9. Ortogonális transzformációk a térben

9.1. Tétel. *Minden* 3×3 *típusú* $+1$ *determinánsú ortogonális mátrix hasonló az alábbi mátrixhoz:*

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Minden 3×3 *típusú* -1 *determinánsú ortogonális mátrix hasonló az alábbi mátrixhoz:*

$$R_z^-(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Azaz a tér minden pozitív ortogonális transzformációja tengely körüli elforgatás, a tér minden negatív ortogonális transzformációja tengely körüli elforgatás és síkra vonatkozó tükrözés szorzata.

Az $R_z(\phi)$ forgatás tengelye a z tengely, a forgatás szöge ϕ. Az x vagy y tengely körüli forgatás mátrixa:

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

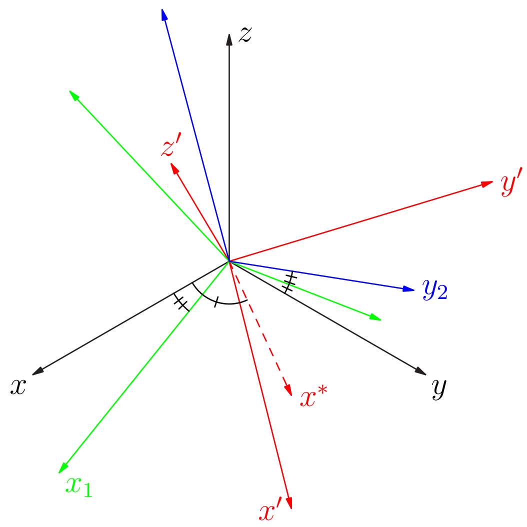
9.2. Tétel (Euler tétele a tér elforgatásairól). *A tér minden pozitív ortogonális transzformációja előáll a koordinátatengelyek körüli elforgatások szorzataként.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz ld. az 1. ábrát. Az eredeti Descartes koordinátarendszerünk legyen (x,y,z), az elforgatott $(x'y'z')$. (A színes ábrán az eredeti koordinátarendszer fekete, az elforgatott piros.) Megkonstruáljuk az $(x',y',z') \to (x,y,z)$ elforgatást. Legyen x' merőleges vetülete az xy síkra x^*, $\sphericalangle(x^* x) = \phi$. $R_z(-\phi)$ x'-t az xz síkba forgatja. (A színes ábrán ez a zöld koordinátarendszer.) Legyen $R_z(-\phi)(x') = x_1$, $\sphericalangle(x_1, x) = \theta$. Az y tengely körüli θ szögű elforgatás az x_1 tengelyt beforgatja x-be. Az y tengely képe az eddigi két forgatás után y_2. (A színes ábrán a kék koordinátarendszer.) Ezek után egy x körüli elforgatást kell alkalmaznunk: ha y_2 és y szögét ψ jelöli, akkor a harmadik elforgatás $R_z(-\psi)$. Tehát a keresett transzformáció:

$$R_x(-\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_z(-\phi).$$

Az (xyz) koordinátarendszert $(x'y'z')$-be az előbbi tarnszformáció inverze viszi:

$$R_z(\phi) \cdot R_y(-\theta) \cdot R_x(\psi). \quad ❖ \tag{9.1}$$



1. ábra. Euler forgatási tétele

A (9.1) összefüggés előállítja az összes 3×3 típusú pozitív ortogonális mátrixot. A mátrixelemek:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \quad \cos(\theta)\cos(\phi) \\
a_{12} &= -\cos(\psi)\sin(\phi) + \sin(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi) \\
a_{13} &= \quad \sin(\psi)\sin(\phi) + \cos(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi) \\
a_{21} &= \quad \cos(\theta)\sin(\phi) \\
a_{22} &= \quad \cos(\psi)\cos(\phi) + \sin(\psi)\sin(\theta)\sin(\phi) \\
a_{23} &= -\sin(\psi)\cos(\phi) + \cos(\psi)\sin(\theta)\sin(\phi) \\
a_{31} &= -\sin(\theta) \\
a_{32} &= \quad \sin(\psi)\cos(\theta) \\
a_{33} &= \quad \cos(\psi)\cos(\theta)\,.
\end{aligned}
$$

Euler tételéről további információk pl.:
Eric W. Weisstein. *Euler Angles*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/EulerAngles.html