A projektív geometria alapjai

Kovács Zoltán

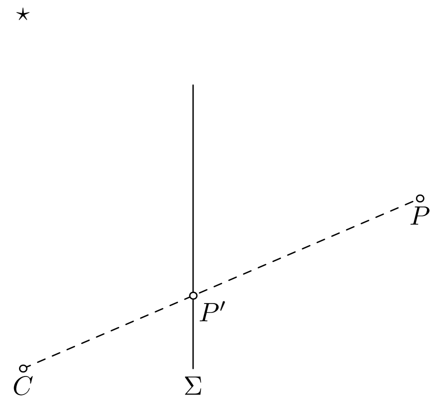
előadásvázlat, 2003

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés, homogén koordináták az euklidészi síkon

A tér síkra történő leképezése nagyon sok területen előforduló probléma, a képzőművészetektől a computergrafikáig. A tér síkra történő ábrázolásának egyik módszere a (vonal) perspektíva. Ezt tudományos alapossággal a itáliai reneszánsz művészek tanulmányozták a XV. századtól (Brunelleschi, Alberti). A cél az volt, hogy a tér valósághű illúzióját keltsék.

Geometriailag a perspektív leképezést a következőképpen adhatjuk meg. Rögzítsünk a térben egy C pontot (a festő szeme) és egy Σ síkot (festővászon). A tér P pontjához rendeljük hozzá a $\overleftrightarrow{CP}$ egyenes és a Σ sík P'-vel jelölt metszéspontját (1. ábra).



1. ábra. A perspektíva.

Megjegyzendő, hogy ezzel az eljárással a C pontra illeszkedő, Σ-val párhuzamos sík pontjait nem tudjuk leképezni Σ-ra (a festő a feje fölött álló csillagot nem tudja ráfesteni a képre).

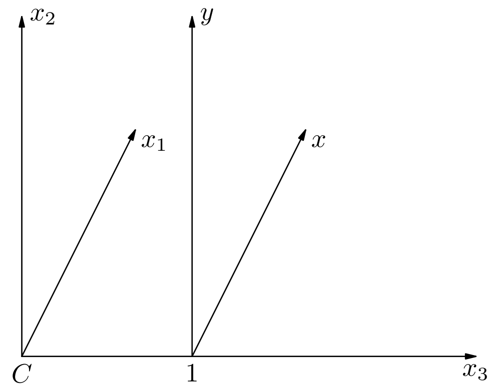
Analitikusan sem nehéz a leírás. Vegyük fel a térben az (x_1, x_2, x_3) térbeli Descartes-féle koordinátarendszert. A C pont legyen a koordinátarendszer kezdőpontja, a Σ sík pedig legyen az $x_3 = 1$ sík. A Σ síkban vegyük fel a (síkbeli) (x, y) Descartes-féle koordinátarendszert, tengelyei legyenek párhuzamosak a térbeli koordinátarendszer megfelelő tengelyeivel: $x \| x_1$, $y \| x_2$, kezdőpontja pedig legyen a $(0, 0, 1)$ pont (2. ábra.)

Ha a P térbeli Descartes koordinátái (x_1, x_2, x_3) és $x_3 \neq 0$, akkor P' síkbeli (x, y) koordinátáira azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Vegyük észre, hogy a P' pont helyzetét a Σ síkban egyaránt jellemezhetük a síkbeli Descartes koordinátáival illetve P térbeli Descartes koordinátáival. Az utóbbi számhármast a P' *homogén koordinátáinak* nevezzük. A homogén koordináták egyértelműen meghatározzák a (síkbeli) Descartes koordinátákat, de fordítva ez nem igaz: a $\overleftrightarrow{CP}$ egyenes tetszőleges (C-től különböző) pontjának ugyanaz a képe a Σ síkon. A $\overleftrightarrow{CP}$ (C-től különböző) pontjainak térbeli Descartes koordinátái $(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha_3)$ ($\alpha \neq 0$), ezek a koordináták szintén P' homogén koordinátái.

A továbbiakban (euklidészi) síkon az $\mathbb{R}^2$ valós vektorteret értjük. Pontnak $\mathbb{R}^2$ nulla dimenziós



2. ábra. A Descartes-féle koordinátarendszerek felvétele.

lineáris sokaságait (azaz a számpárokat), egyenesnek pedig az egydimenziós lineáris sokaságokat nevezzük.

Definíció. Az $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ számhármast az $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pont *homogén koordinátáinak* nevezzük, ha

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3}. \tag{1}$$

1. Feladat. *Az egyenes egyenlete.* Tekintsük a következő egyenest:

$$ax + by + c = 0, \qquad a^2 + b^2 > 0.$$

Beírva az (1) transzformációt, majd x_3-al szorozva kapjuk, hogy

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \qquad a^2 + b^2 > 0.$$

Ebben az egyenletben az $u = (a, b, c)$ és $p = (x_1, x_2, x_3)$ vektorok szimmetrikus szerepe a figyelemre méltó. Ugyanezt az egyenletet $\mathbb{R}^3$ kanonikus skaláris szorzatával felírva:

$$\langle u, p \rangle = 0. \tag{2}$$

2. Feladat. *Két pontra illeszkedő egyenes egyenlete.* A P pont homogén koordinátáit jelölje $p = (p_1, p_2, p_3)$, a Q homogén koordinátái $q = (q_1, q_2, q_3)$. Írjuk fel a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenletét! Az előző feladat szerint olyan $u \in \mathbb{R}^3$ vektort keresünk, mely p-re és q-ra egyaránt merőleges, azaz

$$u = p \times q = (p_2q_3 - p_3q_2, p_3q_1 - p_1q_3, p_1q_2 - p_2q_1).$$

A keresett egyenlet tehát

$$(p_2q_3 - p_3q_2)x_1 + (p_3q_1 - p_1q_3)x_2 + (p_1q_2 - p_2q_1)x_3 = 0,$$

vagy más alakban

$$\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix} \cdot x_1 - \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix} \cdot x_2 + \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \cdot x_3 = 0.$$

Ellenőriznünk kell még az $a^2 + b^2 > 0$ feltételt. Tegyük fel indirekt, hogy egyrészt (p_2, p_3) és (q_2, q_3), másrészt (p_1, p_3) és (q_1, q_3) arányosak. Mivel $q_3 \neq 0$, ezért van olyan α skalár, hogy $p_3 = \alpha \cdot q_3$, tehát az előbbi két arányosság csak úgy teljesülhet, ha

$$p_2 = \alpha \cdot q_2, \qquad p_1 = \alpha \cdot q_1,$$

amiből (p_1, p_2) és (q_1, q_2) arányossága is következik, vagyis

$$(p_1, p_2, p_3) = \alpha \cdot (q_1, q_2, q_3).$$

Ez ellentmondás, mert P és Q különböző pontok.

3. Feladat. *Két egyenes metszéspontja.* Határozzuk meg az

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = 0, \text{ és } a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = 0$$

nem párhuzamos egyenesek metszéspontját! A (2) egyenlet szerint olyan p vektort keresünk, mely az $u_1 = (a_1, b_1, c_1)$ és $u_2 = (a_2, b_2, c_2)$ vektorok mindegyikére merőleges. Ilyen vektor $p = u_1 \times u_2$. A megoldás tehát

$$(b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Az euklidészi síkon használt homogén koordinátákra $x_3 \neq 0$-nak teljesülni kell. $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ azt jelentené, hogy (a_1, b_1) és (a_2, b_2) arányosak, tehát a két egyenes párhuzamos lenne. Megjegyzendő, hogy módszerünk párhuzamos (de különböző) egyenesekre is ad megoldást, de a kapott

$$(b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - a_1c_2, 0)$$

„pont” nincs rajta az euklidészi síkon.

A fenti feladatokat elemezve néhány, a továbbiakban fontos észrevételt tehetünk az euklidészi síkon használt homogén koordinátákra:

- egy pont harmadik homogén koordinátája nem lehet zérus: $x_3 \neq 0$;
- egy egyenes egyenlete $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, ahol $a^2 + b^2 > 0$, azaz a $x_3 = 0$ „tiltott” egyenlet;
- az euklidészi síkon párhuzamos egyenesek „metszéspontja” pontosan a $x_3 = 0$ „tiltott” egyenesre esik. (Ld. a 3. feladatot.)

A perspektíva elvezetett bennünket a síkon egy újfajta koordinátázáshoz, a homogén koordinátákhoz. A homogén koordinátákkal a sík analitikus geometriája meglepően egyszerű, és a számításokban kézenfekvő, ha az $x_3 = 0$ koordinátákat is megengedjük. Ezek a pontok ugyan nincsenek rajta az euklidészi síkon, egy „tiltott” egyenesre illeszkednek, de ha ezzel az egyenessel kibővítjük az euklidészi síkot, akkor egyrészt a három koordináta szerepe teljesen egyenrangú lesz, másrészt az egyenesek és pontok szerepe a számításokban szimmetrikus. Ennek a lépésnek azonban van egy következménye: ezen a kibővített síkon már nem léteznek párhuzamos egyenesek.

2. A projektív sík

A továbbiakban $\overset{\circ}{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Definíció. Értelmezzük az $\overset{\circ}{\mathbb{R}}^3$ halmazon a következő, $\sim$-al jelölt relációt:

$$u \sim v, \text{ ha } \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ u = \alpha v \qquad (u, v \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}^3).$$

Azaz két nemzéró számhármas relációban áll egymással, ha arányosak. Ez a reláció ekvivalenciareláció, mely ekvivalenciaosztályait a *projektív sík* pontjainak illetve egyeneseinek nevezzük. A pontok halmaza $\mathbb{P}^2 = \overset{\circ}{\mathbb{R}}^3 / \sim$, az egyenesek halmaza $\mathbb{L} = \overset{\circ}{\mathbb{R}}^3 / \sim$.

Jelölje az $x \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}^3$ vektor által reprezentált ekvivalenciaosztályt $[x]$. Azt mondjuk, hogy az $[x] \in \mathbb{P}^2$ pont illeszkedik az $[u] \in \mathbb{L}$ egyenesre, illetve az $[u]$ egyenes illeszkedik az $[x]$ pontra, ha $\langle x, u \rangle = 0$. Jelölésben: $[x]\mathrm{I}[u]$ vagy $[u]\mathrm{I}[x]$.

Az egy egyenesre illeszkedő pontok halmazát *pontsor*nak, míg az egy pontra illeszkedő egyenesek halmazát *sugársor*nak nevezzük. Az egy egyenesre illeszkedő pontokat *kollineáris*aknak is nevezzük.

A projektív sík pontjait gyakran az ábécé nagy betűivel jelöljük.

A projektív sík konstrukcióját tetszőleges dimenzióban analóg módon el lehet végezni, pl. $\overset{\circ}{\mathbb{R}}^2 / \sim$ a projektív egyenes, $\overset{\circ}{\mathbb{R}}^4 / \sim$ a projektív tér. Emellett a valós számok teste helyett kiindulhatnánk a komplex számok testéből is (komplex projektív egyenes/sík/tér).

Megjegyzés. A definíció alapján egy $p = (p_1, p_2, p_3)$ nemzéró számhármas által reprezentált pont vagy egyenes:

$$[p] = \{ (\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha p_3) \mid \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}.$$

Két különböző pontot/egyenest reprezentáló két vektor lineárisan független vektorrendszert alkot, mivel egymásnak nem skalárszorosai.

A skaláris szorzat homogenitása alapján könnyen látható, hogy az illeszkedés definíciója független a pontot/egyenest reprezentáló ekvivalenciaosztály választásától. Ha $\langle x, u \rangle = 0$, akkor

$$\langle \alpha x, \beta u \rangle = \alpha\beta \langle x, u \rangle = 0.$$

Megjegyezzük, hogy az illeszkedési relációt (a Hilbert féle illeszkedési tértől eltérően) nem az *eleme* reláció szinonímájaként használjuk.

A $\{[p], [q], [r]\}$ ponthármas akkor és csakis akkor kollineáris, ha $|p, q, r| = 0$. Tudniilik a pontok akkor és csakis akkor lesznek kollineárisak, ha p, q, r egy nemzéró u vektorra merőlegesek, vagyis az u által generált egy dimenziós altér két dimenziós ortogonális komplementerében vannak. Két dimenziós vektortérben három vektor mindig lineárisan függő.

Mivel a pontoknak és egyeneseknek ugyanaz a definíciója, az illeszkedési reláció pedig szimmetrikus, ezért a pontok és egyenesek illeszkedésére kimondott minden igaz állításban a „pont” és „egyenes” szavak felcserélésével is igaz állítást kapunk. Ez a *dualitási elv*. A következő tétel két állítása is egymás duálisa.

1. Tétel. *A projektív síkon bármely két pontra egyértelműen illeszkedik egy egyenes, bármely két egyenesre egyértelműen illeszkedik egy pont, melyet e két egyenes* metszéspont*jának nevezünk.*

Bizonyítás: A $[p], [q]$ pontokra egyértelműen illeszkedő egyenes $[p \times q]$, az $[u], [v]$ egyenesekre illeszkedő egyértelmű pont pedig $[u \times v]$. Az illeszkedés onnan következik, hogy két vektor vektoriális szorzata mindkét tényezőre merőleges: $\langle p, p \times q \rangle = \langle q, p \times q \rangle = 0$, $\langle u, u \times v \rangle = \langle v, u \times v \rangle = 0$.

Az egyértelműség a következőképpen látható be. A lineárisan független x-re és y vektorok mindegyikére merőleges vektorok az $\mathcal{L}(x, y)$ két dimenziós altér ortogonális komplementerét alkotják, azaz egy egy dimenziós altérben vannak. Ez azt jelenti, hogy az ilyen (nemzéró) vektorok egymásnak skalárszorosai, tehát ugyanazt a pontot/egyenest reprezentálják. $\square$

A P és Q pontokra illeszkedő egyenesre a $\overleftrightarrow{PQ}$ jelölést alkalmazzuk. Nem okoz félreértést, ha az előbbi egyenesre illeszkedő pontok halmazát is ugyanígy jelöljük.

Definíció. A $[(p_1, p_2, 0)] \in \mathbb{P}^2$ alakban felírható pontokat *végtelen távoli pont*oknak, míg a $[(0, 0, 1)]$ egyenest *végtelen távoli egyenes*nek nevezzük. A nem végtelen távoli pontokat/egyeneseket gyakran *közönséges* pontokként/egyenesekként említjük. Két egyenest *affin párhuzamos*nak nevezünk, ha közös pontjuk végtelen távoli pont.

2. Tétel. *A végtelen távoli pontok a végtelen távoli egyenesre illeszkednek, a végtelen távoli egyenesre csak végtelen távoli pontok illeszkednek. A végtelen távoli egyenest kivéve minden egyenesre pontosan egy végtelen távoli pont illeszkedik.*

Bizonyítás: Az első állítás:

$$p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Ha a $[p]$ pont illeszkedik a végtelen távoli egyenesre, akkor $p_3 \cdot 1 = 0$, azaz $p_3 = 0$.

Az $[(u_1, u_2, u_3)]$ egyenesre illeszkedő egyértelmű végtelen távoli pont $[(-u_2, u_1, 0)]$, mint az a definíció alapján könnyen látható. $\square$

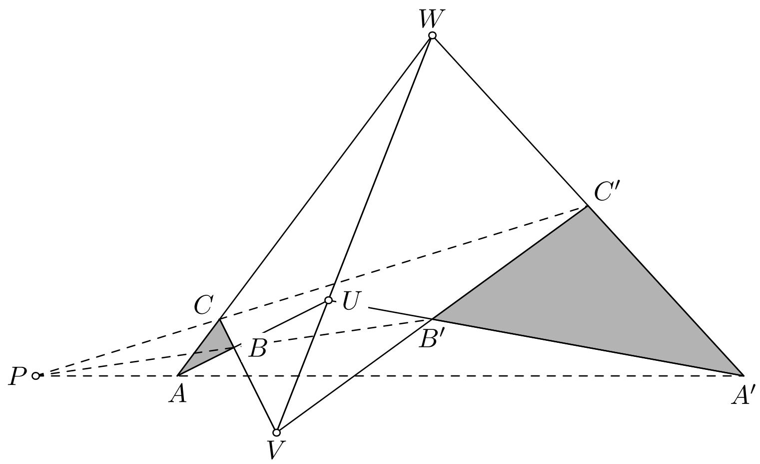
Definíció. Egy nemkollineáris ponthármast $\mathbb{P}^2$-ben *háromszög*nek nevezünk.

3. Tétel. (Desargues-tétel.) *Legyenek ABC és $A'B'C'$ háromszögek $\mathbb{P}^2$-ben. Tegyük fel, hogy $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ és $\overleftrightarrow{CC'}$ különbözőek. Ezen egyenesek akkor és csakis illeszkednek egy pontra, ha az $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$ és $\overleftrightarrow{CA} \cap \overleftrightarrow{C'A'}$ pontok egy egyenesre illeszkednek.*

Bizonyítás: A tétel két állítása egymás duálisa, elegendő az egyiket bizonyítani. Jelölje tehát a $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ és $\overleftrightarrow{CC'}$ egyenesek közös pontját P. Ha a P pont kollineáris lenne A, B, C közül valamelyik kettővel, akkor a háromszögek egy-egy oldala egybeesne, tehát ellentmondásra jutnánk a feltétellel.

Legyen $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{U\}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{V\}$ és $\overleftrightarrow{CA} \cap \overleftrightarrow{C'A'} = \{W\}$. Legyen a továbbiakban $A = [a]$, $B = [b]$, stb. A feltételek szerint valamely $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ skalárokra:

$$\alpha a + \alpha' a' = p, \quad \beta b + \beta' b' = p, \quad \gamma c + \gamma' c' = p.$$



3. ábra. Desargues tétele.

A megfelelő relációkat kivonva:

$$\begin{aligned} \alpha a - \beta b + \alpha' a' - \beta' b' &= 0 \\ \beta b - \gamma c + \beta' b' - \gamma' c' &= 0 \\ \gamma c - \alpha a + \gamma' c' - \alpha' a' &= 0. \end{aligned}$$

Rendezve:

$$\begin{aligned} \alpha a - \beta b = \beta' b' - \alpha' a' &= u \\ \beta b - \gamma c = \gamma' c' - \beta' b' &= v \\ \gamma c - \alpha a = \alpha' a' - \gamma' c' &= w. \end{aligned}$$

Ahonnan

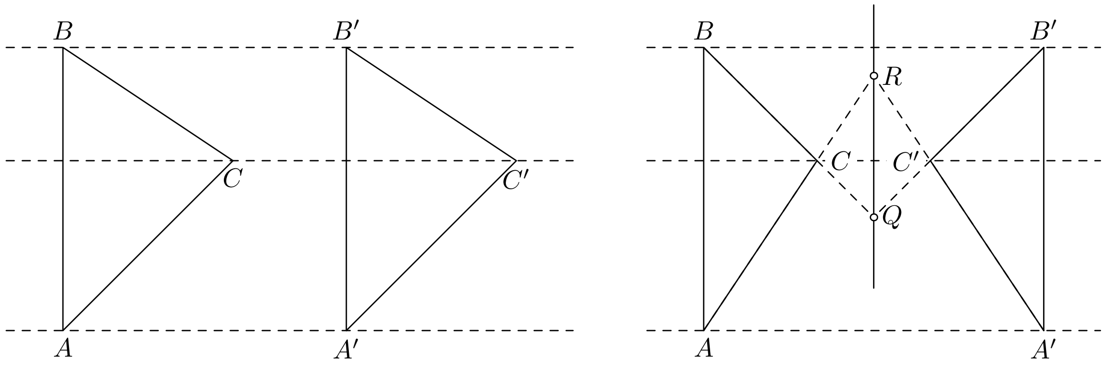
$$u + v + w = 0$$

adódik, tehát u, v, w lineárisan függőek, U, V, W egy egyenesre illeszkednek. $\square$

4. Tétel. (Affin Desargues-tétel.) *Legyenek $ABC\triangle$ és $A'B'C'\triangle$ háromszögek az euklidészi síkon, továbbá teljesüljön $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$.*

1. *Ha $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ és $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$, akkor $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$*

2. *Ha $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ és $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{Q\}$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{R\}$, akkor $\overleftrightarrow{QR} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.*



4. ábra. Az affin Desargues tétel.

3. Projektív transzformációk

Definíció. Egy $\Phi\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ bijektív leképezést *projektív transzformáció*nak nevezünk a projektív síkon, ha bármely három kollineáris pont képe három kollineáris pont. A projektív transzformációk csoportját $\mathbf{PGl}(2)$ jelöli.

Emlékeztetünk arra, hogy $\mathbf{Gl}(3)$ jelöli $\mathbf{R}^3$ lineáris izomorfizmusai csoportját. (A lineáris algebrai tanulmányainkból tudjuk, hogy $\mathbf{Gl}(3)$ elemei a nem elfajuló 3×3 típusú mátrixok, egy számhármas képét pedig ezzel a mátrixszal való balszorzással kapjuk.)

Példa. Legyen $\varphi \in \mathbf{Gl}(3)$. Ekkor $\bar\varphi \in \mathbf{PGl}(2)$, ahol

$$\bar\varphi\colon [p] \mapsto \bar\varphi([p]) = [p]' \overset{\text{def.}}{=} \big[\varphi(p)\big]. \quad (p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

Vegyük észre, hogy $\bar\varphi$ jól definiált, azaz ha $[p] = [q]$, akkor $[p]' = [q]'$. Valóban,

$$[p] = [q] \iff \exists k \neq 0 : p = kq \iff \varphi(p) = k\varphi(q) \iff \big[\varphi(p)\big] = \big[\varphi(q)\big].$$

Legyen $[p], [q], [r]$ kollineáris ponthármas, azaz $|p, q, r| = 0$. Ekkor $|\phi(p), \phi(q), \phi(r)| = \det\phi \cdot |p, q, r| = 0$, azaz $[p]', [q]', [r]'$ szintén kollineáris ponthármas.

Az előző példa lényegét úgy is megfogalmazhatjuk, hogy *a tér lineáris izomorfizmusai a projektív sík projektív transzformációi.* A projektív transzformációkra vonatkozó alapvető észrevétel, hogy ezeken kívül, azaz $\mathbf{Gl}(3)$ elemein kívül más projektív transzformáció nincs is:

5. Tétel. (A projektív transzformációk főtétele) *A* $\chi\colon \mathbf{Gl}(3) \to \mathbf{PGl}(2), \quad \varphi \mapsto \bar\varphi$ *leképezés szürjektív homomorfizmus.*

Bizonyítás: — $\square$

A tér lineáris izomorfizmusai és a projektív sík projektív transzformációi között a megfeleltetés nem kölcsönösen egyértelmű, mert a tér egy lineáris izomorfizmusa s ennek nemzéró skalárszorosa ugyanazt a projektív transzformációt adják. Úgy is fogalmazhatunk, ha a tér két lineáris izomorfizmusa csak egy origó középpontú középpontos hasonlóságban különböznek, akkor ugyanannak a projektív transzformációnak felelnek meg a projektív síkon:

6. Tétel. *Legyen* $\mathbf{H}(3) = \{\lambda id \,|\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ $\quad$ ($id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$). *Ekkor* $\mathbf{PGl}(2) \cong \mathbf{Gl}(3)/\mathbf{H}(3)$.

Bizonyítás: $\ker\chi = \{\varphi \in \mathbf{Gl}(3) | \bar{\varphi} = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^2}\}$.

$$\bar{\varphi} = \mathrm{id} \iff \forall p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : [p] = \big[\varphi(p)\big] \iff \varphi(p) = kp \quad (k \neq 0),$$

ami azt jelenti, hogy φ-nek minden nemzéró vektor sajátvektora, tehát $\varphi = \lambda\mathrm{id}$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$-re. Tehát $\ker\chi = \mathbf{H}(3)$. Az algebra homomorfiatételéből tudjuk, hogy ekkor:

$$\mathbf{PGl}(2) \cong \mathbf{Gl}(3)/\mathbf{H}(3).$$

$\square$

7. Tétel. *Legyen* $\mathbf{Sl}(3) = \{\varphi \in \mathbf{Gl}(3) | \det\varphi = 1\}$ *Ekkor* $\mathbf{PGl}(2) \cong \mathbf{Sl}(3)$.

Bizonyítás: Legyen $\varphi \in \mathbf{SL}(3) \cap \mathbf{H}(3)$. Ha $\varphi = \lambda\mathrm{id}$, akkor $\det\varphi = \lambda^3 \implies \lambda^3 = 1 \implies \lambda = 1$. Tehát

$$\mathbf{Sl}(3) \cap \mathbf{H}(3) = \{\mathrm{id}\}.$$

Az algebrai ismereteink alapján, ekkor teljesül $\mathbf{Sl}(3) \cong \mathbf{PGl}(2)$ is. $\square$

8. Tétel. *A projektív síkon minden projektív transzformációnak van fixpontja és invariáns pontsora (azaz „fixegyenese”).*

Bizonyítás: Tudjuk, hogy minden $\Phi \in \mathbf{PGl}(2)$ projektív transzformációra: $\Phi = \bar{\phi}$, valamely $\phi \in \mathbf{Gl}(3)$ izomorfizmusra. ϕ-nek, mint páratlan dimenziós vektortéren ható lineáris transzformációnak van egydimenziós invariáns altere, jelölje ezt $[x]$.

$$\Phi([x]) = \big[\phi(x)\big] = [x],$$

azaz $[x] \in \mathbb{P}^2$ a kívánt fixpont.

A lineáris algebrából azt is tudjuk, hogy ϕ-nek van kétdimenziós invariáns altere is. Jelölje ez $\mathcal{L}(p, q)$, ($p, q \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^3$ lineárisan független vektorok).

$$\mathcal{L}(p, q) = \mathcal{L}(p', q'), \implies [p \times q] = [p' \times q']$$

$\square$

Definíció. Négy pontot *általános helyzetű*nek nevezünk a projektív síkon, ha nincs közöttük három egy egyenesre illeszkedő. Az általános helyzetű pontnégyest gyakran *négyszög*ként említjük.

9. Tétel. *Legyen* P_1, P_2, P_3, P_4 *egy négyszög a projektív síkon. Ekkor léteznek olyan* $p_i \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^3$, *(*$i = 1, \ldots, 4$*) vektorok, hogy:*

1. $[p_i] = P_i$, ($i = 1, \ldots, 4$),
2. $p_1 + p_2 + p_3 = p_4$.

Bizonyítás: Legyen $p_4 \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}^3$ tetszőleges vektor, hogy $[p_4] = P_4$, továbbá $e_1, e_2, e_3 \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}^3$ szintén tetszőlegesek, hogy $[e_i] = P_i$ ($i = 1, \ldots, 4$). Mivel a pontok között nincs három egy egyenesre illeszkedő, ezért (e_1, e_2, e_3) a $\mathbb{R}^3$ vektortér egy bázisa, azaz p_4 előáll lineáris kombinációjukként:

$$p_4 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

Legyen $p_i = x_i e_i$, ($i = 1, 2, 3$). □

10. Tétel. (A projektív transzformációk alaptétele.) *Legyen $P_1P_2P_3P_4$ és $Q_1Q_2Q_3Q_4$ két négyszög. Egyértelműen létezik olyan $\Phi \in \mathbf{PGL}(2)$ projektív transzformáció, melyre:*

$$\Phi(P_i) = Q_i, \quad i = 1, \ldots, 4;$$

azaz négyszög és képe a projektív transzformációt egyértelműen meghatározza a projektív síkon.

Bizonyítás: Először a létezést látjuk be. Legyen

$$P_i = [p_i], Q_i = [q_i], \ldots, \qquad p_i, q_i, \ldots \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}^3,$$

s ráadásul teljesüljön $p_1 + p_2 + p_3 = p_4, \quad q_1 + q_2 + q_3 = q_4$. A lineáris kiterjesztés tételét alkalmazva, egyértelműen létezik olyan $\phi \in \mathbf{Gl}(3)$, melyre:

$$\phi(p_i) = q_i \qquad i = 1, 2, 3.$$

Ekkor $\bar{\phi}([p_i]) = [\phi(p_i)] = [q_i]$, ($i = 1 \ldots 3$), továbbá

$$\bar{\phi}([p_4]) = [\phi(p_4)] = [\phi(p_1 + p_2 + p_3)] = [\phi(p_1) + \phi(p_2) + \phi(p_3)] = [q_1 + q_2 + q_3] = [q_4].$$

Tehát $\Phi = \bar{\phi}$ a kívánt tulajdonságú transzformáció.

Most belátjuk az egyértelműséget. Legyen Φ_1 és Φ_2 két projektív transzformáció a tételben előírt feltételekkel. Ekkor a $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 = \bar{\phi}$ projektív transzformációnak P_1, P_2, P_3, P_4 fixpontjai, azaz $\phi(p_i) = \xi_i p_i$ valamely $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ nemzéró skalárokra. Továbbá:

$$\phi(p_4) = \phi(p_1 + p_2 + p_3) = \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3;$$

amiből az következik, hogy

$$\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3 = \xi_4 p_4.$$

Mindkét oldalt ξ_4-el osztva:

$$\frac{\xi_1}{\xi_4} p_1 + \frac{\xi_2}{\xi_4} p_2 + \frac{\xi_3}{\xi_4} p_3 = \xi_4 p_4.$$

Amiből

$$\frac{\xi_1}{\xi_4} = \frac{\xi_2}{\xi_4} = \frac{\xi_3}{\xi_4} = 1$$

következik. Tehát $\phi = \lambda_4 \mathrm{id}$ (azaz ϕ origó középpontú hasonlóság), amiből $\Phi_1 = \Phi_2$ következik. □

A projektív transzformációkat az eddigiek alapján könnyű analitikus formában is leírni:

Következmény. *Legyen* $\Phi \in \mathbf{PGl}(2)$ *projektív transzformáció. Ekkor létezik olyan* $(a_{ij}) \in M_{3\times3}$ *3 rangú mátrix, hogy minden* $P = [(x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{P}^2$ *pontra* $\Phi(P) = [(x_1', x_2', x_3')]$*, ahol*

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}$$

A fenti összefüggést tovább alakítva, az első relációt elosztva a harmadikkal:

$$\frac{x_1'}{x_3'} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3}.$$

A jobb oldali törtet bővítve $1/x_3$-mal, valamint felhasználva a Descartes és homogén koordináták közötti kapcsolatot ($x = x_1/x_3$, $y = x_2/x_3$):

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}.$$

Hasonlóan:

$$y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}.$$

A fenti eljárásnak természetesen nincs értelme, ha $x_3 = 0$ vagy $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$. Tehát minden projektív transzformáció az euklidészi síkon Descartes koordinátákkal megadható, mint *lineáris tört transzformáció közös nevezővel*.

Megjegyezzük, hogy más dimenzióban a projektív transzformációk leírása analóg,

$$\mathbf{PGl}(n) \cong \mathbf{Gl}(n+1)/\mathbf{H}(n).$$

4. Centrális kollineáció

A következőekben egy egyszerű geometriai példát adunk projektív transzformációra.

Definíció. Ha egy projektív transzformációnak van egy pontonként fix egyenese, akkor azt *centrális kollineációnak* nevezzük, a pontonként fix egyenest pedig *tengelynek*.

A továbbiakban feltesszük, hogy a centrális kollineáció nem identitás.

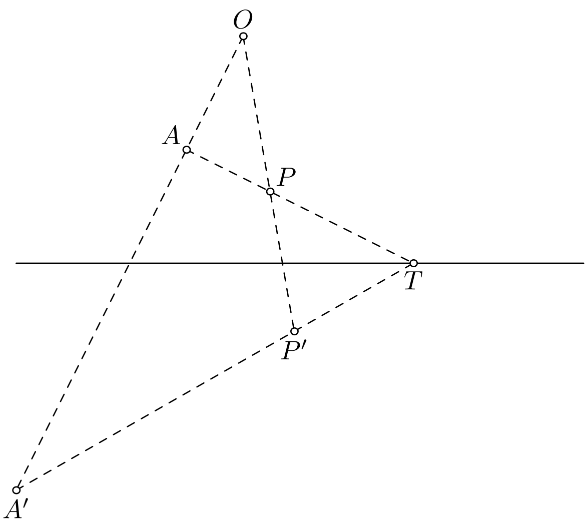
12. Tétel. *Centrális kollineációnál az egymásnak megfelelő egyenesek a tengelyen metszik egymást, a megfelelő pontokat összekötő egyenesek egy pontban metszik egymást. (A centrális kollineáció centruma.)*

Bizonyítás: Az első állítás nyilvánvaló, mert a tengely pontjai pontonként fixek.

A második állítás Desargues-tétel következménye. Legyenek A, A'; B, B'; C, C' megfelelő pontok. Az $ABC\triangle$ és $A'B'C'\triangle$ háromszögekre alkalmazható a Desargues tétel: a megfelelő oldalaik metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek, tehát a megfelelő csúcsokra illeszkedő egyenesek egy pontra illeszkednek. $\square$

Következmény. *A centrális kollineációt egyértelműen meghatározza a tengely, a centrum és egy megfelelő (tengelyre nem illeszkedő) pontpár.*

4. Feladat. Adott a centrális kollineáció tengelye, centruma és egy megfelelő pontpár. Szerkesszük meg egy pont képét!

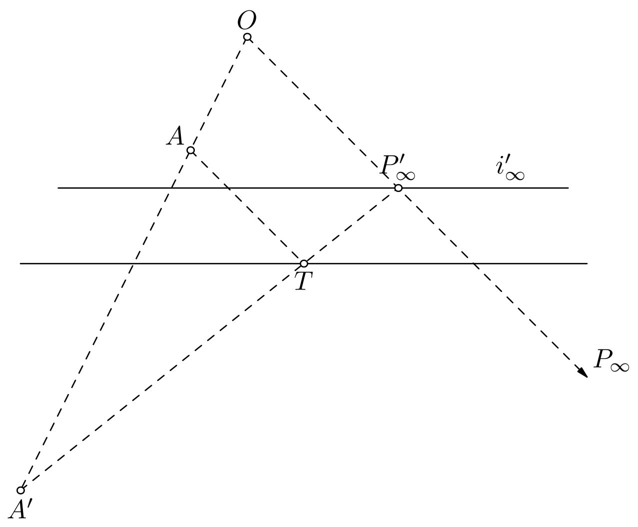


5. ábra. Pont képének szerkesztése: adott a tengely, a centrum, továbbá egy megfelelő pontpár (A, A'). Szerkesztendő a P pont képe.

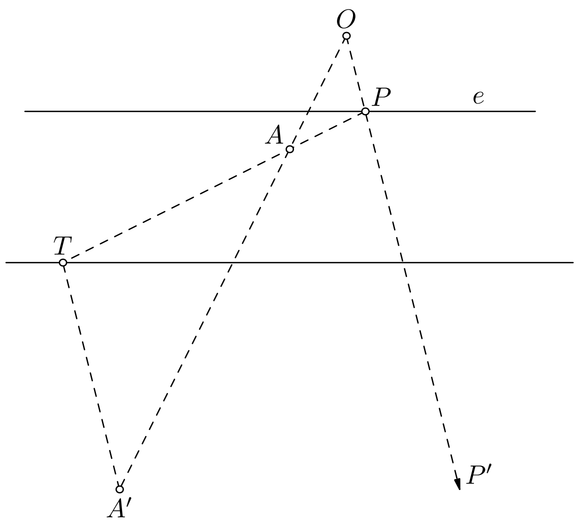
5. Feladat. Adott a centrális kollineáció tengelye, centruma és egy megfelelő pontpár. Szerkesszük meg a végtelen távoli egyenes képét!

6. Feladat. Adott a centrális kollineáció tengelye, centruma és egy megfelelő pontpár. Szerkesszük meg azt az egyenest, amelynek képe a végtelen távoli egyenes. (Eltűnési egyenes.)

Megjegyzés. A centrális kollineáció nem az euklideszi sík transzformációja, mert közönséges pontok képe lehet végtelen távoli (ld. az eltűnési egyenest). Ha azonban a centrum végtelen távoli pont, vagy a tengely a végtelen távoli egyenes, akkor a transzformációnak a végtelen távoli egyenes invariáns egyenese (a második esetben pontonként fix is), tehát a transzformáció leszűkíthető az euklideszi síkra. Ha a centrum végtelen távoli, a tengely közönséges, akkor a centrális kollineáció leszűkítése az euklideszi síkra tengelyes affinitás. Ha a tengely végtelen távoli, a centrum közönséges, akkor a transzformáció leszűkítése az euklideszi síkra középpontos hasonlóság. Ha a centrum és a tengely is végtelen távoli, akkor a transzformáció leszűkítése az euklideszi síkra eltolás. (Indokoljunk!)



6. ábra. A végtelen távoli egyenes képének szerkesztése.



7. ábra. Az eltűnési egyenes szerkesztése.

5. A geomertriai transzformációk hierarchiája

Definíció. Egy projektív transzformációt a projektív síkon *affin-projektív*nak nevezünk, ha minden végtelen távoli pont képe végtelen távoli pont. A projektív sík affin-projektív transzformációi csoportját $\mathbf{AffPGl}(2)$ jelöli.

14. Tétel. *Az affin-projektív transzformációk mátrixa a következő alakú:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

ahol

$$a_{33} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bizonyítás: Legyen $(a_{ij}) \in \mathbf{Gl(3)}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta \end{pmatrix}.$$

Ha minden végtelen távoli pont képe végtelen távoli pont, akkor minden α, β valós számra:

$$a_{31}\alpha + a_{32}\beta = 0.$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha $a_{31} = a_{32} = 0$. Azaz $\mathbf{AffPGl(2)}$ egy eleme:

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \qquad k \neq 0$$

alakú, ahol $\det(a_{ij}) \neq 0$ is teljesül. Ez utóbbi feltétel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

tehát

$$a_{33} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

$\square$

15. Tétel. *A projektív sík affin-projektív transzformációi csoportja izomorf az euklidészi sík affin transzformációi csoportjával:* $\mathbf{AffPGl}(2) \cong \mathbf{Aff(2)}$.

Bizonyítás: Az

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' &= \qquad\qquad\qquad\quad a_{33}x_3 \end{aligned}$$

affin projektív transzformációhoz rendeljük hozzá az

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a_{11}}{a_{33}}x + \frac{a_{12}}{a_{33}}y + \frac{a_{13}}{a_{33}} \\ y' &= \frac{a_{21}}{a_{33}}x + \frac{a_{22}}{a_{33}}y + \frac{a_{23}}{a_{33}} \end{aligned}$$

affin transzformációt. (Valóban affin transzformációt adtunk meg, mert

$$\begin{vmatrix} a_{11}/a_{33} & a_{12}/a_{33} \\ a_{21}/a_{33} & a_{21}/a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a_{33})^2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.)$$

Az előbbi hozzárendelés $\mathbf{AffPGl(2)}$ és $\mathbf{Aff(2)}$ között injektív. Ugyanis, ha

$$\frac{1}{a_{33}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{33}'} \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' \end{pmatrix},$$

akkor

$$a_{ij}' = \frac{a_{33}'}{a_{33}} a_{ij}, \qquad i = 1,2;\ j = 1,2,3,$$

tehát

$$(a_{ij}') = \frac{a_{33}'}{a_{33}} (a_{ij}).$$

(a_{ij}') és (a_{ij}) csak konstans szorzóban különböznek, tehát ugyanazt a projektív transzformációt írják le.

A megadott hozzárendelés szürjektív. Legyen ugyanis

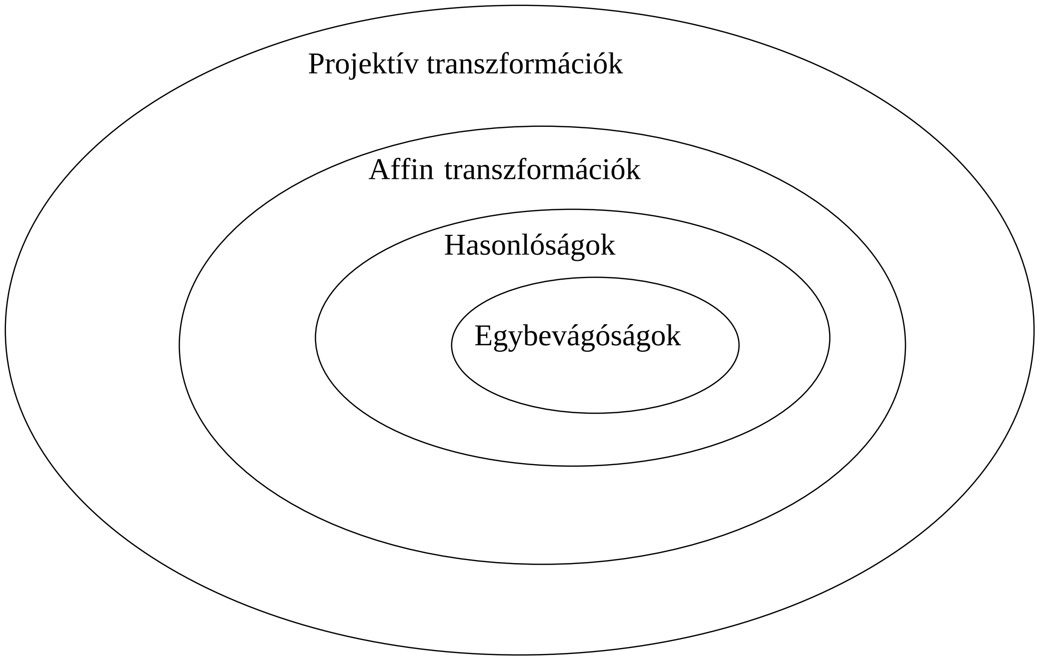
$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{aligned}$$

affin transzformáció az euklidészi síkon, ($a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$). Ennek ősképe nyilvánvalóan:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_3 \end{aligned}$$

A műveletartást mátrixszorzással ellenőrizzük önállóan! □

A fenti izomorfizmussal a sík eddigiekben tanult geometriai transzformációcsoportjait beazonosíthatjuk a projektív sík egy-egy transzformációcsoportjával:



8. ábra. A geometriai transzformációk hierarchiája.

6. Kettősviszony

Az affin alapinvariánst, az osztóviszonyt a projektív transzformációk nem tartják meg. Könnyű példát mutatni arra, hogy centrális kollineációnál felezőpont képe nem felezőpont. A projektív alapinvariáns a *kettősviszony* lesz, mely négy kollineáris ponthoz van hozzárendelve. A definíciót akkor tudjuk egyszerűen megadni, ha a problémát egy dimenzióban, a projektív egyenesen vizsgáljuk. Ennek definíciója analóg a projektív síkéhoz.

Definíció. Projektív egyenesen a $\mathbb{P} = \mathring{\mathbb{R}}^2/\sim$ halmazt értjük, ahol két (nemzéró) számpár relációban van, ha arányosak. Az $[(1,0)]$ pontot *végtelen távoli pont*nak nevezzük.

Definíció. Legyenek P_1, P_2, P_3, P_4 különböző pontok a projektív egyenesen, továbbá $P_i = [(\lambda_i, \mu_i)] \quad i = 1,2,3,4$. A négy pont $(P_1P_2P_3P_4)$-el jelölt *kettősviszony*án a

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_1 \\ \mu_4 & \mu_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}}$$

számot értjük.

Megjegyzés. A definícióban szereplő 2×2-es determinánsok egyike sem zéró, mert oszlopai lineárisan függetlenek $P_i \neq P_j$ $(i \neq j)$ miatt.

Az is könnyen látható, hogy a definíció független a pontok reprezentánsainak választásától. Jelöljük ugyanis a $(\lambda_i, \mu_i)^t$ oszlopot p_i-vel és legyenek $k_i \neq 0$ valós számok. Ekkor

$$\begin{aligned}(P_1P_2P_3P_4) &= \frac{|k_3 \cdot p_3, k_1 \cdot p_1|}{|k_2 \cdot p_2, k_3 \cdot p_3|} \cdot \frac{|k_2 \cdot p_2, k_4 \cdot p_4|}{|k_4 \cdot p_4, k_1 \cdot p_1|} = \\ &= \frac{k_3k_1\,|p_3, p_1|}{k_2k_3\,|p_2, p_3|} \cdot \frac{k_2k_4\,|p_2, p_4|}{k_4k_1\,|p_4, p_1|} = \\ &= \frac{|p_3, p_1|}{|p_2, p_3|} \cdot \frac{|p_2, p_4|}{|p_4, p_1|}.\end{aligned}$$

A következőekben a kettősviszony kiszámítását visszavezetjük osztóviszonyok hányadosának kiszámítására, (ha mind a négy pont közönséges) vagy osztóviszonyra (ha van a pontok között végtelen távoli). Ez utóbbi esetben először azt az esetet vizsgáljuk, amikor a negyedik pont végtelen távoli, majd megadjuk, hogy a pontok (bizonyos) permutálásával hogyan változik meg a kettősviszony értéke.

16. Tétel. *Ha P_1, P_2, P_3, P_4 négy különböző közönséges pont a projektív egyenesen, akkor*

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{(P_1P_2P_3)}{(P_1P_2P_4)};$$

ha P_1, P_2, P_3 különböző közönséges pontok, P_4 végtelen távoli, akkor

$$(P_1P_2P_3P_4) = -(P_1P_2P_3).$$

Bizonyítás: Legyen először $P_i = [(\lambda_i, 1)]$, ($i = 1, 2, 3, 4$).

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_1 \\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & 1\end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix}\lambda_4 & \lambda_1 \\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_4 \\ 1 & 1\end{vmatrix}} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_4} = \frac{(P_1P_2P_3)}{(P_1P_2P_4)}.$$

Másodjára, $P_i = [(\lambda_i, 1)]$, ($i = 1, 2, 3$), $P_4 = [(1, 0)]$.

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_1 \\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & 1\end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix}1 & \lambda_1 \\ 0 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_2 & 1 \\ 1 & 0\end{vmatrix}} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{1}{-1} = -(P_1P_2P_3).$$

17. Tétel.

$$\begin{aligned}(P_1P_2P_3P_4) &= \frac{1}{(P_2P_1P_3P_4)} = \frac{1}{(P_1P_2P_4P_3)} = \\ &= (P_3P_4P_1P_2) = \frac{1}{P_3P_4P_2P_1} = \frac{1}{P_4P_3P_1P_2}.\end{aligned}$$

Bizonyítás: Helyettesítsünk be a definícióba, s alkalmazzuk a determinánsfüggvény azon tulajdonságát, hogy oszlopcserekor előjelet vált. $\square$

18. Tétel. *A kettősviszony projektív transzformációkkal szemben invariáns.*

Bizonyítás: A projektív egyenes egy projektív transzformációját adjuk meg a következőképpen. Legyen $C \in \mathbf{Gl}(2)$, (azaz 2×2-es nem zéró determinánsú mátrix). $X \in \mathbb{P}^1$, $X = [x]$, $(x \in \mathring{\mathbb{R}}^2)$. Ekkor $X' = [Cx]$. Legyen $P_i = [p_i]$, ahol $p_i \in \mathring{\mathbb{R}}^2$. Vegyük észre, hogy $|Cp_i, Cp_j| = |C\cdot(p_i, p_j)| = \det C \cdot |p_i, p_j|$, a determinánsok szorzástétele miatt. Tehát:

$$
\begin{aligned}
&(P_1'P_2'P_3'P_4') = \\
&\quad \frac{|Cp_3, Cp_1|}{|Cp_2, Cp_3|} : \frac{|Cp_4, Cp_1|}{|Cp_2, Cp_4|} = \frac{\det C \cdot |p_3, p_1|}{\det C \cdot |p_2, p_3|} : \frac{\det C \cdot |p_4, p_1|}{\det C \cdot |p_2, p_4|} = \frac{|p_3, p_1|}{|p_2, p_3|} : \frac{|p_4, p_1|}{|p_2, p_4|} = \\
&\quad = (P_1P_2P_3P_4).
\end{aligned}
$$

Következmény. *Az affin-projektív transzformációk megőrzik az osztóviszonyt.*

7. Kúpszeletek projektív osztályozása

Lineáris algebrai tanulmányainkból ismerjük a másodrendű görbe fogalmát. Egy másodrendű görbe egyenlete $\mathbb{R}^2$-ben

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

ahol az a_{11}, a_{12}, a_{22} együtthatók egyszerre nem nullák. A másodrendű görbék euklideszi osztályozásánál két másodrendű görbe akkor tartozik egy osztályba, ha izometriával egyik a másikba átvihető. Analitikusan ez azt jelenti, hogy

$$
\begin{aligned}
x' &= \cos\alpha x \mp \sin\alpha y + c_1 \\
y' &= \sin\alpha x \pm \cos\alpha y + c_2
\end{aligned}
$$

alakú transzformációval elérhető, hogy a két másodrendű görbe azonos egyenletű legyen. Tudjuk, hogy az osztályok száma itt végtelen, (9 nagyobb csoport).

A másodrendű görbék affin osztályozásánál két másodrendű görbe akkor tartozik ugyanabba az osztályba, ha affin transzformációval egyik a másikba átvihető. Analitikusan ez az

$$
\begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{12}y + c_1 \\
y' &= a_{21}x + a_{22}y + c_2
\end{aligned}
$$

alakú transzformációkat engedi meg, ahol az (a_{ij}) matrix reguláris. Ekkor az osztályok száma 9 (ellipszis, parabola, hiperbola, üreshalmaz (képzetes ellipszis), üreshalmaz (képzetes párhuzamos egyenespár), pont, egybeeső egyenespár, párhuzamos egyenespár, metsző egyenespár).

Végezetül a projektív osztályozásnál azt vizsgáljuk, hogy projektív transzformációval mikor vihető két másodrendű görbe egymásba. Ezt a kérdést azonban nem az euklideszi, hanem a projektív síkon érdemes vizsgálni, a másodrendű görbéket pedig esetleg végtelen távoli pontokkal bővíteni. A másodrendű görbék előbbi képletébe írjuk be az

$$x = \frac{x_1}{x_3},\ y = \frac{x_2}{x_3}$$

kifejezéseket, majd szorozzunk x_3^2-tel. Az így kapott egyenletet már végtelen távoli pontok koordinátái is kielégíthetik, a végtelen távoli ponttól vagy pontoktól eltekintve pedig az euklideszi sík már megismert másodrendű görbéit kapjuk. Ezek után természetes az alábbi definíció:

Definíció. *Másodrendű görbén* a projektív síkon egy

$$q = \left\{ [(x_1, x_2, x_3)] \mid \sum_{i,j=1}^{3} a_{ik} x_i x_k = 0 \right\}$$

halmazt értünk, ahol az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

mátrix szimmetrikus, és benne nem minden elem nulla.

A másodrendű görbe egyenletét mátrixalakban is egyszerűen megadhatjuk:

$$[p] \in q \iff p^t \cdot A \cdot p = 0 \quad p \in M_{3\times 1}.$$

20. Tétel. *Egy projektív transzformáció másodrendű görbét másodrendű görbébe visz át.*

Bizonyítás: Legyen $T \in \mathbf{Gl}(3)$, a projektív transzformáció pedig $[p] \mapsto [T \cdot p]$. Jelölje T inverzét S.

$$[p] \in q' \iff [S \cdot p] \in q \iff (S \cdot p)^t \cdot A \cdot (S \cdot p) = 0 \iff p^t \cdot (S^t \cdot A \cdot S) \cdot p = 0.$$

$(S^t \cdot A \cdot S)$ ismét egy szimmetrikus mátrix, mely rangja megegyezik A rangjával. $\square$

Definíció. Két másodrendű görbét *projektív ekvivalens*nek mondunk, ha egyik a másikba projektív transzformációval átvihető. (Ez ekvivalenciareláció.)

21. Tétel. (A másodrendű görbék projektív osztályozása.) *Minden másodrendű görbe projektív ekvivalens az alábbi másodrendű görbék valamelyikével:*

Elfajuló másodrendű görbék: egyenespárok

$x_1^2 = 0$	valós kettős egyenespár
$x_1^2 + x_2^2 = 0$	képzetes metsző egyenespár (pont)
$x_2^1 - x_2^2 = 0$	valós metsző egyenespár

Nem elfajuló másodrendű görbék: körök

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad \text{képzetes kör (üreshalmaz)}$$
$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \qquad \text{valós kör}$$

Azaz a másodrendű görbéknek 5 projektív osztálya van.

Bizonyítás: A probléma jól ismert a lineáris algebrából: az A szimmetrikus négyzetes mátrixhoz mindig létezik olyan S reguláris mátrix, hogy $(S^t \cdot A \cdot S)$ diagonális, a főátlóban $0, \pm 1$ együtthatókkal (kvadratikus formák négyzetösszegre transzformálása). $\square$

A következőekben a nem elfajuló másodrendű görbék néhány tulajdonságát fogalmazzuk meg.

Definíció. A nem elfajuló valós másodrendű görbe *belseje* illetve *külseje* az

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0 \text{ ill. } x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 > 0$$

egyenletű ponthalmaz.

A nem elfajuló valós másodrendű görbe a projektív sík rá nem illeszkedő pontjait két osztályba sorolja, a külsejébe ill. a belsejébe.

22. Tétel. *Egy nem elfajuló valós másodrendű görbének és egy egyenesnek legfeljebb két közös pontja van. Ha az egyenes belső pontra illeszkedik, akkor pontosan 2.*

Bizonyítás: Legyen az egyenes egyenlete: $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$, ahol az együtthatók között van nullától különböző, pl. C. Ekkor az egyenest a paraméteres alakban a következőképpen lehet megadni:

$$\begin{aligned} x_1 &= u \\ x_2 &= v \\ x_3 &= -\frac{A}{C}u - \frac{B}{C}v, \end{aligned}$$

ahol u és v egyszerre nem nulla, egyébként tetszőleges valósak. Írjuk be ezeket a formulákat a valós, nem elfajuló másodrendű görbe egyenletébe:

$$u^2\left(1 - \frac{A^2}{C^2}\right) + v^2\left(1 - \frac{B^2}{C^2}\right) - \frac{2AB}{C^2}uv = 0.$$

$v \neq 0$, mert ellenkező esetben $u = 0$ is következne, ami nem lehet. Oszthatunk tehát v^2-el:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2\left(1 - \frac{A^2}{C^2}\right) - \frac{2AB}{C^2}\frac{u}{v} + \left(1 - \frac{B^2}{C^2}\right) = 0.$$

A kapott egyenlet u/v-re másodfokú, azaz legfeljebb két megoldása van. A metszéspontok száma is legfeljebb 2.

A második állítás bizonyításakor azt kellene ellenőrizni, hogy a feltételek mellett a kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív. $\square$

Mivel az elfajuló valós másodrendű görbék (esetleg egybeeső) egyenespárok, ezért kimondhatjuk az előző tétel alábbi következményét:

23. Tétel. *Egy nem elfajuló valós és egy elfajuló valós másodrendű görbe metszéspontjainak száma legfeljebb 4.*

Végezetül a két nem elfajuló valós görbe esete:

24. Tétel. *Két nem elfajuló valós másodrendű görbe metszéspontjainak száma legfeljebb 4.*

Bizonyítás: Először projektív transzformációval az egyik másodrendű görbét transzformáljuk az $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ görbébe, majd tekintsük az alábbi transzformációt:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_3 - x_1 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 + x_1. \end{aligned}$$

A transzformáció matrixának determinánsa

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0,$$

azaz ez a transzformáció projektív transzformáció. A transzformált görbe egyenlete $x_2^2 = x_1 x_3$. Paraméterezzük ezt a görbét az alábbi módon:

$$\begin{aligned} x_1 &= u^2 \\ x_2 &= uv \\ x_3 &= v^2, \end{aligned}$$

ahol engedjünk meg komplex paramétereket is (így x_1 és x_3 negatívak is lehetnek). Az előbbi kifejezéseket helyettesítsük be a másik görbe (nem feltétlenül kanonikus) egyenletébe. Egy negyedfokú, kétváltozós homogén polinomot kapunk. Osszunk v^4-el, ekkor u/v-re egy negyedfokú egyenletet kapunk, mely gyökei száma legfeljebb 4. (A komplex gyökök száma multiplicitással együtt 4, azaz a valós gyökök száma legfeljebb 4.) $\square$

Összefoglalva:

25. Tétel. *Ha két valós másodrendű görbe metszete nem tartalmaz egyenest, akkor a közös pontok száma legfeljebb 4.*

26. Tétel. *Ha adott 5 olyan pont, hogy közöttük nincs kollineáris pontnégyes, akkor pontosan 1 valós másodrendű görbe van amely illeszkedik az 5 pontra.*

Bizonyítás: Az, hogy egynél több ilyen másodrendű görbe nincs, következik az előzőekből. Belátjuk, hogy legalább 1 másodrendű görbe illeszkedik az 5 pontra. A másodrendű görbe homogén koordinátás egyenletében 6 konstans van:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Helyettesítsük be a megadott 5 pont homogén koordinátáit az előbbi egyenletbe, a 6 konstansra, mint 6 ismeretlenre 5 egyenletet kapunk, azaz egy 6 ismeretlenes 5 egyenletes homogén lineáris egyenletrendszert. Az ilyen típusú egyenletrendszernek azonban van triviálistól különböző megoldása: a megoldáshalmaz legalább 1 dimenziós altér. $\square$

A másodrendű görbe és egyenes kölcsönös helyzetének egy érdekes speciális esetét vizsgáljuk meg: határozzuk meg az $x_1^2 + x_2^2 + \epsilon x_3^2 = 0$ ($\epsilon = 0, \pm 1$) másodrendű görbe és a végtelen távoli egyenes metszéspontjait. A metszéspontokra teljesül, hogy $x_1^2 + x_2^2 = 0$, vagyis valós megoldást nem kapunk. Komplex koordinátákat is megengedve az $\mathcal{I} = [(1, i, 0)]$ és a $\mathcal{J} = [(1, -i, 0)]$ pontokat kapjuk megoldásként.

Definíció. Az $\mathcal{I} = [(1, i, 0)]$ és a $\mathcal{J} = [(1, -i, 0)]$ pontokat *abszolút képzetes körpontok*nak nevezzük.

Az elnevezés azt a tényt fejezi ki, hogy az abszolút képzetes körpontok minden körre illeszkednek, azaz $(1, i, 0)$ és $(1, -i, 0)$ minden kör (homogén koordinátákkal felírt) egyenletét kielégítik.

8. A geometriák projektív nézőpontból

Legyen q a projektív sík egy rögzített részhalmaza, $\mathcal{T} \subset \mathbf{PGl}(2)$ pedig mindazon projektív transzformációk részcsoportja, melyek q-t invariánsan hagyják:

$$\phi \in \mathcal{T} \iff \phi(q) = q.$$

Felix Klein az ún. *Erlangeni programban* a különböző geometriákat mint egy $(q, \mathcal{T})$ párt definiálta. A korábbiakban már láttuk, hogy ha q megegyezik az i végtelen távoli egyenessel, $\mathcal{T}$ pedig az affin projektív transzformációk csoportja, akkor $(i, \mathbf{AffPGl}(2))$ az affin geometriát adja. Ennek metrikus invariánsa az osztóviszony.

A továbbiakban a projektív transzformációcsoport további nevezetes részcsoportjait írjuk le, mindegyikben megadva egy-egy metrikus invariánst.

Definíció. Legyen q az $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ egyenletű nem elfajuló valós másodrendű görbe a projektív síkon. Azon projektív transzformációk halmazát, melyek q-t invariánsan hagyják, a projektív transzformációcsoport *hiperbolikus részcsoport*jának nevezzük.

Legyen q az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ egyenletű nem elfajuló képzetes másodrendű görbét a projektív síkon. Azon projektív transzformációk halmazát, melyek q-t invariánsan hagyják a projektív transzformációcsoport *elliptikus részcsoport*jának nevezzük.

Legyen $q = \{\mathcal{I}, \mathcal{J}\}$ ($\mathcal{I}, \mathcal{J}$ az abszolút képzetes körpontok). Azon projektív transzformációk halmazát, melyek a q halmazt invariánsan hagyják a projektív transzformációcsoport *Klein-féle részcsoport*jának nevezzük.

8.1. A Klein-féle részcsoport

27. Tétel. *A Klein féle részcsoport az affin-projektív csoport részcsoportja.*

Bizonyítás: Azt kell belátni, hogy a Klein féle részcsoport bármely eleme a végtelen távoli egyenest invariánsan hagyja. Ez azonban igaz, hisz az abszolút képzetes körpontok rajta vannak a végtelen távoli egyenesen (a koordinátáik kielégítik az $x_3 = 0$ egyenletet). $\square$

28. Tétel. *A Klein-féle részcsoport tetszőleges eleme $\bar{T}$, ahol:*

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha & t_{13} \\ \sin\alpha & \pm\cos\alpha & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix},$$

azaz a Klein féle részcsoport elemei a hasonlósági transzformációk.

Bizonyítás: Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a megadott transzformációk valóban a Klein-csoport elemei:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha & t_{13} \\ \sin\alpha & \pm\cos\alpha & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = (\cos\alpha \mp i\sin\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix};$$

hasonlóan $\mathcal{J}$-re.

Azt kell belátni, hogy a Klein-csoport minden eleme a tételben megadott alakú. Azt már tisztáztuk, hogy a Klein-féle részcsoport elemei affin-projektív transzformációk. Ezt kihasználva:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{31} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} + it_{12} \\ t_{21} + it_{22} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ha a transzformációnál $\mathcal{I} \mapsto \mathcal{I}$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{t_{21} + it_{22}}{t_{11} + it_{12}} &= i \\ t_{21} + it_{22} &= -t_{12} + it_{11}, \end{aligned}$$

a képzetes és a valós rész összehasonlításából:

$$t_{21} = -t_{12}, \qquad t_{22} = t_{11}.$$

Tehát a T mátrix a következő alakú:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ -t_{12} & t_{11} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}.$$

Legyen $k = \sqrt{t_{11}^2 + t_{12}^2} \neq 0$. k-t mindegyik mátrixelemből kiemelve:

$$T = \frac{1}{k}\begin{pmatrix} t_{11}/k & t_{12}/k & t_{13}/k \\ -t_{12}/k & t_{11}/k & t_{23}/k \\ 0 & 0 & t_{33}/k \end{pmatrix}.$$

A jobb felső 2×2-es részmátrix $+1$ determinánsú ortogonális mátrix, azaz

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

alakú valamely α számra. Ez a tételben megadott egyik alak.

Ha $\mathcal{I} \mapsto \mathcal{J}$, akkor ugyanígy járunk el, de a bal felső 2×2-es részmátrix -1 determinánsú ortogonális mátrix lesz, s ebből a tételben megadott másik alak következik. □

Következmény. *Egy projektív transzformáció akkor és csakis akkor hasonlóság, ha az abszolút képzetes körpontok halmaza invariáns.*

Úgy is fogalmazhatunk, hogy a Klein-féle geometria az euklidészi geometria, hiszen az euklidészi geometriában általában az alakzatok azon tulajdonságai „fontosak”, melyek hasonlósági transzformációval szemben invariánsak. (A távolság az egység megválasztásától függ, de a távolságok aránya már attól független.)

8.2. A hiperbolikus részcsoport

A projektív transzformációknak általános invariánsa a kettősviszony. Ez 4 ponttal kapcsolatos fogalom. A hiperbolikus részcsoportnak van olyan invariánsa, amely pontpárokhoz van rendelve.

30. Tétel. *Legyen q az $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ másodrendű görbe. Ha egy projektív transzformáció q-t invariánsan hagyja, akkor q belseje is invariáns.*

Bizonyítás: — □

31. Tétel. *Vegyünk fel a q belsejében két pontot, P-t és Q-t. A $\overleftrightarrow{PQ}$ metszéspontjai q-val legyenek U és V. A $d(P,Q) = |\log(PQUV)|$ kifejezés független U és V sorrendjétől, továbbá $d(P,Q)$-t egy tetszőleges hiperbolikus transzformáció megőrzi.*

Bizonyítás: A feltételek mellett a kettősviszony érték pozitív, lehet a logaritmusát képezni. Mivel $(PQUV) = 1/(PQVU)$ ezért $\log(PQUV)$, $\log(PQVU)$ csak előjelben különböznek, vagyis mind a két kifejezés abszolút értéke megegyezik. Az utolsó állítás nyilvánvaló, mert a hiperbolikus transzformáció projektív transzformáció, tehát kettősviszonytartó. □

Definíció. Legyen

$$d\colon \operatorname{int} q \times \operatorname{int} q \to \mathbf{R},\ d(P,Q) = \begin{cases} 0 & \text{ha } P = Q \\ |\log(PQUV)| & \text{ha } P \neq Q. \end{cases}$$

32. Tétel. *$(\operatorname{int} q, d)$ metrikus tér.*

Bizonyítás: — □

8.3. Az elliptikus részcsoport

Vázlatosan tárgyaljuk az elliptikus részcsoportot. A pontos leíráshoz komplex függvénytani ismeretek is kellenek (nevezetesen a komplex exponenciális és logaritmus függvény és tulajdonságai). A hiperbolikus részcsoportnál megismert felépítést analóg módon el lehet végezni, de közben komplex homogén koordináták is előfordulnak, továbbá a komplex logaritmus függvényt kell alkalmazni. A fő cél az, hogy megadjunk itt is egy pontpárokhoz rendelhető invariánst, ami betölti a távolságfüggvény szerepét.

Legyen tehát q az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ nem elfajuló képzetes kör, P és Q két pont a projektív síkon. Határozzuk meg a $\overleftrightarrow{PQ}$ és q metszéspontjait: azaz keressük meg a $\overleftrightarrow{PQ}$ és q egyenletéből álló egyenletrendszer nem triviális megoldásait:

$$\begin{aligned} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Bár az egyenletrendszerben minden együttható valós, csak komplex megoldásokat kapunk, multiplicitással együtt kettőt. Jelöljük ezeket a pontokat U-val és V-vel (ezek tehát komplex koordinátájú pontok.) A kettősviszonyt definiáló képletbe behelyettesítve a koordinátákat kiszámolhatjuk $(PQUV)$-t, tehát ennek a kettősviszonynak van értelme.

33. Tétel. *Legyen q az origó középpontú képzetes egységkör, P Q két tetszőleges pont a projektív síkon. A $\overleftrightarrow{PQ}$ és q (komplex) metszéspontjait jelölje U és V. A $(PQUV)$ kettősviszonyérték abszolút értéke 1, azaz egyértelműen létezik olyan $\varphi \in [-\pi, \pi)$, hogy*

$$(PQUV) = \cos\varphi + i\sin\varphi = \exp(i\varphi).$$

A $d(P,Q) = |\varphi| = |\log(PQUV)|$ kifejezés metrikát definiál a projektív síkon (a $d(P,P) = 0$ kiegészítéssel.) Ezt a távolságot az elliptikus részcsoport elemei megőrzik.

9. A hiperbolikus sík projektív modellje

9.1. A pólus-poláris kapcsolat

Definíció. Legyen q a $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = 0$ egyenletű nem elfajuló kúpszelet. Azt mondjuk, hogy $[u] = [(u_1, u_2, u_3)] \in \mathbb{P}^2$ és $[v] = [(v_1, v_2, v_3)] \in \mathbb{P}^2$ *konjugáltak* q-ra nézve, ha $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}u_i v_j = 0$ (azaz $\langle u, Av\rangle = 0$) teljesül.

Megjegyzés. A q nem elfajuló kúpszelet ezek szerint azon pontok halmaza, melyek q-ra nézve önmagukhoz konjugáltak.

34. Tétel. *A konjugáltság szimmetrikus reláció.*

Bizonyítás: A szimmetrikus (önadjungált), tehát

$$\forall u, v \in \mathring{\mathbb{R}}^3 : \quad \langle v, Au\rangle = \langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle = 0. \qquad \square$$

35. Tétel. *A konjugáltság projektív transzformációval szemben invariáns reláció.*

Bizonyítás: Teljesüljön, hogy $\langle u, Av\rangle = 0$, legyen $T \in \mathbf{Gl}(3)$, inverze S.

$$\left\langle Tu, S^t ASTv\right\rangle = \left\langle u, T^t S^t ASTv\right\rangle = \left\langle u, (ST)^t A(ST)v\right\rangle = \langle u, Av\rangle = 0. \qquad \square$$

Definíció. Egy rögzített P ponthoz konjugált pontok halmazát a P *polárisának* nevezzük, melynek *pólusa* P.

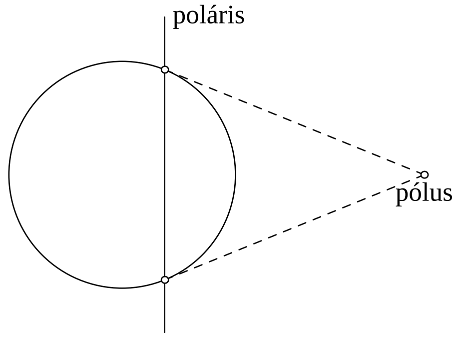
36. Tétel. *Az $[u]$ pont polárisa az $[Au]$ egyenesre illeszkedő pontsor.*

Bizonyítás: A rögzített $[u]$ ponthoz konjugált pontok halmaza: $\{\, v \mid \langle Au, v\rangle = 0 \,\}$, amely az illeszkedés definíciója miatt valóban az Au egyenesre illeszkedő pontsor. $\square$

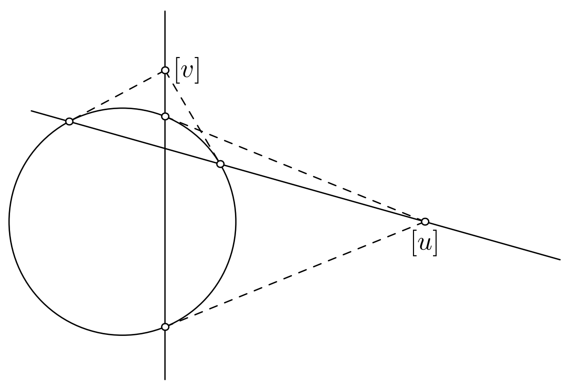
1. Példa. Legyen q az $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ egyenletű kör. Egy külső pont polárisa a pontból a körhöz húzott érintők érintési pontjait összekötő pontsor. A körvonal egy pontjának polárisa a kör adott pontbeli érintője. (9. ábra.)

37. Tétel. *Egy $[u]$ pont polárisa akkor és csakis akkor tartalmazza a $[v]$ pontot, ha a $[v]$ pont polárisa tartalmazza az $[u]$ pontot.*

Bizonyítás: A $[v]$ akkor és csakis akkor van rajta az $[u]$ polárisán, ha $\langle v, Au\rangle = 0 \iff \langle Av, u\rangle = 0$, ami akkor és csakis akkor teljesül, ha $[u]$ rajta van a $[v]$ polárisán. (10. ábra.) $\square$



9. ábra. A pólus-poláris kapcsolat.



10. ábra.

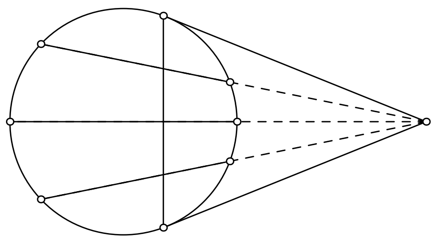
9.2. A Cayley - Klein modell

Ezek után rátérünk a hiperbolikus sík egy modelljének ismertetésére.

Az interpretálandó struktúra $(\mathcal{E}, \mathcal{L}, d, m)$. Az interpretációt a klasszikus projektív síkon adjuk meg. A szögmérték interpretációjában a merőlegesség fogalmának megadására szorítkozunk.

Legyen q az $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ egységkör.

interpretálandó	interpretáció
$\mathcal{E}$	$\operatorname{int} q$ belseje
$\mathcal{L}$	a projektív sík egyeneseinek metszete q belsejével, ha a metszet nem üres
$d(P,Q)$	$\lvert\log(PQUV)\rvert$, ahol $\{U,V\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap q$
$a \perp b$	$\bar{a}$ illeszkedik $\bar{b}$ pólusára, ahol $a = \bar{a} \cap \operatorname{int} q$, $b = \bar{b} \cap \operatorname{int} q$ $\bar{a}$, $\bar{b}$ a projektív sík egyenesei (11. ábra.)



11. ábra. Egy egyenesre merőleges egyenesek.

Be kell látni, hogy ha a hiperbolikus sík axiómáiba behelyettesítjük az interpretációt, akkor a projektív geometria tételeit kapjuk. Az illeszkedés tulajdonságai az euklideszi síkról öröklődnek q belsejébe. Belátjuk, hogy teljesül a vonalzó axióma. Ehhez koordinátaleképezést kell konstruálni a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenesen. Ez az egyenes a végtelen távoli pontját leszámítva koordinátázható az euklideszi síkon egy koordinátaleképezéssel. Az U és V koordinátáit ebben a koordinátalaképezésben jelölje u és v, a jelölés legyen olyan, hogy $v > u$. Az egyenes egy tetszőleges X pontjának koordinátáját jelölje x. Legyen $f(X) = \log \dfrac{x-u}{v-x}$. Azt állítjuk, hogy így koordinátaleképezést adtunk meg d számára a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenesen. f bijekció $\mathbb{R}$-re, mert az $x \mapsto \dfrac{x-u}{v-x}$ függvény szigorúan monoton növekedően képezi le az (u,v) intervallumot $\mathbb{R}^+$-ra (ellenőrizzük, hogy a derivált függvény pozitív). Mivel a $\log$ függvény $\mathbb{R}^+$-on minden értéket felvesz és bijektív, ezért a megadott függvény valóban bijekció $\mathbb{R}$-re. RP2 teljesülése is egyszerű. Jelölje most P koordinátáját x, Q koordinátáját y az euklideszi metrikához tartozó koordinátaleképezésben.

$$
\begin{aligned}
&|f(P) - f(Q)| = \\
&\qquad \left|\log \frac{x-u}{v-x} - \log \frac{y-u}{v-y}\right| = \left|\log\left(\frac{x-u}{v-x} : \frac{v-y}{y-v}\right)\right| = \\
&\qquad |\log(XYUV)| = d(P,Q)
\end{aligned}
$$

A félsík axióma (PSP) teljesüléséhez elegendő azt belátni, hogy q belsejében az euklidészi módon definiált között van reláció ugyanaz, mint az előbbi d-val definiált között van reláció, így a PSP is az euklideszi síkból öröklődik. Teljesüljön az euklideszi metrikára, hogy $A - B - C$ ahol A, B, C az előbbi egyenes 3 pontja az a, b, c d-hez tartozó koordinátákkal. A Cantor-Dedekind tulajdonság miatt ez a reláció akkor és csakis akkor áll fenn, ha

$$u < a < b < c < v \vee u > a > b > c > v.$$

Teljesüljön az első eset. (A második esetet erre visszavezethetjük a vonalzó átfordításával.) Ekkor a kettősviszony definíciójából könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor

$$(ABUV) > 1,\ (BCUV) > 1,\ (ACUV) > 1.$$

Szintén a kettősviszony tulajdonsága, hogy $(ABUV) \cdot (BCUV) = (ACUV)$. Mindkét oldal logaritmusát véve

$$\log(ACUV) = \log(ABUV) + \log(BCUV).$$

Mivel valamennyi logaritmusérték pozitív, ezért

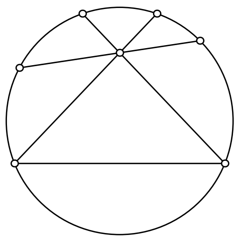
$$|\log(ACUV)| = |\log(ABUV)| + |\log(BCUV)|,$$

ami a bizonyítandó állítás.

A merőlegesség és a távolság definiálása lehetővé teszi, hogy a tengelyes tükrözést az abszolút geometriában tanult módon definiáljuk. A tengelyes tükrözések pontosan a q-t fixen hagyó centrális kollineációk lesznek.

A SAS axióma ezek után abból következik, hogy két egybevágó szöget hiperbolikus transzformációval egymásba tudunk úgy vinni, hogy az egybevágó oldalak is fedésbe kerüljenek.

Végül nyilvánvaló, hogy teljesül HPP (12. ábra):



12. ábra. A Cayley-Klein modellben teljesül HPP.

10. APPENDIX: A projektív illeszkedési sík

A korábbi geometriai tanulmányainkban kétfajta párhuzamossági axiómát ismertünk meg.

EPP Ha adva van egy ℓ egyenes és egy rá nem illeszkedő P pont, akkor *legfeljebb egy* P-re illeszkedő és ℓ-el párhuzamos egyenes van.

HPP Ha adva van egy ℓ egyenes és egy rá nem illeszkedő P pont, akkor *legalább két* P-re illeszkedő és ℓ-el párhuzamos egyenes van.

Megfogalmazhatunk egy harmadik (logikai) alternatívát is, az ún. *Riemann-féle párhuzamossági axiómát*, mely meglepően hatékonynak bizonyul bizonyos geometriai problémák kezelésében:

RPP Nincs a síkon két különböző párhuzamos egyenes.

A három párhuzamossági axióma három síkgeometriát ad, (természetesen további axiómákkal kiegészítve), mely közül kettővel már találkoztunk:

EPP + Abszolút geometria:	euklidészi geometria
HPP + Abszolút geometria:	hiperbolikus geometria

RPP az abszolút geometria axiómarendszerének (ti. a párhuzamos egzisztencia tételének) nyilván ellentmond, tehát az abszolút geometriával nem lehet kiegészíteni. RPP-hez csupán illeszkedési axiómákat hozzávéve is egy gazdag geometriai rendszert, a *a projektív illeszkedési síkot* kapunk.

A projektív illeszkedési sík axiómarendszere. Legyen $\mathcal{E}, \mathcal{L}$ két halmaz (a *pont*ok és *egyenes*ek halmaza) és $\imath \subset \mathcal{E} \times \mathcal{L}$ egy (*illeszkedési*) reláció. Egy $P \in \mathcal{E}$ pontról akkor mondjuk, hogy egy $\ell \in \mathcal{L}$ egyeneshez *illeszkedik*, ha $(P, \ell) \in \imath$. Jelölése: $P\imath\ell$. Ugyanakkor az ℓ egyenesről is azt mondjuk, hogy a P pontra illeszkedik. A $(\mathcal{E}, \mathcal{L}, \imath)$ hármast *projektív illeszkedési sík*nak nevezzük, ha teljesülnek rá az alábbiak.

P1. Bármely két különböző ponthoz pontosan egy egyenes illeszkedik.

P2. Bármely két különböző egyeneshez pontosan egy pont illeszkedik.

P3. Létezik négy pont, melyek közül nincs három, egy egyeneshez illeszkedő.

Megjegyzés. Megjegyzendő, hogy a (Hilbert féle illeszkedési síknál követett úttól eltérően) az illeszkedést itt nem az $\in$ reláció szinonímájaként használjuk, így különbség van az egyenes és az egyenesre illeszkedő pontok halmaza között. Ha ez első látásra szokatlan, akkor gondoljunk arra, hogy a pont és a pontra illeszkedő egyenesek halmaza közötti különbséget természtesenek tartjuk, s itt a helyzet analóg.

Definíció. Projektív illeszkedési síkon egy egyenesre illeszkedő pontok halmazát *pontsor*nak, míg egy pontra illeszkedő egyenesek halmazát *sugársor*nak nevezzük.

38. Tétel. (Dualitási elv.) *Ha $(\mathcal{E}, \mathcal{L}, \imath)$ projektív illeszkedési sík, akkor $(\mathcal{L}, \mathcal{E}, \imath')$ is projektív illeszkedési sík, ahol az $\mathcal{L}$ és $\mathcal{E}$ halmaz elemei között az $\imath' = \{(\ell, P) \in \mathcal{L} \times \mathcal{E} \mid (P, \ell) \in \imath\}$ képlettel értelmezzük az illeszkedési relációt.*

Bizonyítás: A P1. és P2. axiómákban a pont és egyenes szerepe felcserélhető. Az is könnyen belátható, hogy van négy olyan egyenes, melyek közül nincs három, egy pontra illeszkedő; tehát a pont és egyenes szerepe a P3. axiómában is szimmetrikus. $\square$

A következőekben négy modellt adunk projektív illeszkedési síkra.

1. Példa. (Koordinátamodell.) A projektív sík, vagy koordinátamodell. Ezt a modellt a megelőző fejezetekben részleteiben is tárgyaltuk.

2. Példa. (A klasszikus projektív sík.) Legyen S a klasszikus euklidészi tér egy síkja, pontjairól mint közönséges pontokról is beszélünk. S egyenesei halmazát jelölje most $\mathcal{L}_S$, ezeket közönséges egyeneseknek is hívjuk. Tudjuk, hogy az S síkbeli egyenesek párhuzamossága ekvivalenciareláció. Ezen ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályait *végtelen távoli* pontoknak nevezzük, a végtelen távoli pontok összességét pedig *végtelen távoli egyenes*nek, melyet i_∞-nel jelölünk. Az $\ell \in \mathcal{L}_S$ egyenes által reprezentált ekvivalenciaosztályt (végtelen távoli pontot) $[\ell]$ jelöli, részletesen kiírva: $[\ell] = \{\, g \in \mathcal{L}_S \mid g \| \ell \,\}$.

Legyen $\mathcal{E} = S \cup i_\infty$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_S \cup i_\infty$. Azaz a projektív illeszkedési sík pontját, mint közönséges pontot vagy mint végtelen távoli pontot interpretáljuk. A projektív illeszkedési sík egyenesét pedig vagy mint közönséges egyenest vagy mint a végtelen távoli egyenest interpretáljuk.

Az illeszkedést a következőképpen interpretáljuk. A $P \in S$ közönséges pont illeszkedik az $\ell \in \mathcal{L}_S$ közönséges egyenesre, ha $P \in \ell$. (Közönséges elemekre az illeszkedési reláció az euklidészi síkról öröklődik.) Az $[\ell]$ végtelen távoli pont pedig az ℓ-el párhuzamos valamennyi egyeneshez, és csakis ezekhez illeszkedik.

P3. nyilvánvalóan teljesül (már S-ben is). P1. két közönséges pontra a Hilbert féle első illeszkedési axióma miatt igaz. Két végtelen távoli ponthoz egyedül a végtelen távoli egyenes illeszkedik. Egy közönséges P pontra és egy $[\ell]$ végtelen távoli pontra illeszkedő egyenest pedig úgy kapjuk meg, hogy vesszük az $[\ell]$ halmaz P-re illeszkedő reprezentánsát.

Legyen most ℓ_1 és ℓ_2 két egyenes. Ha ℓ_1 és ℓ_2 S-en metszők, akkor P2. nyilván teljesül. Ha az egyenesek S-en párhuzamosak, akkor $[\ell_1] = [\ell_2]$, s erre a végtelen távoli pontra mindkét egyenes illeszkedik. Ha az egyenesek egyike a végtelen távoli egyenes, akkor P2. ismét teljesül, mert minden egyenes pontosan egy végtelen távoli pontra illeszkedik.

3. Példa. (Gömbi geometria.) Legyen $S^2 = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid \|x\| = 1 \,\}$, az $\mathbb{R}^3$ egységgömbje. Ha $x \in S^2$, akkor $\{x, -x\}$ egy *átellenes pontpár*. Legyen

$$\mathcal{E} = \{\, \{x, -x\} \mid x \in S^2 \,\}.$$

Egyenes alatt értsünk gömbi főköröket. Egy $(x, -x) \in S^2$ pont illeszkedjen egy ℓ egyenesre, ha $x \in \ell$. Ekkor természetesen $-x \in \ell$ is teljesül. (Ha egy átellenes pontpár egyike rajta van egy főkörön, akkor a másik pont is.)

Mivel a gömbön két nem átellenes pontra egyértelműen illeszkedik főkör, ezért P1. teljesül. Két gömbi főkör mindig két átellenes pontban metszi egymást, ezért P2. is teljesül. P3. nyilvánvaló.

4. Példa. (Origó középpontú nyaláb.) Legyen $\mathcal{E}$ az $\mathbb{R}^3$ halmaz egydimenziós altereinek halmaza, $\mathcal{L}$ pedig $\mathbb{R}^3$ kétdimenziós alterei halmaza. Egy pont (egydimenziós altér) illeszkedik egy egyenesre (kétdimenziós altérre), ha utóbbi tartalmazza az előbbit.

Mivel az origón átmenő bármely két egyenesre illeszkedik egy origón átmenő sík, továbbá bármely két origón átmenő sík origón átmenő egyenesben metszi egymást, ezért P1. és P2. teljesül. P3. ismét triviális.

A négy modell összefoglalva:

alapfogalom	**interpretáció**
	klasszikus
pont	közönséges vagy végtelen távoli
egyenes	közönséges vagy végtelen távoli
	gömbi
pont	gömbi átellenes pontpár
egyemes	gömbi főkör
	nyaláb
pont	$\mathbb{R}^3$ origón átmenő egyenese
egyenes	$\mathbb{R}^3$ origón átmenő síkja
	koordináta
pont	arányos számhármasok osztálya
egyenes	arányos számhármasok osztálya

A továbbiakban a projektív síkon $\mathbb{P}^2$-t, vagyis az aritmetikai projektív síkot értjük, azaz koordináta*modell*ben dolgozunk, a *pont* és *egyenes* szavakat pedig az interpretációnak megfelelően használjuk (ld. táblázat.) Ez a projektív geometria tanulmányozása szempontjából egyébként lényeges megszorítás, mert bár a fentebb ismertetett modellek egymással *izomorfak* abban az értelemben, hogy a pontok és egyenesek között bijektív, illeszkedéstartó megfeleltetés létesíthető; azonban a projektív illeszkedési síknak vannak olyan modelljei, amelyek a fentiekkel nem izomorfak. (Fano féle 7 pont 7 egyenes modell.)