Magyarország-Románia
Határon Átnyúló Együttműködési
Program 2007-2013

SOFTMAT

Európai Unió
Európai Regionális Fejlesztési Alap

Két ország, egy cél, közös siker!

Numerikus gyökközelítő eljárások

Dr. Blahota István

1. Bevezető

Jelölés: $\mathbb{R}$ jelentse a valós, $\mathbb{P}$ a pozitív egész számok halmazát. Sorozataink mindig $x_n\colon \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ függvények lesznek.

Ebben a rövid jegyzetben megismerkedünk néhány elterjedt numerikus gyökközelítő eljárással. A módszerek különbözőek, viszont közös bennük, hogy mindegyik során egy $f(x)\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény $[a, b]$ valódi intervallumba eső egyetlen zérushelyét keressük egy iterált sorozat segítségével. Mivel az egyetlen zérushelyet monoton, folytonos, előjelváltó függvények esetén garantálja a Bolzano–Weierstrass tétel, a gyakorlatban mindig olyan $[a, b]$ intervallum kiválasztására fogunk törekedni, melyen a függvényünk monoton módon halad át és $f(a)f(b) < 0$. A keletkező sorozat akkor lesz hasznos számunkra, ha a gyökhöz tart, és lehetőleg nem túl lassan. Általánosságban elmondható, hogy azonos típusú módszer alapján generált sorozatok közül azok konvergenciája gyorsabb, melyek a határérték közeléből indulnak.

Természetesen előfordulhat az a szerencsés eset is, hogy a sorozat valamely tagja megegyezik a keresett értékkel. Ekkor az eljárás véges lépésben véget ér, ez azonban olyan ritkán fordul elő, hogy gyakorlati jelentősége nem mérhető.

A módszerek ismertetése mellett konkrét, kidolgozott feladatokat találunk, továbbá a legtöbb módszer mellé hibaszámítási eljárást is mutatunk.

http://www.huro-cbc.eu

2. Inverz interpoláció

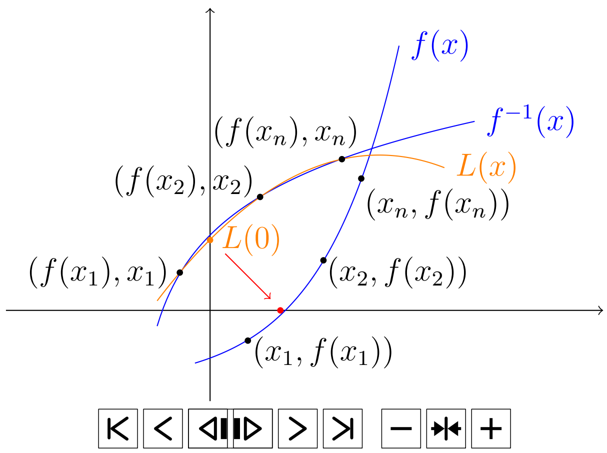
Az inverz interpoláció egy, az interpolációs számításokon alapuló gyökközelítő módszer.

Tegyük fel, hogy ismerjük az $[a, b]$ intervallumon folytonos és szigorúan monoton, valamint előjelet váltó $f(x)$ függvény értékeit az $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ különböző pontokban. A feltételek miatt $f(x)$ invertálható, továbbá az $f(x_1), \dots, f(x_n)$ értékek különbözőek.

Ha megcseréljük az értékeket a helyekkel, és meghatározzuk az így keletkezett $(f(x_1), x_1), \dots, (f(x_n), x_n)$ koordinátapárú pontokon átmenő $L(x)$ interpolációs polinomot, valójában $f(x)$ inverzére készítünk egy közelítést. Ebből következik, hogy $L(0)$ az $f(x) = 0$ egyenlet $[a, b]$ intervallumbeli közelítő megoldását adja (lásd az 1. ábrát).

Az interpolációs polinom egyenletét bármilyen tanult módszerrel kiszámolhatjuk. Ez esetben azonban nincs is szükségünk az egész polinomra, hiszen csak egy pontban, a nullában keressük az értékét. Ezt figyelembe véve lényegesen csökkenthetjük az eljárás műveletigényét. Például Lagrange-interpolációt használva elegendő $\forall i \in \{1, \dots, n\}$-re az $l_i(0)$ konstansokat kiszámolni, majd ezeket kombinálni az alappontokban kapott függvényértékekkel. Azaz azt kapjuk, hogy

$$L(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i l_i(0) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_i)} \right)$$



1. ábra. Az inverz interpoláció sémája

1. Feladat. *Adjunk közelítést az* $f(x) = 5x - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ *függvény (lásd a 2. ábrát) zérushelyére inverz interpolációval! Használjuk az* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{2}{3}$, $x_5 = 1$ *alappontokat!*

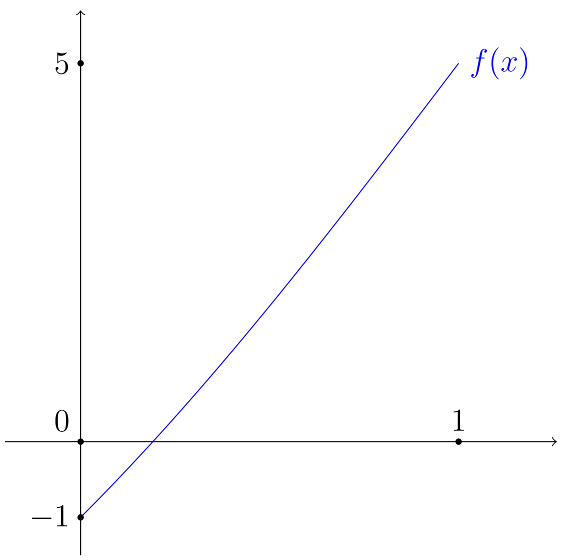
Megoldás. Írjuk fel először az $l_k(0)$, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ konstansokat (6 tizedesjegyre kerekítve)!

$$\begin{aligned} l_1(0) &\approx 0,175813 \\ l_2(0) &\approx 1,665399 \\ l_3(0) &\approx -1,226588 \\ l_4(0) &\approx 0,408606 \\ l_5(0) &\approx -0,023230 \end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned} L(0) &\approx 0 \cdot 0,175813 + \frac{1}{3} \cdot 1,665399 + \frac{1}{2} \cdot (-1,226588) \\ &\quad + \frac{2}{3} \cdot 0,408606 + 1 \cdot (-0,023230) \\ &= 0,191013. \end{aligned}$$

□



2. ábra. Az $f(x) = 5x - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ függvény a $[0, 1]$ intervallumon

A közelítés pontosságára az interpolációnál tanult hibaképletek segítségével következtethetünk. Ha nem kielégítő a kapott pontosság, folytathatjuk eljárásunkat oly módon, hogy az egyik, mondjuk a gyöktől legtávolabbra lévő alappontot kicseréljük az előállt gyökközelítéssel, majd erre az alappontrendszerre újra alkalmazzuk az inverz interpolációt. Ily módon alappont n-esek iterált sorozatát kapjuk. A sorozat minden tagja egy gyökközelítés; az így kapott gyökközelítő sorozat gyökhöz tartási feltételének meghatározásához szintén az interpolációnál tanultakat használhatjuk fel.

A gyakorlatban az inverz függvény n-edik deriváltjának kiszámolása igen bonyolult lehet, így az inverz interpoláció hibájának becslésével nem foglalkozunk.

Megjegyzés: Ha az 1. Feladat eredményét (ami valójában 4 tizedesjegyre pontos) bevisszük a tőle legtávolabbi alappont, az 1 helyére, az ily módon kapott $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{2}{3}$, $x_5 = 0,191013$ alappontokra illeszkedő interpolációs polinom értéke $0,1910603867$. Ez már 8 jegyében pontos. Szükség esetén az eljárás tovább folytatható.

A megjegyzés csak illusztráció az iterált sorozat képzésére, a függvény gyökének nagy pontosságú közelítését más, könnyebben becsülhető hibájú módszer segítségével kaptuk.

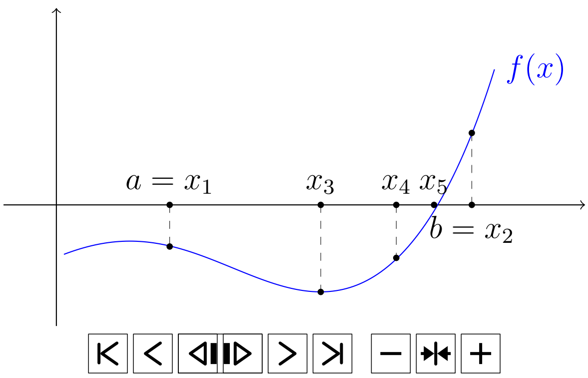
3. Intervallumfelezés

Legyen az $[a, b]$ egy olyan intervallum, amin az $f(x)$ folytonos függvény pontosan egyszer vált előjelet. Legyen $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = \frac{a+b}{2}$. Az x_4 értéke legyen az $[x_1, x_3]$ intervallum felezési pontja, ha ott a függvény előjelet vált, egyébként az $[x_3, x_2]$ intervallum felezési pontja, és így tovább, mindig azt az intervallumot felezzük, ahol előjelváltás történik. Így generálunk egy x_n sorozatot (lásd a 3. ábrát).

1. Tétel. *Tekintsük az $[a, b]$ intervallumot, amin az $f(x)$ folytonos függvénynek pontosan egy zérushelye van. Legyen $x_1 = a$ és $x_2 = b$, valamint jelöljük x^*-gal $f(x)$ zérushelyét $[a, b]$-ben. Ha x_n az intervallumfelezési módszerrel keletkezett sorozat, akkor $x_n \to x^*$, valamint*

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^{n-2}}.$$

Bizonyítás. Mivel a sorozat harmadik tagjától az $[a, b]$ intervallum minden lépésben feleződik (indukció), ezért a kívánt egyszerű hibaképletet kapjuk a sorozat tagjainak a keresett zérushelytől való eltérésére.



3. ábra. Az intervallumfelezés lépései

Könnyű látni továbbá, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-2}} = 0$ miatt a sorozat tagjai tetszőleges előre megadott pontossággal megközelíthetik a függvény zérushelyét, vagyis a konvergencia mindig garantált (bár – a későbbi módszerekkel összehasonlítva – nem számít gyorsnak). $\square$

Az intervallumfelezés az egyik legegyszerűbb elméleti háttérrel rendelkező gyökközelítő eljárás, de gyakorlati kivitelezése nem túl hatékony.

2. Feladat. *Adjunk közelítést az $f(x) = 5x - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ függvény zérushelyére intervallumfelezéssel! Induljunk ki a $[0, 1]$ intervallumból! Keressük a közelítő sorozat hatodik tagját! Legfeljebb mekkora az eltérése a tényleges zérushelytől? A sorozat hányadik tagjától kezdve kapunk legalább négy tizedesjegy pontosságot?*

Megoldás. Vegyük észre, hogy a $[0, 1]$ intervallum alkalmas választás, hiszen $f(0) < 0 < f(1)$, és $f'(x) = 5 + \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \geq 5 - \frac{\pi}{2} > 0$ miatt $f(x)$ szigorúan monoton, így egyetlen zérushely van. Tehát ekkor $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{2}$. Mivel $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, így $x_4 = \frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$, valamint $f\left(\frac{1}{4}\right) > 0$, ezért $x_5 = \frac{0+\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}$. Az eljárást tovább folytatva $f\left(\frac{1}{8}\right) < 0$, ahonnan $x_6 = \frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{16} = 0,1875$.

A hibaképlet szerint x_6 legfeljebb $\frac{1}{16} = 0,0625$ távolságra van a helyes értéktől.

A négy tizedesjegy pontosság garantálásához az

$$\frac{1-0}{2^{n-2}} < 0,0001$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk, ami ekvivalens a $40000 < 2^n$ egyenlőtlenséggel. Mivel $2^{15} = 32768$ és $2^{16} = 65536$, ezért a megoldás $n \geq 16$. Ez azt jelenti, hogy a sorozat 16. tagjától garantált a legalább négy tizedesjegy pontosság (ami viszonylag lassú konvergenciát jelent). $\square$

4. Húr-, szelő-, Newton-, és módosított Newton-módszer

A címben említett módszerek rokonok, egymás módosításainak tekinthetőek. Hasonlóságuk miatt több közös, illetve hasonló jelölést, rövidítést fogunk használni. Ezek a következők.

1. Definíció. *Tekintsük az $[a, b]$ intervallumot, amin az $f(x)$ folytonos függvénynek pontosan egy zérushelye van. Legyen $x_n \in [a, b]$, valamint jelöljük x^*-gal $f(x)$ zérushelyét $[a, b]$-ben. Ha $f(x)$ kétszer differenciálható, valamint $\exists m$ és $\exists M$, melyekre $\forall x \in [a, b]$ esetén $0 < m \leq |f'(x)|$ és $|f''(x)| \leq M$, akkor legyen $K = \frac{M}{2m}$, valamint $d_n = K|x_n - x^*|$. Amennyiben $\max\{d_1, d_2\} < 1$, akkor húr- és szelőmódszer esetén legyen $d = \max\{d_1, d_2\}$, míg Newton-módszer esetén legyen $d = d_1$, ha $d_1 < 1$.*

Megjegyzés: A későbbiekben világossá fog válni, hogy az az érdekünk, hogy d minél kisebb legyen. Ehhez m-et a lehető legnagyobbra, míg M-et a lehető legkisebbre érdemes választani.

4.1. Húrmódszer

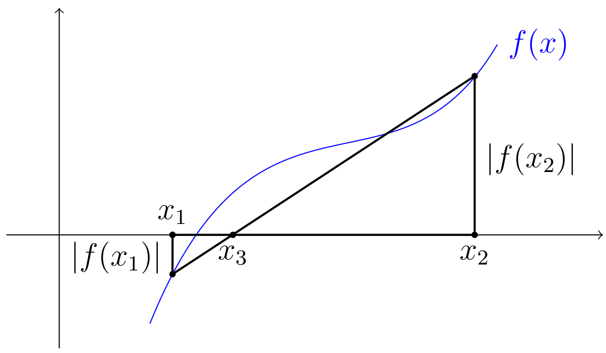
Tekintsük az $[a, b]$ intervallumot, amin az $f(x)$ folytonos függvény egyszer előjelet vált. Legyen $x_1 = a$ és $x_2 = b$.

Az intervallumfelezési eljárástól eltérően x_3 ne az $[x_1, x_2]$ intervallum felezőpontja legyen, hanem az a pont, mely az $[x_1, x_2]$ intervallumot végpontjaiban felvett függvényértékei abszolút értékének arányában osztja. Figyelembe véve a keletkező háromszögek hasonlóságát (lásd a 4. ábrát) ennek gyakorlati megvalósítása igen egyszerű, hiszen x_3-at az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ koordinátájú pontokon keresztül menő szakasz metszi ki az x tengelyből. Ez az elv azon megfigyelésen alapul, hogy a zérushely általában ahhoz a végponthoz van közelebb, melyben a függvény közelebb van az x tengelyhez.

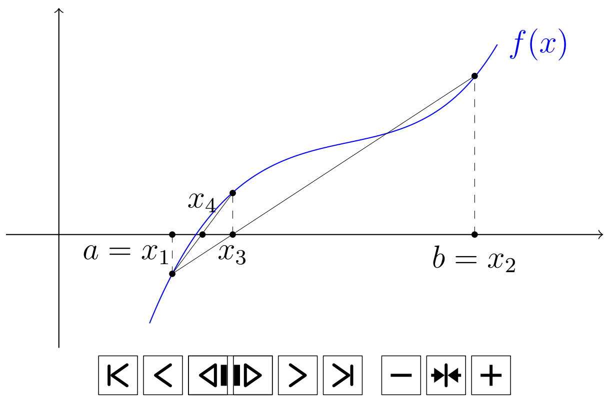
Ezután a keletkezett $[x_1, x_3]$ és $[x_3, x_2]$ intervallumok közül – az intervallumfelezési eljáráshoz hasonlóan – azt osztjuk tovább ugyanezen elv szerint, melyen a függvény előjelet vált (lásd az 5. ábrát).

Mivel az $(a, f(a))$ pontból $(b, f(b))$ pontba mutató irányvektor koordináta-párja $(b-a, f(b)-f(a))$, az $(a, f(a))$ ponton átmenő egyenes irányvektoros egyenlete

$$(f(b) - f(a))x - (b - a)y = (f(b) - f(a))a - (b - a)f(a) = f(b)a - f(a)b.$$



4. ábra. A húrmódszer alapja az arányos osztás elve



5. ábra. A húrmódszer lépései

Az egyenes x tengellyel való metszéspontjának első koordinátáját (esetünkben x_3-at) az $y = 0$ helyettesítéssel, majd x-et kifejezve kapjuk

$$x_3 = x = \frac{f(b)a - f(a)b}{f(b) - f(a)} = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b) - f(a)}.$$

A sorozat későbbi tagja az azt megelőző és egy korábbi tagból származnak ezen elv szerint, vagyis

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_k)}{f(x_{n-1}) - f(x_k)}. \tag{1}$$

Az, hogy k pontosan mennyi, attól függ, hogy az $f(x)$ függvény az x_{n-1}-től balra, vagy jobbra lévő intervallumban vált előjelet. Ennek az intervallumnak lesz egyik végpontja x_{n-1}, a másik pedig x_k.

2. Tétel. *Legyen $f(x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelynek pontosan egy zérushelye van $[a,b]$-n. Ekkor ha x_n a húrmódszerrel keletkező sorozat, akkor $x_n \to x^*$.*

A tétel bizonyítása meghaladja jegyzetünk kereteit, megtalálható például [1]-ben.

3. Tétel. *Legyen $f(x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény, amelynek pontosan egy zérushelye van $[a,b]$-n. Ekkor ha x_n a húrmódszerrel keletkező sorozat, továbbá fennállnak az 1. Definícióban szereplő feltételek, akkor*

$$d_n \leq d^{n-1}.$$

Bizonyítás. Vonjunk ki a sorozatot definiáló (1) egyenlőség mindkét oldalából x^*-ot, majd a jobb oldalon hozzunk közös nevezőre:

$$\begin{aligned} x_n - x^* &= x_{n-1} - x^* - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_k)}{f(x_{n-1}) - f(x_k)} \\ &= \frac{-f(x_k)x_{n-1} - f(x_{n-1})x^* + f(x_k)x^* + f(x_{n-1})x_k}{f(x_{n-1}) - f(x_k)} \\ &= \frac{(x_k - x^*)f(x_{n-1}) - (x_{n-1} - x^*)f(x_k)}{f(x_{n-1}) - f(x_k)}. \end{aligned}$$

Alakítsuk át a kapott kifejezést a következőképpen:

$$\begin{aligned} \frac{x_n - x^*}{(x_{n-1} - x^*)(x_k - x^*)} &= \frac{\dfrac{f(x_{n-1})}{x_{n-1} - x^*} - \dfrac{f(x_k)}{x_k - x^*}}{f(x_{n-1}) - f(x_k)} \\ &= \frac{\dfrac{f(x_{n-1})}{x_{n-1} - x^*} - \dfrac{f(x_k)}{x_k - x^*}}{x_{n-1} - x_k} \frac{x_{n-1} - x_k}{f(x_{n-1}) - f(x_k)}. \end{aligned}$$

Vegyük észre a kapott differenciahányadosokat! Mivel

$$\left(\frac{f(x)}{x - x^*}\right)' = \frac{f'(x)(x - x^*) - f(x)}{(x - x^*)^2},$$

a Cauchy-féle középértéktétel miatt

$$\frac{x_n - x^*}{(x_{n-1} - x^*)(x_k - x^*)} = \frac{f'(\xi)(\xi - x^*) - f(\xi)}{(\xi - x^*)^2} \frac{1}{f'(\xi)},$$

ahol ξ értéke x_k és x_{n-1} közé esik. Felhasználva a Taylor-formulát, illetve a Lagrange-féle maradéktagot

$$0 = f(x^*) = f(\xi) + f'(\xi)(x^* - \xi) + \frac{f''(\eta)}{2}(x^* - \xi)^2$$

adódik, ahol η most ξ és x közé esik. Mindezeket összevetve

$$\frac{x_n - x^*}{(x_{n-1} - x^*)(x_k - x^*)} = \frac{f''(\eta)}{2f'(\xi)},$$

ahonnan az 1. Definíció jelöléseivel

$$\frac{|x_n - x^*|}{|x_{n-1} - x^*||x_k - x^*|} \leq \frac{M}{2m} = K,$$

így

$$K|x_n - x^*| \leq K|x_{n-1} - x^*|K|x_k - x^*|,$$

vagyis

$$d_n \leq d_{n-1}d_k. \tag{2}$$

Ezt az összefüggést felhasználva a $d_1 \leq d < 1$ és $d_2 \leq d < 1$ egyenlőtlenségek miatt $d_3 \leq d_2 d_1 \leq d^2 \leq d < 1$ teljesül. Teljes indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy a tétel állítása igaz $n = j - 1$-re, vagyis $d_{j-1} \leq d^{j-2}$, valamint, hogy $\forall k < j - 1$ esetén $d_k < d$. Ez éppen azt jelenti, hogy

$$d_j \leq d_{j-1}d_k \leq d^{j-2}d = d^{j-1},$$

továbbá $d_{j-1} \leq d^{j-2} = d^{j-3}d < d$ is teljesül. □

3. Feladat. *Adjunk közelítést az $f(x) = 5x - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ függvény zérushelyére húrmódszerrel! Induljunk ki a $[0, 1]$ intervallumból! Keressük a közelítő sorozat hatodik tagját! Legfeljebb mekkora az eltérése a tényleges zérushelytől? A sorozat hányadik tagjától kezdve kapunk legalább négy tizedesjegy pontosságot?*

Megoldás. Ahogy a 2. Feladat megoldásánál láthattuk, a $[0, 1]$ intervallum valóban alkalmas választás, hiszen $f(x)$ szigorúan monoton módon halad át rajta, valamint egy helyen metszi az x tengelyt. Legyen tehát $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$, ahonnan $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{1}{6}$. Mivel $f\left(\frac{1}{6}\right) < 0$, így $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} \approx 0,188195$. Tovább folytatva $x_5 \approx 0,190728$, majd $x_6 \approx 0,191022$ adódik.

Most $x \in [0, 1]$, ezért $|f'(x)| = \left|5 + \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right| \geq 5 = m$, valamint $|f''(x)| = \left|\frac{\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right| \leq \frac{\pi^2}{4} < \frac{5}{2} = M$, így $K = \frac{1}{4}$. Mivel $|x_n - x^*| < 1$, ezért $d = \frac{1}{4}$ megfelelő, ahonnan $\frac{1}{4}|x_6 - x^*| = d_6 \leq d^5 = \frac{1}{1024}$, vagyis $|x_6 - x^*| \leq \frac{1}{256}$.

A hibaképlet szerint tehát x_6 legfeljebb $\frac{1}{256} < 0,004$ távolságra van a helyes értéktől.

Mivel

$$\frac{1}{4}|x_n - x^*| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},$$

a legalább négy tizedesjegyre pontos tagok meghatározása az

$$|x_n - x^*| \leq 4^{2-n} < 0,0001$$

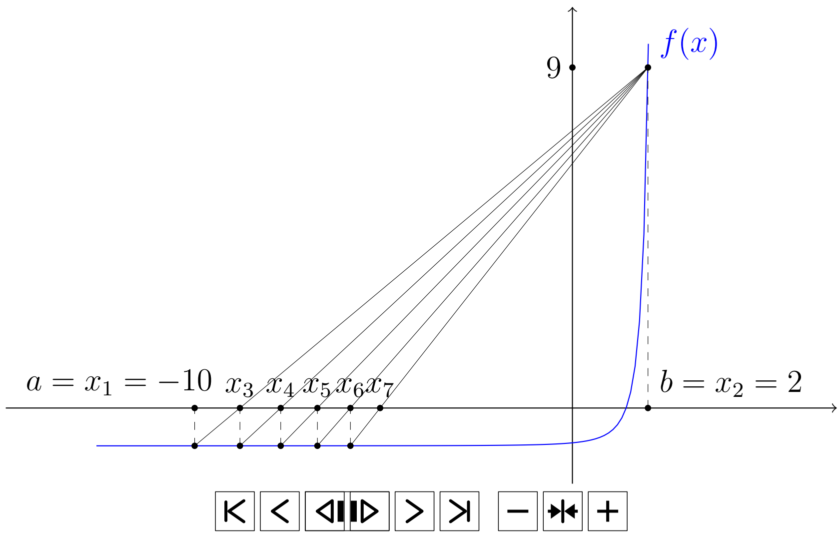
egyenlőtlenségre, majd az ezzel ekvivalens

$$n > 2 - \frac{\ln(0,0001)}{\ln(4)} \approx 8,64$$

egyenlőtlenségre vezet. Tehát $n \geq 9$. □

Megjegyzés: Ha összehasonlítjuk a 2. és a 3. Feladatok megoldásait, láthatjuk, hogy ez esetben a húrmódszer gyorsabb konvergenciát eredményezett, mint az intervallumfelezés. Ez gyakran van így, de sajnos nem mindig. Egyszerűen szerkeszthetőek olyan példák, melyben a húrmódszer konvergenciája szemlátomást lassabban indul.

Tekintsük például az $f(x) = \frac{10}{(5-2x)^3} - 1$ függvényt a $[-10, 2]$ intervallumon. A 6. ábrán látható, hogy még a sorozat hetedik tagja sem érte el az intervallum felét, pedig a gyök még azon is jóval túl van, a b pont közelében.



6. ábra. A húrmódszer néha igen lassú

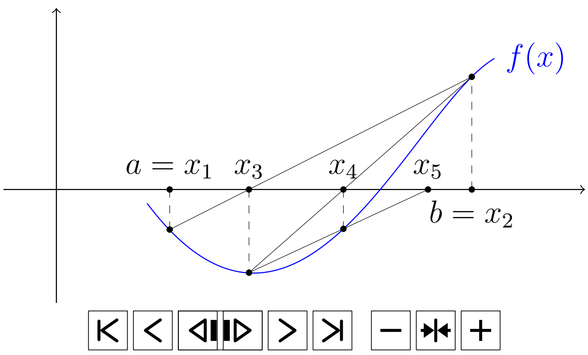
4.2. Szelőmódszer

Módosítsuk most a húrmódszert oly módon, hogy nem vizsgáljuk, hol vált előjelet a függvény, hanem minden lépésben a $k = n-2$ választást használjuk.

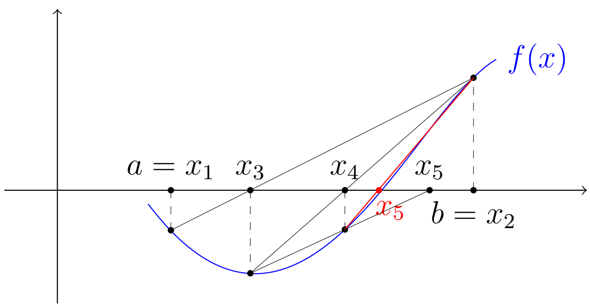
Ez a számolást jelentősen leegyszerűsíti. A sorozat képlete ekkor

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

lesz. Az $x_1 = a$ és $x_2 = b$ kezdeti feltételek nyilván továbbra is érvényben vannak. A 7. ábrán példát láthatunk a szelőmódszer alkalmazására, míg a 8. ábra a húrmódszer és a szelőmódszer eltérését mutatja.

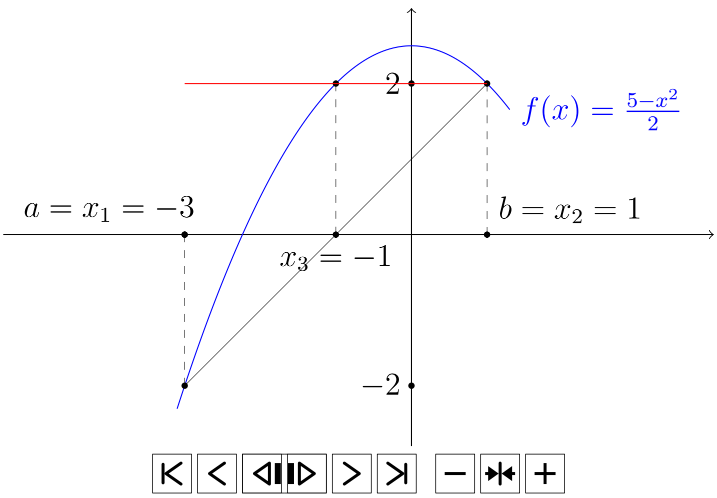


7. ábra. A szelőmódszer lépései



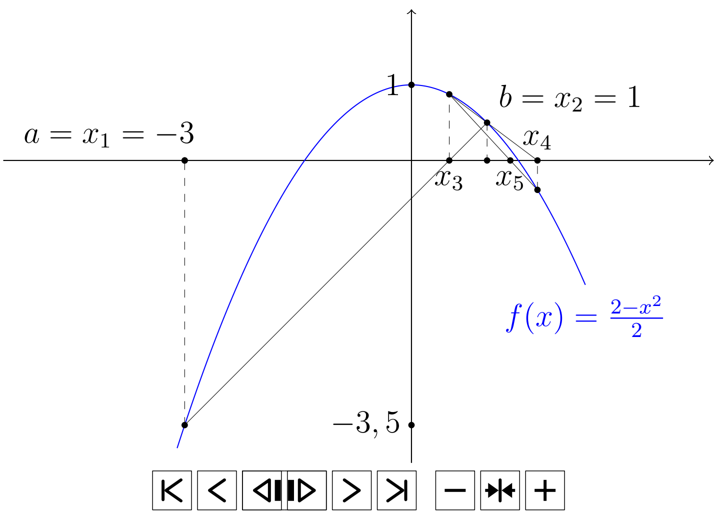
8. ábra. A szelőmódszer és a húrmódszer eltérése a sorozatok ötödik tagjában

Megjegyzés: A szelőmódszer komoly hátránya, hogy nem minden esetben használható. A következő példánkban például x_4 már nem is jön létre. Legyen $f(x) = \frac{5-x^2}{2}$, $a = x_1 = -3$, $b = x_2 = 1$. Mivel a szituáció igen egyszerű (lásd a 9. ábrát) könnyű látni, hogy $x_3 = -1$, de mivel $f(-1) = f(1)$, ezért a keletkező egyenes párhuzamos lesz a x tengellyel, így nem metszi azt. Formálisan is megkaphattuk volna ezt a szingularitást, hiszen $f(x_3) = f(x_2)$ miatt az $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_3-x_2)}{f(x_3)-f(x_2)}$ képletben nullával kellett volna osztani.
Megjegyzés: Ha módosítunk a 9. ábrán látható függvényen, más furcsaságot is tapasztalhatunk. Ha $f(x) = \frac{2-x^2}{2}$, $a = x_1 = -3$, $b = x_2 = 1$, akkor



9. ábra. A szelőmódszer nem mindig működik

$x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{5}{3}$ adódna, vagyis a sorozat kilépne az $[a, b]$ intervallumból, majd a függvény $[a, b]$-n kívüli másik zérushelyéhez tartana (lásd a 10. ábrát). Ez nyilván szintén nemkívánatos jelenség.



10. ábra. A szelőmódszer nem mindig az elvárt módon működik

Ha pedig az $f(x) = \frac{6-x^2}{2}$, $a = x_1 = -3$, $b = x_2 = 1$ feltételekből indulunk ki, akkor $x_3 = -\frac{3}{2}$, $x_4 = -9$, vagyis a sorozat ebben az esetben a másik irányban lép ki az intervallumból, bár később visszatér, és tart a függvény $[a, b]$-beli zérushelyéhez.

Más problémás helyzetek is előfordulhatnak. Gyakori probléma, hogy ha a kiindulási pontok messze vannak a függvény zérushelyétől, a keletkező sorozat divergens lesz. Ez a helyzet például az $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $a = x_1 = -16$, $b = x_2 = 1$ esetben is. Konkrétan az ekkor keletkező sorozatra $x_{4n-1} \to -\infty$ és $x_{4n} \to -\infty$, valamint $x_{4n-3} \to \infty$ és $x_{4n-2} \to \infty$. Ha kicsit „közelebb megyünk”, csupán annyit változtatva, hogy $a = x_1 = -15$ legyen, x_n konvergens lesz és tart az $f(x) = 0$ egyenlet egyetlen megoldásához, a 0-hoz.

Jelentős előnye viszont a szelőmódszernek, hogy ha teljesülnek a 3. (és a 4.) Tétel feltételei, a konvergencia garantált, annak sebessége pedig az eddigieknél gyorsabb.

4. Tétel. *Legyen $f(x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény, amelynek pontosan egy zérushelye van $[a,b]$-n. Ekkor ha x_n a szelőmódszerrel keletkező sorozat, továbbá fennállnak az 1. Definícióban szereplő feltételek, akkor $x_n \to x^*$, valamint*

$$d_n \leq d^{\gamma_n},$$

ahol $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ és ha $n > 2$, akkor $\gamma_n = \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2}$, vagyis γ_n a Fibonacci-sorozat.

Bizonyítás. Használjuk fel a 3. Tétel bizonyítását! Könnyű látni, hogy most (2) helyett azt kapjuk, hogy

$$d_n \leq d_{n-1} d_{n-2}. \tag{3}$$

Tudjuk, hogy $d_1 < 1$ és $d_2 \leq d$. Világos, hogy (3) miatt $d_n \leq d^{\gamma_n}$ teljesül valamilyen γ_n sorozatra, vagyis $d_n \leq d^{\gamma_{n-1}} d^{\gamma_{n-2}} = d^{\gamma_{n-1}+\gamma_{n-2}}$. Innen a $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ és $n > 2$ esetén $\gamma_n = \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2}$ megfelelő választás.

Nyilvánvaló, hogy $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \infty$. Mivel $0 \leq d < 1$, ezért $n \to \infty$ esetén

$$|x_n - x^*| = \frac{d_n}{K} \leq \frac{d^{\gamma_n}}{K} \to 0.$$ □

4. Feladat. *Adjunk közelítést az $f(x) = 5x - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ függvény zérushelyére szelőmódszerrel! Induljunk ki a $[0,1]$ intervallumból! Keressük a közelítő sorozat hatodik tagját! Legfeljebb mekkora az eltérése a tényleges zérushelytől? A sorozat hányadik tagjától kezdve kapunk legalább négy tizedesjegy pontosságot?*

Megoldás. A keletkező sorozat első három tagja nyilvánvalóan megegyezik a 3. Feladat megoldásában szereplő első három taggal, vagyis $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ és $x_3 = \frac{1}{6}$. Esetünkben a negyedik tag is egyezni fog, tehát $x_4 \approx 0,188195$. Az első eltérés az ötödik tagban lesz: $x_5 \approx 0,191076$. Ekkor $x_6 \approx 0,191060$.

Világos, hogy $K = \frac{1}{4}$ és $d = \frac{1}{4}$ ebben az esetben is használható, tehát $\frac{1}{4}|x_6 - x^*| = d_6 \leq d^{\gamma_6} = \frac{1}{4^5}$, vagyis $|x_6 - x^*| \leq \frac{1}{256}$.

A hibaképlet szerint tehát x_6 legfeljebb $0,004$ távolságra van a helyes értéktől.

Mivel

$$\frac{1}{4}|x_n - x^*| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{\gamma_n},$$

a legalább négy tizedesjegyre pontos tagok meghatározása az

$$|x_n - x^*| \leq 4^{1-\gamma_n} < 0,0001$$

egyenlőtlenségre, majd az ezzel ekvivalens

$$\gamma_n > 1 - \frac{\ln(0,0001)}{\ln(4)} \approx 7,64$$

egyenlőtlenségre vezet. Mivel $\gamma_6 = 5$ és $\gamma_7 = 8$, ezért $n \geq 7$. □

Megjegyzés: x_6 becslése alapján úgy tűnhet, nincs különbség a húr- és a szelőmódszer hibatagjának értékében, hiszen most is $\frac{1}{256}$-et kaptunk. Ez esetben ez valóban így van, de csak azért, mert γ_6 is éppen 5-tel egyenlő. A sorozat nagyobb indexű tagjaira d^{γ_n} lényegesen kisebb lesz, mint d^{n-1}, ahogy ez a feladatok második felét összehasonlítva világos is.

4.3. Newton-módszer

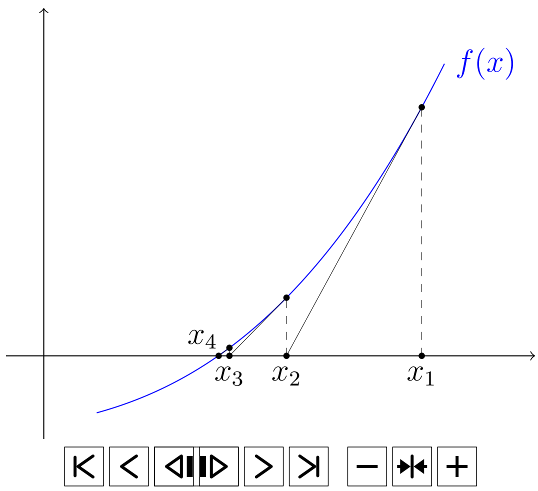
Olyan neveken is ismert, mint Newton–Raphson-módszer vagy Newton–Fourier-módszer.

Ez esetben is egy folytonos függvény (alapesetben) egyetlen zérushelyét keressük, mely függvényről most azt is fel kell tennünk, hogy differenciálható, legalábbis a gyök valamely környezetében. A Newton-módszerrel keletkező sorozat képlete ugyanis

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

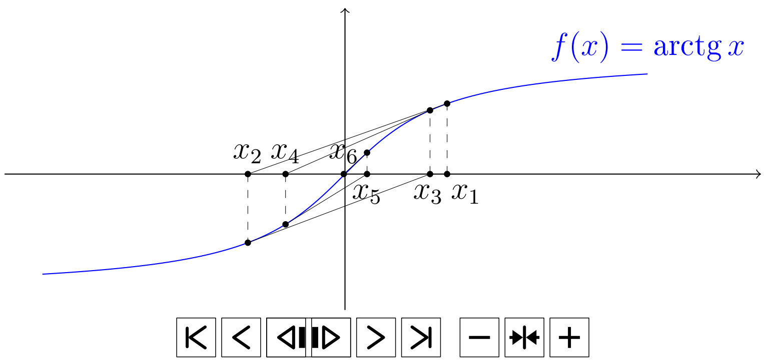
ahol x_1-et ez esetben is célszerű a függvény zérushelyétől nem túl messze választani.

A sorozatot definiáló formula legegyszerűbben a szelő-módszerből származtatható, hiszen az annak képletében szereplő differenciahányadost cseréltük határértékére, differenciálhányadosra. Ez geometriailag azt jelenti, hogy a közelítés során húrok helyett érintőket alkalmazunk (lásd a 11. ábrát). Vagyis az $(x_1, f(x_1))$ pontban érintőt húzunk a függvényhez, majd annak x tengellyel való metszéspontja legyen x_2, és így tovább.



11. ábra. A Newton-módszer lépései

Megjegyzés: Sajnos a Newton-módszer használata esetén is óvatosnak kell lennünk, a konvergencia nem automatikus. Ha például $f(x) = \operatorname{arctg} x$ és $x_1 = 1,35$, akkor $x_n \to 0$, ami a helyes eredmény (lásd a 12. ábrát). Ha

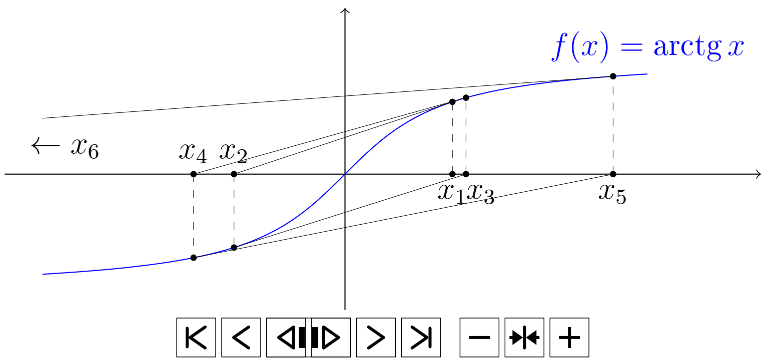


12. ábra. Newton-módszerrel keletkező konvergens sorozat

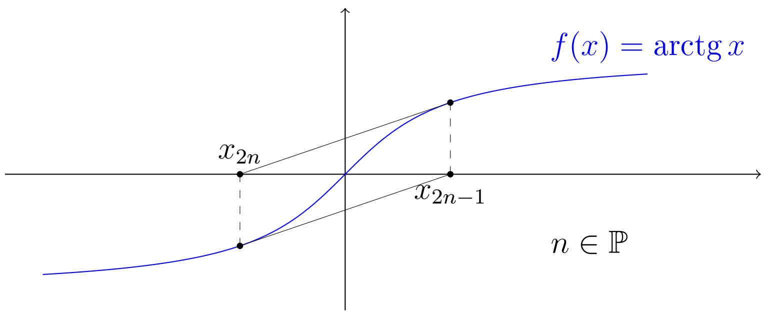
viszont mondjuk $x_1 = 1,42$, akkor $x_{2n-1} \to \infty$ és $x_{2n} \to -\infty$, ahogy az a 13. ábrán látható.

A két ábra alapján sejthető, hogy $1,35$ és $1,42$ között, valamint $-1,42$ és $-1,35$ között lesz egy-egy olyan érték, amit ha x_1-nek választunk, a két érték között oszcilláló sorozatot kapunk (lásd a 14. ábrát), ami azt jelenti, hogy $x_1 = x_{2n-1}$ és $x_2 = x_{2n}$ teljesül $\forall n \in \mathbb{P}$ esetén. Mivel $f(x)$ páratlan függvény, ilyen sorozatot akkor kapunk, ha $x_1 = -x_2$, ez esetben ha $\operatorname{arctg} x_1 = \frac{2x_1}{1+x_1^2}$. Az egyenlet megoldásai egyébként $x_1 \approx \pm 1,39174520$.

Az ilyen elfajuló esetek miatt is fontos a következő tétel, mely elégséges feltételt ad a Newton-módszer konvergenciájára.



13. ábra. Newton-módszerrel keletkező divergens sorozat



14. ábra. Oszcilláló sorozat Newton-módszer esetén

5. Tétel. *Legyen $f(x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény, amelynek pontosan egy zérushelye van $[a,b]$-n. Ekkor ha $x_1 \in [a,b]$ és x_n a Newton-módszerrel keletkező sorozat, továbbá fennállnak az 1. Definícióban szereplő feltételek, akkor $x_n \to x^*$, valamint*

$$d_n \leq d^{2^{n-1}}.$$

Bizonyítás. Írjuk fel x^* helyen az $f(x)$ függvény elsőrendű Taylor-polinomját és a Lagrange-féle maradéktagot az x_{n-1} pontban kifejtve, vagyis

$$0 = f(x^*) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x^* - x_{n-1}) + \frac{1}{2}f''(\delta)(x^* - x_{n-1})^2,$$

ahol δ valahol x^* és x_{n-1} között van. Ha ezt összevetjük a Newton-módszert definiáló képlettel, azt kapjuk, hogy

$$0 = f'(x_{n-1})(x^* - x_n) + \frac{1}{2}f''(\delta)(x^* - x_{n-1})^2.$$

Ezt rendezve

$$\frac{x_n - x^*}{(x_{n-1} - x^*)^2} = \frac{f''(\delta)}{2f'(x_{n-1})}$$

adódik, ahonnan az 1. Definíció jelöléseivel

$$\frac{|x_n - x^*|}{|x_{n-1} - x^*|^2} \leq \frac{M}{2m} = K.$$

Innen

$$K|x_n - x^*| \leq (K|x_{n-1} - x^*|)^2,$$

vagyis

$$d_n \leq d_{n-1}^2 \tag{4}$$

következik. Tudjuk, hogy $d_1 = d$. Teljes indukcióval bizonyítható, hogy ha $d_{k-1} \leq d^{2^{k-2}}$, akkor (4) alapján $d_k \leq d_{k-1}^2 \leq \left(d^{2^{k-2}}\right)^2 = d^{2^{k-1}}$. Beláttuk tehát a $d_n \leq d^{2^{n-1}}$ egyenlőtlenséget.

Másrészt mivel $0 \leq d < 1$, ezért $n \to \infty$ esetén

$$|x_n - x^*| = \frac{d_n}{K} \leq \frac{d^{2^{n-1}}}{K} \to 0. \qquad \square$$

5. Feladat. *Adjunk közelítést az $f(x) = 5x - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ függvény zérushelyére Newton-módszerrel! Induljunk ki az $x_1 = 1$ pontból! Keressük a közelítő sorozat hatodik tagját! Legfeljebb mekkora az eltérése a tényleges zérushelytől? A sorozat hányadik tagjától kezdve kapunk legalább négy tizedesjegy pontosságot?*

Megoldás. A sorozat képletét használva (egyre több tizedesjegyre kerekítve) $x_2 \approx 0,24$, $x_3 \approx 0,1915$, $x_4 \approx 0,19106043$, $x_5 \approx 0,1910603843086618$, míg $x_6 \approx 0,19106038430866129$.

Nyilván ez esetben is $K = \frac{1}{4}$ és $d = \frac{1}{4}$, tehát $\frac{1}{4}|x_6 - x^*| = d_6 \leq d^{2^5} = \frac{1}{2^{32}}$, vagyis $|x_6 - x^*| < 10^{-9}$.

A hibaképlet szerint tehát x_6 legalább kilenc tizedesjegyre pontosan közelíti a pontos értéket. (Ténylegesen x_6 minden fent megadott tizedesjegye pontos.)

Mivel

$$\frac{1}{4}|x_n - x^*| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{n-1}},$$

a legalább négy tizedesjegyre pontos tagok meghatározása az

$$|x_n - x^*| \leq 4^{1-2^{n-1}} < 0,0001$$

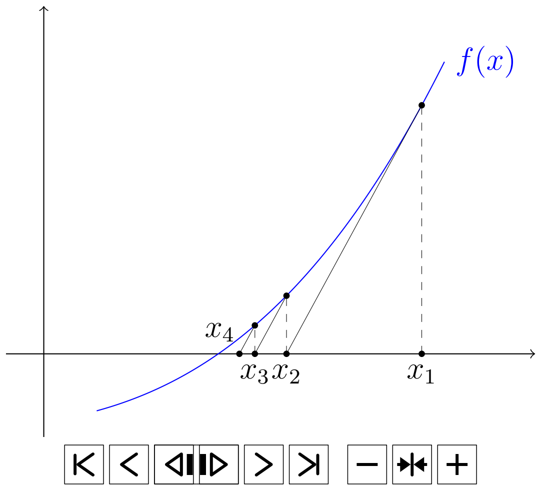
egyenlőtlenségre, majd az ezzel ekvivalens

$$2^n > 2 - \frac{2\ln(0,0001)}{\ln(4)} \approx 15,28$$

egyenlőtlenségre vezet. Mivel $2^3 = 8$ és $2^4 = 16$, ezért $n \geq 4$. $\square$

A Newton-módszer konvergencia esetén igencsak hasznos. A gyökhöz közelítés nagyon gyors, ellenben hátrányos lehet az esetleges nagy műveletigény. A módosított Newton-módszer ezt próbálja kiküszöbölni.

4.4. Módosított Newton-módszer



15. ábra. A módosított Newton-módszer lépései

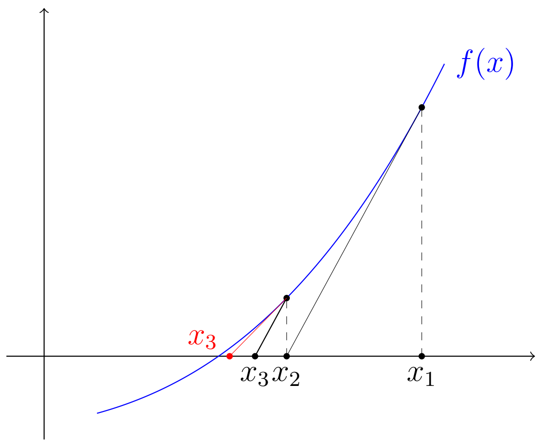
Ahogy az a módszer nevében is benne van, a Newton-módszerből indulunk ki, azon változtatunk. Az alapötlet szerint az x tengely mentén elmozdulva a függvény meredeksége nem változik túlságosan (így tulajdonképpen feltételezzük, hogy a függvény deriváltja folytonos), ezért nem számoljuk ki a sorozat minden pontjában a derivált értékét, hanem az első pontban húzott érintő meredekségét vesszük később is. A sorozat definiáló képlete ezen meggondolás értelmében a következő lesz:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_1)},$$

ahol x_1-ben $f(x)$ differenciálható és x_1 gyökhöz közeli érték.

Geometriailag ez azt jelenti, hogy a sorozat pontjait előállító összes szakasz párhuzamos lesz az elsővel (lásd a 15. ábrát). A Newton-módszer és a módosított Newton-módszer eltérését láthatjuk a 16. ábrán.

Belátható, hogy a módosított Newton-módszer az 5. Tétel feltételeinek teljesülése esetén konvergens, pontossága pedig nem rosszabb, mint amit a 3. Tétel esetén láttunk.



16. ábra. A módosított Newton-módszer és a Newton-módszer eltérése a sorozat harmadik tagjában

6. Feladat. *Adjunk közelítést az $f(x) = 5x - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ függvény zérushelyére módosított Newton-módszerrel! Induljunk ki az $x_1 = 1$ pontból! Keressük a közelítő sorozat hatodik tagját!*

Megoldás. A sorozat képletét használva (egyre több tizedesjegyre kerekítve) $x_2 \approx 0,24,\ x_3 \approx 1,99,\ x_4 \approx 1,923,\ x_5 \approx 1,913,\ x_6 \approx 1,910967.$ □

Láthatjuk, hogy ez esetben a sorozat konvergenciájának sebessége lassabb, mint a Newton-módszer esetén (ez várható volt), de gyorsabb, mint néhány korábbi módszerrel.

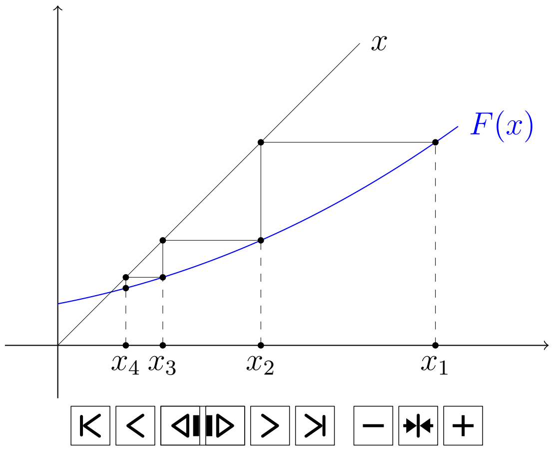
5. A fokozatos közelítés módszere

Míg az eddig ismertetett módszerek közvetlenül is alkalmasak voltak a függvény zérushelyének közelítésére, a most bemutatásra kerülő eljárás eredendően az $F(x) = x$ egyenlet megoldásának becslésére szolgál. Ez azonban sok esetben nem jelent hátrányt, a feltételek teljesülése esetén jó eséllyel hatékony gyökközelítő eljárást nyerünk az alábbiakban tárgyalt módszer segítségével.

6. Tétel. *Legyen $F(x)\colon [a,b] \to [a,b]$ differenciálható függvény, $x_1 \in [a,b]$ tetszőleges, valamint $x_n = F(x_{n-1})$, ha $1 < n \in \mathbb{P}$. Ha $\exists q < 1$, melyre $|F'(x)| \leq q$ teljesül $\forall x \in [a,b]$ esetén, akkor $x_n \to c$, ahol $F(c) = c$. A* *keletkezett c egyértelmű, továbbá teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:*

$$|x_n - c| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|, \tag{5}$$

$$|x_n - c| \leq \frac{q^{n-1}}{1-q}|x_2 - x_1|. \tag{6}$$



17. ábra. A fokozatos közelítés konvergenciája, ha $0 < F'(x) < 1$

Bizonyítás. Az x_n sorozat definíciója, valamint a Lagrange-féle középérték-tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
|x_n - x_{n-1}| &= |F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})| = |F'(\xi_1)||x_{n-1} - x_{n-2}| \\
&\leq q|x_{n-1} - x_{n-2}| \\
&= q|F(x_{n-2}) - F(x_{n-3})| = q|F'(\xi_2)||x_{n-2} - x_{n-3}| \\
&\leq q^2|x_{n-2} - x_{n-3}| \\
&\vdots \\
&= q^{n-3}|F(x_2) - F(x_1)| = q^{n-3}|F'(\xi_{n-2})||x_2 - x_1| \\
&\leq q^{n-2}|x_2 - x_1|.
\end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $n < m \in \mathbb{N}$. Ekkor az előzőekben levezetett egyenlőtlenség, az $|a + b| \leq |a| + |b|$ egyenlőtlenség, valamint a mértani sorozat összegképletének felhasználásával

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq q^{m-2}|x_2 - x_1| + q^{m-3}|x_2 - x_1| \cdots + q^{n-1}|x_2 - x_1| \\
&= q^{n-1}\frac{1 - q^{m-n}}{1-q}|x_2 - x_1| < \frac{q^{n-1}}{1-q}|x_2 - x_1|.
\end{aligned}$$

Mivel $0 < q < 1$, ezért $q^{n-1} \to \infty$, és így $|x_m - x_n| \to 0$, ha $n < m$ és $n \to \infty$. Innen következik, hogy x_n Cauchy-sorozat. Ekkor azonban x_n konvergens is, határértékét jelölje c. Másrészt $F(x)$ folytonossága miatt

$$c = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} F(x_{n-1}) = F(c),$$

továbbá $x_n \in [a,b]$, így $[a,b]$ zártságából $c \in [a,b]$ következik.

Az $|a+b| \leq |a|+|b|$ egyenlőtlenség, az x_n sorozat és c definíciója, valamint a Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával kapjuk, hogy

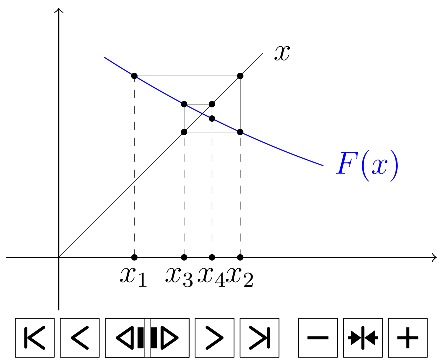
$$\begin{aligned} |x_n - c| &\leq |F(x_{n-1}) - F(x_n)| + |F(x_n) - F(c)| \\ &= |F'(\xi)||x_n - x_{n-1}| + |F'(\eta)||x_n - c| \\ &\leq q|x_n - x_{n-1}| + q|x_n - c|. \end{aligned}$$

Innen (5) egyszerű rendezéssel adódik. Ez azt jelenti, hogy a keletkezett c rendelkezik az elvárt tulajdonságokkal. Hátra van még annak a belátása, hogy c az egyetlen fixpont.

Ha nem így lenne, létezne c-től különböző $c' \in [a,b]$, melyre $c' = F(c')$. Ekkor azonban

$$|c - c'| = |F(c) - F(c')| \leq q|c - c'|$$

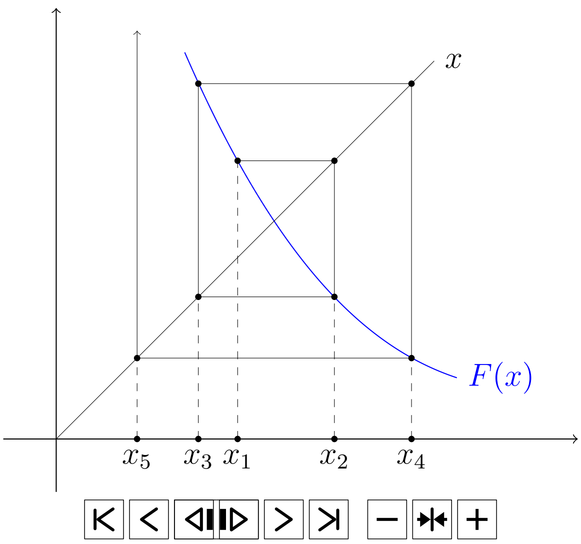
teljesülne, ami $q < 1$ miatt ellentmondás. □



18. ábra. A fokozatos közelítés konvergenciája, ha $-1 < F'(x) < 0$

Megjegyzés: Az $F(c) = c$ egyenlőségben szereplő c-t az $F(x)$ függvény fixpontjának szokás nevezni. Meghatározására használjuk a fentiekben ismertetett fokozatos közelítés (más néven szukcesszív approximáció) módszerét.

Megjegyzés: A most igazolt tétel a Banach-féle (más néven Banach–Caccioppoli–Tyihonov-féle) fixponttétel következménye valós függvényekre.



19. ábra. A fokozatos közelítés divergenciája, ha $F'(x) < -1$

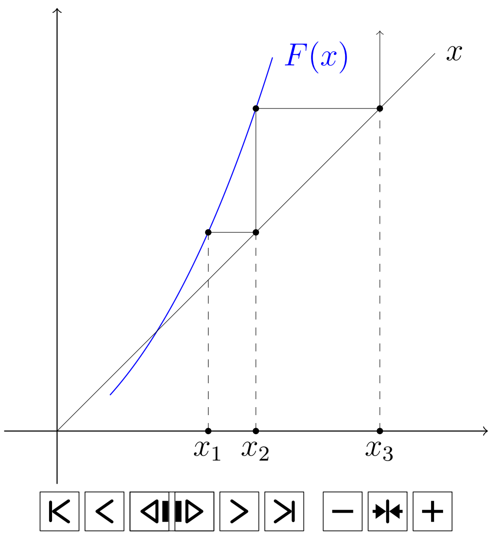
Megjegyzés: A 6. Tétel feltételeinek teljesülése esetén a Lagrange-féle középérték miatt

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n-1}| &= |F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})| = |F'(\xi)||x_{n-1} - x_{n-2}| \\ &\leq q|x_{n-1} - x_{n-2}| < |x_{n-1} - x_{n-2}|, \end{aligned}$$

vagyis az $|x_n - x_{n-1}|$ sorozat szigorúan monoton csökkenő (és tart nullához, hiszen x_n Cauchy-sorozat).

Megjegyzés: Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása egyenrangú az $x + yf(x) = F(x)$ függvény fixpontjának megkeresésével, ahol $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tetszőleges konstans. Ha $F'(x)$ nem a kívánt tulajdonságú, de invertálható, meg lehet próbálni az eredeti helyett az $F^{-1}(x) = x$ egyenlet megoldását. Ugyanis ha $F'(x) > 1$, akkor $0 < (F^{-1}(x))' < 1$, míg ha $F'(x) < -1$, akkor $-1 < (F^{-1}(x))' < 0$. Természetesen az egyenlőtlenségeknek az egész $[a, b]$ intervallumon teljesülni kell.

7. Feladat. *Adjunk közelítést az $f(x) = 5x - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ függvény zérushelyére a fokozatos közelítés módszerével! Induljunk ki az $x_1 = 1$ pontból! Keressük a közelítő sorozat hatodik tagját! Legfeljebb mekkora az eltérése a tényleges zérushelytől? A sorozat hányadik tagjától kezdve kapunk legalább négy tizedesjegy pontosságot?*



20. ábra. A fokozatos közelítés divergenciája, ha $1 < F'(x)$

Megoldás. Könnyű látni, hogy az egyenlet megoldása ekvivalens az

$$x = \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{5} = F(x)$$

függvény fixpontjának megkeresésével.

Mivel $x_1 = 1$, ezért $x_2 = F(x_1) = F(1) = 0$. A további tagok $x_3 = 0,2$, $x_4 \approx 0,19021$, $x_5 \approx 0,19114$, $x_6 \approx 0,191053$.

Felhasználva, hogy $|\sin(x)| \leq 1$ teljesül $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén, azt kapjuk, hogy

$$|F'(x)| = \left| \frac{-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{5} \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{10} = q < 1,$$

vagyis $F(x)$ teljesíti a 6. Tétel feltételeit. Innen (6) alapján

$$|x_6 - c| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{1 - \frac{\pi}{10}} |0 - 1| < 0,005.$$

Az (5) hibaképletet jól használhatjuk arra, hogy a kívánt pontosság elérésének ellenőrzését és a sorozat tagjainak kiszámítását párhuzamosan végezzük. Esetünkben $|x_6 - x_5| < 0,0001$, ahonnan

$$|x_6 - c| \leq \frac{\frac{\pi}{10}}{1 - \frac{\pi}{10}} 0,0001 < 0,00005,$$

tehát a sorozat hatodik tagja legalább négy tizedesjegyre pontos. Viszont az $|x_n - x_{n-1}|$ sorozat monoton csökkenő volta garantálja, hogy a sorozat további tagjai is legfeljebb ekkora mértékben térnek el a pontos értéktől.

Az előzőekben kapott eredménynek (nyilván) nem ellentmondó, de kissé gyengébb eredményre jutunk (6) segítségével. Ez esetben a

$$\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^{n-1}}{1-\frac{\pi}{10}}|0-1| < 0,0001$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk, ami ekvivalens az

$$n-1 > \frac{\ln\left(\left(1-\frac{\pi}{10}\right)0,0001\right)}{\ln\left(\frac{\pi}{10}\right)} \approx 8,28$$

egyenlőtlenséggel. Ez azt jelenti, hogy ez utóbbi hibaképlet csak a tizedik tagtól garantálja a kívánt pontosságot. $\square$

Hivatkozások

[1] Dringó László: Numerikus analízis II. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1993.

[2] Móricz Ferenc: Numerikus analízis I-II. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1993.

[3] Szidarovszky Ferenc: Bevezetés a numerikus módszerekbe. Közgazdasági és Jogi könyvkiadó, Budapest, 1974.

Tartalomjegyzék