MTB1005 Geometria I
előadásvázlat

Az abszolút geometria axiómarendszere

0. A geometria axiomatikus felépítéséről

Egy axiómarendszer nem definiált alapfogalmakból és bizonyítás nélkül elfogadott állításokból áll. Az alapfogalmak bizonyos alapvető jellegű objektumok és relációk, s ezek kizárólagos felhasználásával fogalmazhatók meg a nem bizonyított állítások, amelyeket axiómáknak nevezünk. Az alapfogalmakból újabb fogalmak értelmezésével és az axiómákból logikai úton levezethető újabb állítások megfogalmazásával axiomatikus elmélethez jutunk.
Az axiómarendszerben szereplő alapfogalmak és axiómák megfogalmazása legyen egyszerű és közérthető. Megköveteljük továbbá, hogy az axiómarendszer legyen

- ellentmondásmentes: egy állítás és annak tagadása nem levezethető,
- független: egyik axióma sem igazolható a többi segítségével,
- teljes: bármely állítás vagy annak tagadása levezethető.

E három követelmény alapján az is eldönthető, hogy hány axiómát kell kimondani: a szükségesnél kevesebb illetve több axióma esetén az axiómarendszer nem lenne teljes illetve független.
A geometria axiomatikus felépítését elsőként Euklidesz (i.e. 365–300) végezte el az *Elemek* című munkájában, ami 13 részből (ún. könyvből) áll. Az első hat könyv síkgeometriával, az utolsó három térgeometriával, a többi pedig aritmetikával foglalkozik. Euklidesz a bizonyítás nélkül elfogadott állításokat posztulátumoknak illetve axiómáknak nevezte el.
Posztulátumok:

1. Minden pontból minden ponthoz húzható egyenes.
2. Egy véges egyenes vonal egyenesben folytatólag meghosszabbítható.
3. Minden középponttal és távolsággal kör rajzolható.
4. Bármely két derékszög egyenlő egymással.
5. Ha két egyenest úgy metsz egy harmadik, hogy a metsző egyenesnek az egyik oldalán fekvő belső szögek összege két derékszögnél kisebb, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva a metszőnek azon az oldalán találkozik, ahol a két derékszögnél összegben kisebb két belső szög van.

Axiómák:

1. Amik ugyanazzal egyenlők, azok egymással is egyenlők.
2. Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, akkor az összegek is egyenlők.
3. Ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, akkor a maradékok is egyenlők.
4. Ha nem egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, akkor az összegek nem egyenlők.
5. Ugyanannak a kétszeresei egyenlők egymással.
6. Ugyanannak a fele részei egyenlők egymással.
7. Az egymásra illeszkedők egyenlők egymással.
8. Az egész nagyobb a résznél.
9. Két egyenes vonal nem fog közre területet.

Euklidesz arra törekedett, hogy egy tétellel együtt annak a megfordítását is bebizonyítsa. Az 1. könyv 17. tételének (Minden háromszögben két szög együtt kisebb két derékszögnél) megfordítása az 5. posztulátum, ami az ún. euklideszi párhuzamossági axiómával egyenértékű. Ugyanakkor észrevehető, hogy az 5. posztulátum a többihez képest feltűnően bonyolult, amit az

utókor is kritikával fogadott. Megpróbálták előbb –vele egyenértékű– más axiómával helyettesíteni: Adott egyenessel egy rajta kívül lévő ponton át csak egy párhuzamos egyenes halad (Proklosz i.u. 5. sz.), később a többiből akarták levezetni, de ez nem sikerült. Aztán 2000 év elteltével Bolyai János (1802–1860) és Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij (1792–1856) egymástól függetlenül az 5. posztulátumot a tagadásával helyettesítve dolgoztak ki egy új (nem euklideszi) geometriát.
Az euklideszi geometria ma használt axiómarendszerét David Hilbert fogalmazta meg 1899-ben a *Grundlagen der Geometrie* (A geometria alapjai) című könyvében. Az axiomatikus tárgyalásmódot ekkorra már a matematika más területein is kezdték alkalmazni (Peano: természetes számokra, Pasch: projektív geometriára).

1. Az illeszkedési axiómák és tételek

Legyen ***E*** egy nem üres halmaz, továbbá ***P*** és ***L*** az ***E*** bizonyos részhalmazaiból álló két diszjunkt halmaz. Nevezzük ***E*** elemeit pontoknak, ***P*** elemeit síkoknak és ***L*** elemeit egyeneseknek:

$\boldsymbol{E}$ = {pontok} $A,B,\ldots \in \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{P}$ = {síkok} $\alpha,\beta,\ldots\in \boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{L}$ = {egyenesek} $a,b,\ldots\in \boldsymbol{L}$.

Ezen értelmezés szerint ***P*** és ***L*** elemei (a síkok és az egyenesek) egyaránt ***E***-beli pontokból álló halmazok.
Ha egy pont eleme valamely síknak vagy egyenesnek, akkor azt mondjuk, hogy a pont illeszkedik a síkra vagy az egyenesre: $P \in \alpha$ vagy $P \in a$.
Ha egy egyenest tartalmaz valamely sík, akkor azt mondjuk, hogy az egyenes illeszkedik a síkra: $a \subset \alpha$.
Az illeszkedési relációt a továbbiakban szimmetrikus értelemben kívánjuk használni: ha tehát például egy pont illeszkedik egy síkra, akkor egyúttal a sík is illeszkedik a pontra.
Az egy egyenesre illeszkedő pontokat kollineáris pontoknak nevezzük, az egy síkra illeszkedő pontokat vagy egyeneseket pedig komplanáris pontoknak illetve egyeneseknek.
Megjegyezzük itt, hogy a pont, egyenes és sík mindegyike definiálatlan alapobjektum, melyekről az illeszkedési reláció felhasználásával kimondott alábbi <u>illeszkedési axiómák</u> révén kaphatunk bővebb információt.

- I1. Minden egyenesre illeszkedik legalább két pont.
- I2. Bármely két pontra illeszkedik egy és csakis egy egyenes.
- I3. Minden síkra illeszkedik legalább három nem kollineáris pont.
- I4. Bármely három nem kollineáris pontra illeszkedik egy és csakis egy sík.
- I5. Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkra, akkor arra az egyenes is illeszkedik.
- I6. Ha két síknak van közös pontja, akkor van további közös pontja is.
- I7. Létezik négy nem komplanáris pont úgy, hogy bármely három nem kollineáris.

Az I1 – I7 tulajdonságokkal rendelkező (***E, P, L***) hármast Hilbert-féle illeszkedési térnek nevezzük.
Példaként legyen (***E, P, L***) olyan hármas, ahol ***E*** egy négyelemű halmaz: ***E*** = $\{A,B,C,D\}$, ***P*** = $\{\{A,B,C\},\{A,B,D\},\{A,C,D\},\{B,C,D\}\}$ és ***L*** = $\{\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{B,C\},\{B,D\},$ $\{C,D\}\}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor mindegyik illeszkedési axióma teljesül: ezt a példát minimális modellnek nevezzük.
Ha az I1 és I2 axiómákhoz hozzávesszük az „I3*. Létezik három nem kollineáris pont" illeszkedési axiómát, akkor az (***E, L***) párost Hilbert-féle illeszkedési síknak nevezzük.

Ha A és B két különböző pont, vagyis $A \neq B$, akkor az I2 szerint A-ra és B-re egyértelműen illeszkedő egyenesre bevezetjük az $\overleftrightarrow{AB}$ jelölést.
T1: Két különböző egyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet.
Két egyenes metsző, ha pontosan egy közös pontjuk van, amit metszéspontnak nevezünk.
Két egyenes párhuzamos, ha azonosak, vagy ha különbözők, de egysíkúak és nem metszők.
Jelölése: $a,b \in \boldsymbol{L}$ esetén $a \parallel b$.
Két egyenes kitérő, ha nem egysíkúak.
Egyenesek párhuzamossága reflexív és szimmetrikus reláció, de a tranzitivitás független az abszolút tér axiómarendszerétől.
T2: Síknak és rá nem illeszkedő egyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet.
Sík és egyenes metsző, ha pontosan egy közös pontjuk van, amit metszéspontnak nevezünk.
Sík és egyenes párhuzamos, ha az egyenes illeszkedik a síkra, vagy ha az egyenesnek nincs közös pontja a síkkal.
Jelölése: $\alpha \in \boldsymbol{P}$ és $a \in \boldsymbol{L}$ esetén $a \parallel \alpha$.
Sík és egyenes párhuzamossága szimmetrikus reláció.
T3: Ha két különböző síknak van közös pontja, akkor a közös részük egy egyenes.
B: Legyen $\alpha,\beta \in \boldsymbol{P}$, $\alpha \neq \beta$ és $P \in \alpha \cap \beta$.
Ekkor I6 szerint az α és β síkoknak létezik P–től különböző Q közös pontja: $Q \in \alpha \cap \beta$, s így I2 szerint egyértelműen létezik a P és Q pontokra illeszkedő $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes.
Megmutatjuk, hogy $\overleftrightarrow{PQ} = \alpha \cap \beta$.
Ugyanis $P \in \alpha$ és $Q \in \alpha$ miatt I5 szerint $\overleftrightarrow{PQ} \subset \alpha$, továbbá $P \in \beta$ és $Q \in \beta$ miatt ismét I5 szerint $\overleftrightarrow{PQ} \subset \beta$, s ennélfogva $\overleftrightarrow{PQ} \subset \alpha \cap \beta$. Ezért a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes minden pontja eleme az $\alpha \cap \beta$ halmaznak, aminek viszont $\alpha \neq \beta$ miatt I4 szerint nem lehet olyan R eleme, amelyre $R \notin \overleftrightarrow{PQ}$ teljesülne. Tehát a $\overleftrightarrow{PQ}$ és $\alpha \cap \beta$ halmazoknak ugyanazok az elemei: $\overleftrightarrow{PQ} = \alpha \cap \beta$.
Két sík metsző, ha közös részük egy egyenes, amit metszésvonalnak nevezünk.
Két sík párhuzamos, ha azonosak, vagy ha különbözők és nincs közös pontjuk.
Jelölése: $\alpha,\beta \in \boldsymbol{P}$ esetén $\alpha \parallel \beta$.
Síkok párhuzamossága reflexív és szimmetrikus reláció, de a tranzitivitás független az abszolút geometria axiómarendszerétől.
T4: Egy egyenesre és egy rá nem illeszkedő pontra egy és csakis egy sík illeszkedik.
T5: Két metsző egyenesre egy és csakis egy sík illeszkedik.
T6: Két párhuzamos egyenesre egy és csakis egy sík illeszkedik.
T7: Egyenes és sík akkor és csak akkor párhuzamos, ha a sík tartalmaz az egyenessel párhuzamos egyenest.

2. A vonalzó axióma

Az eddig vizsgált $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{L})$ hármast most bővíteni kívánjuk egy d-vel jelölt és távolság-függvénynek hívott leképezéssel, amely révén bármely pontpárnak megfeleltetünk egy valós számot, amit a köztük lévő távolságnak nevezünk el:

$$d : \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{R},\ (P,Q) \quad d(P,Q).$$

A $d(P,Q)$-val jelölt valós szám a P és Q pontok távolsága, amit egyszerűbben PQ-val is jelölhetünk.

Ha adott a egyenes és f: $a \to \boldsymbol{R}$ bijekció esetén bármely $P,Q \in a$ pontra $PQ = |f(P)-f(Q)|$ teljesül, akkor f-et az a egyenes egy koordinátázásának nevezzük. Ekkor bármely $P \in a$ pontra az $f(P)$ valós szám a P pont koordinátája.
<u>Vonalzó axióma:</u> Minden egyenesnek létezik koordinátázása.
Jelölésekkel:

$$\forall a \in \boldsymbol{L} \text{ esetén } \exists f{:}a \to \boldsymbol{R} \text{ bijekció úgy, hogy } \forall P,Q \in a \text{ esetén } PQ = |f(P) - f(Q)|.$$

A továbbiakban az $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}, d)$ struktúrát vizsgáljuk, ahol $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{L})$ Hilbert-féle illeszkedési tér és teljesül a vonalzó axióma.
Elsőként összefoglaljuk a távolságfüggvény tulajdonságait.
Tl: Bármely $P, Q \in \boldsymbol{E}$ esetén teljesülnek az alábbiak:
1) $d(P,Q) \geq 0$, 2) $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$, 3) $d(P,Q) = d(Q,P)$.
A vonalzó axióma szerint minden egyenesnek legalább egy koordinátázása létezik, de könnyen megmutatható, hogy egynél több is van.
T2 (a vonalzó eltolhatósága): Legyen f az a egyenes egy koordinátázása és t egy rögzített valós szám. Ha bármely $P \in a$ esetén $g(P) = f(P) + t$, akkor g is egy koordinátázása az a egyenesnek.
T3 (a vonalzó átfordíthatósága): Ha f az a egyenes egy koordinátázása és bármely $P \in a$ esetén $g(P) = -f(P)$, akkor g is egy koordinátázása az a egyenesnek..
T4 (a vonalzó elhelyezése): Ha az a egyenesnek P és Q két különböző pontja, akkor létezik a-nak olyan g koordinátázása, amelyre $g(P) = 0$ és $g(Q) > 0$.
A vonalzó axióma segítségével értelmezhető a között van (vagy másként az elválasztás) reláció:
Ha A, B és C három kollineáris pont és $AB + BC = AC$, akkor azt mondjuk, hogy B az A és C között van (vagy másként: B elválasztja az A és C pontokat).
Jelölése: $A - B - C$.
T5 (a között van reláció tulajdonságai):

1) $A - B - C \Rightarrow C - B - A$
2) $A - B - C \Rightarrow \neg(A - C - B) \wedge \neg(C - A - B)$
3) $A - B - C \Leftrightarrow \forall f : \overleftrightarrow{AB} \to \boldsymbol{R}$ bijekció esetén $f(B)$ az $f(A)$ és $f(C)$ között van.

T6 (Cantor – Dedekind tétel): Bármely egyenes és a valós számok halmaza között létezik olyan bijekció, amely a között van relációt megtartja.
A között van reláció segítségével további fogalmak értelmezhetők.
Ha A és B különböző pontok, akkor

- az A és B pontok összekötő szakasza egy olyan halmaz, amelynek elemei az A és B pont valamint az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes azon P pontjai, amelyekre $A - P - B$ teljesül.
  Jelölése: $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{P \in \overleftrightarrow{AB} \mid A - P - B\}$.
- az A kezdőpontú és B pontot tartalmazó félegyenes egy olyan halmaz, amelynek elemei az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes azon P pontjai, amelyekre $P - A - B$ nem teljesül.
  Jelölése: $\overrightarrow{AB} = \{P \in \overleftrightarrow{AB} \mid \neg(P - A - B)\}$.

Könnyen ellenőrizhetők az alábbi állítások:
1) $\overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$, 2) $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{P \in \overleftrightarrow{AB} \mid A - B - P\}$, $\overleftrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$.
Az $int\,\overline{AB} = \overline{AB} \setminus \{A,B\}$ halmazt nyílt $\overline{AB}$ szakasznak vagy az $\overline{AB}$ szakasz belsejének nevezzük.
Az $int\,\overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$ halmazt nyílt $\overrightarrow{AB}$ félegyenesnek vagy az $\overrightarrow{AB}$ félegyenes belsejének nevezzük.
Bármely $C \in int\,\overrightarrow{AB}$ esetén az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ félegyenesek azonosak.
$A - O - B$ esetén az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ félegyeneseket ellentétes félegyeneseknek nevezzük.

Ha A, O és B három különböző pont, akkor az $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$ halmazt szögvonalnak (vagy szögnek) nevezzük, melynek O a csúcsa, $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ pedig a szárai.
Jelölése: $AOB\angle$.
Az $AOB\angle$ valódi (nem valódi), ha $O \notin \overleftrightarrow{AB}$ ($O \in \overleftrightarrow{AB}$). Egy nem valódi szögvonal egyenes vagy félegyenes. $O \in \overleftrightarrow{AB}$ és $A - O - B$ $[\neg(A - O - B)]$ esetén az $AOB\angle$ neve egyenesszög (nullszög vagy teljesszög).
Közös csúcspontú két valódi szög egymásnak

- csúcsszöge, ha száraik ellentétes félegyenesek,
- mellékszöge, ha egyik száruk közös, a másik két száruk pedig ellentétes félegyenesek.

Két metsző egyenes négy valódi szög uniója, amelyek páronként egymás mellékszögei vagy csúcsszögei.
Ha A, B és C három nem kollineáris pont, akkor az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ és $\overline{CA}$ szakaszok uniójaként adódó halmazt ABC háromszögnek nevezzük, melynek az A, B és C pontok a csúcsai, az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ és $\overline{CA}$ szakaszok az oldalai, továbbá az $A\angle = CAB\angle$, $B\angle = ABC\angle$ és $C\angle = BCA\angle$ szögek a (belső) szögei.
Jelölése: $ABC\Delta = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$.
T7 (a félegyenes koordinátázás tétele): Ha A és B két különböző pont, akkor az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesnek egyértelműen létezik olyan f koordinátázása, amelyre $f(A) = 0$ és $\overrightarrow{AB} = \{P \in \overleftrightarrow{AB} \mid f(P) \geq 0\}$ teljesül.
Az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ szakaszokat egybevágóknak (kongruenseknek) nevezzük, ha $AB = CD$.
Jelölése: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
A szakaszok egybevágósága ekvivalencia reláció a szakaszok halmazán.
T8 (a szakaszfelmérés tétele): Adott $\overline{AB}$ szakasz és $\overrightarrow{CD}$ félegyenes esetén egyértelműen létezik $\overrightarrow{CD}$ -nek olyan E pontja, amelyre $\overline{AB} \cong \overline{CE}$ teljesül.
$F \in \overleftrightarrow{AB}$ és $AF = FB$ esetén az F pontot az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontjának nevezzük.
T9: Ha F az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontja, akkor $A - F - B$. Minden szakasznak egyértelműen létezik felezőpontja.
T10: Ha az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesen lévő P és Q pontokra $PA = QA$ és $PB = QB$, akkor $P = Q$.
Egy $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{E}$ ponthalmazt konvexnek nevezünk, ha bármely $A, B \in \boldsymbol{K}$ és $A \neq B$ esetén $\overline{AB} \subset \boldsymbol{K}$ teljesül.
T11: Konvex halmazok tetszőleges családjának metszete is konvex.
T12: A következő halmazok mindegyike konvex: a tér pontjainak halmaza (vagyis $\boldsymbol{E}$), bármely szakasz, félegyenes, továbbá szakasz és félegyenes belseje.
T13 (az egyenes felbontás tétele): Egy egyenes bármely pontja az egyenes többi pontjaiból álló halmazt két diszjunkt és nyílt félegyenesre osztja fel. Ha A, B és C az a egyenes három különböző pontja, akkor A és B akkor és csak akkor tartoznak a C kezdőpontú különböző nyílt félegyenesekhez, ha $A - C - B$ teljesül.

3. A félsík axióma

Az eddig tárgyalt $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}, d)$ négyesben teljesülnek az illeszkedési axiómák és a vonalzó axióma. Ha mindehhez hozzávesszük az alábbi félsík axiómát, akkor az ilyen négyest folytonosan rendezett illeszkedési térnek nevezzük.
<u>A félsík axióma:</u> Bármely α síkhoz és rá illeszkedő bármely a egyeneshez léteznek olyan nem üres, konvex és diszjunkt α_1 és α_2 halmazok, amelyekre

1) $\alpha \setminus a = \alpha_1 \cup \alpha_2$

2) $P \in \alpha_1$ és $Q \in \alpha_2$ esetén $\overline{PQ} \cap a \neq \emptyset$
teljesül.
A fenti axiómában szereplő α_1 és α_2 halmazokat a határegyenesű nyílt félsíkoknak, vagy a oldalainak nevezzük, az $a \cup \alpha_1$ és $a \cup \alpha_2$ halmazokat pedig félsíkoknak.
Ha A és B két különböző pont, akkor az $\overline{AB}$ szakasz illetve az $\overrightarrow{AB}$ félegyenes által meghatározott (nyílt) félsíkok alatt az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes által meghatározott (nyílt) félsíkokat értjük.
Minden félsíkot csak egy sík tartalmaz és minden félsíknak csak egy határegyenese van.

T1: Adott α sík, rá illeszkedő a egyenes, $A, B \in \alpha \setminus a$ és $A \neq B$ esetén, ha $\overline{AB} \cap a \neq \emptyset$, akkor A és B az a különböző oldalain vannak.

A második félsík axióma és az előbbi tétel a következőképpen foglalható össze:

1) Adott α sík, rá illeszkedő a egyenes, $A, B \in \alpha \setminus a$ és $A \neq B$ esetén $\overline{AB} \cap a \neq \emptyset$ ekvivalens azzal, hogy A és B az a különböző oldalain vannak.
2) Ha adott α sík és rá illeszkedő a egyenes esetén az a oldalai α_1 és α_2, továbbá $A \in \alpha_1$, akkor

$$\alpha_1 = \{A\} \cup \{P \in \alpha \setminus a \mid \overline{AP} \cap a = \emptyset\} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = \{P \in \alpha \setminus a \mid \overline{AP} \cap a \neq \emptyset\}.$$

Tehát egy rögzített síkra illeszkedő egyenes által meghatározott félsíkok sorrendtől eltekintve egyértelműen megadhatók.
Ha adott α sík és rá illeszkedő a egyenes esetén A és B valamint B és C is az a ellentétes oldalain vannak, akkor A és C az a azonos oldalán vannak.

T2: Ha adott α sík és rá illeszkedő a egyenes esetén valamely $\boldsymbol{K} \subset \alpha$ nemüres konvex halmazra $\boldsymbol{K} \cap a = \emptyset$, akkor $\boldsymbol{K}$ az a egyik oldalán van.

Az előbbi tételt –egy adott síkot feltételezve– a következő két esetben fogjuk alkalmazni:
Ha egy szakasz egyik végpontja (egy félegyenes kezdőpontja) illeszkedik egy adott egyenesre, akkor a szakasz (félegyenes) az adott egyenes által meghatározott egyik félsíkban van.
Ennek alapján egy félsík bármely két pontjának az összekötő szakaszát is tartalmazza: tehát minden félsík konvex halmaz.

T3: Ha egy háromszög síkjában lévő egyenes nem tartalmazza egyik csúcsot sem, akkor nem metszheti a háromszög mindhárom oldalát.

T4 (Pasch–tétel): Ha egy háromszög síkjában lévő egyenes nem tartalmazza egyik csúcsot sem, de metsz egy oldalt, akkor az egyenes még egy oldalt metsz.

Ha az $AOB\angle$ egy valódi szögvonal, akkor az $\overleftrightarrow{OA}$ határegyenesű B-t tartalmazó félsík és az $\overleftrightarrow{OB}$ határegyenesű A-t tartalmazó félsík metszetét az adott szögvonalhoz tartozó konvex szögtartománynak nevezzük. Ugyanígy, de nyílt félsíkok metszeteként értelmezhető a szögtartomány belseje, amit $intAOB\angle$ -gel jelölünk.
Ha az $AOB\angle$ valódi szögvonalat tartalmazó egyértelmű sík az α, akkor az $intAOB\angle$ -nek az α -ra vonatkozó komplementerét az $AOB\angle$ szögvonalhoz tartozó konkáv szögtartománynak nevezzük.

T5 (keresztszakasz tétel): Adott $AOB\angle$ valódi szögvonal esetén $\overrightarrow{OP} \cap \operatorname{int}\overline{AB} \neq \emptyset$ akkor és csak akkor teljesül, ha $P \in intAOB\angle$.

A félsík axióma térbeli megfelelője a következő állítás.

T6 (a térfelbontás tétele): Adott α sík esetén sorrendtől eltekintve egyértelműen léteznek olyan nemüres, konvex és diszjunkt $\boldsymbol{K_1}$ és $\boldsymbol{K_2}$ halmazok, amelyekre

1) $\boldsymbol{E} \setminus \alpha = \boldsymbol{K_1} \cup \boldsymbol{K_2}$

2) $P \in \boldsymbol{K_1}$ és $Q \in \boldsymbol{K_2}$ esetén $\overline{PQ} \cap \alpha \neq \emptyset$

teljesül.
A $\boldsymbol{K_1}$ és $\boldsymbol{K_2}$ halmazokat α határsíkú nyílt féltereknek, a $\boldsymbol{K_1} \cup \alpha$ és $\boldsymbol{K_2} \cup \alpha$ halmazokat pedig féltereknek nevezzük.

4. A szögmérő axióma

Az $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}, d)$ folytonosan rendezett illeszkedési térben értelmezni kívánunk egy leképezést, amely révén lehetőségünk lesz a szögek mértékének megadására.
Ha $\boldsymbol{H}$ a tér szögvonalainak halmaza és $m : \boldsymbol{H} \to [0, \pi]$, $AOB\angle \quad m(AOB\angle)$, akkor a m leképezést szögmértéknek nevezzük.
A szögmérték két tulajdonságát foglalja össze az alábbi <u>szögmérő axióma:</u>

1. (a szögmérés additivitása): Ha $\overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{OB}$ és P az $AOB\angle$ –höz tartozó konvex szögtartomány pontja, akkor $m(AOB\angle) = m(AOP\angle) + m(POB\angle)$.
2. (szögszerkesztési posztulátum): Ha adott egy α_1 félsík és annak határán egy $\overrightarrow{OA}$ félegyenes, akkor bármely $t \in [0, \pi]$ valós számhoz egyértelműen létezik az α_1 félsíkbeli $\overrightarrow{OB}$ félegyenes úgy, hogy $m(AOB\angle) = t$.

A továbbiakban olyan $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}, d, m)$ ötösről lesz szó, amelyben teljesülnek az illeszkedési axiómák, továbbá teljesül a vonalzó axióma, a félsík axióma és a szögmérő axióma.
T1: A nullszögek mértéke 0, az egyenesszögek mértéke π, és minden valódi szög mértéke 0-tól nagyobb, de π-nél kisebb.
Ha az $AOB\angle$ valódi szögvonalhoz tartozó konvex szögtartomány mértéke $m(AOB\angle)$, akkor az $AOB\angle$ -höz tartozó konkáv szögtartomány mértéke $2\pi - m(AOB\angle)$.
Két konvex szög egymásnak kiegészítő szöge (pótszöge), ha mértékeik összege π ($\pi/2$).
Két szöget egybevágónak (kongruensnek) nevezünk, ha mértékeik egyenlők.
T2: A szögek kongruenciája ekvivalencia reláció a szögek halmazán.
T3: A mellékszögek kiegészítő szögek. A csúcsszögek egybevágók.
Két nem egybevágó szög közül az a nagyobb (kisebb), amelynek a mértéke nagyobb (kisebb).
A $\pi/2$ mértékű szöget derékszögnek nevezzük.
A derékszögnél kisebb (nagyobb) valódi szöget hegyesszögnek (tompaszögnek) nevezzük.
Minden derékszög egyenlő a mellékszögével, és ha a mellékszögek egyenlők, akkor mindkettő derékszög.
Egy háromszöget aszerint nevezünk hegyesszögű, derékszögű vagy tompaszögű háromszögnek, hogy a legnagyobb szöge hegyesszög, derékszög vagy tompaszög.
Ha az $ABC\Delta$ -ben $m(C\angle) = \pi/2$, akkor az $\overline{AB}$ oldalt átfogónak, míg a másik két oldalt befogóknak nevezzük.
T4 (négy derékszög tétele): Ha két metsző egyenes által meghatározott négy valódi szög egyike derékszög, akkor a többi három szög is derékszög.
Ha két metsző egyenes által meghatározott négy valódi szög egyike derékszög, akkor azt mondjuk, hogy a két egyenes merőleges egymásra.
Jelölése: $a, b \in \boldsymbol{L}$ esetén $a \perp b$.
Egyenesek merőlegessége szimmetrikus reláció.
Ha két metsző egyenes nem merőleges egymásra, akkor az általuk meghatározott négy valódi szög közül a kisebbiket a két egyenes szögének nevezzük.
Megállapodunk abban, hogy a párhuzamos egyenesek szögén nullszöget értünk.

Szakaszok és félegyenesek egymással vagy valamely egyenessel bezárt szögét a rájuk illeszkedő egyenesek szögével értelmezzük

Az $AOB\angle$ valódi szögvonal (vagy szögtartomány) szögfelezőjének nevezzük az $\overrightarrow{OP}$ félegyenest, ha $P \in intAOB\angle$ és $m(AOP\angle) = m(POB\angle)$. (Szavakkal megfogalmazva: Egy szög felezője a szög csúcsából kiinduló és a szögtartományban haladó olyan félegyenes, amely az adott szöget két egyenlő szögre osztja.)

T5: Minden valódi szögnek egyértelműen létezik szögfelezője.

5. Az egybevágósági (kongruencia) axióma

Az $ABC\Delta$ és $DEF\Delta$ nem feltétlenül különböző háromszögek közötti megfeleltetésen egy $f: \{A, B, C\} \to \{D, E, F\}$ bijekciót értünk, amelyre $f(A) = D, f(B) = E$ és $f(C) = F$ teljesül. Ilyenkor az $ABC\Delta \leftrightarrow DEF\Delta$ jelölést is használhatjuk. Az A és D, B és E valamint C és F pontokat megfelelő csúcsoknak nevezzük. Hasonlóképpen értelmezhetők megfelelő oldalak és megfelelő szögek is.

Ha két nem feltétlenül különböző háromszög között létezik olyan megfeleltetés, amelynél az egymásnak megfelelő oldalak és az egymásnak megfelelő szögek egybevágók, akkor a két háromszöget egybevágónak (kongruensnek) nevezzük.

Jelölése: $ABC\Delta \cong DEF\Delta$.

Ez a jelölés egyúttal kifejezi az $ABC\Delta \leftrightarrow DEF\Delta$ megfeleltetést is.

T1: Az egybevágóság ekvivalencia reláció a háromszögek halmazán.

Egybevágósági axióma: Ha két nem feltétlenül különböző háromszög között létezik olyan megfeleltetés, amelynél az egyik háromszög két oldala és az általuk közrefogott szög egybevágó a másik háromszög megfelelő két oldalával és az azok által közrefogott megfelelő szöggel, akkor a két háromszög egybevágó ennél a megfeleltetésnél.

Jelölésekkel: Ha az $ABC\Delta \leftrightarrow DEF\Delta$ megfeleltetésnél $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ és $A\angle \cong D\angle$, akkor $ABC\Delta \cong DEF\Delta$.

Az egybevágósági axióma kimondásával az abszolút tér teljessé vált. Az abszolút tér tehát olyan $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}, d, m)$ ötös, ahol $\boldsymbol{E}$ a pontok, $\boldsymbol{P}$ a síkok és $\boldsymbol{L}$ az egyenesek halmaza, d a távolságfüggvény és m a szögmérték, $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{L})$ Hilbert-féle illeszkedési tér (vagyis teljesülnek az illeszkedési axiómák), továbbá teljesül a vonalzó axióma, a félsík axióma, a szögmérő axióma és az egybevágósági axióma.

A továbbiakban az abszolút térben dolgozunk.

Egy háromszöget egyenlő szárúnak nevezünk, ha a háromszögnek van két egybevágó oldala. A két egyenlő oldalt száraknak, a harmadik oldalt pedig alapnak nevezzük.

Egy háromszöget egyenlő oldalú vagy szabályos háromszögnek nevezünk, ha bármely két oldala egybevágó.

T2 (pons asinorum = szamarak hídja): Egyenlőszárú háromszögben az egybevágó oldalakkal szemközti szögek egybevágók.

Egy háromszög valamely szögének mellékszögét ezen szög külső szögének nevezzük.

T3 (külső szög egyenlőtlenség): Egy háromszög valamely külső szöge nagyobb mint a nem mellette fekvő bármely belső szög.

T4: Derékszögű (tompaszögű) háromszögben pontosan egy derékszög (tompaszög) és két hegyesszög van.

T5 (háromszög egybevágósági tételek):

Ha az $ABC\Delta$ és $DEF\Delta$ háromszögekre az $ABC\Delta \leftrightarrow DEF\Delta$ megfeleltetésnél az

1) $A\angle \cong D\angle$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ és $B\angle \cong E\angle$

2) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $B\angle \cong E\angle$ és $C\angle \cong F\angle$

3) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ és $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

feltételek valamelyike teljesül, akkor $ABC\Delta \cong DEF\Delta$.

T6 (pons asinorum megfordítása): Ha egy háromszögnek van két egybevágó szöge, akkor az egybevágó szögekkel szemközti oldalak egybevágók.

—