

3. Bézier görbék

3.1. A Bernstein polinomok

3.1. Definíció. Legyen n nemnegatív egész, i tetszőleges egész. A

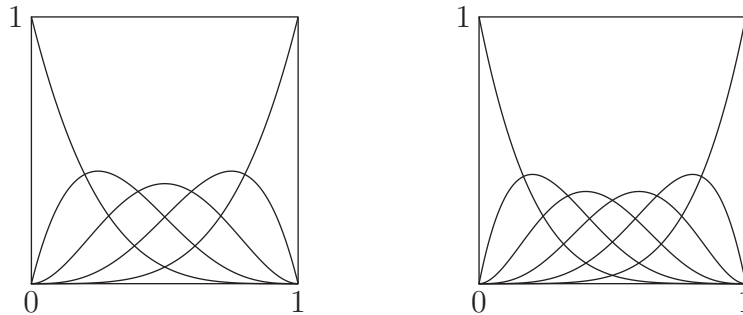
$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

polinomot *Bernstein polinomnak* nevezzük, ahol

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & 0 \leq i \leq n, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A definícióból közvetlenül leolvasható, hogy a Bernstein polinomok nemnegatívak a $[0, 1]$ intervallumon, pozitívak a $(0, 1)$ intervallumon. Teljesül továbbá az alábbi szimmetria tulajdonság:

$$B_i^n(u) = B_{n-i}^n(1-u).$$



1. ábra. Negyedfokú és ötödfokú Bernstein polinomok a $[0, 1]$ intervallumon.

3.2. Tétel. A Bernstein polinomok kielégítik az alábbi rekurziót:

$$(B1) \quad B_0^n = 1, \quad B_i^n(u) = (1-u)B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u),$$

továbbá

$$B_i^n(u) = 0, \quad i \notin \{0, \dots, n\}.$$

Bizonyítás. Az első és az utolsó formula nyilvánvaló. A második állítás bizonyításához felhasználjuk a binomiális együtthatókra fennálló rekurzív formulát:

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} B_i^n(u) &= \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \\ &= \binom{n-1}{i} u^i (1-u)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} u^i (1-u)^{n-i} \\ &= (1-u) \underbrace{\binom{n-1}{i} u^i (1-u)^{n-1-i}}_{B_i^{n-1}(u)} + u \underbrace{\binom{n-1}{i-1} u^{i-1} (1-u)^{n-i}}_{B_{i-1}^{n-1}(u)}. \quad \spadesuit \end{aligned}$$

3.3. Tétel. A Bernstein polinomok egységbontást alkotnak, azaz

$$(B2) \quad \sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a binomiális tételt:

$$1 = [u + (1-u)]^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} = \sum_{i=0}^n B_i^n(u). \quad \spadesuit$$

3.4. Tétel. A Bernstein polinomok deriváltja:

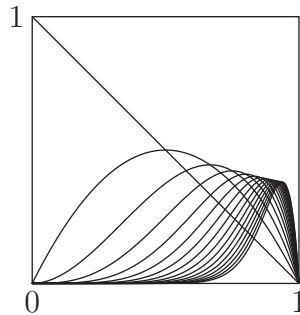
$$(B3) \quad \frac{d}{du} B_i^n(u) = n [B_{i-1}^{n-1}(u) - B_i^{n-1}(u)].$$

Bizonyítás. A szorzatfüggvény deriválási szabálya szerint:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} B_i^n(u) &= \frac{d}{du} \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} = \\ &= \frac{in!}{i!(n-i)!} u^{i-1} (1-u)^{n-i} - \frac{(n-i)n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i-1} = \\ &= n \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} u^{i-1} (1-u)^{n-i} - n \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} u^i (1-u)^{n-i-1} = \\ &= n [B_{i-1}^{n-1}(u) - B_i^{n-1}(u)]. \quad \spadesuit \end{aligned}$$

3.5. Következmény. $i \neq 0, n$ esetén a B_i^n polinomnak $u = \frac{i}{n}$ -nél lokális maximuma van.

3.6. Tétel. $B_k^n(u \cdot t) = \sum_{i=k}^n B_i^n(u) \cdot B_k^i(t_0)$.



2. ábra. A Bernstein polinomok „csúcsosodó” tulajdonsága a lokális maximum körül: B_{i-1}^i , ($i = 1 \dots 16$) grafikonja.

3.2. Bézier görbék

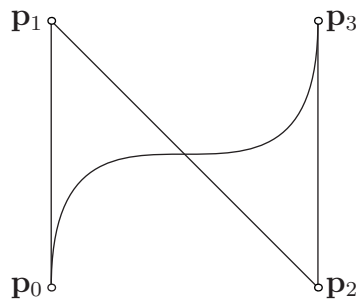
3.7. Definíció. A $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \dots, \mathbf{p}_n)$ kontrollpontokhoz tartozó Bézier görbe alatt a

$$(3.1) \quad \mathbf{B}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{B}(u) = \sum_{i=1}^n B_i^n(u) \mathbf{p}_i$$

görbét értjük. A

$$[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1] \cup [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] \cup \dots \cup [\mathbf{p}_{n-1}, \mathbf{p}_n]$$

töröttvonalat a görbe *kontrollpoligonjának* nevezzük, míg n a görbe *fokszáma*.



3. ábra. Harmadfokú Bézier görbe és a kontrollpoligonja

3.8. Tétel. Minden Bézier görbe rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. *Affin invariancia*: ha $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ affin leképezés, akkor

$$F(\mathbf{B}(u)) = \sum_{i=1}^n B_i^n(u) F(\mathbf{p}_i);$$

2. *Konvex burookban maradás:* minden u paraméterértékre teljesül, hogy $\mathbf{B}(u) \subset \text{conv}\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$

3. *Végpont interpoláció:* $\mathbf{B}(0) = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{B}(1) = \mathbf{p}_n$.

4. *Szimmetria:*

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(u) \mathbf{p}_i = \sum_{i=0}^n B_i^n(1-u) \mathbf{p}_{n-i}.$$

Bizonyítás. 1. Legyen F lineáris része ϕ , eltolási része $\tau_{\mathbf{v}}$, azaz $F(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v}$.

$$\begin{aligned} F\left(\sum_{i=0}^n B_i^n(u) \mathbf{p}_i\right) &= \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \phi(\mathbf{p}_i) + \mathbf{v} = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \phi(\mathbf{p}_i) + \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \mathbf{v} = \\ &= \sum_{i=0}^n B_i^n(u) (\phi(\mathbf{p}_i) + \mathbf{v}) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) F(\mathbf{p}_i). \end{aligned}$$

2. Következik onnan, hogy (3.1) minden $u \in [0, 1]$ paraméterértékre egy konvex lineáris kombináció, azaz az együtthatók nemnegatívak és összegük egy.

3., 4. A Bernstein polinomok tulajdonságaiból azonnal következik. \blacklozenge

Példa. $n = 2$. Belátjuk, hogy három nem kollineáris kontrollpont által meghatározott Bézier görbe egy parabolaív.

$$\mathbf{p}(u) = (1-u)^2 \mathbf{p}_0 + 2u(1-u) \mathbf{p}_1 + u^2 \mathbf{p}_2.$$

Helyezzünk el egy Descartes koordináta-rendszert a következőképpen: legyen $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$, az y tengely irányvektora pedig $\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_2$. \mathbf{p}_0 koordinátái legyenek $(-a, b)$, $\mathbf{p}_2 = (a, c)$. Ekkor, $\mathbf{p}(u)$ koordináta-függvényeit $x(u)$ -val és $y(u)$ -val jelölve:

$$\begin{aligned} x(u) &= -a(1-u)^2 + au^2 = a(2u-1) \\ y(u) &= b(1-u)^2 + cu^2 = u^2(c+b) - 2ub + b. \end{aligned}$$

Az első egyenletből $u = \frac{x+a}{2a}$, amit a második egyenletbe beírva:

$$y = \left(\frac{x+a}{2a}\right)^2 (c+b) - \frac{x+a}{a} b + b,$$

ami egy parabola egyenlete.

Példa. A $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ kontrollpontokhoz tartozó harmadfokú Bézier görbe geometriai együtthatói:

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0, \mathbf{p}(1) = \mathbf{p}_3, \mathbf{p}'(0) = 3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0), \mathbf{p}'(1) = 3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2).$$

A harmadfokú Bézier görbék és a korábbiakban tárgyalt szintén harmadfokú Hermite görbék között nincs különbség, az előállításához használt polinombázis más.

3.3. Bézier görbe deriváltja

Határozzuk meg a

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \mathbf{p}_i$$

Bézier görbe deriváltját (sebersség vektormezőjét)! Felhasználva a Bernstein polinomok deriváltjára kapott (B3) összefüggést:

$$\mathbf{p}'(u) = n \sum_{i=0}^n [B_{i-1}^{n-1}(u) - B_i^{n-1}(u)] \mathbf{p}_i.$$

A zérus tagokat elhagyva:

$$\mathbf{p}'(u) = n \sum_{i=1}^n B_{i-1}^{n-1}(u) \mathbf{p}_i - n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(u) \mathbf{p}_i.$$

Az első tagban az indexet transzformálva:

$$\mathbf{p}'(u) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(u) \mathbf{p}_{i+1} - n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(u) \mathbf{p}_i,$$

tehát

$$\mathbf{p}'(u) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(u) (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i).$$

Bevezetve a $\Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i$ jelölést:

$$\mathbf{p}'(u) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(u) \Delta \mathbf{p}_i.$$

Hasonló módon számíthatjuk ki a magasabb rendű deriváltakat.

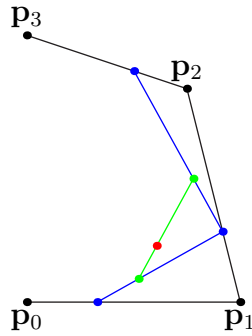
3.9. Definíció. Legyenek $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ adott kontrollpontok,

$$\Delta^0 \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i, \Delta^r \mathbf{p}_i = \Delta^{r-1} \mathbf{p}_{i+1} - \Delta^{r-1} \mathbf{p}_i \quad (i = 0, \dots, n-r; r = 1, \dots, n).$$

A $\Delta^r \mathbf{p}_i$ ($r = 0, \dots, n, i = 0, \dots, n-r$) vektorokat az adott kontrollpont sorozat r -*differenciáinak* nevezzük.

3.10. Tétel.

$$\Delta^r \mathbf{p}_i = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} \mathbf{p}_{i+j}.$$



4. ábra. A de Casteljau algoritmus

3.11. Tétel. *Bézier görbe r -edik deriváltja olyan Bézier görbe, melynek kontrollpontjai az eredeti görbe kontrollpontjaival kifejezve:*

$$\frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{p}_i, \quad (i = 0, \dots, n-r).$$

Azaz:

$$\mathbf{p}^{(r)}(u) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} B_i^{n-r}(u) \cdot \Delta^r \mathbf{p}_i \quad (u \in [0, 1]).$$

3.4. A de Casteljau algoritmus

Ebben a részben a Bézier görbéknek egy geometriailag motivált, intuitív származtatását adjuk meg, amely Paul de Casteljau nevéhez fűződik (1959). A Bézier görbék elméletét ezen geometriai származtatás alapján is le lehet írni.

3.12. Tétel. *Legyenek adva a $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ kontrollpontok, az általuk meghatározott Bézier görbe \mathbf{p} , $u \in [0, 1]$. Legyen továbbá*

$$\mathbf{p}_0^0 = \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n^0 = \mathbf{p}_n$$

és

$$\mathbf{p}_i^r = (1-u)\mathbf{p}_i^{r-1} + u\mathbf{p}_{i+1}^{r-1}, \quad i = 0, \dots, n-r; \quad r = 1, \dots, n.$$

Ekkor

$$(3.2) \quad \mathbf{p}_i^j = \sum_{k=0}^j B_k^j(u) \mathbf{p}_{i+k},$$

speciálisan $\mathbf{p}_0^n \in \mathbf{p}$.

Bizonyítás. A (3.2) relációt j szerinti teljes indukcióval látjuk be. $j = 0$ -ra $\mathbf{p}_i^0 = \mathbf{p}_i$ definíció szerint igaz.

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_i^{j+1} &= (1-u)\mathbf{p}_i^j + u\mathbf{p}_{i+1}^j = \\
&= (1-u) \sum_{s=0}^j B_s^j \mathbf{p}_{i+s} + u \sum_{s=0}^j B_s^j(u) \mathbf{p}_{i+s+1} = \\
&= (1-u) \sum_{s=0}^j B_s^j \mathbf{p}_{i+s} + u \sum_{s=1}^{j+1} B_{s-1}^j(u) \mathbf{p}_{i+s} = \\
&= (1-u) B_0^j(u) \mathbf{p}_i + (1-u) \sum_{s=1}^j B_s^j(u) \mathbf{p}_{i+s} + \\
&\quad + u \sum_{s=1}^j B_{s-1}^j(u) \mathbf{p}_{i+s} + u B_j^j(u) \mathbf{p}_{i+j+1} = \\
&= B_0^{j+1}(u) \mathbf{p}_i + \sum_{s=1}^j \left[(1-u) B_s^j(u) + u B_{s-1}^j(u) \right] \mathbf{p}_{i+s} + B_{j+1}^{j+1}(u) \mathbf{p}_{i+j+1} = \\
&= B_0^{j+1}(u) \mathbf{p}_i + \sum_{s=1}^j B_s^{j+1}(u) \mathbf{p}_{i+s} + B_{j+1}^{j+1}(u) \mathbf{p}_{i+j+1} = \\
&= \sum_{s=0}^{j+1} B_s^{j+1}(u) \mathbf{p}_{i+s}. \quad \diamond
\end{aligned}$$

A tételben szereplő \mathbf{p}_i^j pontokat *de Casteljau pontoknak* nevezzük.

3.13. Tétel (Bézier görbe felosztása). Legyen $\mathbf{p} : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^N$ a $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ kontrollpontokhoz tartozó Bézier görbe, $t \in [0, 1]$ rögzített. Legyen

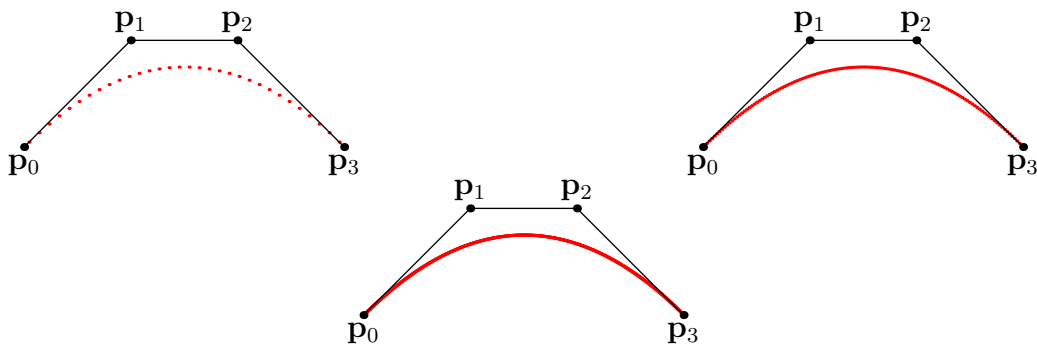
$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^- : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{p}^-(u) = \mathbf{p}(ut), \\
\mathbf{p}^+ : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{p}^+(u) = \mathbf{p}(t + u(1-t)).
\end{aligned}$$

Ekkor \mathbf{p}^- és \mathbf{p}^+ szintén n -edfokú Bézier görbék, továbbá \mathbf{p}^- kontrollpontjai az eredeti görbe t paraméterértékhez tartozó de Casteljau pontjaival kifejezve:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0^0, \mathbf{p}_0^1, \dots, \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0^n;$$

míg \mathbf{p}^+ kontrollpontjai:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0^n, \mathbf{p}_1^{n-1}, \dots, \mathbf{p}_{n-1}^1, \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_n^0.$$



5. ábra. Harmadfokú Bézier görbe rajzolása a de Casteljau algoritmus alapján. A felező algoritmust 5-ször, 7-szer, 9-szer végrehajtva.

Bizonyítás. A bizonyítást a \mathbf{p}^- görbére végezzük el. A (3.2) relációt használva:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \mathbf{p}_0^i &= \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \cdot \sum_{k=0}^i B_k^i(t) \mathbf{p}_k = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i B_i^n(u) \cdot B_k^i(t) \mathbf{p}_k = \\
 &= \sum_{k=0}^i \mathbf{p}_k \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \cdot B_k^i(t) = \sum_{k=0}^i \mathbf{p}_k \sum_{i=k}^n B_i^n(u) \cdot B_k^i(t) = \\
 &= \sum_{k=0}^i B_k^n(u \cdot t) \mathbf{p}_k = \mathbf{p}(u \cdot t) \quad \spadesuit
 \end{aligned}$$

A de Casteljau algoritmus alapján számítógéppel nagyon hatékonyan lehet Bézier görbét rajzolni. $t = 1/2$ értékre az algoritmus során csak 2-vel kell osztani, ami a kettes számrendszerben nagyon egyszerű. Kiszámítjuk és kirajzoljuk az $t = 1/2$ -hez tartozó de Casteljau pontot. Nevezzük ezt a görbe felezőpontjának. Ez a pont a görbét az előző tétel szerint két Bézier görbére osztja, amelyek kontrollpontjait ismerjük, az algoritmus végrehajtása során kiszámítottuk. Meghatározzuk és kirajzoljuk mindkét görbe felezőpontját és az eljárást tovább folytatjuk a keletkezett négy Bézier görbére, és így tovább, mindaddig, amíg az egymást követő pontok a praktikus igényeknek megfelelő közelségben lesznek. (Például szemmel már nem lehet pontonként megkülönböztetni azokat, 5. ábra.)

4. Bézier görbe fokszám emelése

Egy bonyolultabb szabadformájú görbe Bézier-típusú modellezéséhez két fő stratégia vezethet. Az egyik, hogy több kontrollpont veszünk föl, és ezáltal alakítjuk a görbét, a másik, hogy több, alacsony fokszámú görbét illesztünk egymáshoz megfelelő feltételekkel. (És persze ezeket lehet kombinálni.) A több kontrollpont

fölvételének az ára a magasabb fokszám, egyik előnye viszont az *egész* görbe akárhányszori differenciálhatósága. (Ennek következményeként a görbület folytonos változása)

A magasabb fokszámot is megengedő modellezés egyik fontos technikája, hogy a valahogyan már kialakított n -edfokú „félkész” görbét előállítjuk $n + 2$ kontrollponttal is (azaz a fokszámot eggyel megnöveljük) és a több kontrollponttal a görbét finomabban alakítjuk tovább.

Legyen tehát \mathbf{p} a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ kontrollpontokhoz tartozó Bézier görbe. Keressük a $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n+1}$ kontrollpontokat, hogy az ezekhez tartozó Bézier görbe szintén \mathbf{p} . Nyilván $\mathbf{p}_0 = \mathbf{q}_0$ és $\mathbf{p}_n = \mathbf{q}_{n+1}$. Tehát

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(u) \mathbf{p}_i = \sum_{i=0}^{n+1} B_i^{n+1}(u) \mathbf{q}_i,$$

azaz

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \mathbf{p}_i = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} u^i (1-u)^{n+1-i} \mathbf{q}_i.$$

Szorozzuk meg a bal oldalt $u + (1-u)$ -val:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} [u^{i+1} (1-u)^{n-i} + u^i (1-u)^{n+1-i}] \mathbf{p}_i = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} u^i (1-u)^{n+1-i} \mathbf{q}_i.$$

$u^i (1-u)^{n+1-i}$ együtthatóját összehasonlítva mindkét oldalon:

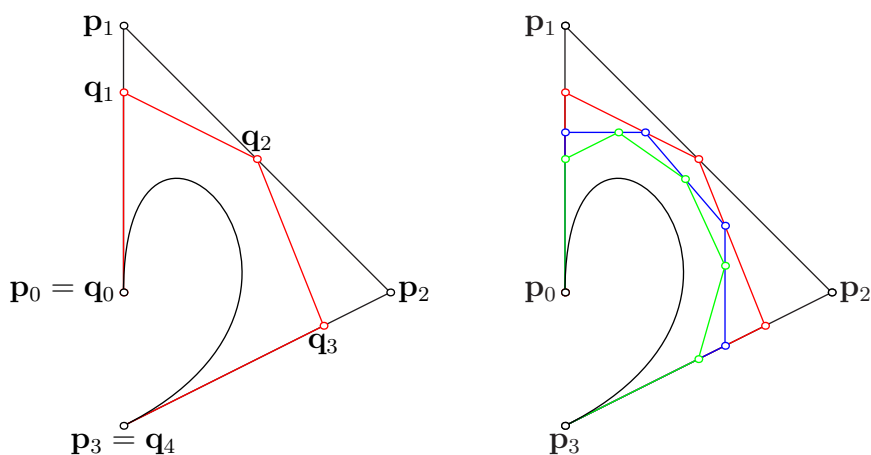
$$\binom{n}{i-1} \mathbf{p}_{i-1} + \binom{n}{i} \mathbf{p}_i = \binom{n+1}{i} \mathbf{q}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

A binomiális együtthatók definícióját beírva és a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve adódik a következő állítás.

4.14. Tétel. Legyen $\mathbf{p} : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^N$ a $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ kontrollpontokhoz tartozó Bézier görbe, továbbá $\mathbf{q}_0 = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{p}_n$ és

$$\mathbf{q}_i = \frac{i}{n+1} \mathbf{p}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{p}_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Ekkor a $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{n+1}$ kontrollpontokhoz tartozó Bézier görbe szintén \mathbf{p} .



6. ábra. Bézier görbe fokszám emelése

4.1. Bézier görbék csatolása

A $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n, \dots, \mathbf{p}_{2n}$ kontrollpontokhoz most egy összetett Bézier görbét, vagyis *szplájnt* illesztünk. A $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ kontrollpontokhoz tartozó Bézier görbe legyen $\mathbf{p}_1(u)$, a $\mathbf{p}_n, \dots, \mathbf{p}_{2n}$ kontrollpontokhoz tartozó Bézier görbe pedig $\mathbf{p}_2(u)$, $u \in [0, 1]$. A két görbe fokszáma tehát megegyezik. Emlékeztetünk arra, hogy $\mathbf{p}_1(u) \in \mathcal{C}^r$ osztályban csatlakozik $\mathbf{p}_2(u)$ -hoz, ha $\mathbf{p}_2^{(i)}(0) = \mathbf{p}_1^{(i)}(1)$ teljesül $i = 1, \dots, r$ -re. A Bézier görbe deriváltjára vonatkozó összefüggés szerint ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$(4.1) \quad \Delta^i \mathbf{p}_n = \Delta^i \mathbf{p}_{n-i}, \quad i = 1, \dots, r$$

teljesüljön. Speciálisan \mathcal{C}^1 osztályú csatlakozás esetén ez azt jelenti, hogy

$$(4.2) \quad \mathbf{p}_n = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_{n+1} + \mathbf{p}_{n-1});$$

\mathcal{C}^2 osztályú csatlakozás esetén pedig emellett

$$(4.3) \quad \mathbf{p}_{n+2} - 2\mathbf{p}_{n+1} = -2\mathbf{p}_{n-1} + \mathbf{p}_{n-2}.$$

A (4.2) geometriai jelentése egyszerű: a \mathbf{p}_n pont a $[\mathbf{p}_{n-1}, \mathbf{p}_{n+1}]$ szakasz felezőpontja. A (4.3) geometriai jelentése pedig az, hogy létezik olyan \mathbf{q} pont, hogy

$$(4.4) \quad \mathbf{p}_{n-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_{n-2} + \mathbf{q}), \quad \mathbf{p}_{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_{n+2} + \mathbf{q}).$$

Másodfokú Bézier görbék \mathcal{C}^1 osztályú csatolásánál tehát a következőképpen járhatunk el. Szabadon fölvehetjük a

$$\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_5, \dots, \mathbf{p}_{2\ell-1}, \mathbf{p}_{2\ell}$$

kontrollpontokat, a hiányzó páros indexűeket pedig az egymást követő páratlan indexűek felezőpontjában vesszük fel. Az így meghatározott

$$B(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), B(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4), \dots, B(\mathbf{p}_{2\ell-2}, \mathbf{p}_{2\ell-1}, \mathbf{p}_{2\ell})$$

Bézier görbék egymáshoz C^1 osztályban csatlakozó kvadratikus Bézier görbék lesznek.

Harmadfokú Bézier görbék esetében ugyanezt az elvet alkalmazva, szabadon fölvehetjük a

$$\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \widehat{\mathbf{p}}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5, \widehat{\mathbf{p}}_6, \dots, \mathbf{p}_{3\ell-2}, \mathbf{p}_{3\ell-1}, \mathbf{p}_{3\ell}$$

kontrollpontokat (a kalap a kontrollpont hiányát jelöli), a hiányzó \mathbf{p}_{3i} kontrollpontokat pedig a „felezőpont” szabályt alkalmazva, a szomszédai felezőpontjaként.

Most megmutatjuk, hogy adott $B(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ Bézier görbéivhez hogyan kell \mathcal{C}^2 osztályban csatlakozó $B(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6)$ Bézier görbéivet konstruálni. A (4.2) feltétel szerint \mathbf{p}_4 -et úgy kapjuk, hogy \mathbf{p}_2 -t tükrözzük \mathbf{p}_3 -ra. A (4.4) feltétel most:

$$\mathbf{p}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1), \quad \mathbf{p}_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_5 + \mathbf{q}_1).$$

\mathbf{p}_1 -et \mathbf{p}_2 -re tükrözve megkapjuk \mathbf{q}_1 -t, majd \mathbf{q}_1 -t \mathbf{p}_4 -re megkapjuk \mathbf{p}_5 -öt. \mathbf{p}_6 szabadon fölvehető. Az eljárást tovább folytathatjuk, ami azt jelenti, hogy a $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_6, \dots, \mathbf{p}_{3\ell}, \dots$ csatlakozási pontokat szabadon kijelölhetjük, de egyébként a görbét $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ már meghatározza.

Egy másik eljárás a következő, ún. Böhm szerkesztés. A $B(\mathbf{p}_{3i-3}, \mathbf{p}_{3i-2}, \mathbf{p}_{3i-1}, \mathbf{p}_{3i})$ Bézier görbe meghatározza a \mathbf{q}_i segédpontot:

$$(4.5) \quad \mathbf{q}_i = \mathbf{p}_{3i-2} - 2\mathbf{p}_{3i-1}, \quad i = 1, \dots, \ell;$$

legyen továbbá

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{p}_2 - 2\mathbf{p}_1.$$

A (4.4) egyenletet alkalmazva

$$(4.6) \quad \mathbf{q}_{i-i} = \mathbf{p}_{3i-1} - 2\mathbf{p}_{3i-2}, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

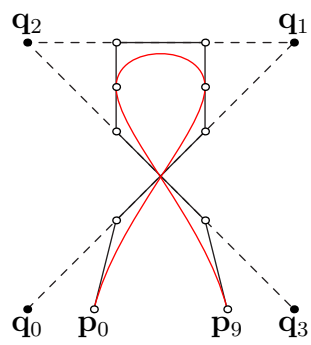
(4.5)-ből és (4.6)-ból

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{p}_{3i-2} &= \frac{2}{3}\mathbf{q}_{i-1} + \frac{1}{3}\mathbf{q}_i \\ \mathbf{p}_{3i-1} &= \frac{1}{3}\mathbf{q}_{i-1} + \frac{2}{3}\mathbf{q}_i, \quad i = 1, \dots, \ell, \end{aligned}$$

illetve (4.3) szerint

$$\mathbf{p}_{3i} = \frac{1}{2}\mathbf{p}_{3i-1} + \frac{1}{2}\mathbf{p}_{3i+1}, \quad i = 1, \dots, \ell - 1.$$

Így $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_\ell$ és $\mathbf{p}_{3\ell}$ a szplájnt egyértelműen meghatározza: \mathbf{p}_{3i-1} és \mathbf{p}_{3i-2} a $[\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i]$ szakasz harmadolópontjai.



7. ábra. A Böhm szerkesztés