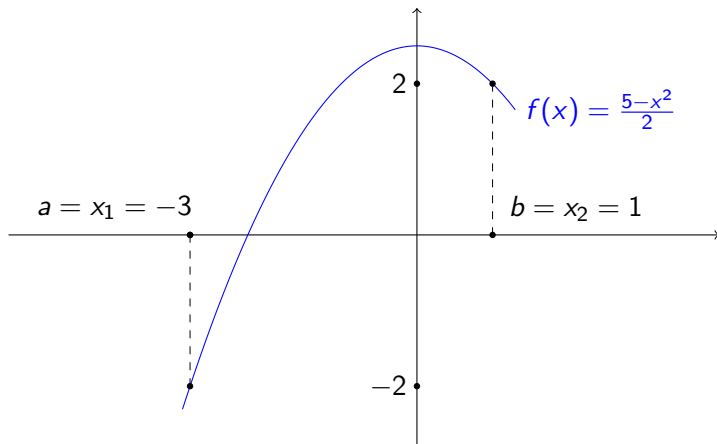
A szelőmódszer és a húrmódszer eltérése.



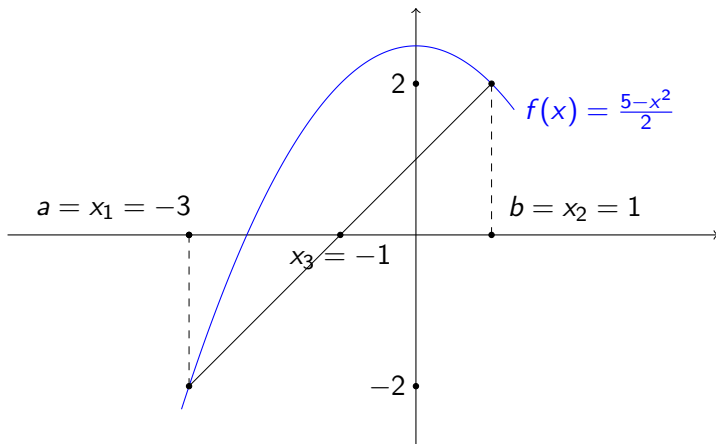
A szelőmódszer sorozata nem mindig jön létre!



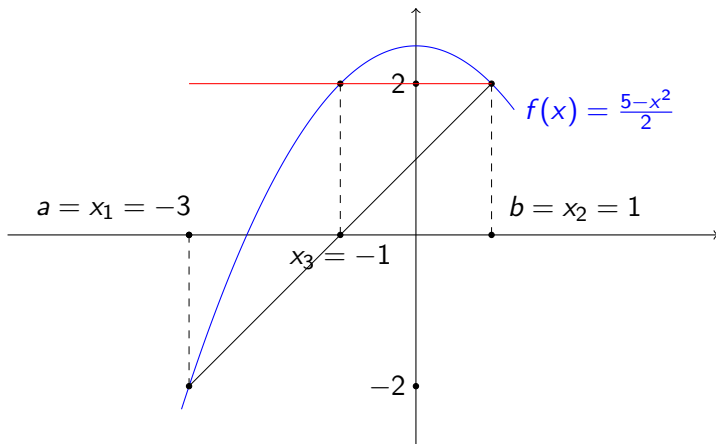
A szelőmódszer sorozata nem mindig jön létre!



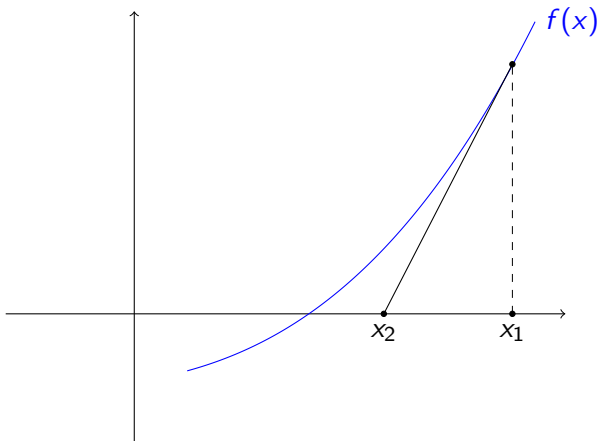
A szelőmódszer sorozata nem mindig jön létre!



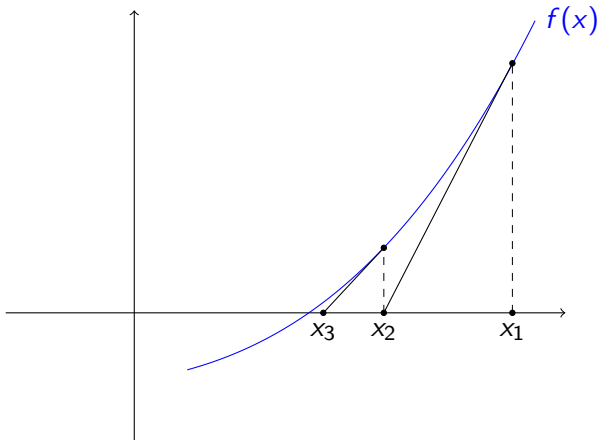
A szelőmódszer sorozata nem mindig jön létre!



Newton (Newton-Raphson) módszer



Newton (Newton-Raphson) módszer

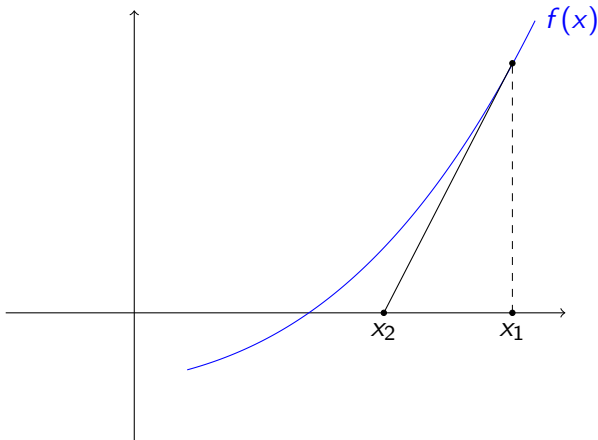


Newton (Newton-Raphson) módszer

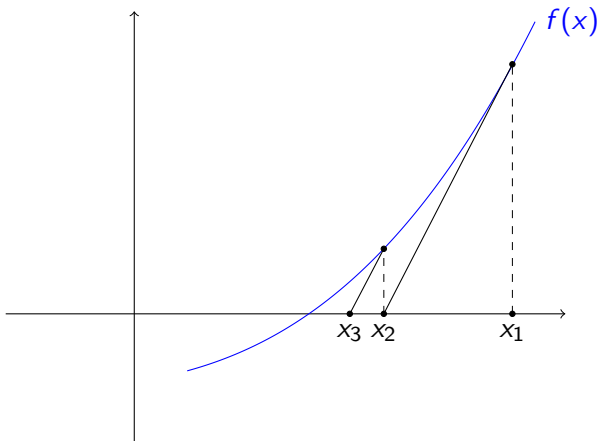
A sorozat képlete

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

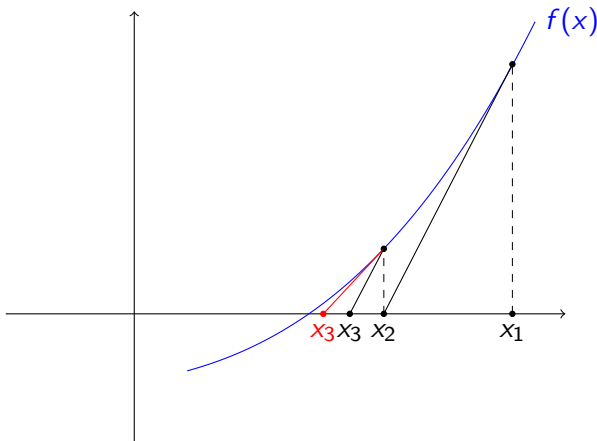
Módosított Newton módszer



Módosított Newton módszer



Módosított Newton módszer, **Newton módszer**



Módosított Newton módszer

A sorozat képlete

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_1)}$$

A húr, szelő és Newton módszer hibája

$d_n := \frac{M}{2m}|x_n - x^*|$, ahol $x \in [a, b]$ -ra $|f''(x)| \leq M$, $0 < m \leq |f'(x)|$. Húr vagy szelő módszer esetén ha $d := \max\{d_1, d_2\} < 1$, Newton módszer esetén ha $d := d_1 < 1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ ($f(x^*) = 0$) és

$$d_n \leq$$

$$d^{n-1} \text{ (húr),}$$

$$d^{\gamma_n} \text{ (szelő),}$$

$$d^{2^{n-1}} \text{ (Newton)}$$

A húr, szelő és Newton módszer hibája

$d_n := \frac{M}{2m}|x_n - x^*|$, ahol $x \in [a, b]$ -ra $|f''(x)| \leq M$, $0 < m \leq |f'(x)|$. Húr vagy szelő módszer esetén ha $d := \max\{d_1, d_2\} < 1$, Newton módszer esetén ha $d := d_1 < 1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ ($f(x^*) = 0$) és

$$d_n \leq$$

$$d^{n-1} \text{ (húr),}$$

$$d^{\gamma_n} \text{ (szelő),}$$

$$d^{2^{n-1}} \text{ (Newton)}$$

ahol $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ és $\gamma_n = \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2}$, ha $n > 1$ (Fibonacci-sorozat).

A húr, szelő és Newton módszer hibája

$d_n := \frac{M}{2m}|x_n - x^*|$, ahol $x \in [a, b]$ -ra $|f''(x)| \leq M$, $0 < m \leq |f'(x)|$. Húr vagy szelő módszer esetén ha $d := \max\{d_1, d_2\} < 1$, Newton módszer esetén ha $d := d_1 < 1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ ($f(x^*) = 0$) és

$$d_n \leq$$

$$d^{n-1} \text{ (húr),}$$

$$d^{\gamma_n} \text{ (szelő),}$$

$$d^{2^{n-1}} \text{ (Newton)}$$

ahol $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ és $\gamma_n = \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2}$, ha $n > 1$ (Fibonacci-sorozat).

A Banach-féle (Banach–Cacciopoli–Tyihonov-féle) fixponttétel

Teljes metrikus tér önmagába való kontraháló leképezésének pontosan egy fixpontja van.

A fixpont meghatározására a szukcesszív approximáció módszerét használjuk.

A Banach-féle (Banach–Cacciopoli–Tyihonov-féle) fixponttétel

Teljes metrikus tér önmagába való kontraháló leképezésének pontosan egy fixpontja van.

A fixpont meghatározására a szukcesszív approximáció módszerét használjuk.

Szukcesszív approximáció (fokozatos közelítés)

A fenti feltételek teljesülése esetén tetszőleges x_1 metrikus térbeli pontból kiindulva az $x_n = F(x_{n-1})$ sorozat konvergens lesz és határértéke c , ahol $F(c) = c$.

A Banach-féle (Banach–Cacciopoli–Tyihonov-féle) fixponttétel

Teljes metrikus tér önmagába való kontraháló leképezésének pontosan egy fixpontja van.

A fixpont meghatározására a szukcesszív approximáció módszerét használjuk.

Szukcesszív approximáció (fokozatos közelítés)

A fenti feltételek teljesülése esetén tetszőleges x_1 metrikus térbeli pontból kiindulva az $x_n = F(x_{n-1})$ sorozat konvergens lesz és határértéke c , ahol $F(c) = c$.

A fokozatos közelítés módszere

Legyen $F(x): [a, b] \rightarrow [a, b]$ differenciálható függvény, $x_1 \in [a, b]$ tetszőleges, valamint $x_n = F(x_{n-1})$, ha $1 < n \in \mathbb{P}$. Ha $\exists q < 1$, melyre $|F'(x)| \leq q$ teljesül $\forall x \in [a, b]$ esetén, akkor $x_n \rightarrow c$, ahol $F(c) = c$. A keletkezett c egyértelmű, továbbá teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$|x_n - c| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}|,$$

$$|x_n - c| \leq \frac{q^{n-1}}{1 - q} |x_2 - x_1|.$$

Az $F(c) = c$ egyenlőségben szereplő c -t az $F(x)$ függvény fixpontjának szokás nevezni. Meghatározására használjuk a fentiekben ismertetett fokozatos közelítés (más néven szukcesszív approximáció) módszerét.

Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása egyenrangú az $x + yf(x) = F(x)$ függvény fixpontjának megkeresésével, ahol $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges konstans.

Az $F(c) = c$ egyenlőségben szereplő c -t az $F(x)$ függvény fixpontjának szokás nevezni. Meghatározására használjuk a fentiekben ismertetett fokozatos közelítés (más néven szukcesszív approximáció) módszerét.

Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása egyenrangú az $x + yf(x) = F(x)$ függvény fixpontjának megkeresésével, ahol $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges konstans.

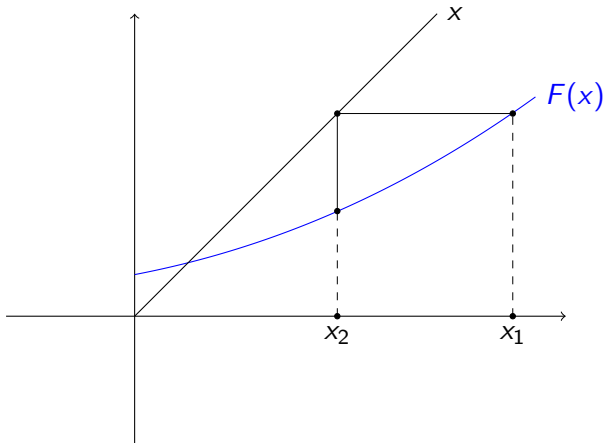
Ha $F'(x)$ nem a kívánt tulajdonságú de invertálható, meg lehet próbálni az eredeti helyett az $F^{-1}(x) = x$ egyenlet megoldását.

Az $F(c) = c$ egyenlőségben szereplő c -t az $F(x)$ függvény fixpontjának szokás nevezni. Meghatározására használjuk a fentiekben ismertetett fokozatos közelítés (más néven szukcesszív approximáció) módszerét.

Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása egyenrangú az $x + yf(x) = F(x)$ függvény fixpontjának megkeresésével, ahol $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges konstans.

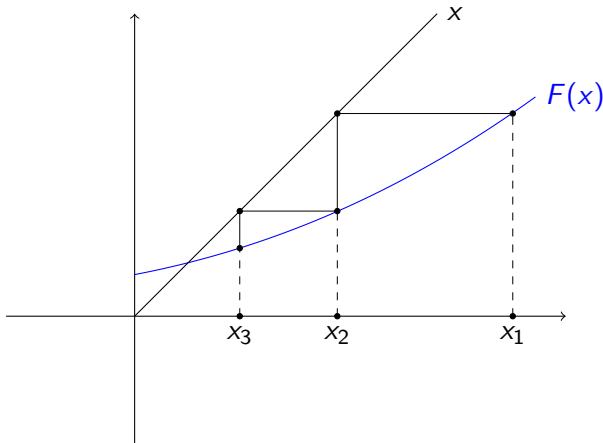
Ha $F'(x)$ nem a kívánt tulajdonságú de invertálható, meg lehet próbálni az eredeti helyett az $F^{-1}(x) = x$ egyenlet megoldását.

A szukcesszív approximáció konvergenciája, $0 < F'(x) < 1$.



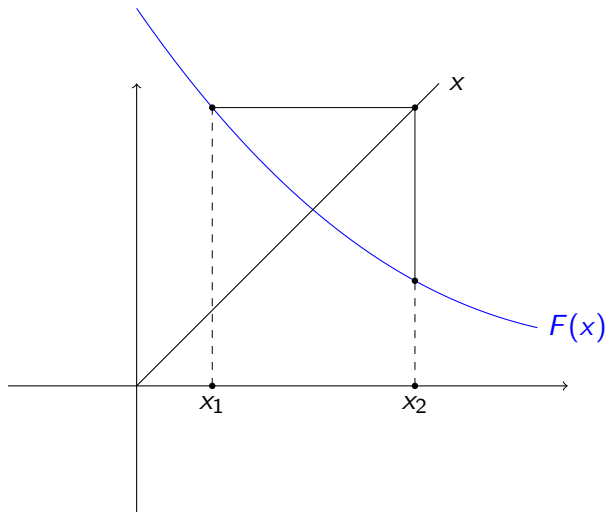
Egyenletek közelítő megoldásai

A szukcesszív approximáció konvergenciája, $0 < F'(x) < 1$.



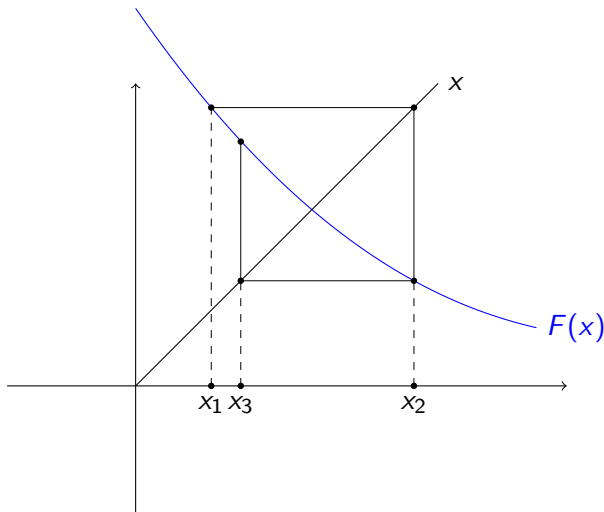
Egyenletek közelítő megoldásai

A szukcesszív approximáció konvergenciája, $-1 < F'(x) < 0$.



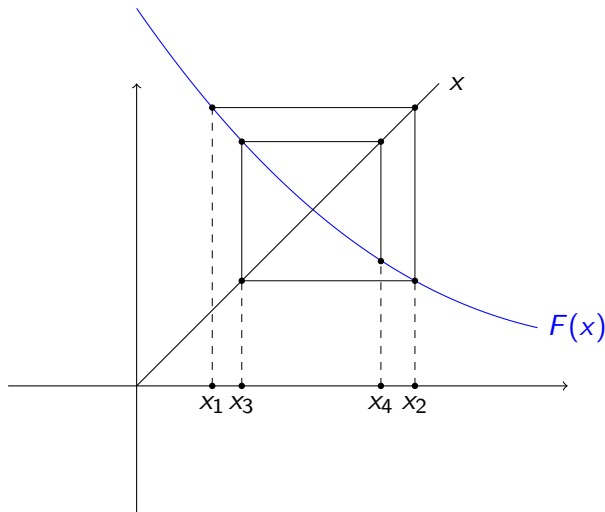
Egyenletek közelítő megoldásai

A szukcesszív approximáció konvergenciája, $-1 < F'(x) < 0$.

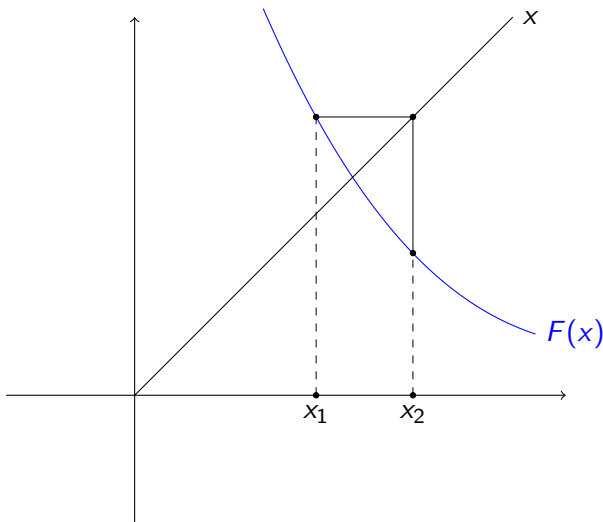


Egyenletek közelítő megoldásai

A szukcesszív approximáció konvergenciája, $-1 < F'(x) < 0$.

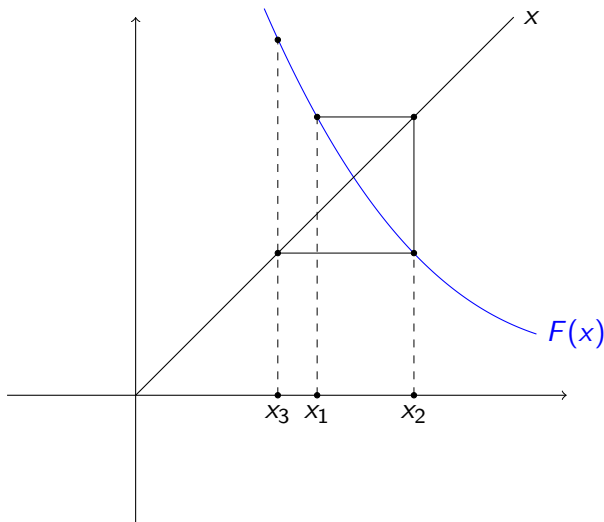


A szukcesszív approximáció divergenciája, $F'(x) < -1$.



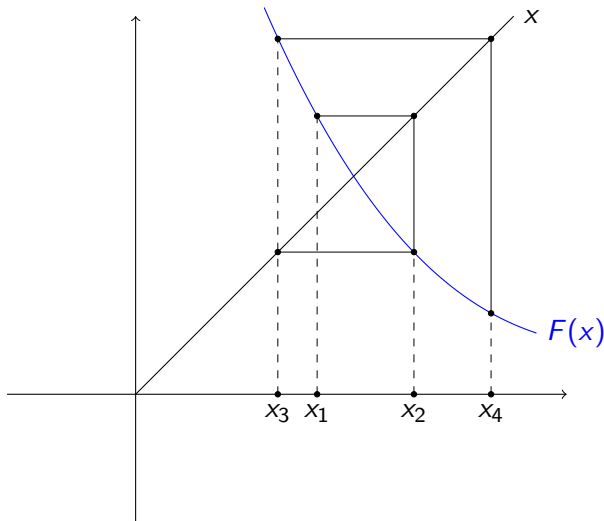
Egyenletek közelítő megoldásai

A szukcesszív approximáció divergenciája, $F'(x) < -1$.



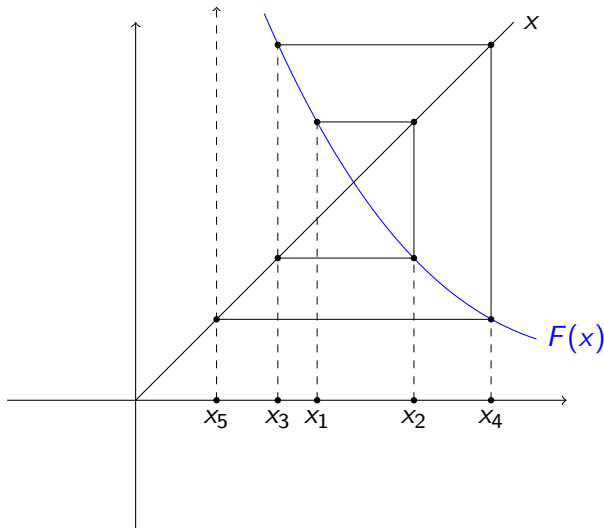
Egyenletek közelítő megoldásai

A szukcesszív approximáció divergenciája, $F'(x) < -1$.



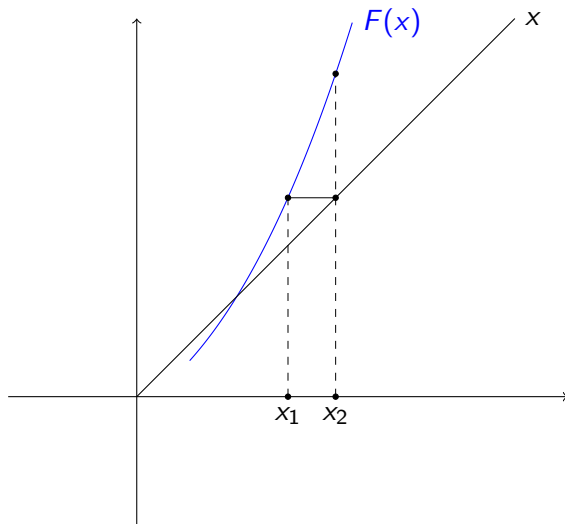
Egyenletek közelítő megoldásai

A szukcesszív approximáció divergenciája, $F'(x) < -1$.



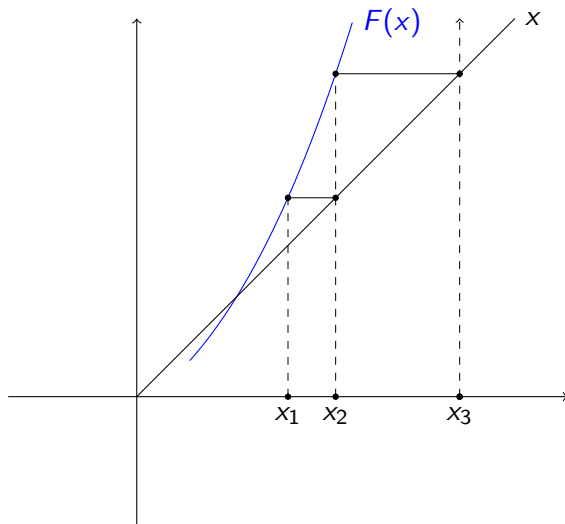
Egyenletek közelítő megoldásai

A szukcesszív approximáció divergenciája, $1 < F'(x)$.



Egyenletek közelítő megoldásai

A szukcesszív approximáció divergenciája, $1 < F'(x)$.



Kezdeti érték probléma

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

Ekvivalens integrál-egyenlet

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

Kezdeti érték probléma

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

Ekvivalens integrál-egyenlet

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

Picard–Lindelöf-féle egzisztencia és unicitás tétel

Ha f Lipschitz tulajdonságú y -ban és folytonos t -ben, akkor a kezdeti érték problémának valamely $\epsilon > 0$ -ra egyértelműen létezik $y(t)$ megoldása a $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ intervallumon.

Picard-iteráció

$$\psi_0(t) = y_0, \quad \psi_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi_{n-1}(s)) ds, \quad n \in \{1, 2, \dots\}$$

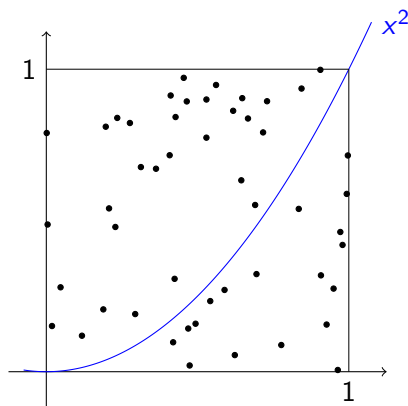
Picard–Lindelöf-féle egzisztencia és unicitás tétel

Ha f Lipschitz tulajdonságú y -ban és folytonos t -ben, akkor a kezdeti érték problémának valamely $\epsilon > 0$ -ra egyértelműen létezik $y(t)$ megoldása a $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ intervallumon.

Picard-iteráció

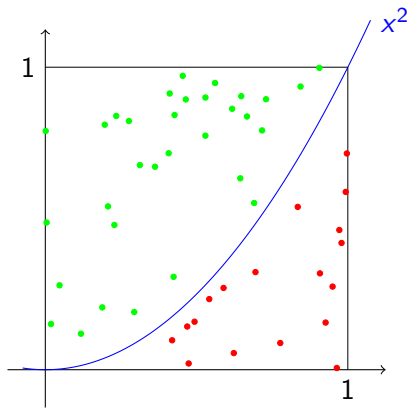
$$\psi_0(t) = y_0, \quad \psi_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi_{n-1}(s)) ds, \quad n \in \{1, 2, \dots\}$$

Monte Carlo-módszer



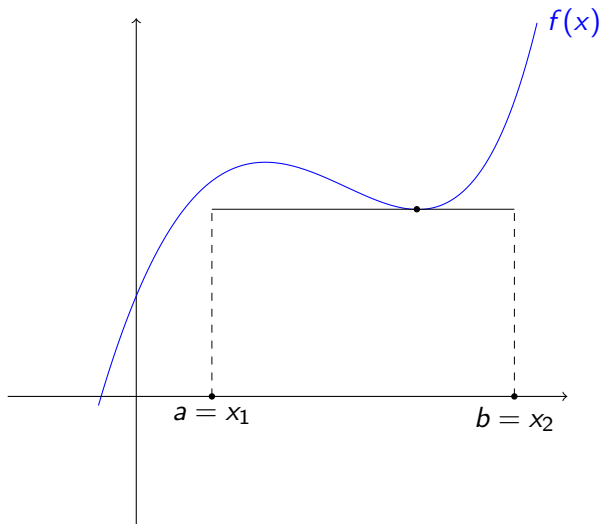
$$\int_0^1 x^2 dx = ?$$

Monte Carlo-módszer

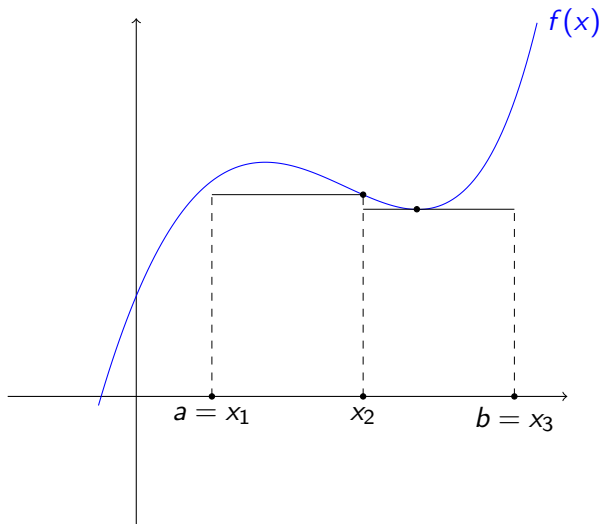


$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \approx 1 \cdot \frac{18}{18 + 32} = 0,36$$

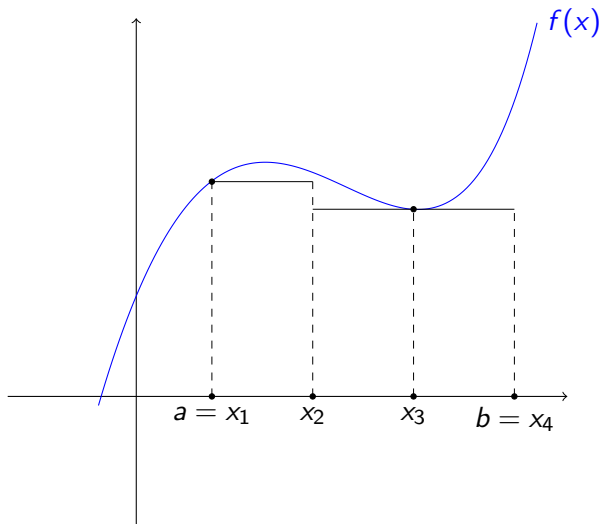
Alsó integrálközelítő összeg



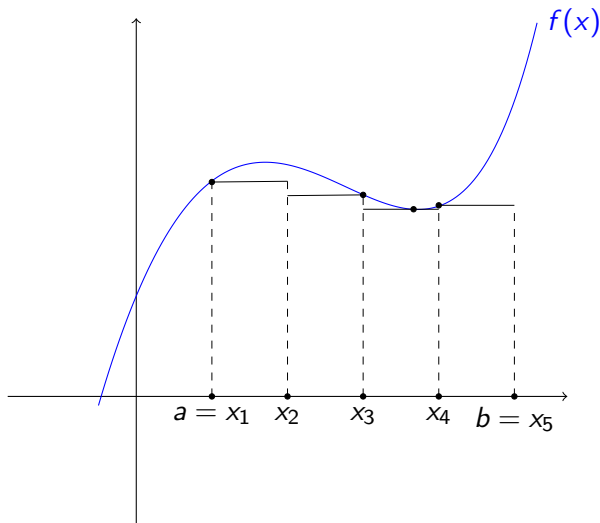
Alsó integrálközelítő összeg



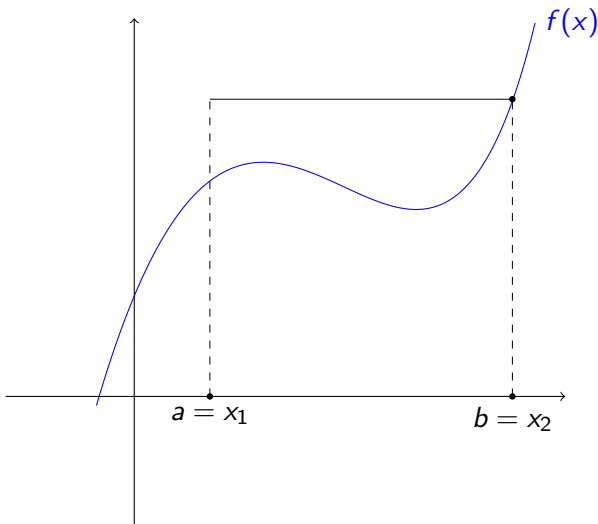
Alsó integrálközelítő összeg



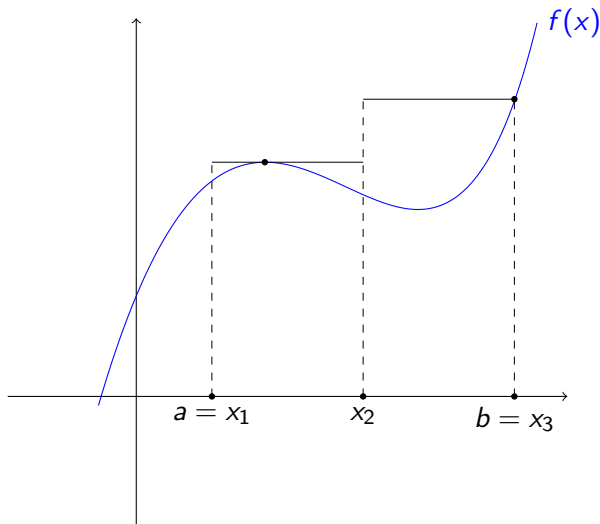
Alsó integrálközelítő összeg



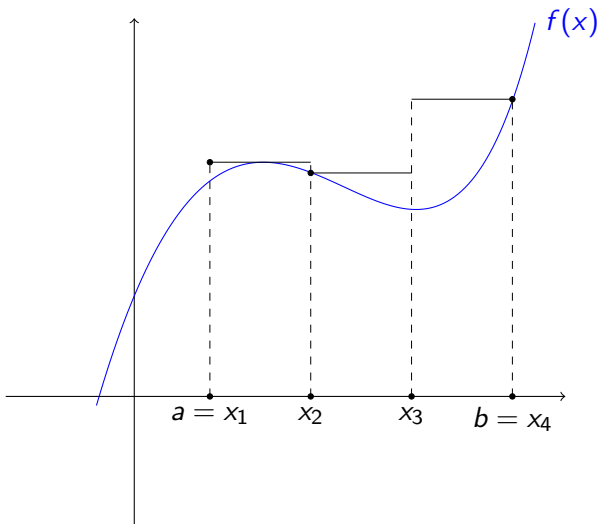
Felső integrálközelítő összeg



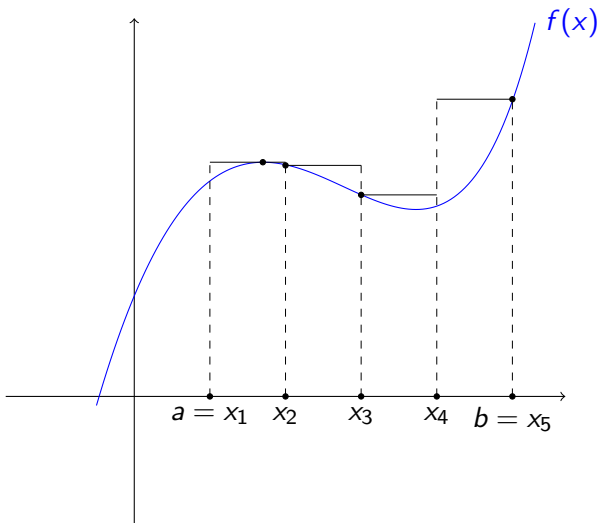
Felső integrálközelítő összeg



Felső integrálközelítő összeg



Felső integrálközelítő összeg



Mostantól csak az ekvidisztáns alappontok esetével foglalkozunk, vagyis

$$h = \frac{b-a}{n-1} = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1}$$

akkor $x_k = x_1 + (k-1)h$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

Alsó integrálközelítő összeg képlete

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=1}^{n-1} \min_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

Mostantól csak az ekvidisztáns alappontok esetével foglalkozunk, vagyis

$$h = \frac{b-a}{n-1} = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1}$$

akkor $x_k = x_1 + (k-1)h$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

Alsó integrálközelítő összeg képlete

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=1}^{n-1} \min_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

Felső integrálközelítő összeg képlete

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=1}^{n-1} \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

Mostantól csak az ekvidisztáns alappontok esetével foglalkozunk, vagyis

$$h = \frac{b-a}{n-1} = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1}$$

akkor $x_k = x_1 + (k-1)h$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

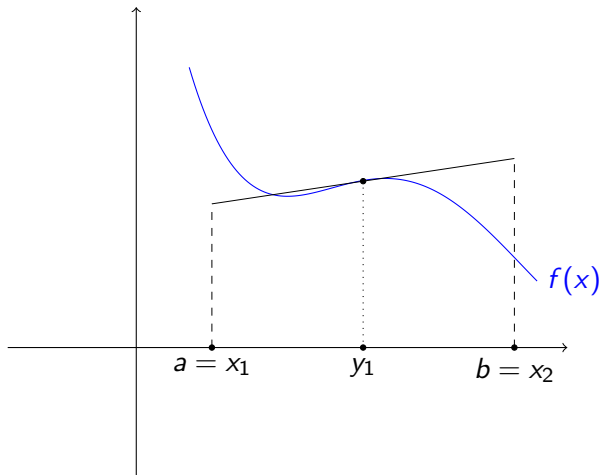
Alsó integrálközelítő összeg képlete

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=1}^{n-1} \min_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

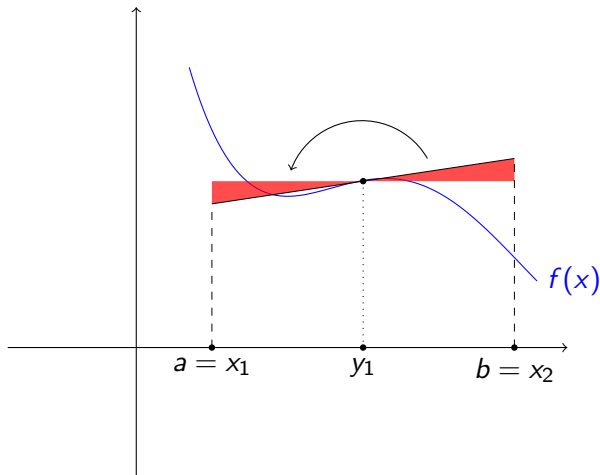
Felső integrálközelítő összeg képlete

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=1}^{n-1} \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

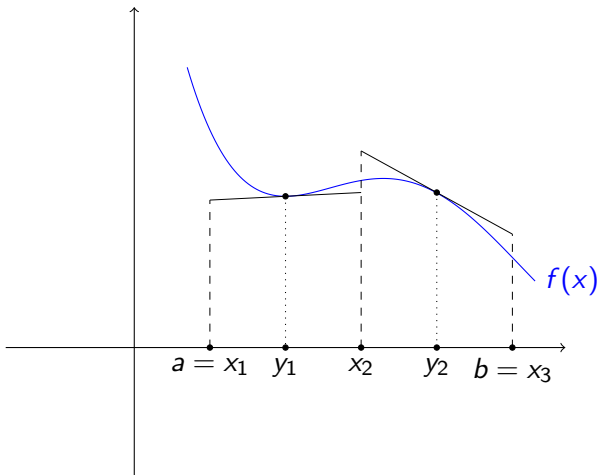
Érintő szabály



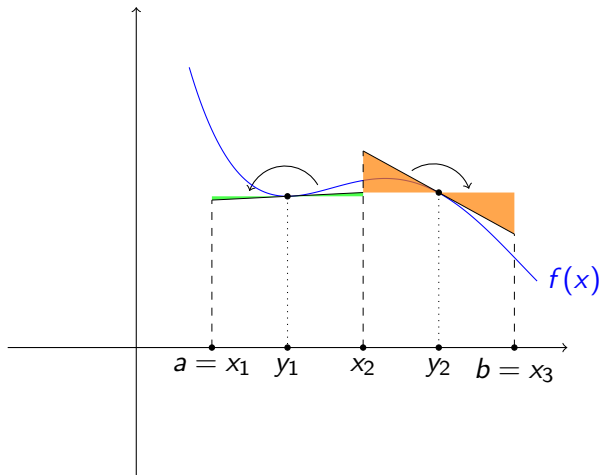
Érintő szabály



Érintő szabály



Érintő szabály



Érintő szabály

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=1}^{n-1} f(z_k)$$

ahol $z_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Érintő szabály

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=1}^{n-1} f(z_k)$$

ahol $z_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Hibaképlete

$$\frac{(b-a)^3}{24(n-1)^2} f''(\xi)$$

Érintő szabály

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=1}^{n-1} f(z_k)$$

ahol $z_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Hibaképlete

$$\frac{(b-a)^3}{24(n-1)^2} f''(\xi)$$

ahol $\xi \in (a, b)$

Érintő szabály

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=1}^{n-1} f(z_k)$$

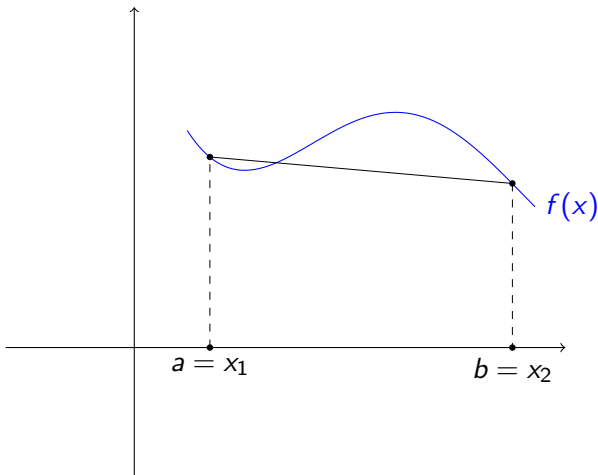
ahol $z_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Hibaképlete

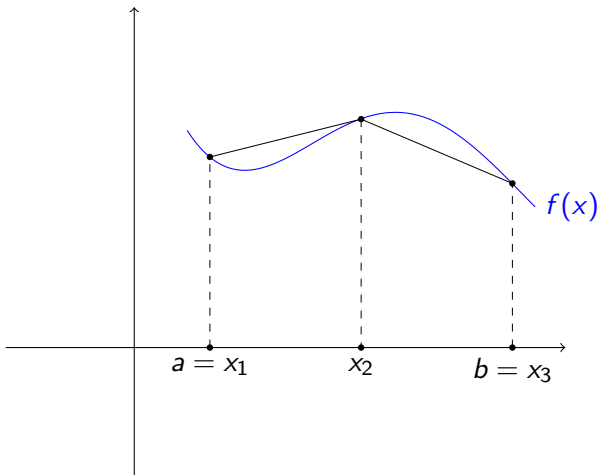
$$\frac{(b-a)^3}{24(n-1)^2} f''(\xi)$$

ahol $\xi \in (a, b)$

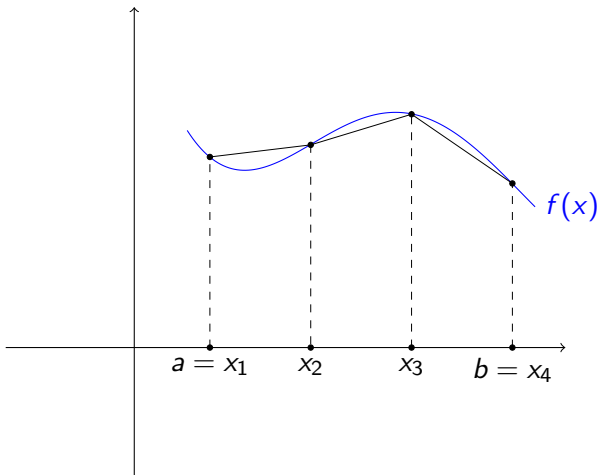
Trapéz szabály



Trapéz szabály



Trapéz szabály



Trapéz szabály

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\sum_{k=1}^n f(x_k) - \frac{f(x_1) + f(x_n)}{2} \right)$$

Hibaképlete

$$\frac{(b-a)^3}{12(n-1)^2} f''(\xi)$$

Trapéz szabály

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\sum_{k=1}^n f(x_k) - \frac{f(x_1) + f(x_n)}{2} \right)$$

Hibaképlete

$$\frac{(b-a)^3}{12(n-1)^2} f''(\xi)$$

ahol $\xi \in (a, b)$

Trapéz szabály

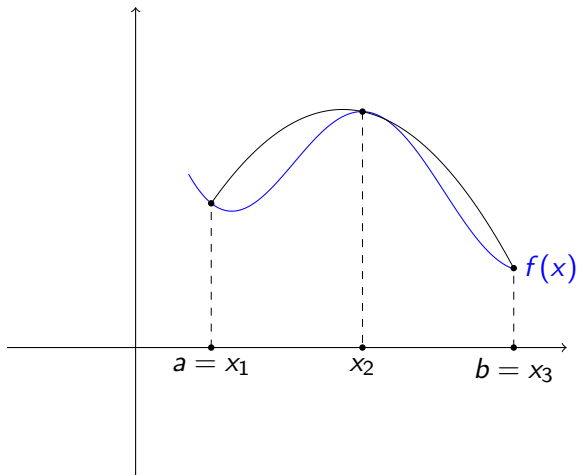
$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\sum_{k=1}^n f(x_k) - \frac{f(x_1) + f(x_n)}{2} \right)$$

Hibaképlete

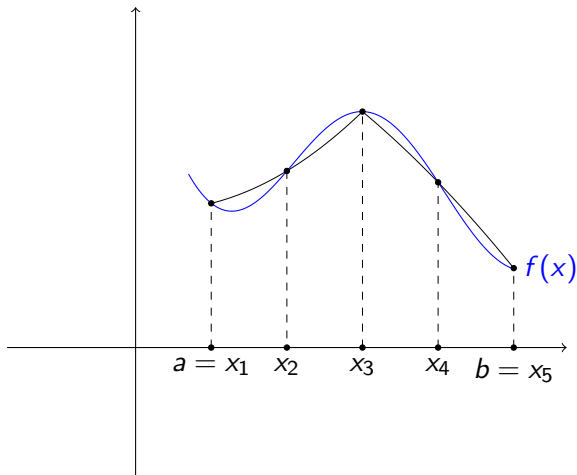
$$\frac{(b-a)^3}{12(n-1)^2} f''(\xi)$$

ahol $\xi \in (a, b)$

Simpson-szabály



Simpson-szabály



Simpson-szabály

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + 2f(x_5) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)),$$

és itt n páratlan.

Simpson-szabály

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + 2f(x_5) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)),$$

és itt n páratlan.

Hibaképlete

$$\frac{(b-a)^5}{180(n-1)^4} f^{(4)}(\xi)$$

Simpson-szabály

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + 2f(x_5) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)),$$

és itt n páratlan.

Hibaképlete

$$\frac{(b-a)^5}{180(n-1)^4} f^{(4)}(\xi)$$

ahol $\xi \in (a, b)$

Simpson-szabály

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + 2f(x_5) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)),$$

és itt n páratlan.

Hibaképlete

$$\frac{(b-a)^5}{180(n-1)^4} f^{(4)}(\xi)$$

ahol $\xi \in (a, b)$

Skaláris szorzat

Ha egy X komplex számtest fölötti vektortér bármely x, y eleméhez hozzá van rendelve egy $\langle x, y \rangle$ skalár úgy, hogy

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0$$

teljesül bármely $x_1, x_2, x, y \in X$ és λ skalár esetén, továbbá $\langle x, x \rangle = 0$ csak $x = 0$ esetén áll fenn, akkor $\langle x, y \rangle$ -t az x és y elemek skaláris (belső) szorzatának nevezzük.

A Hilbert-tér

Az X vektorteret Hilbert-térnek nevezzük, ha skaláris szorzat van rajta értelmezve és teljes a $\varrho(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ metrikában.

Az $x \in X$ elem normáján az $\|x\| = \varrho(x, 0)$ számot értjük.

A Hilbert-tér

Az X vektorteret Hilbert-térnek nevezzük, ha skaláris szorzat van rajta értelmezve és teljes a $\varrho(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ metrikában.

Az $x \in X$ elem normáján az $\|x\| = \varrho(x, 0)$ számot értjük.

Ortogonalis, ortonormált elemek

A Hilbert-tér x, y elemeit ortogonálisnak (merőlegesnek) nevezzük, ha $\langle x, y \rangle = 0$. Ha még $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 1$ is teljesül, az elemeket ortonormálnak nevezzük.

A Hilbert-tér

Az X vektorteret Hilbert-térnek nevezzük, ha skaláris szorzat van rajta értelmezve és teljes a $\varrho(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ metrikában.

Az $x \in X$ elem normáján az $\|x\| = \varrho(x, 0)$ számot értjük.

Ortogonalis, ortonormált elemek

A Hilbert-tér x, y elemeit ortogonálisnak (merőlegesnek) nevezzük, ha $\langle x, y \rangle = 0$. Ha még $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 1$ is teljesül, az elemeket ortonormálnak nevezzük.

Ortogonalis, ortonormált rendszer

Egy Hilbert-tér elemeinek egy rendszerét ortogonalis rendszernek nevezzük, ha közülük bármely két különböző elem ortogonalis. Ha bármely két különböző elem ortonormált, ortonormált rendszerről beszélünk.

Ortogonalis sor

Ha ψ_n egy ortonormált elemekből álló (véges, vagy megszámlálható végtelen) sorozat egy Hilbert-térben (röviden: ortonormált sorozat), α_n skalárok sorozata, akkor a $\sum_{n \in I} \alpha_n \psi_n$ sort ortogonalis sornak nevezzük, ahol $I \subseteq \mathbb{N}$.

Ortogonalis, ortonormált rendszer

Egy Hilbert-tér elemeinek egy rendszerét ortogonalis rendszernek nevezzük, ha közülük bármely két különböző elem ortogonalis. Ha bármely két különböző elem ortonormált, ortonormált rendszerről beszélünk.

Ortogonalis sor

Ha ψ_n egy ortonormált elemekből álló (véges, vagy megszámlálható végtelen) sorozat egy Hilbert-térben (röviden: ortonormált sorozat), α_n skalárok sorozata, akkor a $\sum_{n \in I} \alpha_n \psi_n$ sort ortogonalis sornak nevezzük, ahol $I \subseteq \mathbb{N}$.

Fourier-sor

Legyen ψ_n egy ortonormált sorozat egy H Hilbert-térben. Legyen $x \in H$. Az $\hat{x}_n = \langle x, \psi_n \rangle$ számokat az x elem Fourier-együtthatóinak nevezzük a ψ_n ortonormált sorozatra nézve. Az ezen együtthatókból képzett $\sum_{n \in I} \hat{x}_n \psi_n$ ortogonális sort pedig x Fourier-sorának nevezzük ψ_n -re nézve.

n -edik részletösszeg, Fejér-közép

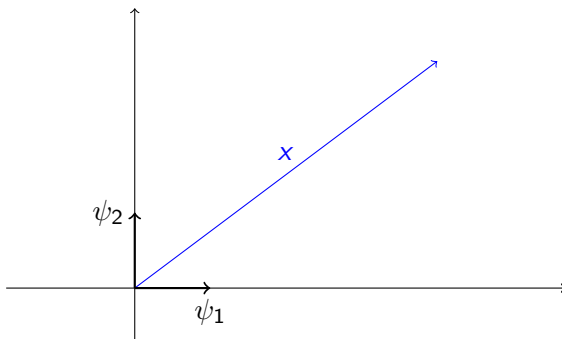
$$S_n x = \sum_{k=1}^n \hat{x}_k \psi_k, \quad \sigma_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k x$$

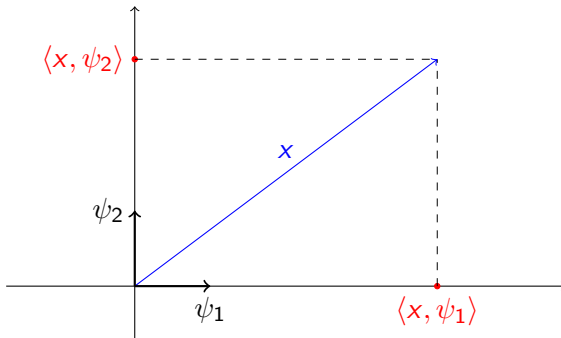
Fourier-sor

Legyen ψ_n egy ortonormált sorozat egy H Hilbert-térben. Legyen $x \in H$. Az $\hat{x}_n = \langle x, \psi_n \rangle$ számokat az x elem Fourier-együtthatóinak nevezzük a ψ_n ortonormált sorozatra nézve. Az ezen együtthatókból képzett $\sum_{n \in I} \hat{x}_n \psi_n$ ortogonális sort pedig x Fourier-sorának nevezzük ψ_n -re nézve.

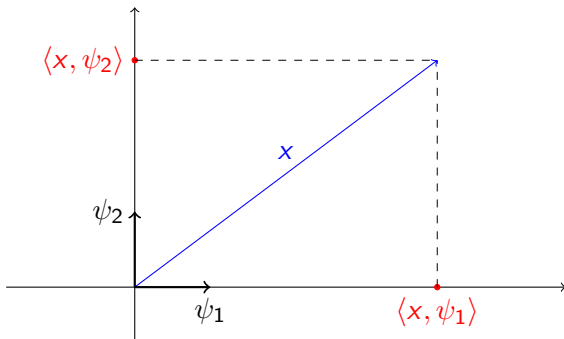
n -edik részletösszeg, Fejér-közép

$$S_n x = \sum_{k=1}^n \hat{x}_k \psi_k, \quad \sigma_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k x$$





$$x = S_2 x = \sum_{k=1}^2 \hat{x}_k \psi_k$$



$$x = S_2 x = \sum_{k=1}^2 \hat{x}_k \psi_k$$

$$\|x - S_n x\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\hat{x}_k|^2$$

Parseval-egyenlet

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in I} |\hat{x}_n|^2$$

$$\|x - S_n x\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\hat{x}_k|^2$$

Parseval-egyenlet

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in I} |\hat{x}_n|^2$$

Bessel-egyenlőtlenség

$$\|x - S_n x\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\hat{x}_k|^2$$

Parseval-egyenlet

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in I} |\hat{x}_n|^2$$

Bessel-egyenlőtlenség

A Parseval-egyenlet pontosan akkor teljesül minden $x \in X$ elemre, ha az ortonormált sorozat teljes, vagyis

$$(\forall n \in I\text{-re } \hat{x}_n = 0) \Rightarrow x = 0.$$

$$\|x - S_n x\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\hat{x}_k|^2$$

Parseval-egyenlet

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in I} |\hat{x}_n|^2$$

Bessel-egyenlőtlenség

A Parseval-egyenlet pontosan akkor teljesül minden $x \in X$ elemre, ha az ortonormált sorozat teljes, vagyis

$$(\forall n \in I \text{-re } \hat{x}_n = 0) \Rightarrow x = 0.$$

Legyen $X = L^2(-\pi, \pi)$, vagyis $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ eleme a térnek, ha $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx < \infty$. Legyen

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Ebben a Hilbert-térben teljes ortonormált sorozat a következő:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Legyen $X = L^2(-\pi, \pi)$, vagyis $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ eleme a térnek, ha $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx < \infty$. Legyen

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Ebben a Hilbert-térben teljes ortonormált sorozat a következő:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Trigonometrikus Fourier-együtthatók

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad (k = 0, 1, \dots)$$

n-edik részletösszeg

$$S_n f(x) = \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right)$$

Trigonometrikus Fourier-együtthatók

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad (k = 0, 1, \dots)$$

n-edik részletösszeg

$$S_n f(x) = \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right)$$

$L^2(-\pi, \pi)$ -beli $f(x)$ trigonometrikus Fourier-sorának konvergenciája

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x) - S_n f(x)\| = 0.$$

Példák további konvergencia tételekre

1. Ha f differenciálható $(-\pi, \pi)$ -en, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = f(x)$
 $\forall x \in (-\pi, \pi)$ -re.

$L^2(-\pi, \pi)$ -beli $f(x)$ trigonometrikus Fourier-sorának konvergenciája

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x) - S_n f(x)\| = 0.$$

Példák további konvergencia tételekre

1. Ha f differenciálható $(-\pi, \pi)$ -en, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = f(x)$
 $\forall x \in (-\pi, \pi)$ -re.
2. (Fejér tétele) Ha f folytonos, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n f(x) = f(x)$
 $\forall x \in (-\pi, \pi)$ -re (egyenletes konvergencia).

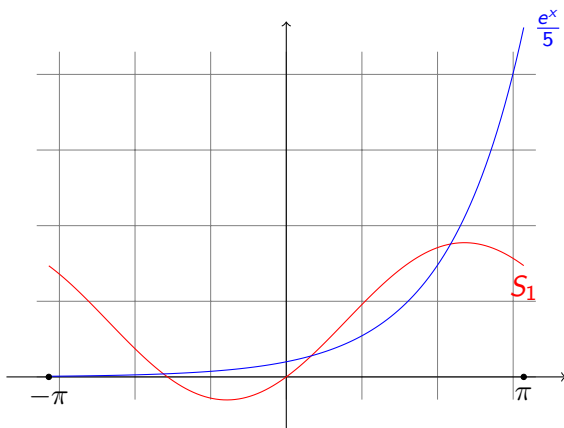
$L^2(-\pi, \pi)$ -beli $f(x)$ trigonometrikus Fourier-sorának konvergenciája

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x) - S_n f(x)\| = 0.$$

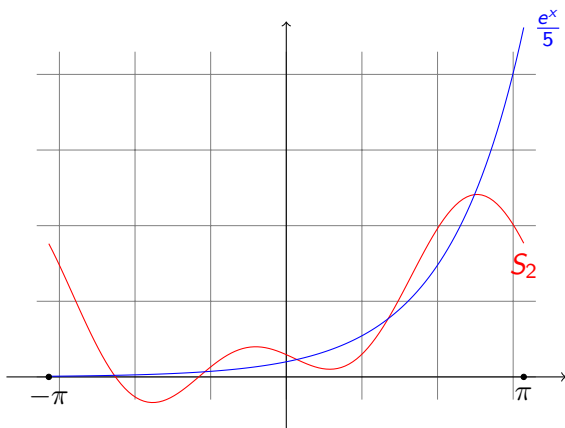
Példák további konvergencia tételekre

1. Ha f differenciálható $(-\pi, \pi)$ -en, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = f(x)$
 $\forall x \in (-\pi, \pi)$ -re.
2. (Fejér tétele) Ha f folytonos, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n f(x) = f(x)$
 $\forall x \in (-\pi, \pi)$ -re (egyenletes konvergencia).

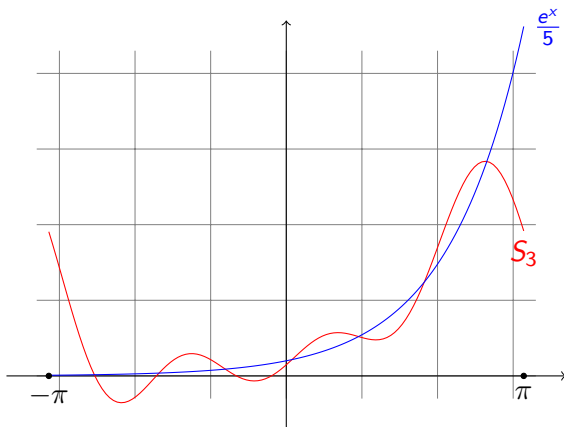
Az $\frac{e^x}{5}$ és trigonometrikus Fourier-sorának részletösszegei:



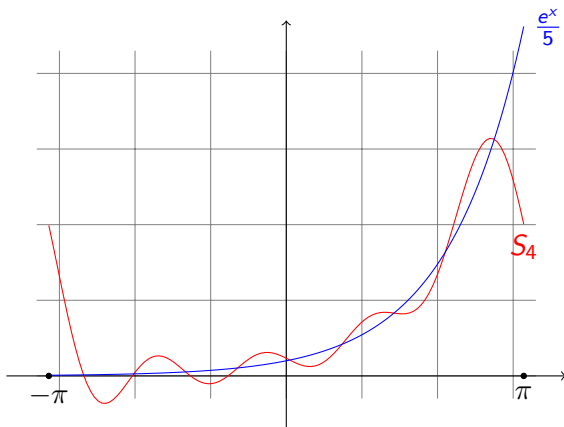
Az $\frac{e^x}{5}$ és trigonometrikus Fourier-sorának részletösszegei:



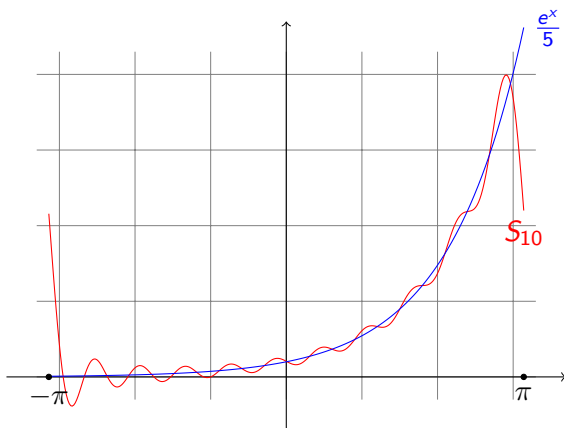
Az $\frac{e^x}{5}$ és trigonometrikus Fourier-sorának részletösszegei:



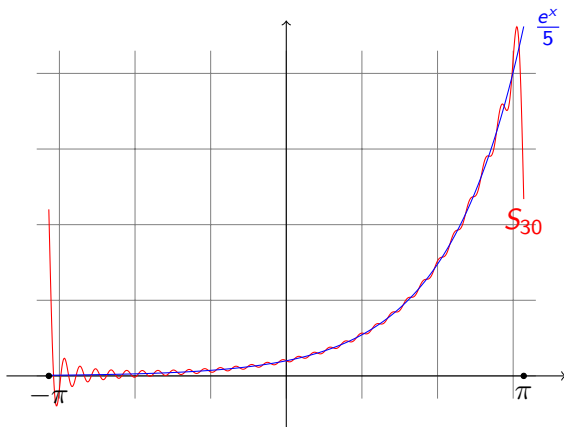
Az $\frac{e^x}{5}$ és trigonometrikus Fourier-sorának részletösszegei:



Az $\frac{e^x}{5}$ és trigonometrikus Fourier-sorának részletösszegei:



Az $\frac{e^x}{5}$ és trigonometrikus Fourier-sorának részletösszegei:



Legyen $X = L^2[0, 1)$, vagyis $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ eleme a térnek, ha $\int_0^1 f(x)^2 dx < \infty$. Legyen

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Írjuk fel $n \in \mathbb{N}$ -et és $x \in [0, 1)$ -et kettes számrendszerben:

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k, \quad n_k \in \{0, 1\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 2^{-k-1}, \quad x_k \in \{0, 1\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Legyen $X = L^2[0, 1)$, vagyis $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ eleme a térnek, ha $\int_0^1 f(x)^2 dx < \infty$. Legyen

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Írjuk fel $n \in \mathbb{N}$ -et és $x \in [0, 1)$ -et kettes számrendszerben:

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k, \quad n_k \in \{0, 1\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

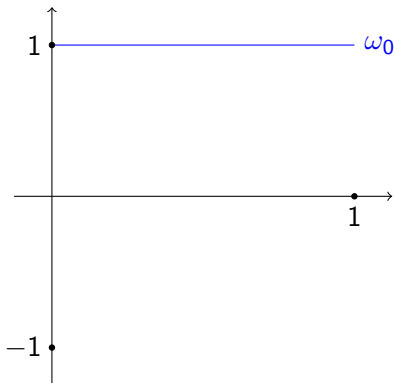
$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 2^{-k-1}, \quad x_k \in \{0, 1\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Az $L^2[0, 1)$ Hilbert-térben teljes ortonormált rendszer a következő:

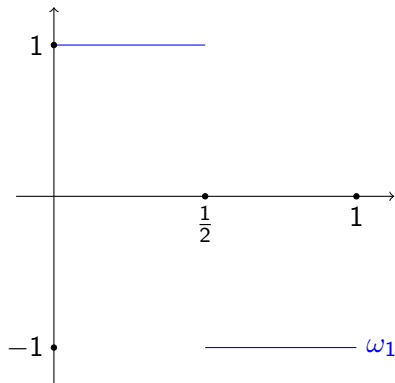
Walsh–Paley-rendszer

$$\omega_n(x) = (-1)^{\sum_{k=0}^{\infty} x_k n_k}$$

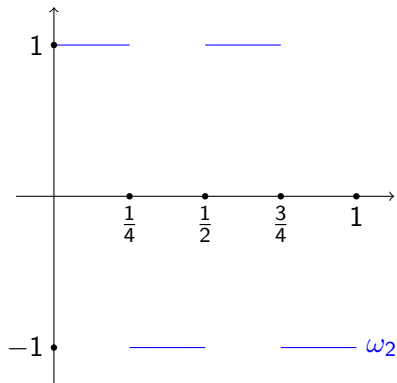
A rendszer függvényei:



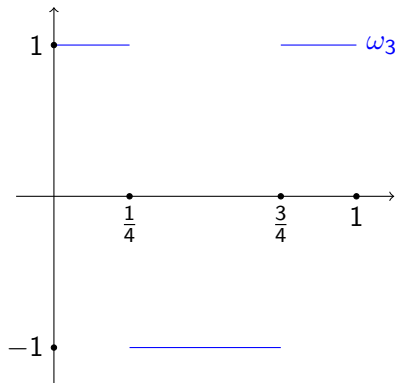
A rendszer függvényei:



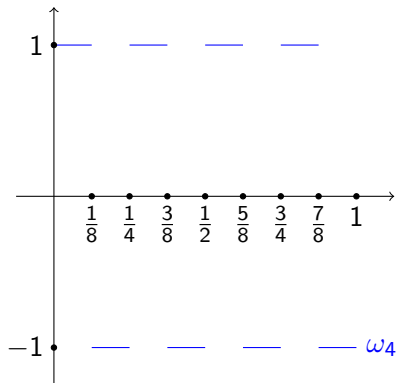
A rendszer függvényei:



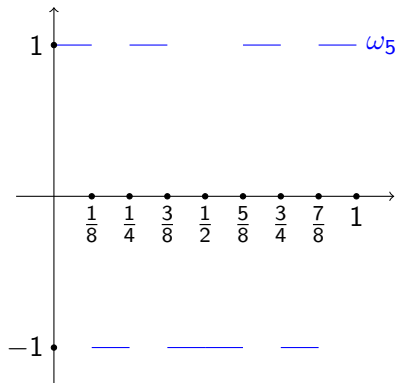
A rendszer függvényei:



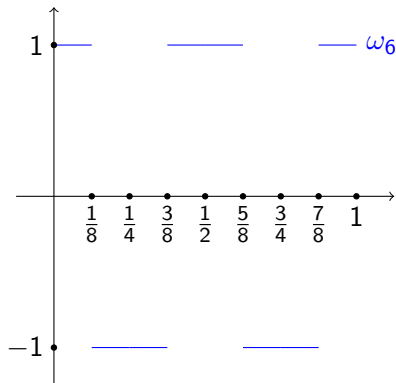
A rendszer függvényei:



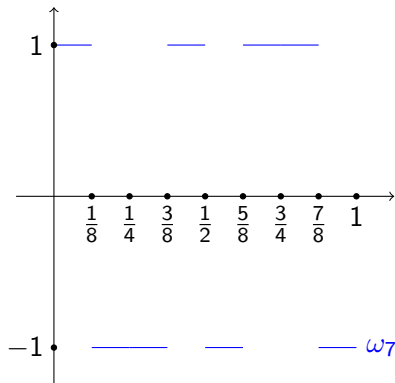
A rendszer függvényei:



A rendszer függvényei:



A rendszer függvényei:



Az L^2 -beli normakonvergencia természetesen itt is igaz.

Példák további konvergencia tételekre

1. Ha f folytonos és korlátos változású $[0, 1)$ -en, akkor
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, 1)\text{-re.}$$

Az L^2 -beli normakonvergencia természetesen itt is igaz.

Példák további konvergencia tételekre

1. Ha f folytonos és korlátos változású $[0, 1)$ -en, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, 1)\text{-re.}$$

2. Ha $f \in L^1[0, 1)$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n} f(x) = f(x)$ m.m. $x \in [0, 1)$ -re.

Az L^2 -beli normakonvergencia természetesen itt is igaz.

Példák további konvergencia tételre

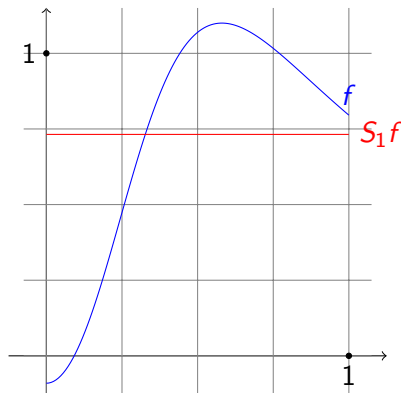
1. Ha f folytonos és korlátos változású $[0, 1)$ -en, akkor
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, 1)\text{-re.}$$
2. Ha $f \in L^1[0, 1)$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n} f(x) = f(x)$ m.m. $x \in [0, 1)$ -re.
3. Ha $f \in L^1[0, 1)$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n f(x) = f(x)$ m.m. $x \in [0, 1)$ -re.

Az L^2 -beli normakonvergencia természetesen itt is igaz.

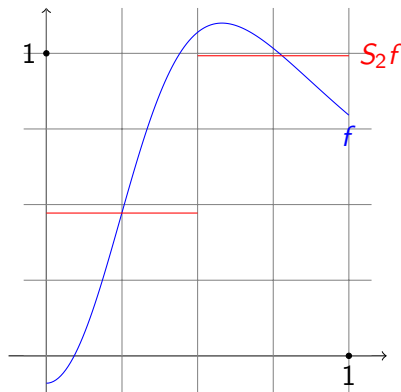
Példák további konvergencia tételekre

1. Ha f folytonos és korlátos változású $[0, 1)$ -en, akkor
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, 1)\text{-re.}$$
2. Ha $f \in L^1[0, 1)$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n} f(x) = f(x)$ m.m. $x \in [0, 1)$ -re.
3. Ha $f \in L^1[0, 1)$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n f(x) = f(x)$ m.m. $x \in [0, 1)$ -re.

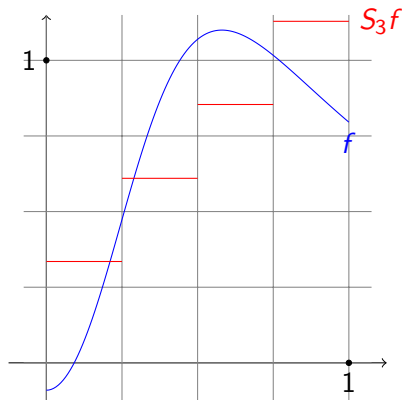
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0,3}\right) + 0,1$ és Walsh–Fourier-sorának részletösszegei:



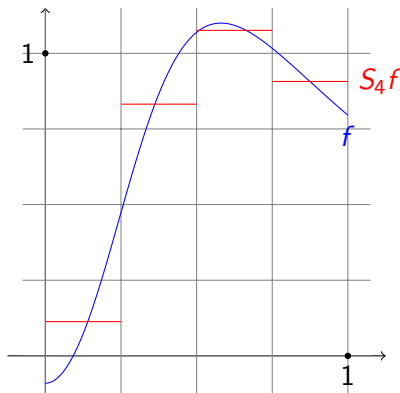
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0,3}\right) + 0,1$ és Walsh–Fourier-sorának részletösszegei:



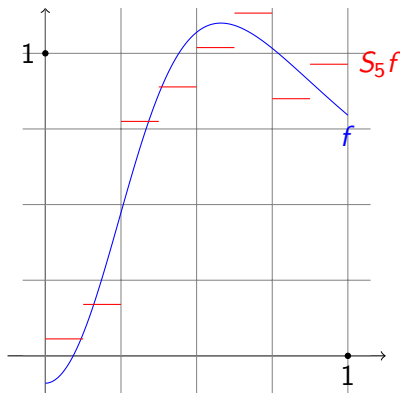
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0,3}\right) + 0,1$ és Walsh–Fourier-sorának részletösszegei:



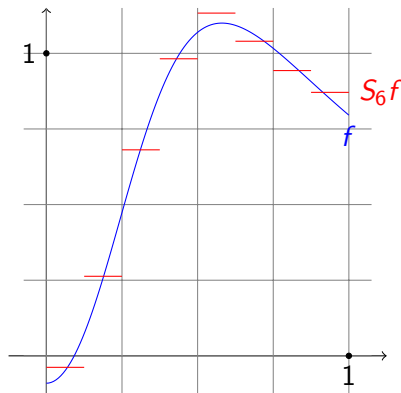
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0,3}\right) + 0,1$ és Walsh–Fourier-sorának részletösszegei:



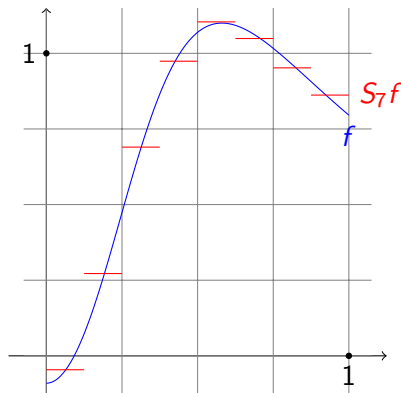
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0,3}\right) + 0,1$ és Walsh–Fourier-sorának részletösszegei:



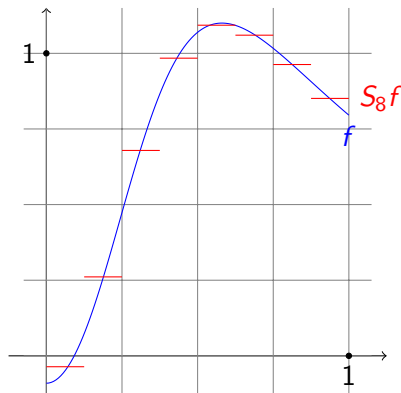
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0,3}\right) + 0,1$ és Walsh–Fourier-sorának részletösszegei:



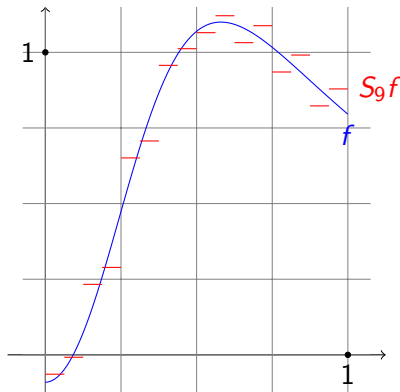
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0,3}\right) + 0,1$ és Walsh–Fourier-sorának részletösszegei:



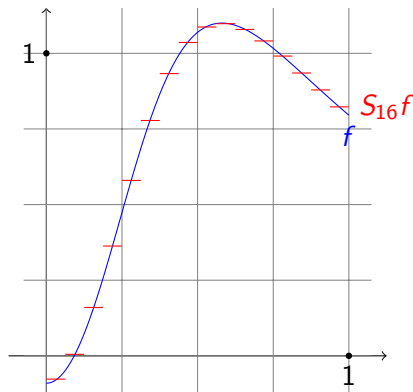
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0,3}\right) + 0,1$ és Walsh–Fourier-sorának részletösszegei:



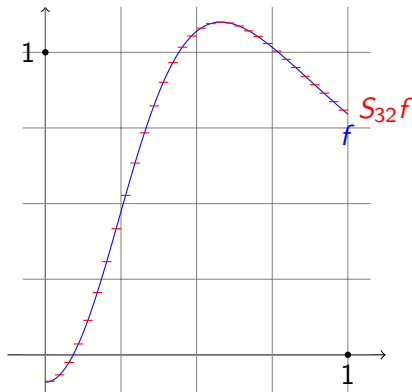
Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0,3}\right) + 0,1$ és Walsh–Fourier-sorának részletösszegei:



Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0,3}\right) + 0,1$ és Walsh–Fourier-sorának részletösszegei:



Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+0,3}\right) + 0,1$ és Walsh–Fourier-sorának részletösszegei:



Irodalomjegyzék:

1. Szidarovszky Ferenc: Bevezetés a numerikus módszerekbe, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1974.
2. Móricz Ferenc: Numerikus analízis I, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.
3. Szőkefalvi Nagy Béla: Valós függvények és függvénytörzsek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
4. Losonczi László: Funkcionálanalízis I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
5. C. W. Onneweer: On uniform convergence for Walsh-Fourier series, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 34, No. 1, 1970.

Készült $\text{\LaTeX}$ Beamer, TikZ, PDF $\text{\LaTeX}$, Maxima és Gnuplot segítségével.

Ha bármilyen hibát talál a prezentációban, kérem jelezze a blahota.istvan@nye.hu címen! Köszönöm!