Fejezetek az euklideszi geometriából

Ebben a fejezetben euklideszi térben dolgozunk: vagyis mindvégig feltételezzük, hogy érvényes az abszolút geometria axiómarendszere és az euklideszi párhuzamossági axióma.

12. Párhuzamos térelemek

T1: Ha két párhuzamos egyenes egyike metsz egy síkot, akkor azt a másik egyenes is metszi.
T2: Ha két egyenes olyan, hogy minden sík, amely metszi az egyiket, metszi a másikat is, akkor a két egyenes párhuzamos egymással.
Az egyenesek párhuzamosságának értelmezéséből közvetlenül adódott, hogy a párhuzamosság reflexív és szimmetrikus reláció. Az alábbi tételből következik, hogy euklideszi térben a tranzitivitás is teljesül, s ennélfogva euklideszi térben az egyenesek párhuzamossága ekvivalencia reláció.
T3: Ha két egyenes mindegyike párhuzamos egy harmadikkal, akkor az első kettő is párhuzamos egymással.
Rátérünk a síkok párhuzamossága tranzitivitásának vizsgálatára.
T4: Egy egyenest metsző sík az egyenessel párhuzamos síkot is metszi.
T5: Két párhuzamos sík egyikét metsző egyenes metszi a másikat is.
T6: Ha két sík olyan, hogy minden egyenes, amely metszi az egyiket, metszi a másikat is, akkor a két sík párhuzamos egymással.
T7: Euklideszi térben a síkok párhuzamossága ekvivalencia reláció.
Az a és b párhuzamos egyenesek síkjában az a határegyenesű és b –t tartalmazó félsík valamint a b határegyenesű és a –t tartalmazó félsík metszeteként előálló síkrészt sávnak nevezzük.
A sáv konvex alakzat, mivel konvex halmazok (félsíkok) metszete.
Két párhuzamos félegyenes egyező irányú, ha vagy egy egyenesre illeszkednek és egyik tartalmazza a másikat, vagy pedig nem egy egyenesre illeszkednek és a két félegyenes a kezdőpontjaikat összekötő egyenes azonos oldalán van; ellenkező esetben a két párhuzamos félegyenes ellentétes irányú.
Ha két szög szárai páronként egyező (ellentétes) irányúak, akkor egyállású (váltó-) szögekről beszélünk.
T8: Ugyanazon síkban lévő egyállású (váltó-) szögek egyenlők.
T9: Az egyállású (váltó-) szögek a térben is egyenlők.

13. Izometriák II

Elsőként egy rögzített síkbeli tengelyes tükrözések (mint speciális síkizometriák) szorzataként előálló leképezések tulajdonságainak vizsgálatával foglalkozunk. Emlékeztetünk rá, hogy két tengelyes tükrözés szorzata az a leképezés, amely a két tengelyes tükrözés egymás utáni végrehajtása révén adódik. S minthogy minden tengelyes tükrözés izometria és az izometriák halmaza a szorzásra nézve csoportot alkot, ezért egyrészt a tengelyes tükrözések szorzata is

izometria, másrészt a tengelyes tükrözések szorzása során az asszociativitást külön indoklás nélkül mindig használhatjuk. A jelölések egyszerűsítése céljából a szorzás műveleti jelét nem fogjuk kiírni.
T1: Ha két különböző egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözés szorzatának van fixpontja, akkor a tengelyek metszők és az egyértelműen létező fixpont a tengelyek metszéspontja.
T2: Két (nem feltétlenül különböző) tengelyes tükrözés szorzata nem tengelyes tükrözés.
Rögzített síkban egy adott pontra illeszkedő egyenesek halmazát illetve egy adott egyenessel párhuzamos egyenesek halmazát sugársornak nevezzük. Az adott pontot illetve az adott egyenest a sugársor centrumának nevezzük
Egy sugársort a centruma, vagy metsző egyenesek esetén bármely két eleme illetve párhuzamos egyenesek esetén bármely eleme egyértelműen meghatározza.
T3: Egy sugársor három (nem feltétlenül különböző) elemére vonatkozó tengelyes tükrözés szorzata egy olyan tengelyes tükrözés, melynek tengelye szintén eleme az adott sugársornak.
T4: Négy (nem feltétlenül különböző) tengelyes tükrözés szorzata mindig helyettesíthető két tengelyes tükrözés szorzatával.
Páros számú tengelyes tükrözés szorzata helyettesíthető két (nem feltétlenül különböző) tengelyes tükrözés szorzatával. Páratlan számú tengelyes tükrözés szorzata vagy egyetlen tengelyes tükrözés, vagy helyettesíthető három tengelyes tükrözés szorzatával.
Az előbbiek szerint bármely síkizometria előállítható vagy páros vagy páratlan számú tengelyes tükrözés szorzataként.
Ha egy izometria páros (páratlan) számú tengelyes tükrözés szorzata, akkor páros (páratlan) izometriának mondjuk. A páros izomtriát másként mozgásnak nevezzük.
T5: A mozgások halmaza a szorzásra nézve olyan csoportot alkot, ami a síkizometriák csoportjának részcsoportja.
T6 (a mozgások fixpont tétele): Ha egy mozgásnak van két fixpontja, akkor az identitás.
T7 (a mozgások alaptétele): Két adott félegyenesből álló rendezett pár esetén egyértelműen létezik olyan mozgás, amely az elsőt a másodikba viszi át.
Ugyanazon sík két különböző egyenesére történő tengelyes tükrözés szorzatát

- valódi elforgatásnak (valódi rotációnak) nevezzük, ha a két egyenes metsző,
- valódi eltolásnak (valódi transzlációnak) nevezzük, ha a két egyenes párhuzamos.

Valódi elforgatás esetén a két tengely metszéspontját a valódi elforgatás középpontjának (centrumának) nevezzük.
Valódi eltolás esetén a tengelyekre merőleges egyenesek sugársorát a valódi eltolás irányának nevezzük.
Egy síkizometriát elforgatásnak (eltolásnak) nevezünk, ha az valódi elforgatás (valódi eltolás) vagy pedig identitás. Az identikus elforgatás esetén a sík bármely pontja tekinthető az elforgatás centrumának, továbbá az identikus eltolás esetén a sík bármely rögzített egyenesével párhuzamos egyenesek sugársora tekinthető az eltolás irányának.
Páros síkizometria (vagyis egy síkmozgás) csak elforgatás vagy eltolás lehet.
T8: Két tengelyes tükrözés sorrendje akkor és csak akkor cserélhető fel, ha a tengelyek egybeesnek vagy merőlegesek egymásra.
Ha két egyenes merőlegesen metszi egymást, akkor a rájuk vonatkozó tengelyes tükrözések szorzatát középpontos tükrözésnek nevezzük. A tengelyek metszéspontját a középpontos tükrözés középpontjának (centrumának) nevezzük.
Jelölése: $a, b \in \boldsymbol{L}$, $a \perp b$ és $a \cap b = \{O\}$ esetén ρ_O.
Ezen értelmezés szerint a középpontos tükrözés speciális valódi elforgatás.
T9 (speciális mozgások fixpontjai):

1) Egy valódi elforgatás során a centrum fix és további fixpont nincs.
2) Egy valódi eltolás során egyetlen fixpont sincs.

Ebből a tételből adódik, hogy valódi elforgatás soha nem helyettesíthető valódi eltolással. Ennélfogva megállapítható, hogy egy síkmozgás vagy identitás, vagy valódi elforgatás, vagy

valódi eltolás, továbbá ha egy síkizometriának van fixpontja, akkor az vagy identitás, vagy tengelyes tükrözés, vagy valódi elforgatás.
T10 (eltolás invariáns egyenesei): Egy valódi eltolás invariáns egyeneseinek halmaza megegyezik a valódi eltolás irányával.
T11 (elforgatás invariáns egyenesei):
1) Valódi elforgatásnak akkor és csak akkor létezik invariáns egyenese, ha a valódi elforgatás középpontos tükrözés.
2) Középpontos tükrözésnél egy egyenes akkor és csak akkor invariáns, ha az illeszkedik a centrumra.

Az O középpontú tükrözésnél az $O \neq P$ pont P' képére $P - O - P'$ és $OP' = OP$ teljesül.
A középpontos tükrözés négyzete identitás: a középpontos tükrözés involutorikus leképezés.
T12 (szabad tengelyválasztás):
1) Adott centrumú elforgatás (irányú eltolás) két tengelyes tükrözés szorzataként történő előállításakor az egyik tengely az elforgatás centrumára illeszkedő (az eltolás irányára merőleges) tetszőleges egyenes lehet, melynek rögzítése után a másik tengely egyértelműen létezik.
2) Egy adott elforgatásnál (eltolásnál) a tengelyek szöge (távolsága) a tengelyek megválasztásától függetlenül mindig ugyanaz.

T13 (elforgatás és eltolás mértéke):
1) Egy O középpontú elforgatás során egyértelműen létezik olyan $t \in [0, \pi]$ valós szám, hogy bármely $P \neq O$ pont esetén $m(POP'\angle) = t$.
2) Egy eltolás során egyértelműen létezik olyan $t \geq 0$ valós szám, hogy bármely P pont és P' képe esetén $PP' = t$.

Az előbbi tételben szereplő t számot az elforgatás (eltolás) mértékének nevezzük.
Valódi elforgatásnál $0 < t \leq \pi$, középpontos tükrözésnél $t = \pi$, identikus forgatásnál pedig $t = 0$. Valódi eltolásnál $t > 0$ és identikus eltolásnál $t = 0$.
Az O középpontú t mértékű (szögű) elforgatás jelölése: $\rho_{O,t}$.
Ha a t mértékű (távolságú) eltolásnál az $(A, B) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}$ rendezett pontpárra $AB = t$ és az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes invariáns, akkor az A pont képe a B pont: ezt az eltolást $\tau_{(A,B)}$ –vel jelöljük.
T14: Középpontos tükrözésnél bármely egyenes párhuzamos a képével.
T15: Egy síkban a közös centrumú elforgatások kommutatív csoportot alkotnak, amely a mozgások csoportjának részcsoportja.
T16 (középpontos tükrözés és eltolás kapcsolata):
1) Két különböző centrumú középpontos tükrözés szorzata egy valódi eltolás, melynek iránya a centrumok összekötő egyenese és távolsága a centrumok távolságának kétszerese.
2) Minden eltolás felbontható két középpontos tükrözés szorzatára. Az egyik középpontos tükrözés centruma tetszőleges pont lehet, melynek rögzítése után a másik középpontos tükrözés centruma egyértelműen létezik.

T17: Eltolásnál bármely egyenes párhuzamos a képével.
T18: Három középpontos tükrözés szorzata egyetlen középpontos tükrözés.
T19: Középpontos tükrözés és eltolás szorzata (bármely sorrendben) egyetlen középpontos tükrözés.
T20: Egy síkban az eltolások kommutatív csoportot alkotnak, amely a mozgások csoportjának részcsoportja.
T21 (az eltolások alaptétele): Adott rendezett pontpár esetén egyértelműen létezik olyan eltolás, amely az első pontot a másodikba viszi át.
Három tengelyes tükrözés szorzatát vizsgálva ebben a fejezetben már foglalkoztunk azzal a speciális esettel, amikor a három tengely ugyanazon sugársornak az elemei (T3 tétel). Következzen most az általános eset, amikor a három tengely nem egy sugársorból való: a három

tengely között van kettő egymással párhuzamos vagy pedig a három tengely közül bármely kettő metszi egymást.
T22: Ha három tengelyes tükrözés tengelyei nem egy sugársorból valók, akkor a rájuk vonatkozó tengelyes tükrözések szorzata helyettesíthető egy tengelyes tükrözés és egy olyan valódi eltolás szorzatával, amelyre az eltolás iránya párhuzamos a tükrözés tengelyével.
Az előbbi tételben szereplő tengelyes tükrözés és eltolás sorrendje felcserélhető.
Egy valódi eltolás és egy tengelyes tükrözés szorzatát (bármely sorrendben) valódi csúsztatva tükrözésnek nevezzük, ha az eltolás iránya párhuzamos a tükrözés tengelyével.
Csúsztatva tükrözésen egy valódi csúsztatva tükrözést értünk, vagy pedig egy tengelyes tükrözést, ha az eltolás identitás.
Csúsztatva tükrözésnél az eltolás és a tengelyes tükrözés sorrendje felcserélhető.
T23 (a síkizometriák osztályozása): A sík valamely izometriája vagy elforgatás, vagy eltolás, vagy csúsztatva tükrözés.
A továbbiakban röviden összefoglaljuk a térizometriák alaptulajdonságait.
A tér két különböző síkjára történő tükrözés szorzatát

- valódi eltolásnak nevezzük, ha a két sík párhuzamos,
- tengely körüli elforgatásnak nevezzük, ha a két sík metsző.

Valódi eltolás esetén a két síkra merőleges egyenesek halmazát a valódi eltolás irányának nevezzük, a két sík távolságának kétszeresét pedig a valódi eltolás mértékének. Ha a két sík egybeeső, akkor az eltolás identitás, melynek iránya tetszőleges és mértéke 0.
Tengely körüli elforgatás esetén a két sík metszésvonala az elforgatás tengelye, és a két sík szögének a kétszerese az elforgatás mértéke. Ha a két sík merőleges egymásra, akkor a tengely körüli elforgatás négyzete identitás: tehát ekkor a tengely körüli elforgatás involutorikus. Ez a speciális tengely körüli elforgatás egy térbeli tengelyes tükrözés.
Egy tengely körüli elforgatás és egy olyan eltolás szorzatát, amelyre az eltolás iránya párhuzamos az elforgatás tengelyével, csavarmozgásnak nevezzük. A tengely körüli elforgatás és az eltolás is speciális csavarmozgások.
Egy síkra vonatkozó tükrözés és a síkra merőleges tengelyű elforgatás szorzatát forgatva tükrözésnek nevezzük. Ha az elforgatás mértéke π, akkor a forgatva tükrözés négyzete identitás: tehát ekkor a forgatva tükrözés involutorikus. Ennek a speciális forgatva tükrözésnek a neve térbeli középpontos tükrözés, melynek centruma azonos a szóbanforgó egyenes és sík döféspontjával.
Egy síkra vonatkozó tükrözés és a síkkal párhuzamos irányú eltolás szorzatát térbeli csúsztatva tükrözésnek nevezzük. A tükrözés és eltolás sorrendje felcserélhető.
T24 (az eltolások tulajdonságai):

- A térbeli eltolások kommutatív csoportot alkotnak, amely a térizometriák csoportjának részcsoportja.
- Eltolásnál bármely egyenes (sík) párhuzamos a képével.
- A valódi eltolásnak nincs fixpontja.
- Az eltolás invariáns egyeneseinek halmaza megegyezik az eltolás irányát alkotó egyenesek halmazával.
- Adott rendezett pontpár esetén egyértelműen létezik olyan eltolás, amely az első pontot a másodikba viszi át.

T26 (a térizometriák osztályozása): A tér valamely izometriája vagy csavarmozgás, vagy forgatva tükrözés, vagy csúsztatva tükrözés.

14. Paralelogrammák

Ha az A, B, C és D négy különböző és egysíkú pont közül bármely három nem kollineáris, továbbá az $int\,\overline{AB}$, $int\,\overline{BC}$, $int\,\overline{CD}$ és $int\,\overline{AD}$ halmazok páronként diszjunktak, akkor az $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ halmazt négyszögnek (négyszögvonalnak) nevezzük.
Jelölése: $ABCD$€.
Az A, B, C és D pontok a négyszög csúcsai, az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ és $\overline{DA}$ szakaszok a négyszög oldalai, az $\overline{AC}$ és $\overline{BD}$ szakaszok pedig az átlói. Egy oldal (átló) végpontjait szomszédos (szemközti) csúcsoknak nevezzük. Két oldal szomszédos (szemközti), ha metszetük nem üres (üres). Az $ABC\angle$, $BCD\angle$, $CDA\angle$ és $DAB\angle$ szögek a négyszög belső szögei, melyeket rendre $B\angle$, $C\angle$, $D\angle$ és $A\angle$ is jelölhet.
Egy négyszög a saját síkját két részre osztja, melyek közül az egyik nem tartalmaz félegyenest. Ezt a részt a négyszög belsejének nevezzük. Egy négyszögnek és belsejének az egyesítésével előálló halmazt négyszögtartománynak nevezzük, de ha nem okoz félreértést, akkor erre is használhatjuk a négyszög elnevezést.
A továbbiakban olyan speciális négyszögekkel foglalkozunk, melyeket valamilyen szimmetria, a meghatározó adatok közötti egyenlőség, vagy az oldalaik valamilyen különleges helyzete (párhuzamosság vagy merőlegesség) jellemzi.
Ha egy négyszög két-két szemközti oldala párhuzamos egymással, akkor a négyszöget paralelogrammának nevezzük.
Az értelmezés szerint bármely paralelogramma (mint négyszögtartomány) előállítható két sáv közös részeként, s ennélfogva a paralelogramma konvex négyszög.
T1 (paralelogramma tételek): Egy négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha

- két-két szemközti oldala párhuzamos,
- két-két szemközti oldala egyenlő,
- két-két szemközti szöge egyenlő,
- két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő,
- két átlója felezi egymást,
- középpontosan szimmetrikus.

A fenti tételben felsorolt bármelyik feltételből következik az összes többi. A bizonyításból adódnak még az alábbiak:

- a paralelogramma szomszédos szögei kiegészítő szögek,
- a paralelogrammát bármelyik átlója két egybevágó háromszögre bontja fel,
- a paralelogramma szimmetria középpontja azonos az átlók metszéspontjával, amit a paralelogramma középpontjának nevezünk.

A paralelogramma két szemközti oldalának felezőpontjait összekötő szakaszt a paralelogramma középvonalának nevezzük. Minden paralelogrammának két középvonala van.
T2: A paralelogramma bármely középvonala párhuzamos és egyenlő a nem felezett oldalakkal, továbbá áthalad a paralelogramma középpontján és ez a felezőpontja.
Ha egy paralelogrammának az egyik szöge derékszög, akkor minden szöge derékszög. Az ilyen négyszöget téglalapnak nevezzük.
T3: A téglalap rendelkezik a paralelogramma összes tulajdonságával és még a következőkkel:

1) minden szöge derékszög (vagy: minden szöge egyenlő),
2) átlói egyenlők,
3) tengelyesen szimmetrikus a középvonalaira.

Ha egy paralelogramma két szomszédos szöge egyenlő, akkor a paralelogramma téglalap, mivel a paralelogramma szomszédos szögei kiegészítő szögek és az egymással egyenlő kiegészítő szögek derékszögek.
Egy négyszög akkor és csak akkor téglalap, ha átlói egyenlők és felezik egymást.
Ha egy paralelogrammának két szomszédos oldala egyenlő, akkor a paralelogramma minden oldala egyenlő. Az ilyen négyszöget rombusznak nevezzük.
T4: A rombusz rendelkezik a paralelogramma összes tulajdonságával és még a következőkkel:

1) minden oldala egyenlő,
2) átlói felezik a szögeket,

3) átlói merőlegesek egymásra,
4) tengelyesen szimmetrikus az átlóira.

Egy négyszög akkor és csak akkor rombusz, ha átlói merőlegesen felezik egymást.

Ha egy paralelogrammának két szomszédos oldala egyenlő és egyik szöge derékszög, akkor a paralelogrammára egyidejűleg teljesül, hogy minden oldala egyenlő és minden szöge derékszög. Az ilyen négyszöget négyzetnek nevezzük.

A négyzet tekinthető egyenlő oldalú téglalapnak vagy derékszögű rombusznak.

T5: A négyzet egyidejűleg rendelkezik a téglalap és a rombusz összes tulajdonságával és még a következővel:

- forgásszimmetrikus a középpontjára (a középpontja körüli 90^o-os elforgatás a négyzetet önmagára képezi le).

Egy paralelogramma akkor és csak akkor négyzet, ha átlói egyenlők és merőlegesek.

Egy négyszög akkor és csak akkor négyzet, ha átlói egyenlők és merőlegesen felezik egymást.

A téglalap, rombusz és négyzet speciális paralelogrammák, de helytelen lenne azt mondani, hogy egy paralelogramma vagy téglalap, vagy rombusz, vagy négyzet, vagy pedig általános paralelogramma.

15. A párhuzamos szelők tételei

T1 (a párhuzamos szelő tétele): Ha egy valódi szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük el, akkor az egyik száron keletkező szakaszok aránya megegyezik a másik száron keletkező megfelelő szakaszok arányával.

T2 (a párhuzamos szelők tételének megfordítása): Ha két egyenes egy valódi szög száraiból olyan szakaszokat vág le, amelyeknek az aránya mindkét száron ugyanaz, akkor a két egyenes párhuzamos egymással.

T3 (a párhuzamos szelők tételének alkalmazása): Egy valódi szög szárait metsző párhuzamosokból a szárak által kimetszett szakaszok aránya megegyezik a párhuzamosok által az egyes szárakból lemetszett szakaszok arányával.

Ennek a fejezetnek valamennyi állítása helyes akkor is, ha nem a szög szárairól, hanem a szárak egyeneseiről van szó. Ha pedig két párhuzamos egyenest vennénk adottnak, akkor azokat párhuzamosokkal elmetszve paralelogrammák adódnának, s így a fenti állítások könnyen beláthatók.

16. Hasonlósági transzformációk

$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}$ vagy $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{P}$ esetén a $\varphi: \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$, $P \quad \varphi(P) = P'$ bijektív leképezést hasonlósági transzformációnak (hasonlóságnak) nevezzük, ha bármely $P, Q \in \boldsymbol{H}$ esetén $P'Q' = k \cdot PQ$, ahol k egy pozitív valós szám, amit a hasonlóság arányának nevezünk.

Ezen értelmezés szerint bármely $P, Q \in \boldsymbol{H}$ esetén $P'Q' : PQ = k,$ azaz a hasonlóság aránytartó bijekció.

$k = 1$ esetén a hasonlóság egybevágóság, $k > 1$ ($k < 1$) esetén pedig nagyítás (kicsinyítés).

$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}$ esetén a hasonlóság térbeli, míg $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{P}$ esetén síkbeli.

A következő tétel állításai síkban és térben egyaránt érvényesek.

T1 (a hasonlóságok alaptulajdonságai):

1) Az egybevágóságok pontosan az 1 arányú hasonlóságok.
2) Egy k arányú és egy m arányú hasonlóság szorzata $k \cdot m$ arányú hasonlóság.
3) Egy k arányú hasonlóság inverze $1/k$ arányú hasonlóság.
4) A hasonlóságok halmaza a szorzásra nézve csoportot alkot.

Ha $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}$ vagy $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{P}$ esetén $O \in \boldsymbol{H}$ egy rögzített pont és k egy adott pozitív valós szám, akkor a $\delta\colon \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ leképezést, amelyre O O továbbá bármely $P \in \boldsymbol{H} \setminus \{O\}$ esetén P $\delta(P) = P' \in \overrightarrow{OP}$ és $OP' = k \cdot OP$ teljesül, O centrumú k arányú centrális nyújtásnak nevezzük. Jelölése: $\delta_{O,k}$.

$k = 1$ esetén a centrális nyújtás identitás, $k > 1$ $(k < 1)$ esetén pedig nagyítás (kicsinyítés).

$k \neq 1$ esetén a centrum fix és további fixpont nincs.

A centrumon áthaladó egyenesek invariánsak

$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}$ esetén a centrális nyújtás térbeli, míg $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{P}$ esetén síkbeli.

A centrális nyújtás a szakaszfelmérés tétele (2/T8) szerint bijektív.

T2 (a centrális nyújtás tulajdonságai): A centrális nyújtás

- ugyanakkora arányú hasonlóság,
- minden egyenest vele párhuzamos egyenesbe visz át,
- megtartja a között van relációt,
- minden félegyenest vele egyező irányú félegyenesbe visz át.

Ennek alapján az is megállapítható, hogy a centrális nyújtás

- a centrum és egy megfelelő pontpár megadása esetén egyértelműen meghatározott,
- szögtartó (bármely szög képe vele egybevágó szög),
- párhuzamosságtartó (párhuzamos egyenesek képei is párhuzamosak egymással).

Megjegyezzük még, hogy közös (különböző) centrumú két centrális nyújtás szorzata egy centrális nyújtás (egy centrális nyújtás vagy eltolás). Azonos centrumú centrális nyújtás és centrális tükrözés szorzata esetén a sorrend felcserélhető.

Középpontos hasonlóságnak (homotéciának) nevezzük a centrális nyújtást, vagy az azonos centrumú centrális nyújtás és centrális tükrözés szorzatát.

Jelölése: $h_{O,k} = \delta_{O,k}$ vagy $h_{O,k} = \rho_O \cdot \delta_{O,k} = \delta_{O,k} \cdot \rho_O$.

A $h_{O,k}$ homotécia centruma az O pont, aránya pedig k vagy $-k$ (tehát előjeles az arány).

A homtécia centruma fix és a centrumon áthaladó egyenesek invariánsak.

Ha a homotécia aránya negatív, akkor bármely félegyenes képe vele ellentétes irányú félegyenes.

Ha a $h_{O,k}$ homotécia esetén az O-ra illeszkedő valamely a egyenesnek $f\colon a \to \boldsymbol{R}$ egy olyan koordinátázása, amelyre $f(O) = 0$ és bármely $P \in a \setminus \{O\}$ esetén $f(P) = p$, akkor $f(P') = kp$ teljesül.

A homotécia értelmezéséből adódik azalábbi tétel:

T3 (a homotécia alaptulajdonságai):

1) Közös centrumú k és m arányú homotéciák szorzata ugyanazon centrumú km arányú homotécia.
2) Egy k arányú homotécia inverze $1/k$ arányú és ugyanazon centrumú homotécia.
3) A közös centrumú homotéciák halmaza a szorzásra nézve csoportot alkot.

T4: Minden hasonlóság előállítható egy ugyanakkora arányú és tetszőleges centrumú homotécia valamint egy egybevágóság szorzataként.

Az előbbi tétel szerint minden hasonlóság egyenestartó, rendezéstartó és szögtartó.

T5 (a hasonlóságok fixpont tétele): Egybevágóságtól különböző bármely hasonlóságnak egyértelműen létezik fixpontja.

T6: Egybevágóságtól és középpontos hasonlóságtól különböző bármely síkbeli hasonlóság esetén, ha egy $ABCD$ paralelogramma képe az $A'B'C'D'$ paralelogramma, továbbá

$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{P\}$, $\overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{C'D'} = \{Q\}$, $\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{A'D'} = \{R\}$ és $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{S\}$, akkor a hasonlóság egyértelműen létező O fixpontja azonos a $\overleftrightarrow{PQ}$ és $\overleftrightarrow{RS}$ egyenesek metszéspontjával.
Ugyanazon síkban a közös centrumú elforgatás és homotécia szorzatát forgatva nyújtásnak, továbbá egy homotécia és annak centrumára illeszkedő tengelyű tengelyes tükrözés szorzatát tükrözve nyújtásnak nevezzük.
Az előbb definiált szorzatleképezésekben a tényezők sorrendje felcserélhető, s ennek megfelelően beszélhetnénk nyújtva forgatásról és nyújtva tükrözésről is.
T7 (a síkbeli hasonlóságok osztályozása): A sík minden hasonlósága vagy egybevágóság, vagy forgatva nyújtás, vagy tükrözve nyújtás.
T8 (a hasonlóságok alaptétele): Ha az $ABC\Delta \leftrightarrow DEF\Delta$ megfeleltetésnél a két háromszög megfelelő szögei egybevágók, akkor létezik olyan hasonlóság, amelyre $A' = D$, $B' = E$ és $C' = F$ teljesül. Ha a két adott háromszög egysíkú, akkor ebben a síkban ez a hasonlóság egyértelmű.
A fejezet hátralévő részében röviden összefoglaljuk a térbeli hasonlóságok tulajdonságait.
A térben egy egyenes körüli elforgatás és egy az elforgatás tengelyére illeszkedő centrumú homotécia szorzatát térbeli forgatva nyújtásának nevezzük.
T9 (a térbeli hasonlóságok osztályozása): A térben minden hasonlóság vagy egybevágóság, vagy forgatva nyújtás.
A térben két alakzatot hasonlónak nevezünk, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyiket a másikra képezi le. Jelölése: $\sim$.
T10: Az alakzatok hasonlósága ekvivalencia reláció.
T11 (a háromszögek hasonlóságának alapesetei): Két (nem feltétlenül különböző) háromszög hasonló, ha létezik közöttük olyan megfeleltetés, amelynél

1) a megfelelő oldalak aránya egyenlő,
2) két-két megfelelő oldal aránya egyenlő és az általuk bezárt megfelelő szögek is egyenlők,
3) két-két megfelelő oldal aránya egyenlő és a nagyobbik oldallal szemközti megfelelő szögek is egyenlők,
4) a megfelelő szögek egyenlők.

T12: A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága a háromszöget két olyan háromszögre bontja, amelyek mindegyike hasonló az eredeti háromszöghöz.
A hasonlóság tranzitivitása miatt a két részháromszög is hasonló egymáshoz.
T13 (a pitagoraszi tételcsoport):

1) Magasságtétel: A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága mértani közepe a befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek.
2) Befogótétel: A derékszögű háromszög bármelyik befogója mértani közepe az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének.
3) Pitagorasz – tétel: A derékszögű háromszög átfogójának négyzete egyenlő a befogók négyzeteinek az összegével.
4) Pitagorasz – tétel megfordítása: Ha egy háromszögnek van olyan oldala, amelynek négyzete egyenlő a másik két oldal négyzeteinek az összegével, akkor a háromszög derékszögű és ez az oldal az átfogója.

17. A szabadvektorok vektortere

Ebben a fejezetben az eltolások csoportjára és a homotéciák halmazára építkezve megkonstruáljuk a szabadvektorok vektorterét.
Egy $(A ,B) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}$ rendezett pontpárt irányított szakasznak nevezünk, melynek A a kezdőpontja és B a végpontja.
Az (A , B) iránya $A = B$ esetén tetszőleges.
Az eltolások alaptétele (13/T21) szerint adott (A , B) irányított szakasz esetén egyértelműen létezik olyan eltolás, amely az A pontot a B pontba viszi át: ezt az eltolást $\tau_{(A , B)}$ –vel jelöljük, amelyre tehát $\tau_{(A , B)} (A) = B$.
Adott A és B pontok esetén $\overrightarrow{AB}$ szabadvektornak nevezzük mindazon (P, Q) irányított szakaszok halmazát, amelyekre $\tau_{(A , B)} (P) = Q$ teljesül.
Jelölése: $\overrightarrow{AB} = \{(P, Q) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \mid \tau_{(A , B)} (P) = Q \}$
$(P, Q) \in \overrightarrow{AB}$ esetén (P, Q) –t az $\overrightarrow{AB}$ szabadvektor egyik reprezentánsának nevezzük.
Minthogy a $\tau_{(A , B)}$ eltolás az A pontot B –be viszi át, ezért az $\overrightarrow{AB}$ szabadvektort az (A , B) irányított szakasz is reprezentálhatja.
Az $\overrightarrow{AB}$ szabadvektor $\| \overrightarrow{AB} \|$ -vel jelölt hosszán az $AB \geq 0$ valós számot értjük, ami a 13/T13 tétel 2) része szerint független a reprezentáns kiválasztásától.
Az (A , A) reprezentánsú szabadvektort nullvektornak nevezzük és $\underline{0}$ -val jelöljük.
Két szabadvektor egyenlő, ha van közös reprezentánsuk.
Tehát $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, ha létezik (P, Q) úgy, hogy $(P, Q) \in \overrightarrow{AB}$ és $(P, Q) \in \overrightarrow{CD}$ is teljesül.
Ennek alapján $\tau_{(A , B)} (P) = Q$ és $\tau_{(C , D)} (P) = Q$, s így az eltolások alaptétele (13/T21) miatt $\tau_{(A , B)} = \tau_{(C , D)}$.
T1: $(P, Q) \in \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \tau_{(P , Q)} = \tau_{(A , B)}$.
A tér összes szabadvektorának halmazát $\boldsymbol{V}$ –vel jelöljük. Ha $\boldsymbol{V}$ elemeinek megadásakor nem utalunk reprezentánsra, akkor $\boldsymbol{V}$ elemeit jelölhetjük kövér vagy aláhúzott kisbetűkkel: azaz $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}$ vagy $\underline{a} \in \boldsymbol{V}$ ugyanazt jelöli.
A következő tételek kapcsolatot létesítenek a tér szabadvektorainak $\boldsymbol{V}$ halmaza és a tér összes eltolásainak $\boldsymbol{T}$ halmaza között.
T2: A v: $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{T}$, $\overrightarrow{AB}$ $\quad v(\overrightarrow{AB}) = \tau_{(A , B)}$ leképezés bijekció.
Az alábbiakban értelmezzük a szabadvektorok összeadását.
Az (A , B) –vel illetve (B , C) –vel reprezentált $\overrightarrow{AB}$ illetve $\overrightarrow{BC}$ szabadvektorok összegén az (A , C) –vel reprezentált $\overrightarrow{AC}$ szabadvektort értjük: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
A szabadvektorok összegét definiáló előbbi összefüggést háromszögszabálynak nevezzük.
T3: A szabadvektorok halmaza az összeadásra nézve kommutatív csoportot alkot: azaz $(\boldsymbol{V}, +)$ Abel csoport.
T4: A T2-ben értelmezett v: $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{T}$ leképezés izomorfizmus a $(\boldsymbol{V} , +)$ és $(\boldsymbol{T} , \circ)$ Abel csoportok között.
T5: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
T6 (a szabadvektor elemi fogalma): Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ szabadvektorok akkor és csak akkor egyenlők, ha $AB = CD$ továbbá az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ félegyenesek azonos irányúak.
Az alábbiakban értelmezzük a szabadvektorok skalárral való szorzását.
Ha $\lambda \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ és $\delta_\lambda : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, $P \quad \delta_\lambda(P) = P'$ egy tetszőleges centrumú és λ előjeles arányú homotécia, akkor az $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ műveletet skalárral való szorzásnak nevezzük és a következőképpen értelmezzük:

1) $\forall \underline{a} \in \boldsymbol{V}$ esetén $0 \cdot \underline{a} = \underline{0}$,
2) $(A , B) \in \underline{a}$ esetén $\lambda \cdot \underline{a} = \overrightarrow{\delta_\lambda(A)\ \delta_\lambda(B)} = \overrightarrow{A'B'}$.

A fenti értelmezés független a homotécia centrumának megadásától, továbbá a 17/T6 tétel szerint független a szabadvektor reprezentánsának megválasztásától.

Ugyanis $|\overrightarrow{A'B'}| = |\lambda| \, |\overrightarrow{AB}|$ továbbá $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$) esetén az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{A'B'}$ szabadvektorok egyező (ellentétes) irányúak.

T7: A szabadvektorok összeadása és skalárral való szorzása rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal: $(\boldsymbol{V}, +)$ kommutatív csoport, továbbá bármely $\underline{a}$, $\underline{b} \in \boldsymbol{V}$ és λ , $\mu \in \boldsymbol{R}$ esetén

1) $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$
2) $(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{a}$
3) $(\lambda\mu)\underline{a} = \lambda(\mu\underline{a})$
4) $1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$

teljesül.

Az előbbi tétel alapján megállapítható, hogy $(\boldsymbol{V}, +)$ vektortér az $\boldsymbol{R}$ test felett.

T8 (a lineáris függőség geometriai jelentése):

1) Egy szabadvektor akkor és csak akkor alkot lineárisan függő rendszert, ha nullvektor.
2) Két szabadvektor akkor és csak akkor alkot lineárisan függő rendszert, ha egy egyenesen reprezentálhatók.
3) Három szabadvektor akkor és csak akkor alkot lineárisan függő rendszert, ha egy síkon reprezentálhatók.
4) A szabadvektorok bármely legalább négytagú vektorrendszere lineárisan függő: a szabadvektorok vektortere három dimenziós.

18. Affin leképezések

Elsőként utalunk arra, hogy az „Izometriák I” című fejezetben az affin leképezésre az alábbi értelmezést adtuk:

A tér vagy egy sík egyenestartó bijekcióját affin leképezésnek nevezzük.

Ezt az értelmezést megtartva a továbbiakban kapcsolatot létesítünk a tér affin leképezései és a szabadvektorok vektorterének lineáris izomorfizmusai között. A tárgyalás térbeli lesz, de minden fogalom és tétel könnyen átvihető a síkba is.

T1 (az affin leképezések főtétele): Az f: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, $P \quad f(P) = P'$ leképezés akkor és csak akkor affin leképezés, ha teljesíti az alábbi két feltételt:

1) tetszőleges A, B, C, D pontokra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ esetén $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$, vagyis bármely (esetleg elfajuló) paralelogramma képe is (esetleg elfajuló) paralelogramma,
2) az $\vec{f} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, $\overrightarrow{PQ} = \underline{v} \quad \vec{f}(\underline{v}) = \overrightarrow{P'Q'}$ leképezés lineáris izomorfizmus.

A fenti tétel 1) részében elfajuló paralelogramma akkor áll elő, ha a négy adott pont egy egyenesre illeszkedik. Az 1) rész más megfogalmazásban: Párhuzamos egyenesek képei is párhuzamosak. Tehát az affin leképezés párhuzamosságtartó.

A tér négy pontját általános helyzetűnek nevezzük, ha nem komplanárisak.

Egy sík három pontját általános helyzetűnek nevezzük, ha nem kollineárisak.

T2 (az affin leképezések alaptétele):

1) Ha $\{A_1 , B_1 , C_1 , D_1\}$ és $\{A_2 , B_2 , C_2 , D_2\}$ két általános helyzetű pontnégyes az $\boldsymbol{E}$ térben, akkor egyértelműen létezik olyan $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ affin leképezés, amelyre $f(A_1) = A_2$, $f(B_1) = B_2$, $f(C_1) = C_2$ és $f(D_1) = D_2$.
2) Ha $\{A_1 , B_1 , C_1\}$ és $\{A_2 , B_2 , C_2\}$ két általános helyzetű ponthármas egy α síkban, akkor egyértelműen létezik olyan $f: \alpha \to \alpha$ affin leképezés, amelyre $f(A_1) = A_2$, $f(B_1) = B_2$ és $f(C_1) = C_2$.

Ha az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes B –től különböző valamely P pontjára $\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{PB}$, ahol $\lambda \in \boldsymbol{R} \setminus \{-1\}$ adott valós szám, akkor azt mondjuk, hogy a P pont az (A , B) irányított szakaszt λ arányban osztja. Ezt a λ valós számot az A, B és P pontok osztóviszonyának nevezzük és (ABP) –vel jelöljük.

Az osztóviszony értelmezése szerint $(ABP) \neq -1$, $(ABP) = 0 \Leftrightarrow P = A$, $(ABP) > 0 \Leftrightarrow A - P - B$ és $(ABP) < 0 \Leftrightarrow P \in \overleftrightarrow{AB} \setminus \overline{AB}$, továbbá $(ABP) = (ABQ) \Leftrightarrow P = Q$.

Ha $(ABP) = \lambda$ és O egy rögzített pont, akkor $\overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}) / (1 + \lambda)$.

T3: Minden affin leképezés osztóviszonytartó.

Megfordítva: Minden osztóviszonytartó bijekció affin leképezés.

Egy síkbeli affin leképezést tengelyes affinitásnak nevezünk, ha van egy pontonként fix egyenese. Ha az affinitás nem identitás, akkor ezt a pontonként fix egyenest az affinitás tengelyének nevezzük. Identitás esetén a sík bármely egyenese tengelynek nevezhető.

Az affin leképezések alaptételének 2) része szerint a tengelyes affinitást egyértelműen meghatározza a tengely (vagyis annak két különböző pontja, amelyek fixpontok lévén egybeesnek a képeikkel) valamint a tengelyre nem illeszkedő bármely pont és annak a képe.

Az affin leképezés tulajdonságaiból következik, hogy

- tengelyes affinitásnál a tengellyel párhuzamos egyenes képe is párhuzamosa tengellyel,
- a tengellyel nem párhuzamos egyenes és képe a tengelyt ugyanabban a pontban metszi.

T4: Bármely tengelyes affinitásnál létezik olyan g egyenes, hogy a tengelyre nem illeszkedő tetszőleges P pontra és P' képére $\overleftrightarrow{PP'} \parallel g$ teljesül.

Az előbbi tételben szereplő g egyenes által meghatározott sugársort a tengelyes affinitás irányának nevezzük.

T5: Egy síkbeli affinitás vagy hasonlóság, vagy tengelyes affinitás és hasonlóság szorzata.

T6 (az affin leképezések fixpont tétele): Ha $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ egy affin leképezés és $\ker(\vec{f} - id_V) = \{ \underline{0} \}$, akkor f–nek egyértelműen létezik fixpontja.

Az előbbi tételt alkalmazhatjuk a hasonlóságok fixpont tételének (16/T5) általános érvényű bizonyítására.

T7 (a hasonlóságok fixpont tétele): Izomorfiától különböző bármely hasonlóságnak egyértelműen létezik fixpontja.

T8 (a síkbeli affin leképezések osztályozása): Ha egy síkbeli affin leképezésnek

1) nincs fixpontja, akkor az egy eltolás és egy tengelyes affinitás szorzata,
2) egy fixpontja van, akkor az egy tengelyes affinitás és egy olyan forgatva nyújtás szorzata, amelynek centruma illeszkedik a tengelyre,
3) két fixpontja van, akkor az egy tengelyes affinitás, melynek tengelye a két fixpontra illeszkedő pontonként fix egyenes.

Az előbbi tétel 2) részében a forgatva nyújtás kicserélhető egy tükrözve nyújtásra, de ezt egy másik tengelyes affinitással szorozva kapjuk ugyanazt az affinitást.