Fazekas Gabriella
IV. matematika-informatika

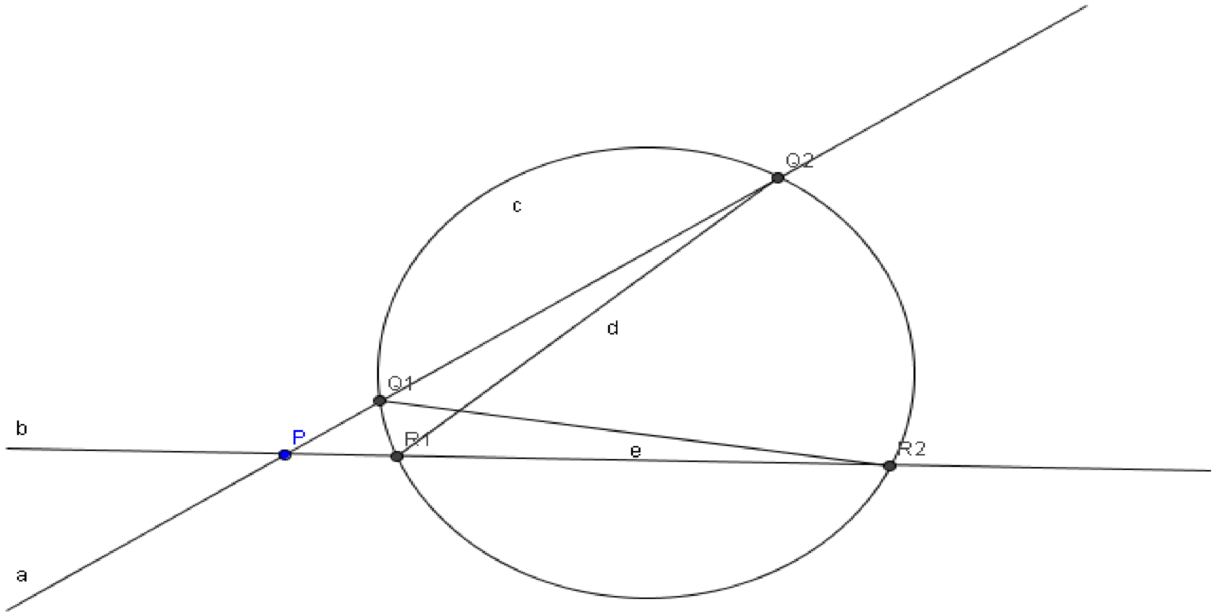
Interaktív geometriai rendszerek használata középiskolában
-Pont körre vonatkozó hatványa, hatványvonal-

Jelen tanulmány a fent megjelölt fogalmak egy lehetséges bevezetési módját adja meg. A dinamikus geometriai programok használata -amennyiben van megfelelő gépi felszereltség az iskolában- jelentős segítséget nyújt a tanulóknak és a tanároknak egyaránt. A geometria oktatásban fontos szerepe van a megfelelő ábra elkészítésének, egy jó ábra sokszor már fél siker: megsejteti a megoldást. A dinamikus geometriai programok segítségével könnyen elkészíthető a megfelelő ábra, de ami fontosabb, sokkal élvezetesebb. Következésképpen könnyebb a tanárnak fenntartani a gyerekek érdeklődését a geometria, a matematika iránt. Nagyon fontos, hogy az ábrák átszínezhetőek, egyes objektumok eltüntethetőek, nagyíthatóak, kicsinyíthetőek, elmozgathatóak, más nézőpontból is megnézhetőek – vagyis tényleg elkészíthető a megfelelő ábra, és nem csak egy megfelelőnek tűnő. Az szoftverek másik legfontosabb tulajdonsága az interaktivitás: a bázispontok mozgatásával szemléletesen vizsgálhatunk határeseteket, lehetővé válik a diszkusszió, pillanatok alatt megsejthető a megoldás. A nyomvonal megjelenítés elengedhetetlen funkciója egy interaktív geometriai szoftvernek: például mértani hely meghatározásakor óriási segítség. Természetesen a tanárnak több időre van szüksége az órára való felkészüléshez, de egyrészt számukra is szórakoztató a geometriai programok használata, ill. azt hiszem, mindenkinek sokat jelent, ha kevesebb eséllyel derül ki róla, hogy ő sem tud jó ábrát készíteni. Akinek pedig fontos a tanítás, és lelkiismeretessége miatt minden diáknak a lehető legtöbbet akar átadni kedvenc tárgyának tananyagából, az előbb-utóbb telepíteni fog egy geometriai szoftvert a gépére.

A téma választása nem éppen szerencsés: sok más esetben sokkal nagyobb hasznát vehetjük ezeknek a programoknak. Azonban véleményem szerint a kiválasztott témát minden középiskolában tanítják, talán triviális feladatokban alkalmazzák is a tételeket, definíciókat, de ez valójában holt ismeretnek tekinthető, hiszen kevés feladatban alkalmazható. Talán jobban megmaradnak az ismeretek, ha szemléletes ábrák elkészítésével, nézegetésével, mozgatásával a diák saját tapasztalatot szerez a geometria ezen kis részére vonatkozóan. Emiatt a cikk első része a fogalmak bevezetésével foglalkozik, majd egy alkalmazást is bemutat egy feladaton keresztül, ahol eszünkbe kell jusson az, hogy egy pont körre vonatkozó hatványa minden szelő esetén ugyanaz, ill. ezt az összefüggést szerkesztés során is felhasználhatjuk.

Mivel a Cinderella jellegzetessége hogy felismeri a hatványvonal fogalmát és a metszéspontokon átmenő egyenessel való definiálásakor megjeleníti a hatványvonalat akkor is, ha a két kör nem metszi egymást, az ábrákat Cinderellával készítettem. Azonban mivel a Cinderella nem ingyenes, kénytelen voltam bizonyos ábrákat GeoGebrával elkészíteni, és így keveredik a két szoftver használata.

Állítás: Adott egy P pont és egy K kör, akkor a pontból a körhöz húzott szelő Q1, Q2 metszéspontjaival képzett PQ1*PQ2 érték független a szelő megválasztásától.



Bizonyítás: PR1Q2~PQ1R2 mert a P szög közös, ill. A Q2 és az R2 szögek azonos kerületi íven nyugszanak. Emiatt PR1/PQ1 = PQ2/PR2, amiből következik az állítás.

Emiatt értelmes a következő definíció:

A P pont k körre vonatkozó hatványa:

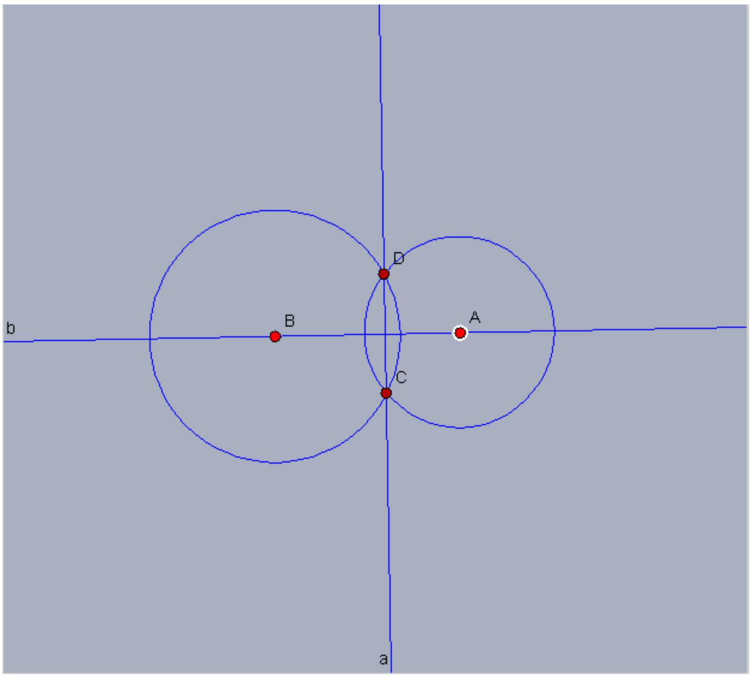
- PQ1*PQ2 ha P a K külső pontja,
- üres halmaz, ha P a K körön van,
- -PQ1*PQ2 ha P a K belső pontja.

Állítás: A P pont egy O középpontú r sugarú körre vonatkozó hatványa ugyanaz.

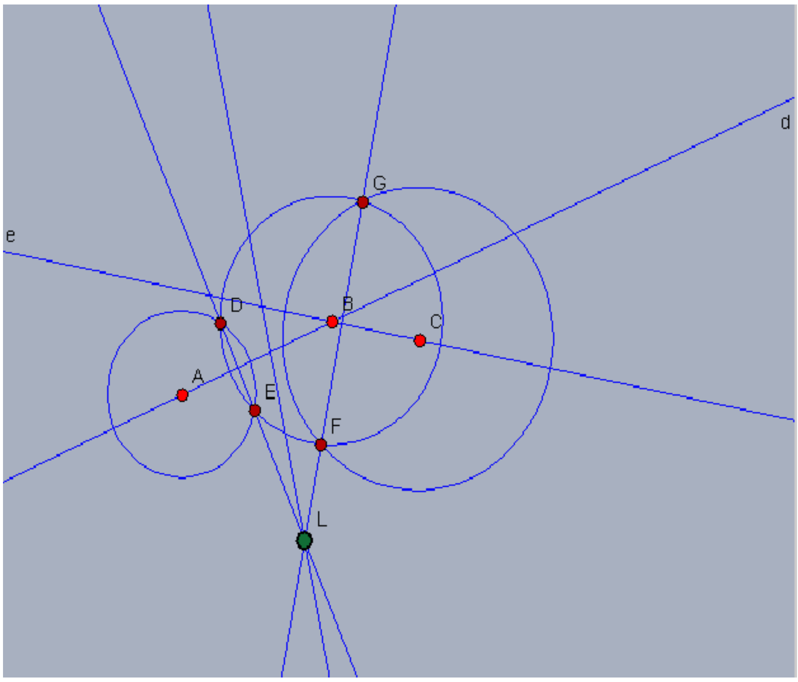
Definíció: Azon pontok mértani helye, amelyeknek két nem koncentrikus körre vonatkozó hatványa megegyezik, a két kör hatványvonala.

Állítás: A hatványvonal merőleges a középpontokat összekötő egyenesre.

A Cinderella-ban ha két metszõ kör metszéspontjait összekötjük, majd a két kört nem metszõ helyzetbe hozzuk, a metszéspontok koordinátái komplexek lesznek, az egyenes mégis látható. Ez a megközelítés megfelel a hatványvonal helyes értelmezésének.



Tétel: Ha három kör között nincs két koncentrikus, akkor hatványvonalaik közös sugársorhoz tartoznak.



A sejtés után bizonyítsuk be a tételt!

Legyenek a körök egyenletei rendre K1 = 0, K2 = 0, K3 = 0. Ekkor a hatványvonalaik egyenletei rendre: K1 - K2 = 0 (a), K2 - K3 = 0 (b), K3 - K1 = 0 (c).

I.Ha a párhuzamos b-vel vagy egybeesnek:

Mivel a merõleges AB-re, b pedig BC-re, ebbõl következik, hogy AB párhuzamos BC-vel. Ebbõl következik, hogy AB = AC, vagyis a középpontok kollineárisak. Ekkor a, b, c másodfajú sugársorhoz tartoznak.

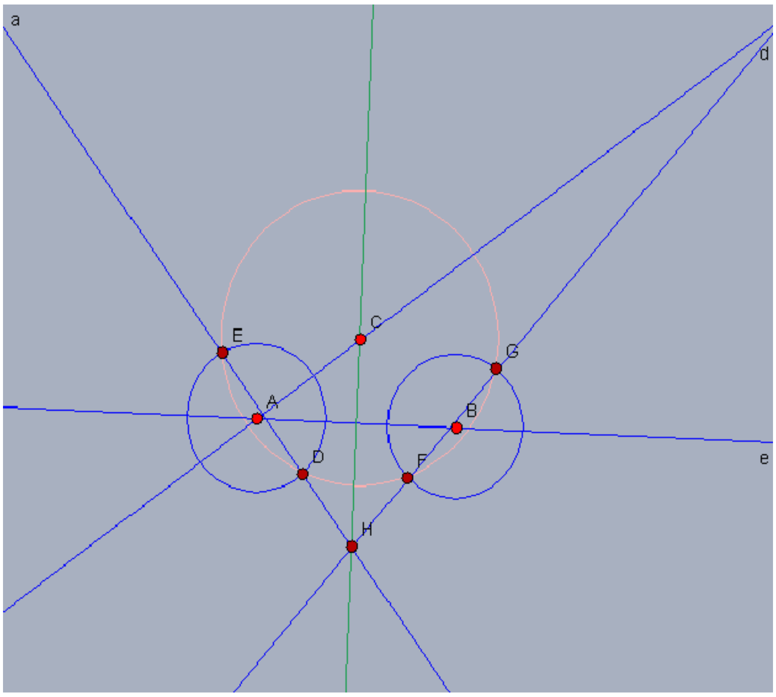
II. Ha a és b metszõk, akkor legyen a metszéspont P(q,w). Ekkor (K1 - K2)(q,w) = 0, (K2 - K3)(q,w) = 0. Mivel (K1 - K2) + (K2 - K3) + (K3-K1) = 0, kapjuk, hogy (K1 - K2)(q,w) + (K2 - K3)(q,w) + (K3 - K1)(q,w) = 0. Ekkor viszont az is teljesül, hogy (K3 - K1)(q,w) = 0. Vagyis P rajta van a c egyenesen is, azaz a, b, c elsõfajú sugársorhoz tartoznak.

Szerkesszük meg két nem koncentrikus kör hatványvonalát!

Ha a két kör metszi egymást, akkor a hatványvonal a metszéspontokat összekötõ egyenes.

Ha a két kör érinti egymást, állítsunk merõlegest az érintési pontban a körök középpontjait összekötõ egyenesre!

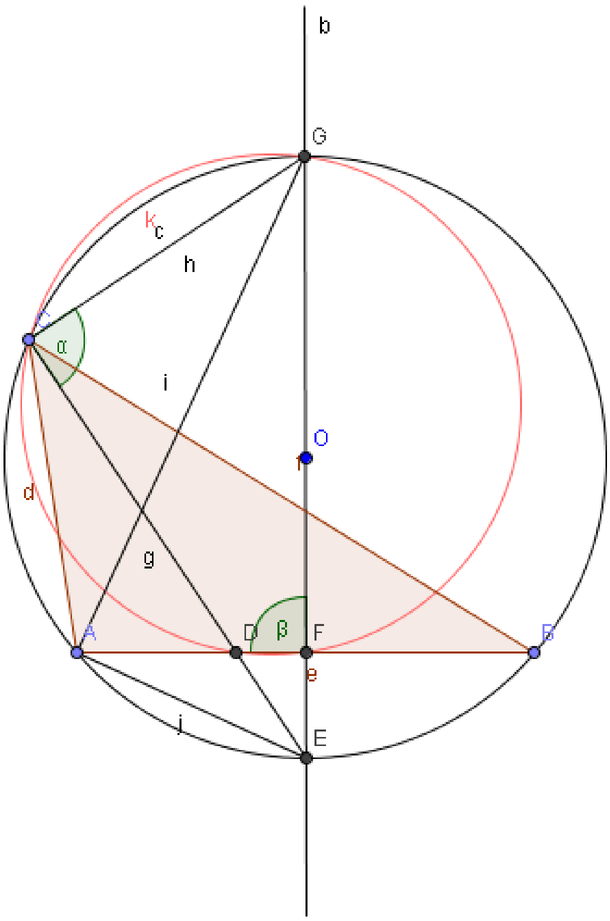
Ha a két kör közös pontjainak száma 0, akkor vegyünk fel egy segédkört, amely mindkét kört metszi. Szerkesszük meg a segédkör és az egyik kör, majd a segédkör és a másik kör hatványvonalát. Az elõzõ tétel szerint a keresett egyenes illeszkedik a két megszerkesztett hatványvonal metszéspontjára, ill. tudjuk, hogy merõleges a két kör középpontjait összekötõ egyenesre. A szerkesztés:



<u>Feladat</u>: Szerkesszünk háromszöget, ha adott a köré írt kör sugara, egy oldala valamint az oldallal szemben fekvő szög szögfelezőjének a háromszögbe eső szakasza.

<u>Megoldás</u>:

Tekintsük a következő GeoGebrával elkészített ábrát:



Legyen most a szerkesztendő háromszögünk az ABC háromszög, a szögfelező ismert szakasza CD, a sugár OE. A szögfelező pontosan az AB szakaszfelező merőlegesének és a körnek a metszéspontjában metszi a kört (azonos mértékű körívek BE, AE, hiszen azonos mértékű kerületi szögek nyugszanak rajtuk). Legyen ez a metszéspont E. Ha még berajzolunk néhány szakaszt, észrevesszük, hogy CGFD húrnégyszög, hiszen az F és a C szögek derékszögek (C a Thalesz-tétel miatt, F-et pedig úgy konstruáltuk meg). Ha megrajzoljuk a kört, felírhatjuk az E pont k körre vonatkozó hatványát kétféleképpen és felírhatjuk ezek egyenlőségét: EC*ED = EG*EF. Az AEG háromszögben felírva a befogó tételt az EF*EG = AE*AE egyenlőséget kapjuk. Ezt viszont már meg tudjuk szerkeszteni.

A szerkesztés lépései ezek alapján:

1. Felvesszük a kört és az AB oldalt.
2. Megrajzoljuk az E pontot (AB felező merőlegesének és a körnek a metszéspontja)
3. Rajzolunk egy CD átmérőjű kört, majd egy AE nagyságú érintő szakaszt (az alsó ábrán GH). Az E pontnak erre a körre vonatkozó hatványa AE*AE = HL*HI = ED*EC.
4. Megrajzoljuk az E középpontú HI sugarú kört, és ennek az eredeti körünkkel vett két metszéspontja szolgáltatja a feladat megoldását. A bázispontok mozgatásával megnézhetjük, mennyire függ a harmadik pont helyzete a kiinduló adatoktól.