1. HÁROMSZÖGGEOMETRIA

1.1. Nevezetes egyenlőtlenségek

Fagnano feladata: Bizonyítandó, hogy adott hegyesszögű háromszögbe írt legkisebb kerületű háromszög csúcsai az adott háromszög magasságainak talppontjaival esnek egybe.
Fagnano tűzi ki és oldja meg 1775-ben differenciálszámítással. H.A. Schwarz öt tengelyes tükrözéssel, Fejér Lipót kettővel oldja meg 1900-ban.
Középiskolai geometriai feladatok gyűjteménye I. kötet 353. és 354. feladatok.
Hajós: Bevezetés a geometriába 155-156. old.
Pelle: Geometria 137-138. old.
Coxeter: A geometriák alapjai 37-38. old.
Sain: Matematika történeti feladatok 210-211. old.
Kazarinoff: Geometriai egyenlőtlenségek 113-115. old.
Forum Geometricorum, 2004/199-201. old.

Fermat feladata: Adott hegyesszögű háromszög belsejében szerkesztendő olyan pont, amelyre a csúcsoktól mért távolságok összege a lehető legkisebb.
Ezt a pontot Fermat-pontnak nevezzük. (Szerkesztésére két mód is kell!)
Coxeter: A geometriák alapjai 38-39. old.
Megjegyzés: Az adott háromszögnek nem feltétlen kell hegyesszögűnek lennie. Elegendő, ha csak azt követeljük meg, hogy a legnagyobb szöge 120^o-nál kisebb.

A klasszikus háromszög egyenlőtlenség: Egy háromszög bármely két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál.
Kovács: Geometria 8.5. tétel.
Hajós: Bevezetés a geometriába 59. old.
Pelle: Geometria 52-53. old.
Alkalmazás a súlyvonalakra: A háromszög súlyvonalainak összege a kerület és a kerület háromnegyed része közé esik (Középiskolai geometriai feladatok gyűjteménye I, 178, 179).

Erdős-Mordell egyenlőtlenség: Egy háromszög belsejében vagy határvonalán lévő bármely pontra a csúcsoktól mért távolságok összege legalább kétszerese az oldalaktól mért távolságok összegének. Egyenlőség pontosan akkor van, ha a háromszög szabályos és ez a pont a háromszög középpontja.
Erdős Pál tűzi ki 1935-ben, s még ugyanezen év februárban a KöMal közli Mordell megoldását (ugyanezt az American Math. Monthly 1937-ben közli). Kazarinoff 1945-ben adja az első elemi megoldást. A tételnek számos bizonyítása ismert, a legújabbak a Forum Geometricorum elektronikus folyóiratban jelennek meg (2001/7-8. old., 2004/67-68.. old.).

1.2. Nevezetes pontok, egyenesek és körök

Hajós: Bevezetés a geometriába 149-155. old.
Pelle: Geometria 134-147. old.

Oldalfelező merőleges
Definíció: Az oldal felezőpontján áthaladó és az oldalra merőleges egyenes.
Tulajdonság: Azon pontok halmaza (az oldalt tartalmazó síkban), amelyek az oldal végpontjaitól egyenlő távolságra vannak.
Tétel: A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontra illeszkednek.
A háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja egyenlő távol van a háromszög mindhárom csúcsától, így ez egy olyan kör középpontja, amely áthalad a háromszög csúcsain.

Ezt a kört a háromszög körülírt körének nevezzük, amelynek középpontja hegyesszögű háromszög esetén a háromszögön belül, derékszögű háromszög esetén az átfogó felezési pontjában, tompaszögű háromszögesetén pedig a háromszögön kívül van.

Tétel: Az a, b, c oldalú, T területű háromszög körülírt körének sugara $R=\frac{abc}{4T}$.

Tétel: Általános szinusz tétel: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$.

Magasságvonal

Definició: A háromszög egy csúcsából a szemközti oldalra bocsátott merőleges egyenes a csúcshoz (vagy oldalhoz) tartozó magasságvonal.
A magasságvonalnak a csúcs és a szemközti oldal egyenese közötti szakaszát magasságnak nevezzük.
Hegyesszögű háromszög mindhárom magassága a háromszögön belül van. Derékszögű háromszög egyik befogójához tartozó magasság a másik befogó, az átfogóhoz tartozó magasság pedig a háromszögön belül van. Tompaszögű háromszög esetén a tompaszöggel szemközti oldalhoz tartozó magasság a háromszögön belül, míg a két hegyesszöggel szemközti oldalhoz tartozó magasság a háromszögön kívül van.
Tétel: A háromszög magasságvonalai egy pontra illeszkednek.
A háromszög magasságvonalainak metszéspontját a háromszög magasságpontjának (orto-centrumának) nevezzük.
Hegyesszögű háromszög magasságpontja a háromszögön belül, derékszögű háromszög magasságpontja a derékszög csúcsában, tompaszögű háromszög magasságpontja a háromszögön kívül van.
Ha egy háromszög nem derékszögű, akkor csúcsai a magasságponttal együtt ortocentrikus pontnégyest alkotnak: bármely három pont által meghatározott háromszög magasságpontja a negyedik pont. Egy ortocentrikus pontnégyes négy különböző háromszöget határoz meg.

Súlyvonal

Definició: A háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz.
Bármely háromszög mindhárom súlyvonala a háromszögön belül halad.
Tétel. A háromszög súlyvonalai egy pontra illeszkednek.
A háromszög súlyvonalainak metszéspontját a háromszög súlypontjának (baricentrumának) nevezzük, ami mindhárom súlyvonalnak a csúcstól távolabbi harmadoló pontja. A háromszög súlypontja mindig a háromszög belsejében van.
A súlyvonalak a háromszöget hat egyenlő területű háromszögre osztják fel. A háromszög három súlyvonalából mindig szerkeszthető egy háromszög. A háromszög súlypontjának helyvektora a csúcsok helyvektorainak számtani közepe (Hajós: 301. old.).

Szögfelező

Definició: Ha A, B és O nem egy egyenesre illeszkedő pontok, akkor az $\overleftrightarrow{OA}$ határegyenesű B pontot tartalmazó félsík és az $\overleftrightarrow{OB}$ határegyenesű A pontot tartalmazó félsík közös részét AOB konvex szögtartománynak (szögnek) nevezzük.
Definició: Egy szögtartomány felezője a szög csúcsából kiinduló az a félegyenes, amely a szöget két egyenlő szögre osztja.
Tulajdonság: Azon pontok halmaza (a szögtartományt tartalmazó síkban), amelyek a szög száraitól egyenlő távolságra vannak.
A szögfelező mindig a szögtartományban halad és a szögnek szimmetria tengelye.
Tétel: A háromszög belső szögfelezői egy pontra illeszkednek.
A háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja egyenlő távol van a háromszög mindhárom oldalától, így ez egy olyan kör középpontja, amely érinti a háromszög oldalait. Ezt a kört a háromszög beírt körének nevezzük,amelynek középpontja mindig a háromszögön belül van.

Tétel: Az a, b, c oldalú, T területű háromszög beírt körének sugara $r = \frac{2T}{a+b+c}$.
Definíció: Két konvex szög egymás kiegészítő szöge, ha összegük 180^o. Két konvex szög egymás mellékszöge, ha együttesen egy félsíkot alkotnak, vagyis egyik száruk közös és a másik kettő egy egyenest alkot. (Minden mellékszög egyúttal kiegészítő szög is, de megfordítva nem igaz!) A háromszög egy belső szögének bármelyik mellékszögét a tekintett csúcsnál lévő külső szögnek nevezzük.
Tétel: A háromszög egyik csúcsánál lévő belső és másik két csúcsánál lévő külső szögének felezői egy pontra illeszkednek.
Ez a pont egyenlő távol van a belső szöggel szemközti oldaltól és a belső szög két szárától, így ez a pont egy olyan kör középpontja, amely érinti a szóbanforgó oldalt és a két szögszárt. Ezt a kört a tekintett oldalt érintő hozzáírt körnek nevezzük
Tétel: Az a, b, c oldalú, $2s = a+b+c$ kerületű és T területű háromszög a oldalát érintő hozzáírt körének sugara $r_a = \frac{T}{s-a}$. (Hasonlóan: $r_b = \frac{T}{s-b}$ és $r_c = \frac{T}{s-c}$.)

Euler-egyenes
Tétel: A háromszög magasságpontja, súlypontja és körülírt körének középpontja egy egyenesre illeszkedik.
Euler igazolja 1765-ben analitikus eszközökkel.
A súlypont a másik két pont között van: azok összekötő szakaszának a körülírt kör középpontjához közelebbi harmadoló pontja.
E három nevezetes pont egyenesét Euler-egyenesnek nevezzük.
Az Euler-egyenest e három pont közül bármely kettő egyértelműen meghatározza. Szabályos háromszög esetén ez a három pont egybeesik, s ekkor nem létezik Euler-egyenes. Egyenlőszárú háromszög Euler-egyenese az alap felező merőlegesével, derékszögű háromszögé az átfogóhoz tartozó súlyvonal egyenesével esik egybe. Általános háromszög Euler-egyenese csúcsoktól különböző pontokban metszi az oldalak egyeneseit: mindhármat vagy csak kettőt. Ez utóbbi pontosan akkor lehetséges, ha a háromszögnek van olyan oldala, amelyen nyugvó két belső szög tangenseinek szorzata 3-mal egyenlő: az Euler egyenes ezzel az oldallal párhuzamos.

Feuerbach-kör (kilencpontos kör)
Tétel: A háromszög oldalainak felezőpontjai, magasságainak talppontjai és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai egy körre illeszkednek.
Ezt a kört Feuerbach-körnek (vagy kilencpontos körnek) nevezzük.
Hajós: Bevezetés a geometriába 303-304. old.
Pelle: Geometria 139-140. old.
Coxeter – Greitzer: Az újra felfedezett geometria 42-45. old.
A Feuerbach-kört a kilenc pont közül bármely három egyértelműen meghatározza: például a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai. Ebből adódik, hogy a Feuerbach-kör a háromszög körülírt körének a képe annál a középpontos hasonlóságnál, amelynek centruma a magasságpont és aránya ½, s így a Feuerbach-kör középpontja felezi a magasságpont és a körülírt kör középpontjának összekötő szakaszát, sugara pedig a körülírt kör sugarának a fele.
Történeti érdekesség, hogy Euler 1765-ben a kilenc pont közül hatot ismert: kivéve a magasságpont és a csúcsok összekötő szakaszainak felező pontjait. Az első teljes bizonyítást Poncelet adta 1821-ben. Hogy ezt a kört mégis Feuerbach-körnek nevezik, annak oka az, hogy ő 1822-ben egy újabb tulajdonsággal bővítette: A kilencpontos kör érinti a háromszög beírt körét és mindhárom hozzáírt körét.
Adott ortocentrikus pontnégyes esetén előálló négy háromszög bármelyikének Feuerbach-köre tartalmazza a másik három háromszög oldalfelező pontjait és magasságainak talppontjait is: egy

ortocentrikus pontnégyes négy háromszögének azonos a Feuerbach-köre, ami tehát összesen 16 nevezetes kört érint.

Wallace-egyenes (Simson-egyenes)
Tétel: A háromszög oldalainak egyeneseire a körülírt kör tetszőleges pontjából bocsátott merőlegesek talppontjai egy egyenesre illeszkednek.
Ezt az egyenest a tekintett ponthoz tartozó Wallace-egyenesnek nevezzük. (Tehát egy háromszögnek végtelen sok Wallace-egyenese van.)
Wallace igazolta 1797-ben, majd Simson újra felfedezte a tételt.
A háromszög egy csúcsához tartozó Wallace-egyenes a csúcson áthaladó magasságvonallal, a csúcspontnak a körülírt kör középpontjára vonatkozó tükörképéhez tartozó Wallace-egyenes pedig a csúccsal szemközti oldal egyenesével esik egybe.
Hajós: Bevezetés a geometriába 439-440. old.
Pelle: Geometria 134-135. old.
Coxeter – Greitzer: Az újra felfedezett geometria 71-73. old.
Reiman: Fejezetek az elemi geometriából 55-56. old.

Steiner – Lehmus tétel
Definició: A háromszög belső szögfelezőinek a csúcs és a szemközti oldal közötti szakaszát szögfelező szakasznak nevezzük. (Ha nem okoz félreértést, akkor ezt is szögfelezőnek!)
Segédtétel: Az *a, b, c* oldalú háromszög γ belső szögéhez tartozó szögfelező szakasznak a hossza $f_\gamma = \dfrac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}$.
A Matematika Tanítása, 2001, 4. szám, 6-9. old.
Tétel: Ha egy háromszög két belső szögfelező szakasza egyenlő hosszú, akkor ez a háromszög egyenlőszárú.
Ezt a tételt Lehmus 1840-ben küldi el Jacob Steinernek, aki arra tisztán geometriai bizonyítást ad. (A fenti segédtétel egy algebrai bizonyításhoz vezet!).

1.3. A talpponti háromszög
Definició: A hegyesszögű háromszög magasságainak talppontjai által meghatározott háromszög.
Segédtétel: A hegyesszögű háromszögből a talpponti háromszög oldalai által levágott háromszögek hasonlók az eredeti háromszöghöz.
Segédtétel: A hegyesszögű háromszög magasságvonalai felezik a talpponti háromszög belső szögeit.
Tétel: A hegyesszögű háromszög magasságpontja a talpponti háromszög beírt körének középpontja.
Coxeter – Greitzer: Az újra felfedezett geometria 37. old.

Definició: Legyen P az ABC háromszög síkjának tetszőleges pontja, és jelölje A_1, B_1, C_1 a $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesekre P-ből bocsátott merőlegesek talppontjait. Ekkor az $A_1B_1C_1$ (esetleg elfajuló) háromszöget az ABC háromszög P pontra vonatkozó általános talpponti háromszögének nevezzük.
Ha a tekintett pont egy hegyesszögű háromszög magasságpontja, akkor a fentebb már megismert talpponti háromszöghöz jutunk vissza. Ha a tekintett pont a háromszög körülírt körének a középpontjával azonos, akkor az általános talpponti háromszög csúcsai az oldalfelező pontok. Ha pedig a tekintett pont rajta van a háromszög körülírt körén, akkor az általános talpponti háromszög elfajuló: a csúcspontok egy Wallace-egyenesre illeszkednek.

Tétel: Az a, b, c oldalú ABC háromszög P pontra vonatkozó $A_1B_1C_1$ általános talpponti háromszögének oldalai $A_1B_1 = \frac{c}{2R} \cdot CP,\ B_1C_1 = \frac{a}{2R} \cdot AP,\ C_1A_1 = \frac{b}{2R} \cdot BP$, ahol R az ABC háromszög körülírt körének a sugara.

Tétel: Az ABC háromszög P pontra vonatkozó $A_1B_1C_1$ általános talpponti háromszögének a területe $t(A_1B_1C_1) = \frac{|OP^2 - R^2|}{4R^2} \cdot t(ABC)$.

$t(A_1B_1C_1) = 0 \Leftrightarrow OP = R \Leftrightarrow P \in k(ABC)$, vagyis ekkor az A_1, B_1, C_1 kollineáris pontok rajta vannak a P ponthoz tartozó Wallace-egyenesen.

Coxeter – Greitzer Az újra felfedezett geometria, 46-50. old.

A Matematika Tanítása, 2001, 5. szám 8-9. old.

1.4. Derékszögű háromszögre vonatkozó tételek (pitagoraszi tételcsoport)

Pitagorasz-tétel

- algebrai megfogalmazás: A derékszögű háromszög átfogójának négyzete egyenlő a két befogó négyzeteinek összegével.
- geometriai megfogalmazás: A derékszögű háromszög átfogója fölé rajzolt négyzet területe egyenlő a két befogó fölé rajzolt négyzet területeinek összegével.

Pitagorasz-tétel megfordítása: Ha egy háromszögnek van olyan oldala, amelynek négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetének az összegével, akkor a háromszög derékszögű és ez az oldal az átfogó.

Pitagorasz-tétel általánosítása: Ha a derékszögű háromszög oldalai fölé hasonló síkidomokat rajzolunk, akkor a befogók fölötti síkidomok területeinek az összege egyenlő az átfogó fölötti síkidom területével.

E tételnek számos további általánosítása van.

Befogótétel

- algebrai megfogalmazás: A derékszögű háromszög bármely befogója mértani közepe az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének.
- geometriai megfogalmazás: A derékszögű háromszög bármely befogója fölé rajzolt négyzet területe egyenlő annak a téglalapnak a területével, amelynek egyik oldala az átfogó és másik oldala a befogónak az átfogóra eső merőleges vetülete.

Magasságtétel

- algebrai megfogalmazás: A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága a két befogó átfogóra eső merőleges vetületeinek a mértani közepe.
- geometriai megfogalmazás: A derékszögű háromszög magassága fölé rajzolt négyzet területe egyenlő egy olyan téglalap területével, amelynek oldalai az átfogó azon két része, amelyekre az átfogót a magasság talppontja osztja.

Logikai kapcsolatok:

- a Pitagorasz-tétel és a befogótétel ekvivalens állítások
- a Pitagorasz-tételből és a befogótételből is következik a magasságtétel, de megfordítva nem, csak ha a Thalész-tételt hozzávesszük.

1.5. Általános háromszögre vonatkozó arányossági tételek

Tétel: A háromszög egy oldalának és hozzátartozó magasságának szorzata független az oldal kiválasztásától.
Hajós: Bevezetés a geometriába, 122. old.
Tétel: A háromszög bármely belső szögének felezője a szöggel szemközti oldalt két olyan részre osztja, amelyek aránya egyenlő a szöget közrefogó két oldal arányával.
Megfordítás: Ha a háromszög egy oldalát valamely belső pont az oldallal szemközti szöget közrefogó két oldal arányában osztja, akkor az oldallal szemközti szög csúcsából kiinduló és ezt a pontot tartalmazó félegyenes felezi a szóbanforgó szöget. Ugyanez jelölésekkel: Ha az ABC háromszögre $D \in \operatorname{int} \overline{AB}$ esetén $AD : DB = AC : BC$, akkor $m(ACD\angle) = m(BCD\angle)$.
Tétel: A háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja mindhárom szögfelező szakaszt két részre osztja: a csúcs melletti rész úgy aránylik a másik részhez, mint a szöget közrefogó két oldal összege a harmadik oldalhoz. (Középiskolai geom. feladatok gyűjt. I , 1258. feladat)
Tétel: Ha a háromszög valamely külső szögének felezője metszi a szöggel szemközti oldal egyenesét, akkor a metszéspontnak az oldal végpontjaitól mért távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemközti csúcsból ezekhez a végpontokhoz vezető oldalak.
Hajós: Bevezetés a geometriába, 123. old.
Ha a háromszög egyenlőszárú, akkor a szárszög bármelyik külső szögének felezője párhuzamos az alappal.

1.6. Apolloniosz - kör

Tétel: Azon pontok halmaza egy síkban, amelyeknek ezen sík két adott pontjától mért távolságainak aránya 1-től különböző adott pozitív szám, egy kör.
Definició: Ezt a kört Apolloniosz-körnek nevezzük.
A tétel szerint az Apolloniosz-kör szimmetrikus a két adott pont összekötő egyenesére, továbbá az Apolloniosz- kört egyértelműen meghatározza a két adott pont és az arány értéke: ezek ismeretében az Apolloniosz-kör megszerkeszthető. Ha a két adott pont A és B , valamint az arány értéke $m>1$, akkor az Apolloniosz-kör $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre illeszkedő $\overline{CD}$ átmérőjének végpontjaira $C \in \operatorname{int} \overline{AB}$ és $D \in \overrightarrow{AB} \setminus \overline{AB}$, miközben $AC = \frac{m}{m+1} \cdot AB$ és $AD = \frac{m}{m-1} \cdot AB$, s ennélfogva az Apolloniosz-kör sugarára $r = \frac{m}{m^2-1} \cdot AB$ teljesül.
Hajós: Bevezetés a geometriába, 124-125. old.
Coxeter: A geometriák alapjai, 100-101. old.
Feladat: Adott A és B pontok, valamint $m = 3/2$ arány esetén Apolloniosz-kör szerkesztése.