1. ELŐADÁS

2006-09-12.

http://zeus.nyf.hu/~gatgy } Gát György
gatgy@nyf.hu

Példatár: Gyemidovics: Analízis
Denkinger: Analízis (feladatgyűjtemény)
Fekete - Zalay: Többváltozós függvények

Könyv: Császár Ákos: Analízis I-II
Rimán János: Analízis
Denkinger Géza: Analízis

Metrikus terek

Def: Legyen $M \neq \emptyset$ egy halmaz, $d: M \times M \to \mathbb{R}$, a következő tulajdonságokkal:

bármely 2 pontnak pozitív távolsága van

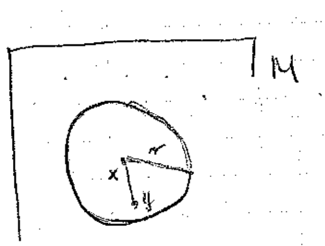
(1) $d(x,y) \geq 0$ $(x,y \in M)$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$ $(x,y \in M)$,

(2) $d(x,y) = d(y,x)$ $(x,y \in M)$,

(3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ $(x,y,z \in M)$. - háromszög-egyenlőtlenség

Ekkor az (M,d) párt metrikus térnek nevezzük. Az M halmaz a metrikus tér alaphalmaza, elemei a tér pontjai.
A $d(x,y)$ szám az x és y pontok távolsága.
A d függvény neve: metrika, távolságfüggvény.

Def: Legyen (M,d) metrikus tér, $x \in M$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Az x középpontú r sugarú nyílt gömb: $G(x,r) := \{ y \in M \mid d(x,y) < r \}$



Állítás: Legyen (M,d) metrikus tér, $x \in M$, $r>0$. Ekkor
$x \in G(x,r)$.

- a gömb tartalmazza a középpontját

Bizonyítás: $0 = d(x,x) < r$ (mert az r egy pozitív szám) $\Rightarrow x \in G(x,r)$

Állítás: Legyen (M,d) metrikus tér, $x \in M$, $s \geq r > 0$.
Ekkor

$$G(x,r) \overset{\text{részhalmaza}}{\subset} G(x,s).$$

- ha van két ugyanolyan középpontú gömböm, akkor a kisebb sugarú része a nagyobb sugarú gömbnek.

Bizonyítás: Legyen $y \in G(x,r) \Rightarrow d(x,y) < r$, $r \leq s \Rightarrow$
$d(x,y) < s$, ezért $y \in G(x,s)$. Tehát $G(x,r) \subset G(x,s)$

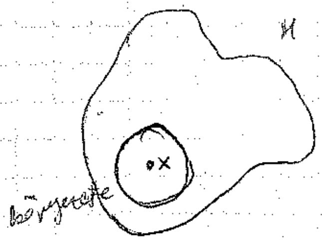
$\boxtimes$ vége a bizonyításnak

---

a nagyobb gömb sugarú részhalmaza a kisebb gömbnek ? - Feladat

---

Def: Legyen (M,d) metrikus tér, $H \subset M$, $x \in M$. Azt mondjuk, hogy a H halmaz környezete az x pontnak, ha $\exists\, r>0$, hogy $G(x,r) \subset H$.

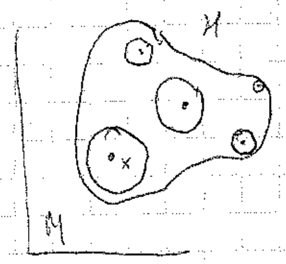


Állítás: Legyen (M,d) metrikus tér, $H \subset M$, $x \in M$, a H halmaz környezete az x pontnak. Ekkor $x \in H$.

Bizonyítás: Mivel H környezete x-nek, így $\exists\, r>0$, hogy $G(x,r) \subset H$. (ezt mondja ki a környezet definíciója)
Továbbá $x \in G(x,r) \Rightarrow x \in H$.
ez volt az első állítás

$\boxtimes$

Def: Legyen (M, d) metrikus tér, $H \subset M$: ezt mondjuk, hogy a H halmaz nyílt, ha bármely elemének környezete.
azaz $\forall x \in H$ esetén $\exists\, r_x > 0$, hogy $G(x, r_x) \subset H$.
(függ az x-től)



Példák metrikus terre:

(1) $M = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$

(2) $M \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz, $x, y \in M$ esetén:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq y \\ 0, & \text{ha } x = y \end{cases}$$

$\boxed{\text{Biz - HF}}$

Mik a gömbök?

(a) $0 < r \leq 1$, $x \in M$

$G(x, r) = \{x\}$.

(b) $1 < r$, $x \in M$

$G(x, r) = M$. diszkrét metrikus tér

Mik lesznek itt a nyílt halmazok?

Legyen $H \subset M$ tetszőleges, $x \in H$.

Ekkor $G(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \subset H$

Tehát H nyílt, azaz a diszkrét metrikus tér bármely részhalmaza nyílt.

Gyakorlat

Taxis metrika

(3) $M: \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2) \in M$ esetén

$$d(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$$

| HF - belátni, hogy ez metrika |

2. ELŐADÁS

2006.09.19.

A nyílt halmazok tulajdonságai:

Állítás: (M,d) metrikus tér. Ekkor:

(1) $\emptyset$, M nyílt
(2) (tetszőleges) nyílt halmazok uniója nyílt,
(3) véges sok nyílt halmaz metszete nyílt

Bizonyítás: (1) nyilvánvaló
(2) Legyen $G_i \subset M$ ($i \in I$, I az indexek halmaza) nyílt

$$G = \bigcup_{i\in I} G_i$$

Legyen $x \in G = \bigcup_{i\in I} G_i \Rightarrow \exists\, i \in I$, hogy $x \in G_i$

Mivel G_i nyílt, ezért $\exists\, r>0$, hogy $G(x,r) \subset G_i \subset G$

Tehát $G(x,r) \in G$.

Azaz G nyílt. ☒

(3) Legyen $G_1, G_2, \ldots, G_n \subset M$ nyílt, $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$

Legyen $x \in G$. Ezért $x \in G_i$ $(i=1,\ldots,n) \Rightarrow$

mivel G_i nyílt így $\exists\, r_i > 0$, hogy $G(x, r_i) \subset G_i$
$(i=1,\ldots,n)$

$r := \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} > 0$.

$\Rightarrow 0 < r \leq r_i \quad (i=1,\dots,n)$. Ezért $G(x,r) \subset G(x,r_i) \quad (i=1,\dots,n)$

$G(x,r_i) \subset G_i \quad (i=1,\dots,n)$ így $G(x,r) \subset G_i \quad (i=1,\dots,n) \Rightarrow$

$G(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i = G$, azaz G nyílt. (3) kész

$\boxtimes$

Definíció: (M,d) metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $F \subset M$ halmaz zárt, ha $M \setminus F$ nyílt.

Állítás: (M,d) metrikus tér. Ekkor:

(1) $\emptyset, M$ zárt

(2) (tetszőleges) ~~nyílt~~ zárt halmazok metszete zárt

(3) véges sok zárt halmaz uniója zárt.

Bizonyítás:

(1) nyilvánvaló, mert $\emptyset = M \setminus M$, $M = M \setminus \emptyset$ ($M, \emptyset$ nyílt)

(2) Legyen $F_i \subset M$ ($i \in I$, I az indexek halmaza) zárt

$\Rightarrow M \setminus F_i$ nyílt ($i \in I$). Így $\bigcup_{i \in I} (M \setminus F_i)$ nyílt $\Rightarrow$

$M \setminus \bigcup_{i \in I} (M \setminus F_i) = \bigcap_{i \in I} F_i$ zárt. (2) igazolva

De Morgan-azonosság

(3) Legyen $F_1, \dots, F_n \subset M$ zárt $\Rightarrow M \setminus F_1, \dots, M \setminus F_n$ nyílt.

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} (M \setminus F_i)$ nyílt, így ennek a komplementere zárt:

$M \setminus \bigcap_{i=1}^{n} (M \setminus F_i) = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ zárt (3) is kész

$\boxtimes$

Torlódási pont

Definíció: (M,d) metrikus tér, $x \in M$, $H \subset M$. Ezt mondjuk, hogy az x pont torlódási pontja a H halmaznak, ha $\forall r>0$ esetén

1 $[G(x,r) \setminus \{x\}] \cap H \neq \emptyset$ (azaz $G(x,r)$-ben van x-től különböző H-beli pont).

2 (~~Állít~~)

Jelölés: A H halmaz torlódási pontjainak halmazát jelölje H'.

Állítás: (M,d) metrikus tér, $x \in M$, $H \subset M$. Ekkor:

$x \in H' \iff \forall r>0$ esetén $G(x,r)$-ben végtelen sok eleme van a H halmaznak.

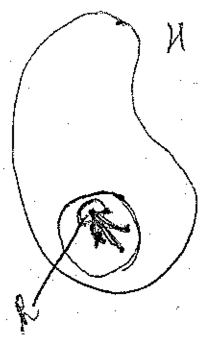
Bizonyítás: $\Leftarrow$ triviális

$\Rightarrow$ (ha van egy x pont, ami torlódási pont, azt kell belátni, ha az x köré teszek egy gömböt, abba végtelen sok H-beli pont van)

Legyen x eleme H', $r>0$. Igazolni kell, hogy $G(x,r)$-ben végtelen sok H-beli pont van. Indirekten tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz csak véges sok H-beli pont van $G(x,r)$-ben. Ezek $h_1, \dots, h_n$.

$$\tilde{r} = \frac{1}{2} \min \{ d(x,h_i) \mid h_i \neq x,\ i=1,\dots,n \} > 0$$

Lehet-e $G(x,\tilde{r})$-ben x-től különböző H-beli pont? Kellene, mert $x \in H'$. Legyen ez $h \in H$, $h \neq x$, $h \in G(x,\tilde{r})$



$h \in G(x,\tilde{r}) \subset G(x,r)$. $G(x,r)$-ben csak a $h_1,\dots,h_n$ H-beli pont van, így $\exists i \in \{1,\dots,n\}$, hogy $h = h_i$.
Mivel $h \in G(x,\tilde{r})$ így $x \neq h$.

(1) $0 < d(x,h) < \tilde{r} = \frac{1}{2}\min\{ d(x,h_i) \mid h_i \neq x,\ i=1,\dots,n \}$

Mivel $h = h_i$ így $d(x,h) = d(x,h_i)$. Azaz (1) $\Rightarrow$

$$0 < d(x,h_i) < \frac{1}{2}\min\{d(x,h_i) \mid h_i \neq x,\ i = 1,\dots,n\} / 2$$

Ez ellentmondás, azaz mégiscsak $G(x,r)$-ben végtelen sok H-beli pont van.

$\boxtimes$

Állítás: (M,d) metrikus tér, $H \subset M$. A H halmaz zárt $\Leftrightarrow H' \subset H$

(Egy halmaz pontosan akkor zárt, ha tartalmazza a torlódási pontjait.)

Bizonyítás: $\Rightarrow$ Legyen H zárt. Azt kell belátni, hogy $H' \subset H$.

Indirekten tegyük fel, hogy nem igaz ez.

Azaz, $\exists\ h \in H'$, hogy $h \notin H$.

Mivel H zárt, így $M \setminus H$ nyílt, $h \in M \setminus H$.

Ezért $\exists\ r > 0$, hogy $G(h,r) \subset M \setminus H$, azaz $G(h,r)$-ben egy H-beli pont sincs, ami ellentmond ~~[illegible]~~ $h \in H'$-nek.

Tehát mégiscsak $H' \subset H$.

$\Rightarrow$ igazolva van.

$\Leftarrow$ Tegyük fel, hogy $H' \subset H$. Be kell látni, hogy H zárt.

Indirekten tegyük fel, hogy H nem zárt, $\Rightarrow M \setminus H$ nem nyílt.

(nem minden pontjának környezete)

Ezért $\exists\ x \in M \setminus H$, hogy $\forall\ r > 0$ esetén $G(x,r) \not\subset M \setminus H$.

(ez a nyíltság tagadása)

$\Rightarrow \exists\ h \in H$, amely $h \in G(x,r)$. Persze $h \neq x$ (mert $x \in M \setminus H$)

Azaz $G(x,r)$-ben van x-től különböző H-beli pont. $\Rightarrow x \in H'$

Mivel $H' \subset H$, így $x \in H$. Ez ellentmond $x \in M \setminus H$-nak.

Azaz, H mégis zárt.

$\Leftarrow$ igazolva

$\boxtimes$

Állítás: (M,d) metrikus tér:

(1) $H \subset K \subset M \Rightarrow H' \subset K'$,

(2) $(H')' \subset H'$ $(H \subset M)$

(3) $(H \cup K)' = H' \cup K'$ $(H, K \subset M)$,

(4) $(H \cap K)' \subset H' \cap K'$ $(H, K \subset M)$

Bizonyítás:

(1) Legyen $x \in H'$, $r > 0$. Ekkor $G(x,r)$-ben végtelen sok H-beli pont van, H-beli pont az K-beli is mert $(H \subset K)$. Így $G(x,r)$-ben végtelen sok K-beli pont van.
$\Rightarrow x \in K'$, azaz $H' \subset K'$. (1) igazolva.

(4) $\left.\begin{array}{l} H \cap K \subset H \Rightarrow^{(1)} (H \cap K)' \subset H', \\ H \cap K \subset K \Rightarrow^{(1)} (H \cap K)' \subset K' \end{array}\right\} \Rightarrow (H \cap K)' \subset H' \cap K'$

(4) igazolva

| H és K a metszet torlódási pontjainak halmaza, nem egyezik meg a két halmaz

0,1 1,2 ∅ ∅

(3) $\left.\begin{array}{l} H \subset H \cup K \Rightarrow^{(1)} H' \subset (H \cup K)' \\ K \subset H \cup K \Rightarrow^{(1)} K' \subset (H \cup K)' \end{array}\right\} \Rightarrow H' \cup K' \subset (H \cup K)'$

Másodszor belátjuk, hogy $(H \cup K)' \subset H' \cup K'$.
Indirekten tegyük fel, hogy van olyan $x \in (H \cup K)'$, hogy $x \notin H' \cup K' \Leftrightarrow$

(a) $x \notin H'$ ezért $\exists\, r > 0$, hogy $G(x,r)$-ben véges sok H-beli pont van

(b) $x \notin K'$ ezért $\exists\, s > 0$, hogy $G(x,s)$-ben véges sok K-beli pont van.

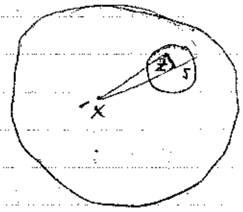
Legyen $t = \min\{r, s\} > 0$ (két pozitív szám minimuma pozitív)
$G(x,t) \subset G(x,r)$, azaz $G(x,t)$-ben végtelen sok H-beli, $G(x,t) \subset G(x,s)$ miatt $G(x,t)$-ben végtelen sok K-beli pont van. $\Rightarrow$ $G(x,t)$-ben végtelen sok $H \cup K$-beli pont van. Ez ellentmond $x \in (H \cup K)'$-nak.
Ezzel igazoltuk, hogy $(H \cup K)' \subset H' \cup K'$.
(3) igazolva.

3. ELŐADÁS

2006.09.26.

Állítás: (M, d) metrikus tér, $x \in M$, $r > 0$. Ekkor $G(x,r)$ nyílt halmaz.

Bizonyítás: Legyen $y \in G(x,r)$, $s := \frac{r - d(x,y)}{2} > 0$, mert $d(x,y) < r$.
Belátjuk, hogy $G(y,s) \subset G(x,r)$



Legyen $z \in G(y,s)$. $\Rightarrow d(y,z) < s$.
Alkalmazzuk a háromszög egyenlőtlenséget.

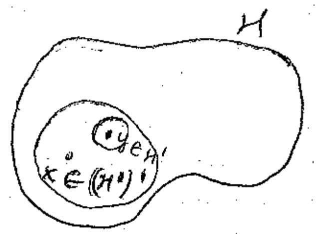
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + s$$

$$= d(x,y) + \frac{r - d(x,y)}{2} = \frac{r + d(x,y)}{2} < \frac{r + r}{2} = r$$

$\Rightarrow z \in G(x,r)$
Ezért $G(y,s) \subset G(x,r)$. Tehát $G(x,r)$ nyílt.

$\boxtimes$

<u>Állítás</u>: (M,d) metrikus tér, $H \subset M$. Ekkor $(H')' \subset H'$.



<u>Bizonyítás</u>: Legyen $x \in (H')'$. Be kell látni, hogy $x \in H'$, azaz $\forall\, r > 0$ esetén $G(x,r)$-ben végtelen sok H-beli pont van.

Mivel x torlódási pontja a H' halmaznak, ezért $G(x,r)$-ben végtelen sok H'-beli pont van. Ezért legyen y egy ilyen. Azaz $y \in G(x,r)$, $y \in H'$.

$G(x,r)$ nyílt $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$, hogy $G(y,\delta) \subset G(x,r)$.

$y \in H'$, ezért $G(y,\delta)$-ben végtelen sok H-beli pont van.

Mivel $G(y,\delta) \subset G(x,r)$, így $G(x,r)$-ben is végtelen sok H-beli pont van. Ezért $x \in H'$. Azaz $(H')' \subset H'$.

$\boxtimes$

<u>Definíció</u>: (M,d) metrikus tér. A $H \subset M$ halmaz belső pontjainak a halmaza.

$$\mathrm{int}(H) := \{x \in M \mid \exists\, r > 0,\ \text{hogy } G(x,r) \subset H\}.$$

<u>Állítás</u>: (M,d) metrikus tér. Ekkor

(1) $A \subset B \subset M$ esetén $\mathrm{int}(A) \subset \mathrm{int}(B)$,

(2) $\mathrm{int}(A)$ nyílt halmaz $(A \subset M)$,

(3) $\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(A)$ $(A \subset M)$,

(4) $\mathrm{int}(A) \subset A$ $(A \subset M)$

(5) $\mathrm{int}(A) = A \iff A$ nyílt $(A \subset M)$,

HF (6) $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$ $(A, B \subset M)$,

HF (7) $\mathrm{int}(A \cup B) \supset \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$ $(A, B \subset M)$,

(8) $\mathrm{int}(A) = \bigcup\limits_{\substack{G \subset A, \\ G \text{ nyílt}}} G \qquad (A \subset M)$

(9) $\mathrm{int}(A)$ a legbővebb nyílt halmaz, ~~(nyel)~~ melyet A tartalmaz $(A \subset M)$

Bizonyítás:

(1) Legyen $x \in \mathrm{int}(A) \Rightarrow \exists\, r > 0$, hogy $G(x,r) \subset A$.
Mivel $A \subset B$, így $G(x,r) \subset B$. Ezért $x \in \mathrm{int}(B)$

(4) Legyen $x \in \mathrm{int}(A) \Rightarrow \exists\, r > 0$, hogy $G(x,r) \subset A$.
Mivel $x \in G(x,r)$, így $x \in A$.
Tehát $\mathrm{int}(A) \subset A$. (4) kész.

(2) Legyen $x \in \mathrm{int}(A) \Rightarrow \exists\, r > 0$, hogy $G(x,r) \subset A$.
Be fogjuk látni, hogy $G(x,r)$ minden eleme belső pontja A-nak, azaz $G(x,r) \subset \mathrm{int}(A)$.
Legyen $y \in G(x,r)$. Mivel $G(x,r)$ nyílt, így $\exists\, s > 0$, hogy $G(y,s) \subset G(x,r)$. $G(x,r) \subset A \Rightarrow G(y,s) \subset A$.
Tehát $y \in \mathrm{int}(A)$, így $G(x,r) \subset \mathrm{int}(A)$.
Mivel $\mathrm{int}(A)$ környezete a tetszőlegesen választott x elemének, így $\mathrm{int}(A)$ nyílt. (2) igazolva.

(5) $\Rightarrow$ Következménye (2)-nek

$\Leftarrow$ Legyen A nyílt
(4) szerint $\mathrm{int}(A) \subset A$, így már csak az kellene, hogy $A \subset \mathrm{int}(A)$.

Legyen $x \in A$. Mivel A nyílt, így minden elemének környezete, azaz $\exists\, r > 0$, hogy $G(x,r) \subset A$.
$\Rightarrow x \in \mathrm{int}(A)$. Tehát $A \subset \mathrm{int}(A)$, azaz $A = \mathrm{int}(A)$
(5) kész.

(3) (2) szerint int(A) nyílt, így (5) szerint megegyezik a belső pontjainak a halmazával, azaz
$\mathrm{int}(A) = \mathrm{int}(\mathrm{int}(A))$. (3) igazolva.

(8) Legyen $G \subset A$, G nyílt. Ekkor $G = \mathrm{int}(G)$ (5) miatt.
Így (1) következtében, $G = \mathrm{int}(G) \subset \mathrm{int}(A)$.
$\bigcup_{\substack{G \subset A \\ G \text{ nyílt}}} G \subset \mathrm{int}(A)$, mert az unió összes tagja része $\mathrm{int}(A)$-nak.
Másrészt $\mathrm{int}(A) \subset A$ és nyílt (lásd (1), (2)), azaz $\mathrm{int}(A)$ éppen az unió valamelyik tagja. Így az unió tartalmazza az $\mathrm{int}(A)$ halmazt.

$\bigcup_{\substack{G \subset A \\ G \text{ nyílt}}} G \supset \mathrm{int}(A)$. Tehát $\mathrm{int}(A) = \bigcup_{\substack{G \subset A \\ G \text{ nyílt}}} G$. (8) kész.

(9) $\mathrm{int}(A)$ tényleg nyílt, de miért a legbővebb?
Legyen $G \subset A$, G nyílt.

$G \subset \bigcup_{\substack{G \subset A \\ G \text{ nyílt}}} G = \mathrm{int}(A)$ (8) következtében.

Azaz tényleg $\mathrm{int}(A)$ a legbővebb. (9) kész.

Definíció: (M, d) metrikus tér. A $H \subset M$ halmaz külső pontjainak a halmaza:
$$\mathrm{ext}(H) := \{x \in M \mid \exists\, r > 0, \text{ hogy } G(x, r) \subset M \setminus H\}.$$

Definíció: (M, d) metrikus tér. A $H \subset M$ halmaz határpontjainak a halmaza:
$$\mathrm{mar}(H) := \{x \in M \mid \forall\, r > 0 \text{ esetén } G(x, r)\text{-ben van } H \text{ és } M \setminus H \text{ beli pont is}\}.$$

Állítás: (M, d) metrikus tér, $H \subset M \Rightarrow$

(1) $\mathrm{int}(H)$, $\mathrm{mar}(H)$, $\mathrm{ext}(H)$ páronként diszjunktak

(2) $M = \mathrm{int}(H) \cup \mathrm{mar}(H) \cup \mathrm{ext}(H)$

(3) $\mathrm{int}(H)$, $\mathrm{ext}(H)$ nyílt, $\mathrm{mar}(H)$ zárt.

nyílt halmaz komplementere zárt

Definíció: (M, d) metrikus tér. A $H \subset M$ halmaz lezárása:

$$[H] := H \cup H'.$$

Állítás: (M, d) metrikus tér

(1) $H \subset [H]$ $(H \subset M)$, HF

(2) $H \subset K \subset M \Rightarrow [H] \subset [K]$, HF $(H' \subset K')$

(3) $[[H]] = [H]$ $(H \subset M)$,

(4) $[H \cap K] \subset [H] \cap [K]$ $(H, K \subset M)$, HF

(5) $[H \cup K] = [H] \cup [K]$ $(H, K \subset M)$,

(6) $H \subset M$ zárt $\Leftrightarrow$ $H = [H]$,

(7) $[H]$ zárt halmaz $(H \subset M)$,

(8) $[H] = \bigcap\limits_{\substack{H \subset K \\ K \text{ zárt}}} K$ $(H \subset M)$,

(9) $[H]$ a legszűkebb H halmazt tartalmazó zárt halmaz.

Bizonyítás:

(3) $[H] \subset [[H]]$ (1) miatt. Másrészt

$$[[H]] = [H] \cup [H]' = H \cup H' \cup (H \cup H')' = H \cup H' \cup H' \cup (H')'$$

$$\subset H \cup H' \cup H' \cup H' = H \cup H' = [H].$$

Tehát $[[H]] = [H]$

(3) igazolva.

(5) $H \subset H \cup K \Rightarrow H' \subset (H \cup K)' = H' \cup K'$

Ezért

$[H] = H \cup H' \subset H \cup K \cup (H \cup K)' = [H \cup K]$

Ugyanígy

$[K] \in [H \cup K] \Rightarrow [H] \cup [K] \subset [H \cup K]$

Másrészt $[H \cup K] = H \cup K \cup (H \cup K)' = H \cup K \cup H' \cup K' =$

$= H \cup H' \cup K \cup K' = [H] \cup [K]$

(5) kész.

(4) Volt egy állítás, mely szerint egy halmaz pontosan akkor zárt, ha tartalmazza a torlódási pontjait.

Kellene:

$$[H] \supset [H]' = (H \cup H')'$$

De, $(H \cup H')' \underset{\substack{\text{additív} \\ \text{operátor}}}{=} H' \cup (H')' \subset H' \cup H' = H' \subset H \cup H' = [H]$

(7) igazolva

(6) Ha $H = [H]$, akkor persze hogy H zárt (7) miatt.

~~Ha egy~~ Ha H zárt, akkor $H' \subset H$.

$\Rightarrow [H] = H \cup H' \subset H \cup H = H$.

És (1) miatt $H \subset [H]$. Azaz, $H = [H]$. (6) kész

(8) Ha K olyan zárt halmaz, hogy $K \supset H$.

$\Rightarrow [K] \supset [H]$ (2) miatt, és $K = [K]$ (6) miatt.

Tehát $K \supset [H]$. Ezért $\bigcap_{\substack{H \subset K \\ K \text{ zárt}}} K \supset [H]$

Fordítva $[H]$ egy olyan zárt halmaz (7) miatt, amely tartalmazza a H halmazt (1), ezért $[H]$ a metszet egyik tagja. Ezért a metszet csak szűkebb lehet, így $\bigcap_{\substack{H \subset K \\ K \text{ zárt}}} K \subset [H]$.

...hát $\bigcap_{\substack{H \subset K,\\ K \text{ zárt}}} K = [H]$ (8) igazolva

...ezt, hogy $[H]$ zárt (7) ; azt, hogy tartalmazza (1) mondja ki, így csak az kellene, hogy a legszűkebb.
Legyen F ilyen, azaz $H \subset F$, F zárt.
Ekkor F egy olyan halmaz, amely a $\bigcap_{\substack{H \subset K\\ K \text{ zárt}}} K$ metszetben szerepel, ezért a metszet csak szűkebb lehet. $\Rightarrow$

$[H] = \bigcap_{\substack{H \subset K\\ K \text{ zárt}}} K \subset F$, azaz $[H]$ tényleg a legszűkebb H-t tartalmazó zárt halmaz.

(9) kész.

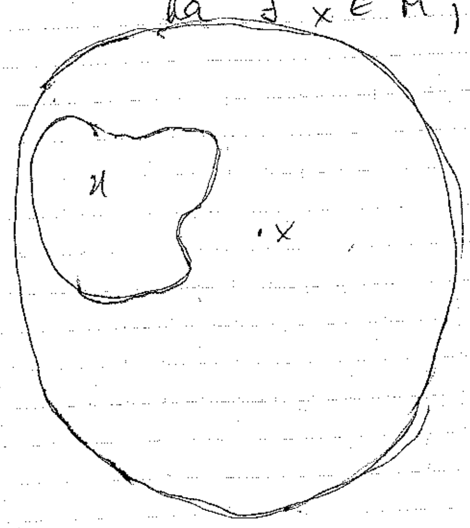
...efiníció: (M, d) metrikus tér. Azt mondjuk, hogy a $K \subset M$ halmaz kompakt, ha bármely

$K \subset \bigcup_{i \in I} G_i$, $G_i \subset M$ nyílt ($i \in I$, I az indexek halmaza)

esetén van véges sok $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$, hogy $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_{i_j}$

...egjegyzés: K-■ halmazt kompaktnak nevezzük, ha bármely K halmazt lefedő nyílt halmazok uniójából kiválasztható véges sok, melyek uniója még mindig lefedi a K-t.

Definíció: (M,d) metrikus tér. A $H\subset M$ halmaz korlátos, ha $\exists\, x\in M,\ r>0$, hogy $H\subset G(x,r)$.



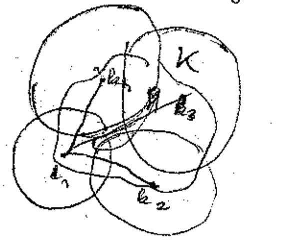
Állítás: (M,d) metrikus tér, $K\subset M$ kompakt $\Rightarrow$ K korlátos és zárt. (visszafelé nem igaz minden esetben)

Bizonyítás: "korlátos"

Vegyük őket:

$K\subset \bigcup_{k\in K} G(k,1)$ — A K kompakt, ezért van véges

(az elem középpontja a gömbnek)



sok $k_1,\dots,k_n\in K$, hogy $K\subset \bigcup_{i=1}^{n} G(k_i,1)$

Legyen $r:=2+\max\{d(k_1,k_i)\mid i=1,2,\dots,n\}$

Belátjuk, hogy $K\subset G(k_1,r)$.

Legyen $k\in K$. Mivel $K\subset \bigcup_{i=1}^{n} G(k_i,1)$, ezért

$k\in \bigcup_{i=1}^{n} G(k_i,1) \Rightarrow \exists\, i\in\{1,\dots,n\}$, hogy $k\in G(k_i,1)$,

azaz $d(k_i,k)<1$.

Alkalmazzuk a háromszög egyenlőtlenséget:

$d(k_1,k)\le d(k_1,k_i)+d(k_i,k)\le \max\{d(k_1,k_i)\mid i=1,\dots,n\}+1<r$

Tehát $k\in G(k_1,r)$. $\Rightarrow$ $K\subset G(k_1,r)$, azaz K korlátos.

ELŐADÁS

2006.10.10.

<u>llítás</u>: (M,d) metrikus tér, $K \subset M$ kompakt $\Rightarrow$ K zárt

<u>zonyítás</u>. Indirekten tegyük fel, hogy K nem zárt. Ekkor $K' \not\subset K$.
azaz, van olyan $x \in K'$, hogy $x \notin K$.
Vegyük ezt:

$$K \subset \bigcup_{k \in K} G\left(k, \tfrac{1}{2} d(k,x)\right).$$ (ez egy eltérő pozitív sugár, mert $k \in K$, de $x \notin K$)

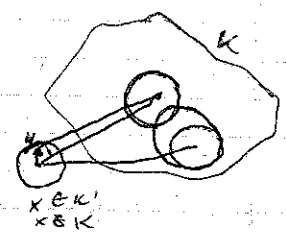
K kompakt, ezért $\exists\, k_1, \dots, k_n \in K$, hogy

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} G\left(k_i, \tfrac{1}{2} d(k_i,x)\right).$$

Legyen $r := \frac{1}{4} \min\{ d(k_i,x) \mid i = 1, \dots, n\} > 0$. mert van véges sok pozitív szám, amelynek a min. pozitív.

elátjuk, hogy $G(x,r) \cap G\left(k_i, \frac{1}{2} d(k_i,x)\right) = \emptyset \quad (i = 1,2,\dots,n)$

egyen $y \in G(x,r)$, azaz $d(x,y) < r$ és
$y \in G\left(k_i, \frac{1}{2} d(k_i,x)\right)$, azaz $d(k_i,y) < \frac{1}{2} d(k_i,x)$ valamely $i \in \{1,\dots,n\}$-re.



lkalmazzuk a háromszögegyenlőtlenséget:

$d(k_i,x) \le d(k_i,y) + d(y,x) < \frac{1}{2} d(k_i,x) + r \Rightarrow$

$\frac{1}{2} d(k_i,x) < r = \frac{1}{4} \min\{ d(k_i,x) \mid i = 1,\dots,n\}$. Ez lehetetlen.

zaz $G(x,r) \cap G\left(k_i, \frac{1}{2} d(k_i,x)\right) = \emptyset \quad (i = 1,2,\dots,n)$

$\Rightarrow$ vessük össze a gömbjeink uniójával

$$G(x,r) \cap \bigcup_{i=1}^{n} G\left(k_i, \tfrac{1}{2} d(k_i,x)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left[G(x,r) \cap G\left(k_i, \tfrac{1}{2} d(k_i,x)\right)\right]$$

$$G(x,r) \cap K \subset G(x,r) \cap \bigcup_{i=1}^{n} G\left(k_i, \tfrac{1}{2} d(k_i,x)\right) = \emptyset.$$

gy $G(x,r) \cap K = \emptyset$.

z ellentmond annak, hogy $x \in K'$.

hát K mégis zárt.

◁ kész

Példa olyan metrikus térre, amelyben van olyan halmaz, amely korlátos és zárt, de nem kompakt.

Legyen az alaphalmaz $\mathbb{N}$, a metrika a diszkrét.

$\mathbb{N} \subset G(1,2)$, ezért $\mathbb{N}$ korlátos. $\mathbb{N}$ zárt, mert a diszkrét metrikus térben minden részhalmaz zárt.

$\mathbb{N}$ nem kompakt, mert

$\mathbb{N} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G(n, \frac{1}{2})$. De ezek közül nem választható ki véges sok úgy, hogy uniójuk lefedje az $\mathbb{N}$ halmazt. Tehát $\mathbb{N}$ nem kompakt.

Állítás: Legyen (M, d) metrikus tér, $F \subset K \subset M$, F zárt, K kompakt. Ekkor F kompakt.

Bizonyítás: Legyen $F \subset \bigcup_{i \in I} G_i$, G_i nyílt ($i \in I$, I az indexek halmaza)

Vegyük észre:

$K \subset M = (M \setminus F) \cup F \subset (M \setminus F) \bigcup_{i \in I} G_i$. Mivel K kompakt, így kiválasztható az $M \setminus F$, G_i $(i \in I)$ nyílt halmazok közül véges sok, mondjuk $i_1, \dots, i_n \in I$, hogy

$K \subset (M \setminus F) \cup \bigcup_{j=1}^{n} G_{i_j}$.

$F \subset K \rightarrow$

$F \subset (M \setminus F) \cup \bigcup_{j=1}^{n} G_{i_j}$. Így

$F \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_{i_j}$. Tehát F kompakt. $\boxtimes$

Sorozatok

Definíció: (M, d) metrikus tér, $a: \mathbb{N} \to M$. Az a függvényt metrikus térbeli sorozatnak nevezzük.

Jelölés: $a(n) = a_n$ a sorozat n-edik tagja. $a = (a_n) = \langle a_n \rangle$

Definíció: (M, d) metrikus tér, az $\langle a_n \rangle$ metrikus térbeli sorozat korlátos, ha a $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaz korlátos.

Definíció: (M, d) metrikus tér, az $\langle a_n \rangle$ metrikus térbeli sorozat konvergens, ha $\exists\, a \in M$, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(a_n, a) < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, $a_n \to a$.

Metrikus térbeli sorozat torlódási pontja

Definíció: (M, d) metrikus tér, az $\langle a_n \rangle$ metrikus térbeli sorozatnak az $a \in M$ pont torlódási pontja, ha $\forall\, r > 0$ esetén a $G(a, r)$ gömbben végtelen sok eleme van az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak.

Definíció: (M, d) m. t., az $\langle a_n \rangle$ m. t. sorozat Cauchy, ha $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n, m \geq n_0$, $n, m \in \mathbb{N}$ esetén $d(a_n, a_m) < \varepsilon$.

1. **Állítás:** (M, d) metrikus tér. $\langle a_n \rangle$ konvergens. Ekkor $\langle a_n \rangle$ Cauchy.
2. **Állítás:** (M, d) metrikus tér. $\langle a_n \rangle$ Cauchy. Ekkor $\langle a_n \rangle$ korlátos.
3. **Állítás:** (M, d) metrikus tér. $\langle a_n \rangle$ Cauchy. Ekkor az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak legfeljebb egy torlódási pontja van.
4. **Állítás:** (M, d) metrikus tér. $a_n \to a \in M$. Ekkor az $a \in M$ pont ~~határérték~~ torlódási pontja az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak.

a határérték torlódási pont

$\boxed{HF}$

Szigorlat

1. ZH

$\langle a_n \rangle$ konvergens, így $\exists\, a \in M$, hogy $a_n \to a$.

Legyen $\varepsilon > 0$.

Mivel $a_n \to a$, így $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Legyen $n, m \geq n_0$, $n, m \in \mathbb{N}$. Ekkor:

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tehát $\langle a_n \rangle$ Cauchy. 1. állítás igazolva.

HF m.t.-ben sorozat, ami Cauchy, de nem konvergens.

$\mathbb{Q}$ távolság: a különbség abszolútértéke

$\downarrow$ alaphalmaz

(2. állítás): Legyen $\varepsilon = 1$. Mivel $\langle a_n \rangle$ Cauchy, így $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n, m \geq n_0$, $n, m \in \mathbb{N}$ $d(a_n, a_m) < 1$.

$$r := \max\{ d(a_{n_0}, a_n) \mid n = 1, 2, \dots, n_0 \} + 1$$

Belátjuk, hogy $\forall\, k \in \mathbb{N}$ esetén $a_k \in G(a_{n_0}, r)$, azaz $\langle a_n \rangle$ korlátos.

(1) $k \leq n_0 \Rightarrow d(a_{n_0}, a_k) \leq \max\{ d(a_{n_0}, a_n) \mid n = 1, \dots, n_0 \} < r$

$\Rightarrow a_k \in G(a_{n_0}, r)$

(2) $k > n_0 \Rightarrow d(a_{n_0}, a_k) < 1 \leq r. \Rightarrow a_k \in G(a_{n_0}, r)$

$\boxtimes$

(3) (állítás) Legyen $\langle a_n \rangle$ Cauchy sorozat, és indirekten tegyük fel, hogy $\exists\, x \neq y$ két torlódási pontja.

$r = \frac{d(x, y)}{4} > 0$. Mivel $\langle a_n \rangle$ Cauchy, így $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n, m \geq n_0$, $d(a_n, a_m) < r$.

x torlódási pont, így $G(x,r)$ gömbben végtelen sok eleme van az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak. Így van olyan is, amelynek az indexe nagyobb, mint n_0, legyen ez a_n.
azaz $a_n \in G(x,r)$, $n > n_0$.

y torlódási pont, így $G(y,r)$ gömbben végtelen sok eleme van az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak. Így van olyan is, melynek az indexe nagyobb, mint n_0, legyen ez a_m.
azaz $a_m \in G(y,r)$, $m > n_0$.

$a_n \in G(x,r) \Rightarrow d(x,a_n) < r$,
$a_m \in G(y,r) \Rightarrow d(y,a_m) < r$.
Mivel $n,m > n_0$, így $d(a_n,a_m) < r$.
Alkalmazzuk a háromszög egyenlőtlenséget.

$$4r = d(x,y) \leq d(x,a_m) + d(a_m,y) \leq d(x,a_n) + d(a_n,a_m) + d(a_m,y) <$$

$$< r + r + r = 3r$$

Ez ellentmondás.

$\boxtimes$

Függvények

Definíció: (M,d) metrikus tér, $f: A \subset M \to \mathbb{R}$ folytonos az $x_0 \in A$ pontban, ha $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ x \in G(x_0,\delta) \cap A$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
(itt van értelmezve a fv, csak annak vegyük ki pontjait)

(folytonosság, ha nagyon kicsi a távolság, akkor a fv. értékek különbsége is kicsi)

Definíció: (M,d) metrikus tér. $f: A \subset M \to \mathbb{R}$ folytonos az A halmazon, ha annak minden pontjában folytonos.

Definíció: (M,d) m. t., $f: A \subset M \to \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos az A halmazon, ha $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ x,y \in A$, $d(x,y) < \delta$, $\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Állítás: (M, d) m. t., $f: A \subset M \to \mathbb{R}$ folytonos az A kompakt halmazon. Ekkor f ~~(A)~~ egyenletesen folytonos az A halmazon.

/ approximálni = közelíteni, függvénytáblázat /
az egyenletesen folytonos függvényekre lehet táblázatokat készíteni

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$, $x \in A$. Mivel f folytonos x-ben $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, \delta_x > 0$, hogy $\forall\, y \in G(x, \delta_x) \cap A$ esetén $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Vegyük ezt:
$A \subset \bigcup_{x \in A} G(x, \frac{1}{2}\delta_x)$. ($\delta_x$ pozitív, akkor a fele is pozitív, tehát a gömb létezik)

(az A halmaz le van fedve nyílt gömbök uniójával)

Mivel A kompakt, ezért van véges sok $x_1, x_2, x_n \in A$, hogy $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} G(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i})$.

Legyen $\delta := \min\{\frac{1}{2}\delta_{x_i} \mid i = 1, \dots, n\} > 0$.
Legyen $x, y \in A$, $d(x, y) < \delta$. Mivel $x \in A \subset \bigcup_{i=1}^{n} G(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i})$, így $\exists\, i \in \{1, \dots, n\}$, hogy $x \in G(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i}) \subset G(x_i, \delta_{x_i}) \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$d(x_i, y) \leq d(x_i, x) + d(x, y) < \frac{1}{2}\delta_{x_i} + \delta = \frac{1}{2}\delta_{x_i} + \min\{\frac{1}{2}\delta_{x_i} \mid i = 1, \dots, n\} \leq \delta_{x_i}$.

Azaz $y \in G(x_i, \delta_{x_i}) \cap A$, ezért $|f(x_i) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tehát, $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\boxtimes$

Definíció: (M, d) metrikus tér, $f: A \subset M \to \mathbb{R}$ határértéke az $x_0 \in A'$ pontban az $y_0 \in \mathbb{R}$, ha $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ x \in [G(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}] \cap A$ esetén $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

jelölés: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0, \\ x \in A}} f(x) = y_0$

Átviteli elv:

(M, d) m. t., $f: A \subset M \to \mathbb{R}$ határértéke az $x_0 \in A'$ pontban az $y_0 \in \mathbb{R}$ szám $\iff$ $\forall\ \langle x_n \rangle$ A-beli sorozatra, ha $x_n \to x_0$, akkor $f(x_n) \to y_0$.

Állítás: (Weierstrass) Legyen (M, d) m. t., $f: A \subset M \to \mathbb{R}$ folytonos az A kompakt halmazon. Ekkor f felveszi a maximumát és a minimumát is az A halmazon.

Bizonyítás: A maximum:

Legyen $M := \sup \{f(x) \mid x \in A\}$. Belátjuk, hogy $M \in \mathbb{R}$.

Indirekten tegyük fel, hogy $M = +\infty$.

Tehát az $\{f(x) \mid x \in A\}$ halmaz nem korlátos felülről, így az 1 nem felső korlát, azaz $\exists\ x_1 \in A$, hogy

$f(x_1) > 1$.

$\max\{2, f(x_1)\}$ nem felső korlát, így $\exists\ x_2 \in A$, hogy

$f(x_2) > \max\{2, f(x_1)\}$

És így tovább, a $\max\{n, f(x_1), \ldots, f(x_{n-1})\}$ ~~sem~~ sem felső korlát, azaz $\exists\ x_n \in A$, hogy

$f(x_n) > \max\{n, f(x_1), \ldots, f(x_{n-1})\}$.

Legyártottunk egy $\langle x_n \rangle$ sorozatot, amely csupa különböző elemből áll. /(a $>$ miatt)/

Ezért $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ végtelen számosságú. $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset A$,
A kompakt, így Bolzano tétele miatt $\exists\, y \in \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}'$,
azaz y torlódási pontja az $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaznak, így az
$\langle x_n \rangle$ sorozatnak is.

Ezért van $p: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekedő, hogy
$x_{p(n)} \to y$. (azaz az $\langle x_n \rangle$ sorozatnak van y-hoz konvergáló részsorozata).

$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset A \Rightarrow y \in A'$ | A kompakt, ezért zárt.
A zárt, ezért $A' \subset A$.
$y \in A' \Rightarrow y \in A$. Az f függvény folytonos y-ban, így az átviteli elv szerint, $x_{p(n)} \to y$ miatt $f(x_{p(n)}) \to f(y)$.

$f(x_{p(n)}) > p(n)$ (az x_n s.m. sorozat konstrukciójából következik)

$f(x_{p(n)}) > p(n) \geq n$ (mert $p(n)$ szigorúan monoton növekvő).
Ezért $f(x_{p(n)}) \to +\infty$. Ez ellentmondás, mert $f(y) \neq +\infty$.
Tehát mégis $\{f(x) \mid x \in A\}$ korlátos felülről, azaz

$M = \sup\{f(x) \mid x \in A\} \in \mathbb{R}$. (Tehát M valós szám)

?(felülről korlátos bizonyítva)/
az M számot ténylegesen felveszi | S.M.

Tegyük fel indirekten, hogy f nem veszi fel az M számot értékként, azaz $f(x) < M$ $(x \in A)$.
$M-1$ már nem felső korlátja az $\{f(x) \mid x \in A\}$ halmaznak $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, x_1 \in A$, hogy

$M > f(x_1) > M-1$

Ekkor $M-\frac{1}{2}$, $f(x_1) < M$ nem felső korlátok $\Rightarrow \exists\, x_2 \in A$, hogy $M > f(x_2) > \max\{M-\frac{1}{2}, f(x_1)\}$.

Ekkor $M-\frac{1}{3}$, $f(x_1)$, $f(x_2) < M$ nem felső korlátok $\Rightarrow \exists\, x_3 \in A$, hogy $M > f(x_3) > \max\{M-\frac{1}{3}, f(x_1), f(x_2)\}$.

Így adódik egy $\langle x_n \rangle$ A-beli sorozat, hogy

$M > f(x_n) > \max\{M-\frac{1}{n}, f(x_1), f(x_2) \dots, f(x_{n-1})\}$.

Az $\langle x_n \rangle$ sorozat csupa különböző elemből áll, mert mondjuk $n > j$ esetén $f(x_n) > f(x_j)$, ezért $x_n = x_j$ nem lehetséges

$\Rightarrow \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ végtelen számosságú, $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset A$, A kompakt, így Bolzano tétele alapján $\exists\, x \in \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}'$ (x torlódási pontja a halmaznak)

$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset A \Rightarrow \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}' \subset A'$, ezért $x \in A'$.

$A' \subset A$, mert A zárt, ugyanis A kompakt. Tehát $x \in A$. Azaz $f(x)$ létezik.

x torlódási pontja az $\langle x_n \rangle$ sorozatnak, így $\exists\, \rho: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő függvény, hogy $x_{\rho(n)} \to x$.

Az f függvény folytonos az x-ben $\Rightarrow f(x_{\rho(n)}) \to f(x)$.

Másrészt,

$$M > f(x_{\rho(n)}) > \max\{M - \frac{1}{\rho(n)}, f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{\rho(n)-1})\}$$
$$\geq M - \frac{1}{\rho(n)} \geq M - \frac{1}{n} \quad (\text{mert } \rho(n) \geq n)$$

M, $M-\frac{1}{n} \to M$, így a rendőrszabály szerint $f(x_{\rho(n)}) \to M$.

Csak úgy lehetséges, ha $f(x) = M$ ($f(x_{\rho(n)}) \to M, f(x)$).

Ez pedig ellentmond az indirekt feltevésnek.

Azaz f mégiscsak felveszi a maximumát az A kompakt halmazon. $\boxtimes$

f minimum

Itt f függvény folytonos az A kompakt halmazon, így $-f$ is az.

Legyen $x_0 \in A$ ~~minimum~~ max helye $-f$-nek, azaz

$$(-f)(x_0) \geq (-f)(x) \quad (x \in A).$$

$$f(x_0) \leq f(x) \quad (x \in A)$$, azaz x_0 minimum helye f-nek.

$\boxtimes$

Definíció: Azt mondjuk, hogy az (M, d) metrikus tér teljes, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens.

Példa nem teljes metrikus térre:

$$M = \mathbb{Q}, \quad d(x,y) = |x-y|, \quad x_n = \frac{[10^n \sqrt{2}]}{10^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(két egész szám hányadosa biztos, hogy racionális)

a racionális számok halmaza nem teljes.

$\mathbb{R}^m$ - m dimenziós Euklideszi-terek

Definíció: Legyen $m \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m = \overset{m}{\underset{k=1}{\times}} \mathbb{R}$ esetén

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}.$$

Az $(\mathbb{R}^m, d)$ párt m-dimenziós Euklideszi térnek nevezzük.

Állítás: $(\mathbb{R}^m, d)$ teljes metrikus tér.

Bizonyítás:

(1) $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2} \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow$

$$x_i = y_i \quad (i = 1, \dots, m) \Leftrightarrow x = y.$$

(2) $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (y_i - x_i)^2} = d(y,x)$

(3) Kellene: (háromszög-egyenlőtlenség)

$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (y_i - z_i)^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - z_i)^2}$$

$a_i := x_i - y_i, \quad b_i := y_i - z_i$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (a_i + b_i)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^2 + \sum_{i=1}^{m} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \sum_{i=1}^{m} b_i^2} \geq \sum_{i=1}^{m} a_i^2 + \sum_{i=1}^{m} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{m} a_i b_i$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \sum_{i=1}^{m} b_i^2} \geq \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$$

Ez pedig teljesül, mert ez éppen a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz féle egyenlőtlenség.

Tehát $(\mathbb{R}^m, d)$ metrikus tér.

<u>A teljesség igazolása</u>

Legyen $\langle x^{(n)} \rangle$ $\mathbb{R}^m$-beli Cauchy-sorozat.

Belátjuk, hogy $\langle x_k^{(n)} \rangle$ Cauchy-sorozat $\mathbb{R}$-ben $(k = 1, 2, \dots, m)$.

Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n, l \geq n_0$, $n, l \in \mathbb{N}$ esetén $d(x^{(n)}, x^{(l)}) < \varepsilon$. (mert $\langle x^{(n)} \rangle$ Cauchy $\mathbb{R}^m$-ben)

Ekkor

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(l)}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i^{(n)} - x_i^{(l)})^2} = d(x^{(n)}, x^{(l)}) < \varepsilon.$$

Tehát $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots = \langle x_k^{(n)} \rangle$ Cauchy $\mathbb{R}$-ben.

$\mathbb{R}$ teljes metrikus tér $\Rightarrow \exists\, x_k \in \mathbb{R}$, hogy $x_k^{(n)} \to x_k$ $(n \to +\infty)$ $(k = 1, \dots, m)$.

Belátjuk, hogy $x^{(n)} \to x$ $\mathbb{R}^m$-ben.

Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel $\mathbb{R}$-ben $x_k^{(n)} \to x_k$, létezik $n_0(\varepsilon, k) \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n \geq n_0(\varepsilon, k)$, $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|x_k^{(n)} - x_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \quad (\sqrt{m} \text{ is rögzített szám}), \quad k = 1, \dots, m.$$

Legyen $\tilde{n}_0(\varepsilon) := \max\{n_0(\varepsilon, 1), \dots, n_0(\varepsilon, m)\}$, $n \geq \tilde{n}_0(\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor:

$$d(x^{(n)}, x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k^{(n)} - x_k)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon^2}{m}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

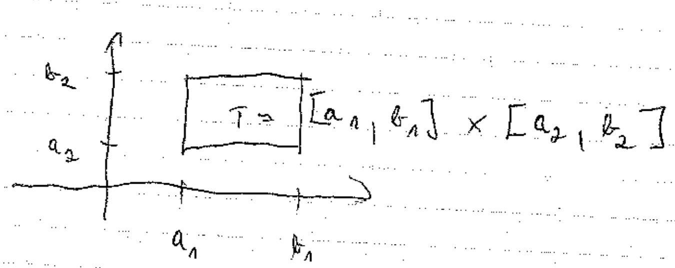
Tehát $x^{(n)} \to x$ $\mathbb{R}^m$-ben.

Tehát beláttuk, hogy $(\mathbb{R}^m, d)$ teljes metrikus tér.

$\boxtimes$

2006. 11. 07.

Definíció: A $T = \times_{i=1}^{m} [a_i, b_i]$, ahol $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ $(i = 1, \dots, m)$ halmazt m-dimenziós zárt téglának nevezzük.



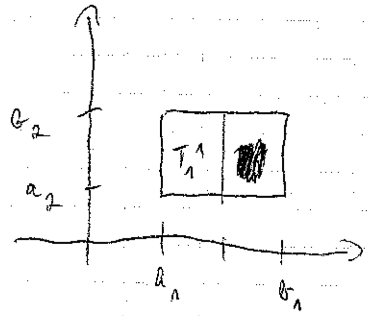
Állítás: Egy m-dimenziós zárt tégla kompakt halmaz.

Bizonyítás: Indirekten tegyük fel, hogy a $T = \times_{i=1}^{m} [a_i, b_i]$ tégla nem kompakt, azaz meg lehet úgy adni $G_i \in \mathbb{R}^m$ $(i \in I)$ nyílt halmazokat, hogy:

(1) $T \subset \bigcup_{i \in I} G_i$

(2) Nem választható ki a G_i-k közül véges sok úgy, hogy az uniójuk tartalmazza a T halmazt.

Az (1) és (2) egyszerre való teljesülését úgy mondjuk, hogy T rossz tégla.



$n = 2$

$T_0^m := T$

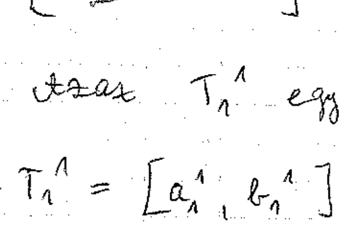
Legyen T_1^1 egy olyan tégla az alábbi két tégla közül, amelyiket nem tartalmazza véges sok G_i:

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m],$$

$$\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m].$$

Azaz T_1^1 egy rossz tégla:

$$T_1^1 = [a_1^1, b_1^1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$$



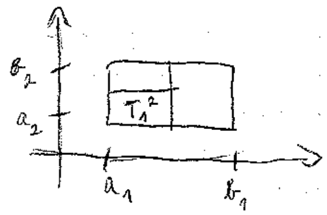
Legyen T_1^2 egy olyan tégla az alábbi két tégla közül, amelyiket nem tartalmazza véges sok G_i:

$$[a_1^1, b_1^1] \times \left[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}\right] \times \dots \times [a_m, b_m],$$

$$[a_1^1, b_1^1] \times \left[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2\right] \times \dots \times [a_m, b_m],$$

tehát T_1^2 egy zárt tégla.

$$T_1^2 = [a_1^1, b_1^1] \times [a_2^1, b_2^1] \times [a_3, b_3] \times \dots \times [a_m, b_m].$$



És így tovább adódik a T_1^m zárt tégla, amely

$$T_1^m = [a_1^1, b_1^1] \times [a_2^1, b_2^1] \times \dots \times [a_m^1, b_m^1], \text{ ahol}$$

$[a_i^1, b_i^1]$ az az $\left[a_i, \frac{a_i+b_i}{2}\right]$ és $\left[\frac{a_i+b_i}{2}, b_i\right]$ közül az egyik $(i = 1, \dots, m)$.

Ugyanúgy, ahogy a T_0^m zárt téglából legyártottuk a T_1^m zárt téglát, legyártjuk a T_1^m zárt téglából a T_2^m zárt téglát, abból a T_3^m és így tovább T_n^m zárt téglákat.

$$T_n^m = \mathop{\times}_{i=1}^{m} [a_i^n, b_i^n], \text{ ahol } [a_i, b_i] \supset [a_i^1, b_i^1] \supset \dots \supset [a_i^n, b_i^n],$$

$$b_i^n - a_i^n = \frac{b_i - a_i}{2^n} \quad (i = 1, \dots, m)$$

tehát, $b_i^n - a_i^n = \dfrac{b_i - a_i}{2^n} \to 0 \quad (i = 1, \dots, m)$

A Cantor metszet tétel szerint (I. félév)

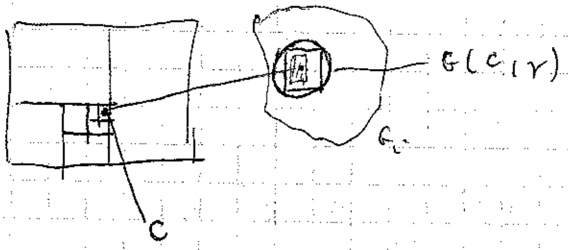
$$[a_i, b_i] \cap [a_i^1, b_i^1] \cap \dots \cap [a_i^n, b_i^n] \cap \dots = \{c_i\} \quad (i = 1, \dots, m)$$

$a_i =: a_i^0$, $b_i =: b_i^0$ $(i=1,\dots,m)$. Ekkor $\{c_i\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_i^n, b_i^n]$ $(i=1,\dots,m)$ $\Longrightarrow$ $\{c\} = \{(c_1, c_2, \dots, c_m)\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} T_n^m$.

$$\cancel{= \bigcap_{n=0}^{\infty} \times_{i=1}^{m} [a_i^n, b_i^n] =}$$

$$= \bigcap_{n=0}^{\infty} \times_{i=1}^{m} [a_i^n, b_i^n] = \times_{i=1}^{m} \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_i^n, b_i^n]$$

$$= \times_{i=1}^{m} \{c_i\}.$$



Mivel $c \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T_n^m \subset \bigcup_{i\in I} G_i \Longrightarrow \exists\, i \in I$, hogy $c \in G_i$.

G_i nyílt $\Rightarrow \exists\, r > 0$, hogy $G(c,r) \subset G_i$.

Legyen $K := \times_{i=1}^{m} \left[c_i - \frac{r}{2m}, c_i + \frac{r}{2m}\right]$

Belátjuk, hogy $K \subset G(c,r)$. (a kocka része a körnek)

Legyen $y \in K \Rightarrow y_i \in \left[c_i - \frac{r}{2m}, c_i + \frac{r}{2m}\right]$, $\Rightarrow |c_i - y_i| \le \frac{r}{2m}$ $(i=1,\dots,m)$

$$d(c,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (c_i - y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{r}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{r^2}{4m}} =$$

$$= \frac{r}{2\sqrt{m}} \le \frac{r}{2} < r.$$

Ezért $y \in G(c,r)$. Tehát $K \subset G(c,r)$

Azaz, (a c pont a kocka középén van)

$c \in K \subset G(c,r) \subset G_i$

$c \in T_n^m = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} [a_i^n, b_i^n]$, $b_i^n - a_i^n = \frac{b_i - a_i}{2^n}$ $(i=1,\dots,m)$

Legyen n olyan nagy, hogy $\frac{b_i - a_i}{2^n} < \frac{r}{2m}$ $(i=1,\dots,m)$

Ekkor belátjuk, hogy

$T_n^m \subset K$.

Legyen $z \in T_n^m$, azaz $z_i \in [a_i^n, b_i^n]$, azaz $a_i^n \le z_i \le b_i^n$ $(i=1,\dots,m)$

Ezért:

$|z_i - c_i| \le b_i^n - a_i^n < \frac{r}{2m}$ (mert $z_i, c_i \in [a_i^n, b_i^n]$) $(i=1,\dots,m)$

Tehát, $z_i \in \left(c_i - \frac{r}{2m}, c_i + \frac{r}{2m}\right) \subset \left[c_i - \frac{r}{2m}, c_i + \frac{r}{2m}\right]$ $(i=1,\dots,m)$

$\Rightarrow z = (z_1, z_2, \dots, z_m) \subset \mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} \left[c_i - \frac{r}{2m}, c_i + \frac{r}{2m}\right] = K$.

Következésképp,

$T_n^m \subset K \subset G(c,r) \subset G_i$.

Ez ellentmondás, mert a jelek szerint a T_n^m rossz téglát már egy G_i halmaz lefedi. Azaz T mégiscsak kompakt.

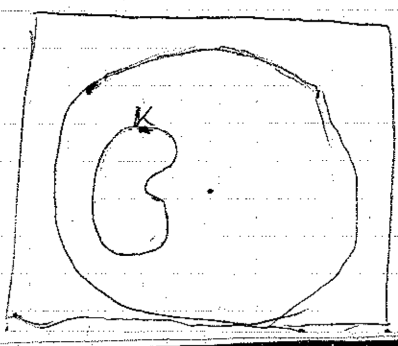
$\boxtimes$

<u>Tétel (Heine–Borel):</u>

Legyen $K \subset \mathbb{R}^m$. A K halmaz kompakt $\Leftrightarrow$ K korlátos és zárt.

<u>Bizonyítás:</u> $\Rightarrow$ igazoltuk korábban általános metrikus terekre.

$\Leftarrow$



ELŐADÁS

2006.11.14.

Heine-Borel tétel bizonyítása:

Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és zárt. Mivel K korlátos $\Rightarrow$ $\exists\, x \in \mathbb{R}^n,\ r > 0$, hogy $K \subset G(x,r)$.

Legyen $T := \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} [x_i - r, x_i + r]$

Belátjuk, hogy $G(x,r) \subset T$. Legyen $y \in G(x,r)$, azaz ~~$d(x,y)$~~

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} < r$$

$\Rightarrow$

$$r > \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} = |x_i - y_i| \Rightarrow -r < y_i - x_i < r \Rightarrow$$

$$x_i - r < y < x_i + r \Rightarrow y_i \in [x_i - r, x_i + r) \quad (i = 1, \dots, n) \Rightarrow$$

$$y \in \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} [x_i - r, x_i + r] = T.$$

Beláttuk, hogy $G(x,r) \subset T$.

Mivel $K \subset G(x,r)$ így $K \subset T$.

T kompakt (előző állítás), K zárt, ezért K is kompakt.

(általános metrikus terekben igazoltuk, hogy kompakt halmaz zárt részhalmaza kompakt)

$\boxtimes$

Definíció: Az $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvényeket n-változós vektorértékű függvényeknek nevezzük. Az $f_i : G \to \mathbb{R}$ az f függvény i-edik koordináta függvénye $(i = 1, \dots, m)$.

Példa: $f(x,y) = (x+y, xy, x)$ $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad f_2(x,y) = xy$

Definíció: Az $f=(f_1,f_2,\dots,f_n): G\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ függvény folytonos az $x_0\in G$ pontban, ha $\forall i\in\{1,\dots,m\}$ esetén az $f_i: G\to\mathbb{R}$ fv. folytonos x_0-ban.

Definíció: Az $f=(f_1,f_2,\dots,f_n): G\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ függvény, $x_0\in G'$. Az f függvénynek az x_0 pontban a határértéke az $y_0\in\mathbb{R}^n$ vektor, ha

$\forall i\in\{1,\dots,m\}$ esetén $\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x)=y_{0,i}$

Példa: $f(x,y)=\left(\frac{\sin(x)}{x}, x+y\right)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)=(1,1),\ \text{mert}\ \lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{\sin(x)}{x}=1,$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} x+y=1$$

Definíció: Az $f=(f_1,f_2,\dots,f_n): G\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ függvény, $x_0\in G$, G nyílt.

Azt mondjuk, hogy f (Fréchet) differenciálható az x_0 pontban, ha létezik olyan $A_{n\times m}$-es mátrix, hogy

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^m}}=0$$

Állítás: Ha van ilyen A mátrix, akkor pontosan egy van.

Jelölés: $A=f'(x_0)$

Állítás: Az $f=(f_1,f_2,\dots,f_n): G\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ függvény, $x_0\in G$, G nyílt.

Az f függvény (Fréchet) differenciálható az x_0 pontban $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^m}}=0\in\mathbb{R}^n$$

Definíció: Az $x \in \mathbb{R}^m$ vektor normája:

$$\|x\| = \|x\|_{\mathbb{R}^m} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} = d(x,0)$$

Állítás:

(1) $\|x\| \geq 0$ és $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|$

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ $\quad (x,y \in \mathbb{R}^m,\ \alpha \in \mathbb{R})$

Bizonyítás: (1) triviális

(2) $\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i+y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}$

Legyen a_i, b_i, c_i olyan, hogy $x_i = a_i - b_i$ (b_i tetszőleges)

$y_i = b_i - c_i$

$\Downarrow$

$a_i = x_i + b_i$

$c_i = b_i - y_i$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (a_i-c_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (a_i-b_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (b_i-c_i)^2}, \text{ azaz}$$

$a = (a_1, \dots, a_m)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$, $c = (c_1, \dots, c_m)$

$d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$. Ez meg igaz, mert $(\mathbb{R}^m, d)$ metrikus tér.

(3) $$\|\alpha x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\alpha x_i)^2} = \sqrt{\alpha^2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} = |\alpha| \, \|x\|.$$

$\boxtimes$

Definíció: (irány menti derivált)

Az $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ függvény, $x_0 \in G$, G nyílt, $v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$.

Azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 pontban differenciálható a v irány mentén, ha létezik az alábbi határérték (és véges):

$$D_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + vt) - f(x_0)}{t}$$

Állítás: Az $f=(f_1, f_2, \dots, f_n): G\subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ függvény
$x_0\in G$, G nyílt, $v\in\mathbb{R}^m$, $\|v\|=1$, f Fréchet
differenciálható x_0-ban.
Ekkor f differenciálható x_0-ban a v irány mentén,
és:

$$D_v f(x_0) = f'(x_0)\cdot v$$

Bizonyítás: Mivel f differenciálható, így

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^m}} = 0 \in \mathbb{R}^n$$

Legyen $x = x_0 + v\cdot t$, ahol $t\to 0$ esetén $x\to x_0$.
Ezért,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+vt)-f(x_0)-f'(x_0)v\cdot t}{\|v\cdot t\|_{\mathbb{R}^m}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+vt)-f(x_0)-f'(x_0)vt}{|t|} = 0\in\mathbb{R}^n.$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+vt)-f(x_0)\cdot vt}{t} = 0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+vt)-f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(x_0)vt}{t} = f'(x_0)v,$$

Tehát $D_v f(x_0)$ létezik és $D_v f(x_0) = f'(x_0)v$.

$\boxtimes$

ELŐADÁS

2006. 11. 21.

<u>Definíció</u>: Legyen $f : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, G nyílt, $x_0 \in G$,
$e_j = (\underset{1}{0}, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, \underset{m}{0}) \in \mathbb{R}^m$.

Azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 pontban parciálisan differenciálható a j-edik változója szerint, ha az $D_{e_j} f(x_0)$ iránymenti derivált létezik.

<u>Jelölés</u>: $D_{e_j} f(x_0)$ helyett: $D_j f(x_0) = \underset{(20\text{ éve})}{f'_{x_j}(x_0)} = \underset{(60\text{ éve})}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)}$

<u>Állítás</u>: $f : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, G nyílt, G differenciálható az $x_0 \in G$ pontban $\Rightarrow \forall\ j \in \{1, \dots, m\}$ esetén $D_j f(x_0)$ létezik.
Továbbá: $D_j f(x_0) = f'(x_0) e_j$

<u>Megjegyzés</u>: f' i-edik sorának j-edik eleme az f i-edik koordinátafüggvénye j-edik változó szerinti parciális deriváltja.

<u>példa</u>: $f(x, y) = (x^2 y, x \sin(y)) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ \sin(y) & x \cdot \cos(y) \end{pmatrix}$$

<u>Állítás</u>: $f : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, G nyílt, $a \in G$, $D_j f(a)$ létezik
$\Longleftrightarrow$ Az alábbi határérték létezik és véges
(ha így van, épp $D_j f(a)$-val egyenlő)

$$\lim_{t \to a_j} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_m) - f(a)}{t - a_j}$$, azaz

$$g(t) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, \dots, a_m), \quad g'(a_j) = D_j f(a)$$

(van egy egyváltozós fv.-em és azt kell egyváltozósként lederiválni)

Állítás. Legyen $f: G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, G nyílt, $x_0 \in G$, f differenciálható x_0-ban $\Rightarrow$ f folytonos x_0-ban.

Bizonyítás: Mivel $f'(x_0)$ létezik, így

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^m}} \to 0 \in \mathbb{R}^n.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\Downarrow \atop 0\in\mathbb{R}^m} = 0 \in \mathbb{R}^n$$

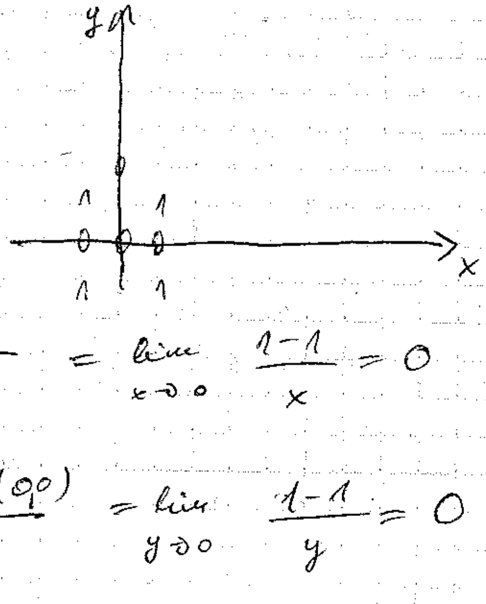
Tehát, $\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x_0)(x-x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$

Ez azt jelenti, hogy f folytonos x_0-ban.

$\boxtimes$

Példa: példa olyan függvényre, amelynek egy pontban az összes parciális deriváltja létezik és mégsem differenciálható.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } xy = 0 \\ 0, & \text{ha } xy \neq 0 \end{cases}$$



$$D_1 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1-1}{x} = 0$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{1-1}{y} = 0$$

Az f fv. nem differenciálható a $(0,0)$ pontban, mivel ott nem is folytonos. Ugyanis $f(0,0) = 0$, de a $(0,0)$-ponthoz akármilyen közel megadható olyan hely, ahol az f fv. 1-et vesz fel értékként.

$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0 = f(0,0)$ (így f nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

Állítás: $f: G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, G nyílt, $x_0 \in G$. Tegyük fel, hogy $\exists\, r > 0$, hogy $G(x_0, r) \subset G$ és a $G(x_0, r)$ gömb minden pontjában létezik $D_j f(x)$ (j.-változó szerinti parciális derivált), sőt $D_j f(x)$ folytonos x_0-ban ($j = 1, \dots, m$).

$\Rightarrow$ f Fréchet differenciálható x_0-ban.

Definíció: $f: G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, G nyílt, $x_0 \in G$. Tegyük fel, hogy $\exists\, r > 0$, hogy $G(x_0, r) \subset G$ és a $G(x_0, r)$ gömb minden pontjában létezik $D_j f(x): G(x_0, r) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.
Továbbá a $D_j f$ parciálisan differenciálható x_0-ban az i-edik változója szerint. Ekkor a $D_i (D_j f)(x_0) =: D_{j,i} f(x_0)$ vektort az f függvény másodrendű parciális deriváltjainak nevezzük. ($i, j = 1, \dots, m$)

jelölés: $D_{j,i} f(x_0) = f''_{x_j, x_i}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$

példa. $f(x,y,z) = (xyz,\ x + 2y + 3z^2)$ $\quad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$D_1 f(x,y,z) = (yz, 1)$ $\quad D_1 f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$D_{1,2} f(x,y,z) = (z, 0)$ $\quad D_{1,2} f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (az $D_1 f$-et deriválom a 2. változója szerint)

$D_2 f(x,y,z) = (xz, 2)$

$D_{2,1} f(x,y,z) = (z, 0)$

Definíció: $f: G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, G nyílt, $x_0 \in G$.

Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény 1-szer differenciálható x_0-ban, ha ott Fréchet differenciálható.

Definíció: $f: G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, G nyílt, $x_0 \in G$.

Tegyük fel, hogy az f fv. r-szer ($r \in \mathbb{N}$) differenciálható az $G(x_0, r) \subset G$ nyílt gömb elemein valamely $r > 0$ esetén. Továbbá tegyük fel, hogy az x_0 pontban az összes r-edrendű parciális deriváltfüggvény Fréchet-differenciálható. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény $r+1$-szer differenciálható.

Tétel: (Young-tétel): Legyen $f: G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, ($G$ nyílt), f r-szer ($r \in \mathbb{N}$) differenciálható az $x_0 \in G$ pontban, $(i_1, i_2, \dots, i_r)$, $(j_1, j_2, \dots, j_r)$ r-esek egymás átrendezései, $i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r \in \{1, 2, \dots, m\}$. Ekkor

$D_{i_1, i_2, \dots, i_r} f(x_0) = D_{j_1, j_2, \dots, j_r} f(x_0)$.

2006. 11. 28. ELŐADÁS

Állítás: $f: G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, G nyílt, $a \in G$ pont lokális szélsőértékhelye az f függvénynek. Tegyük fel, hogy $D_j f(a)$ létezik valamely $j \in \{1, \dots, m\}$ esetén. $\Rightarrow D_j f(a) = 0$.

Bizonyítás: Legyen $g(t) := f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_m)$ $t \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_m) \in G$.

A g egyváltozós függvénynek a $t = a_j$ hely lokális szélsőértékhelye. $\Rightarrow g'(t) = 0$.

Mivel $D_j f(a) = g'(a_j)$, így $D_j f(a) = 0$.

$\boxtimes$

– a szélsőérték létezésének szükséges feltétele

– a szélsőérték létezésének elégséges feltétele:

Állítás: $f: G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, G nyílt, legyen f kétszer folytonosan differenciálható (az összes másodrendű parc. deri. létezik az a pont egy környezetében és ott folytonosak) az $a \in G$ pontban, $\partial_j f(a) = 0$ $(j = 1, \dots, m)$.

(1) ha

$$D_{1,1} f(a) > 0, \quad \begin{vmatrix} D_{1,1} f(a) & D_{1,2} f(a) \\ D_{2,1} f(a) & D_{2,2} f(a) \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} D_{1,1} f(a) & \cdots & D_{1,m} f(a) \\ \vdots & & \\ D_{m,1} f(a) & & D_{m,m} f(a) \end{vmatrix} > 0$$

akkor az $a \in G$ pont lokális minimumhelye f-nek.

(2) Ha

$$(-1)^1 D_{1,1} f(a) > 0, \quad (-1)^2 \begin{vmatrix} D_{1,1} f(a) & D_{1,2} f(a) \\ D_{2,1} f(a) & D_{2,2} f(a) \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^m \begin{vmatrix} D_{1,1} f(a) & \cdots & D_{1,m} f(a) \\ D_{m,1} f(a) & \cdots & D_{m,m} f(a) \end{vmatrix} > 0$$

akkor az $a \in G$ pont lokális maximum helye f-nek.

Definíció: Legyen $a_i < b_i$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$. A $T = \times_{i=1}^{m} [a_i, b_i]$ m-dimenziós tégla m-dimenziós területe:

$$t(T) := \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$$

Definíció: Legyen $A \subset \mathbb{R}^m$, korlátos. Az A m-dimenziós halmaz külső Jordan [zsordán] mértéke:

$$k(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} t(T_i) \;\middle|\; A \subset \bigcup_{i=1}^{n} T_i,\ T_i \text{ } m\text{-dimenziós tégla } (i = 1, \dots, n) \right\}.$$

legnagyobb alsó korlát

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $A, B \subset \mathbb{R}^n$ halmazok egymásba nem nyúlnak, ha $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) = \emptyset$.

Definíció: Az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz belső Jordan mértéke:

$$b(A) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} t(T_i) \;\middle|\; \bigcup_{i=1}^{n} T_i \subset A,\ T_1, \dots, T_n \text{ páronként egymásba nem nyúló } n\text{-dimenziós téglák} \right\}.$$

- legkisebb felső korlát

Állítás: Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos $\Rightarrow b(A) \leq k(A)$.

Definíció: $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz Jordan mérhető, ha $b(A) = k(A)$.
Megjegyzés: Ezt a közös számot az A halmaz (n-dimenziós) Jordan mértékének nevezzük. $b(A) = k(A) = m(A)$

Állítás: Egy T n-dimenziós tégla Jordan mérhető, továbbá $m(T) = t(T)$.

Állítás: Az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz Jordan-mérhető $\Leftrightarrow k(\partial A) = 0$.

Állítás: Az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz Jordan mérhető $\Rightarrow$ $\operatorname{int}(A)$, ∂A is Jordan mérhető.

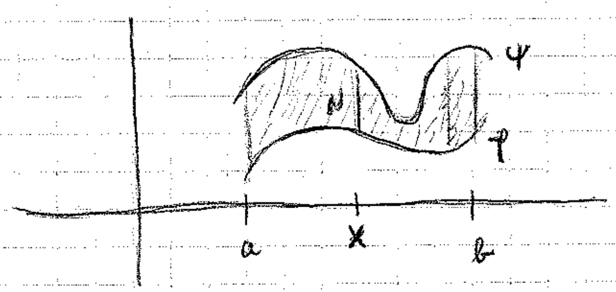
Állítás: Az $A, B \subset \mathbb{R}^n$ halmaz Jordan mérhető $\Rightarrow$ $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ is Jordan mérhető.

Állítás: Az $A, B \subset \mathbb{R}^n$ halmaz Jordan mérhető, egymásba nem nyúló $\Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

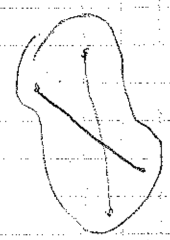
~~Állítás:~~

Definíció: Legyen $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$, Jordan mérhető
$\varphi, \psi : S \to \mathbb{R}$ folytonosak, $\varphi(x) \le \psi(x)$ $(x \in S)$.
Ekkor azt mondjuk, hogy az
$N = \{(x,y) \mid \varphi(x) \le y \le \psi(x), x \in S\}$ $\mathbb{R}^n$-beli halmazt
($\mathbb{R}^n$-beli) normáltartománynak nevezzük.

Példa: $\mathbb{R}^2$-ben. $S = [a,b] \subset \mathbb{R}^1$



Definíció: Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos. Az A halmaz átmérője:
$\delta(A) := \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$, $\delta(\emptyset) = 0$.
(legalább 1 pontja van)



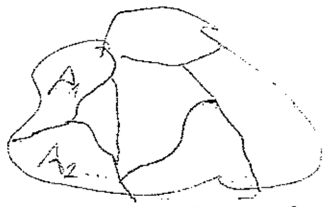
Analízis előadás!!!

6.12.05.

Df.: Legyen $A_1, A_2, \dots A_n; A \subset \mathbb{R}^m$ Jordan mérhető halmazok. Azt mondjuk, hogy a $P=(A_1,\dots,A_n)$ halmaz n-es egy beosztása az A halmaznak, ha:

(1) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

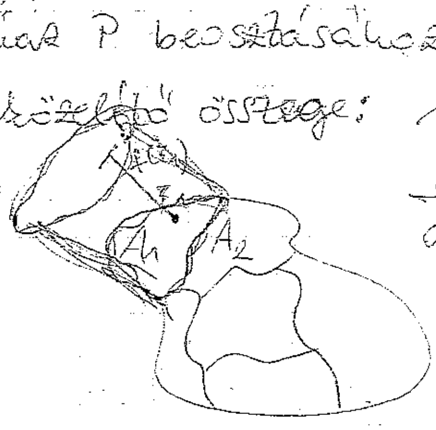
(2) $A_1,\dots,A_n$ páronként egymásba nem nyúló.

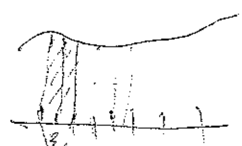


közös pontjuk lehet (érintkezhetnek) de nem lehet közös belső pontjuk.

Df.: Legyen $(A_1,\dots,A_n)=P$ egy beosztása az $A\subset\mathbb{R}^m$ Jordan mérhető halmaznak, $f: A\to\mathbb{R}$, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in A_1\times\dots\times A_n$. Az f függvénynek az A halmaz P beosztásához tartozó ξ alappontokon vett integrálközelítő összege:

$$s=S(f,P,\xi):=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, m(A_i)$$





Df.: Legyen $f: A\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, A Jordan mérhető. Azt mondjuk, hogy az f függvény (Riemann) integrálható az A halmazon, ha $\exists\, I\in\mathbb{R}$, hogy $\forall\, \varepsilon>0$ esetén $\exists\, \delta>0$, hogy az A halmaz bármely olyan $P=(A_1,\dots,A_n)$ beosztásához, melyre $\delta(A_1),\dots,\delta(A_n)<\delta$ (azaz P δ-nál finomabb) tartozó bármely $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in \times_{i=1}^{n} A_i$ alappontokon vett integrálközelítő számot az f függvénynek az A halmazon vett Riemann integráljának.

Jelölés: $\int_A f = \int_A f(x)\,dx = \int_A f(x_1,\dots,x_m)\,d(x_1,\dots,x_m)$

Állítás: Legyen $f: T = \times_{i=1}^{m} [a_i,b_i] \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ integrálható a T téglán.

$T_1 := \times_{i=1}^{p} [a_i,b_i]$, $T_2 := \times_{i=p+1}^{m} [a_i,b_i]$, azaz $T = T_1 \times T_2$ $(p \le m)$. Tegyük fel, hogy $\forall (x_1,x_2,\dots,x_p) \in T_1$ esetén létezik a

$g(x_1,\dots,x_p) = \int_{T_2} f(x_1,x_2,\dots,x_m)\,d(x_1,x_2,\dots,x_m)$ integrál. Ekkor a g p-változós függvény integrálható a T_1 halmazon és

$\int_{T_1} g(x_1,\dots,x_p)\,d(x_{p+1},\dots,x_m) = \int_T f$.

Jelölés, megjegyzés: $\int_T f(x_1,\dots,x_n)\,d(x_1,\dots,x_m) = \int_{T_1}\left[\int_{T_2} f(x_1,\dots,x_m)\,d(x_{p+1},\dots,x_n)\right] d(x_1,\dots,x_p)$

Példa:

$T = [0,1] \times [2,3]$ $\quad f(x,y) = x^2 y$ $\quad \int_T f = ?$

$$\int_{[0,1]\times[2,3]} x^2 y\,d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_2^3 x^2 y\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2}\right]_{y=2}^{y=3} dx =$$

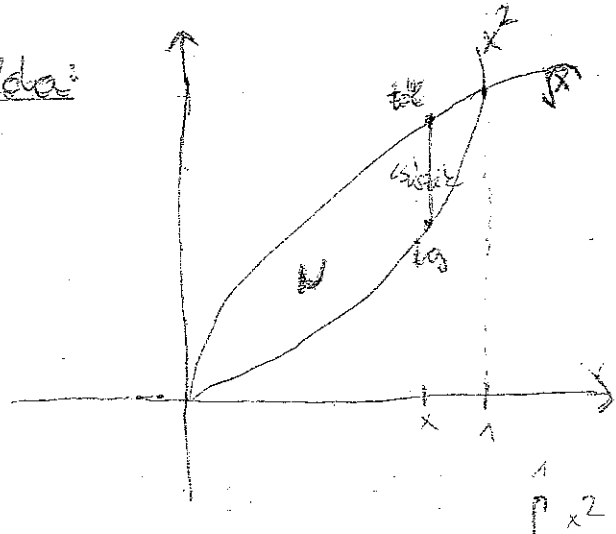
$$= \int_0^1 \frac{5}{2} x^2\,dx = \left[\frac{5}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Többváltozós fgv.-nyek téglán való integrálása:

Áll.: (Integrál normál tartományon):
Legyen $S \subset \mathbb{R}^{m-1}$ Jordan mérhető $\varphi, \psi: S \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) < \psi(x)$ $(x \in S)$, $N = \{(x,y) \mid \varphi(x) \le y \le \psi(x),\ x \in S\}$, $f: N \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f integrálható az N halmazon. Ekkor:

$\int_N f = \int_S \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right] dx.$

Ida:



$f(x,y) = xy$

$S = [0,1]$

$\varphi(x) = x^2$

$\psi(x) = \sqrt{x}$

$$\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy \, dy \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2} \, dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^6}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

www. emis.de / ZMATH.

gat, g*