

Kombinatorika és Gráfelmélet

Ez az előadásvázlat remélhetően segíti a vizsgára való felkészülést, de nem pótolja az előadást. Vizsgán lehetnek olyan kérdések, amelyekről ez a jegyzet nem szól.

Nyíregyháza, 2008. február

Róka Sándor

Permutáció, variáció, kombináció, osztók száma

$$P_n = n!, \quad P_n^{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$$
$$V_n^k = n(n-1) \dots (n-[k-1]) = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad V_n^{k(i)} = n^k$$
$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k}$$

- 5 gyerek hányféle sorrendben ülhet le egy padra? Egy asztal köré?
- Hányféle lottóhúzás lehetséges a 90-ből 5-öt lottón?
- Hányféleképp lehet kitölteni a totószelvényt?
- Egy 5 fős társaság tagjai között 3 különböző könyvet sorsolnak ki. Hányféleképp végződhet a sorsolás, ha a) egy személy csak egy könyvet nyerhet; b) egy személy több könyvet is nyerhet?
- Egy 5 fős társaság tagjai között 3 egyforma pénzérmét sorsolnak ki. Hányféleképp végződhet a sorsolás, ha a) egy személy csak egy érmét nyerhet; b) egy személy több érmét is nyerhet?
- Háromféle fagyiból hányféle 5 gombócos kelyhet lehet összeállítani?
- Hányféle sorrendje van a *MATEMATIKA* szó betűinek?
- Az 1, 2, 3, 4, 5 számoknak írjuk fel egy olyan permutációját, amelyben az inverziók száma 4. Legfeljebb hány inverzió lehet egy permutációban?
- $\frac{10!}{9!} = ?$ $n! = 90(n-2)!$, $n = ?$
- 13 mérkőzéses totószelvényből legkevesebb mennyit töltsünk ki, hogy biztosan legyen 5 találat?
- Számold össze, hány pozitív osztója van a 72-nek!
- Számold össze, hány pozitív osztója van 16 200-nak!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1991., 5. osztályosok versenye

Gyakorló feladatok

- Egy jégbarlang bejáratától öt úton juthatunk el az első terembe, innen hat út vezet a másodikba, majd innen három út a harmadikba. Hányféle úton juthatunk el az első teremből a harmadik terembe?
(A) 3 (B) 5 (C) 18 (D) 30 (E) 90
- Hány egyenes húzható egy kocka nyolc csúcsán át úgy, hogy minden egyenes két csúcsot tartalmazzon?
(A) 4 (B) 12 (C) 20 (D) 24 (E) 28
- 4 fiú és 3 lány úgy ült le egy 7 személyes padra, hogy sem két lány, sem két fiú nem ült egymás mellett. Hány ültetési sorrend képzelhető el?
(A) 24 (B) 30 (C) 35 (D) 21 (E) 144
- Hányféleképp tudsz sorbarakni 5 egybevágó háromszöglapot, melyek közül 2 piros és 3 kék?
(A) 11 (B) 10 (C) 9 (D) 8 (E) 74
- Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek egyik és csak az egyik számjegye a) 5-ös; b) 0?
- Hány olyan háromjegyű szám van, amely számban **van/nincs** a) 5-ös; b) 0 számjegy?
- Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben szerepel a 0 számjegy?
Zrínyi Ilona Matematikaverseny megyei fordulója, 1993., 5. osztályosok versenye
- Hány olyan hatjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek összege 3?
Zrínyi Ilona Matematikaverseny megyei fordulója, 1997., 6. osztályosok versenye

9. Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, melynek minden számjegye kisebb, mint 4?

Zrínyi Ilona Matematikaverseny megyei fordulója, 1996., 5. osztályosok versenye

10. Adott a síkon 10 pont úgy, hogy közülük semelyik három sincs egy egyenesen. Hány olyan egyenes van, amely az adott pontok közül kettőn átmegegy?

11. Az 1, 2, 2, 3, 3 számjegyek különböző sorrendjeivel hány
a) 6-jegyű szám; b) 6-jegyű páros szám képezhető?

12. n elem harmadosztályú ismétléses és ismétlés nélküli variációi számának különbsége 65. Határozzuk meg n értékét!

13. Adott a síkon 20 pont, amelyek közül bármely három nem illeszkedik egy egyenesre. Hány háromszöget határoznak meg ezek a pontok?

14. Egy csomag magyar kártyából kihúzzunk 10 lapot. Hány esetben lesz a kihúzott lapok között
a) legalább 7 zöld; b) legfeljebb 7 zöld?

15. Az 5-ös lottón hány olyan húzás lehetséges, amelyben a kihúzott számok között
a) szerepel a 7 és a 13; b) nem szerepel a 7 és a 13?

Rekurzió, teljes indukció

Hanoi tornyai, Fibonacci-sorozat

1. A bal felső sarokból indulva előre, ill. lefele lépkedve hányféleképpen olvasható ki a *KOMBINATORIKA* szó?

K	O	M	B	I	N	A	T	O
O	M	B	I	N	A	T	O	R
M	B	I	N	A	T	O	R	I
B	I	N	A	T	O	R	I	K
I	N	A	T	O	R	I	K	A

2. Hányféleképpen olvashatja le Kriszta kedvenc macskája nevét az ábráról, ha csak jobbra vagy lefelé léphet?

```

M A F
A F F I A
  I A
  A

```

3. Hányféle úton olvasható ki az *ABACUS* szó az ábrán?

```

      A
     B  B
    A  A  A
   C  C  C  C
  U  U  U  U  U
S  S  S  S  S  S

```

4. Valaki úgy megy fel a lépcsőn, hogy egy-egy lépésével vagy 1, vagy 2 lépcsőfokot lép át. Hányféleképpen juthat fel a 10. lépcsőfokra?

5. Hányféleképpen lehet egy 2×10 -es téglalapot 2×1 -es dominókkal kirakni?

6. Hány olyan nyolc számból álló, csak 0-t vagy 1-et tartalmazó sorozat van, amelyben nem fordul elő két szomszédos 1-es?

7. Mutassuk meg, hogy egy négyzet feldarabolható n db négyzetre, ahol $n \geq 6$.

8. Mutassuk meg, hogy egy háromszög feldarabolható n db, hozzá hasonló háromszögre, ahol $n \geq 6$.

9. Mutassuk meg, hogy $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

10. Mutassuk meg, hogy $(1+x)^n \geq 1+nx$, ha $n \in \mathbb{N}$ és $x \geq -1$ (*Bernoulli-egyenlőtlenség*).

11. Igazoljuk, hogy $6 \mid n^3 - n$, $n = 1, 2, \dots$

12. Igazoljuk, hogy $p \mid n^p - n$, ahol p prímszám, $n \in \mathbb{N}$ (kis Fermat-tétel).

13. Mutasd meg, hogy $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$.

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 2004., 7. osztályosok versenye

14. Mutassuk meg, hogy $2^n > n^2$, ha $n > 4$ egész szám.

15. Hol a hiba a következő bizonyításban?

Állítás: Bármely n pozitív egészre $a^{n-1} = 1$, ahol $a > 0$ tetszőleges szám.

Bizonyítás: Ha $n = 1$, akkor $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$.

Ha feltesszük, hogy a tétel igaz az $1, 2, \dots, n$ esetre, akkor azt kapjuk, hogy

$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$; tehát a tétel $(n+1)$ esetére is igaz.

16. Igazoljuk a következő oszthatóságokat.

- | | |
|--|--|
| a) $4 \mid 7^n + 3^{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, | f) $17 \mid 6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, |
| b) $9 \mid 7^n + 3n - 1$, $n = 1, 2, \dots$, | g) $9 \mid n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$, $n = 1, 2, \dots$, |
| c) $7 \mid 5 \cdot 9^{n-1} + 2^{4n-3}$, $n = 1, 2, \dots$, | h) $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$, $n = 1, 2, \dots$, |
| d) $17 \mid 7 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, | i) $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$, $n = 0, 1, \dots$, |
| e) $19 \mid 5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, | j) $16 \mid 3^{2n+2} + 8n - 9$, $n = 1, 2, \dots$ |

17. Néhány egyenes a síkot tartományokra bontja. Mutassuk meg, hogy ezek a részek két színnel kiszínezhetők úgy, hogy az oldalszomszédos tartományok különböző színűek legyenek.

Binomiális tétel, polinomiális tétel. Halmazrendszerek

Pascal háromszög. Binomiális tétel és bizonyítása.

Az $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ összefüggést igazoljuk 3-féle módon:

- az n -elemű halmaz részhalmazait összeszámolva elemszám alapján;
- teljes indukcióval;
- binomiális tétellel.

1. Számolja ki a binomiális tétel segítségével!

- a) $(x-1)^3$; b) $(a+2)^4$; c) $1,02^4$; d) $1,01^5$; e) 99^4 ; f) 999^3 .

2. Bizonyítsa be a binomiális tétel segítségével a következő összefüggéseket!

- a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$;
b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$;
c) $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + 2^3\binom{n}{3} + \dots + 2^n \binom{n}{n} = 3^n$.

3. Igazolja az alábbi összefüggéseket!

- a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$; c) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$; d) $\binom{n}{k} \binom{k}{s} = \binom{n}{s} \binom{n-s}{k-s}$.

4. $(a+b+c)^4$ kifejtése után mennyi az a^3b , ab^2c , ... együtthatója?

5. Adjuk meg az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaznak minél több olyan részhalmazát, hogy közülük bármely kettőnek az uniója kiadja az alaphalmazt.

6. Adjuk meg az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaznak minél több olyan részhalmazát, hogy közülük semelyik kettőnek se legyen közös eleme.

7. Adjuk meg az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaznak minél több olyan részhalmazát, hogy közülük bármely kettőnek egy közös eleme legyen.

8. Adjuk meg az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaznak minél több olyan részhalmazát, hogy közülük bármely kettőnek egy közös eleme legyen, ám bármely három halmaznak ne legyen közös eleme.

9. Adjuk meg a természetes számoknak három olyan részhalmazát, hogy bármely szám szerepel legalább részhalmazban, és bármely két halmaznak végtelen sok közös eleme van, míg a három halmaznak nincs közös eleme.

10. Adjuk meg az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak minél több olyan részhalmazát, hogy közülük egyik se tartalmazza részként valamely másikat.

11. Egy matematikaversenyen 6 feladatot tűztek ki. Bármely két versenyzőt választjuk, mindegyiknek van olyan feladata, amellyel a másik nem foglalkozott. Ezt a feltételt betartva adjon meg olyan rendszert, amelyben minél több versenyző vesz részt. (Sperner-rendszer)

Skatulya-elv, logikai szita

1. Legalább mekkora létszámú az az osztály, ahol biztosan van két olyan diák, akinek ugyanannyi fog van?

2. Egy fiókban 10 fekete és 10 barna, ugyanolyan méretű zokni van. Hány darabot kell taláalomra kivenni, hogy biztosan legyen köztük egy pár (azonos színű) zokni?

3. Egy zsákban 10 pár fekete és 10 pár barna, ugyanolyan méretű kesztyű van. Hány darabot kell taláalomra kivenni, hogy biztosan legyen köztük egy pár (azonos színű) kesztyű?

4. Egy zsákban 11 piros, 8 fehér és 6 fekete golyó van. Hány golyót kell kivenni véletlenszerűen, hogy biztosan legyen közte

- a) fehér vagy fekete;
- b) fehér és fekete;
- c) két különböző szín;
- d) valamelyik színből mind;
- e) két színből mindegyik;
- f) valamelyik színből három?

5. Leírtam az összes háromjegyű pozitív egész számot egy-egy kártyára, és egy üres kalapba tettem őket. Legkevesebb hány számkártyát kell becsukott szemmel kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük kettő, melyben megegyezik a számjegyek összege?

6. Mutasd meg, hogy öt, 10-nél nagyobb prímszám közül mindig kiválasztható kettő, melyek különbsége osztható 10-zel!

7. Egy szabályos (egyenlő oldalú) háromszög alakú céltábla oldala 1 m. A céltáblát 10 lövés eltalálta. Igazold, hogy van két olyan találat, amelyek 34 cm-nél közelebb vannak egymáshoz.

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1984., 5. osztályosok versenye

8. Egy 8 cm oldalú négyzetbe taláalomra berajzolunk 260 pontot. Bizonyítsd be, hogy a pontok között biztosan lesz kettő, amelyek egymástól mért távolsága 1 cm-nél kisebb.

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1984., 7. osztályosok versenye

9. Hány olyan szám van az 1, 2, 3, ..., 99, 100 számok között, amely a 2, 3 és az 5 számok közül
a) legalább az egyikkel osztható? b) csak az egyikkel osztható? c) legfeljebb kettőnek többszöröse?
d) pontosan kettőnek többszöröse? e) egyikkel sem osztható?

10. Egy 30 fős osztály tanulói három nyelvet tanulnak: angolt, németet és franciát. Minden diák legalább egy nyelvet tanul: angolt 14-en, németet 15-en, franciát 11-en, pontosan két nyelvet pedig összesen 6-an. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

- (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

11. Egy fordító asztalán lévő 12 db könyv közül 7 db nem francia nyelvű és 4 db regény. A regények közül 3 db nem francia nyelvű. Hány olyan könyv van, amely francia nyelvű, de nem regény?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

12. Hány olyan pozitív egész szám van, amely osztója a 2000 vagy a 2005 számok valamelyikének?

Algoritmusok

Rendezés, maximális elem kiválasztása, két első kiválasztása, első és utolsó kiválasztása. Ládapakolás. Útvonaltervezés, legrövidebb út keresése. Egy csoportban a legtöbb ember kiválasztása úgy, hogy bármely kettő ismerje egymást. Két ember között ismeresösökön keresztül a legrövidebb kapcsolat. Budapestről mely fővárosokba lehet eljutni repülővel, akár többszöri átszállással? Az n szám prímszám-e? Anagrammakészítés. Hogyan fog oroszlánt a matematikus?

1. a) 3;
b) 9;
c) 27 érme közül egy hamis, s ez könnyebb, mint a másik kettő, amelyek egyenlő súlyúak. Egy kétkarú mérlegen súlyok felhasználása nélkül egy mérlegeléssel keresd ki közülük a hamis érmét.
Hogyan lehet ezt megtenni?

→ kártyatrükk

2. Van 8 db, páronként különböző súlyú golyónk és egy kétkarú mérlegünk. Válaszd ki közülük minél kevesebb mérlegeléssel

- a) a legkönnyebb golyót;
- b) a legkönnyebb és a legnehezebb golyót;
- c) a két legnehezebb golyót! (Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1994., 7. osztályosok versenye)

3. *Hamis pénzek:* 10 láda pénz között az egyik ládában csupa 11 grammos érme van, a többiben 10 grammosak az érmék. Okos Domokosnak csak egyetlen mérésre van lehetősége, s azután tudnia kell, hogy melyik a nehezebb érméket tartalmazó láda.

A méréshez kap egy egykarú mérleget mérősúlyokkal.

Hogyan találja meg a nehezebb érméket tartalmazó ládát?

4. *A hamis mérleg:* Egy isten háta mögötti helyen, egy kis boltban venni szeretnénk 1 kg lisztet. A boltban van kétkarú mérleg, vannak mérősúlyok, és van liszt is nagyobb mennyiségben.

Azonban, ha a mérleg mindkét serpenyőjébe egy-egy 1 kg-os mérősúlyt teszünk, a mérleg nyelve nincs egyensúlyban. Bárhogyan is szeretnénk, nem tudjuk a mérleget hitelesen beállítani, hamisan mér a mérleg.

Hogyan tudunk kimérni 1 kg lisztet?

5. Az euklideszi algoritmus segítségével határozza meg az alábbi számpárok legnagyobb közös osztóját.

- a) 91, 169 b) 96, 320 c) 315, 2475 d) 802, 2005 e) 3737, 131313

6. Egy üzletnek 10 bőröndöt szállítottak és hozzájuk egy külön borítékban 10 kulcsot. Minden kulccsal csak egy bőrönd nyitható. Legkevesebb hány próbálkozással találhatjuk meg biztosan a 10 bőrönd mindegyikéhez a megfelelő kulcsot?

- (A) 10 (B) 45 (C) 55 (D) 90 (E) 100

7. *Három rabló:* Két rabló, Tódor és Domokos úgy szokott megosztani a zsákmányon, hogy az egyik kétfelé osztja azt, és a másik azt a részt veszi el, amelyiket akarja. Ez így igazságos, mert mindkettőnek megvan a lehetősége arra, hogy megszerezze a zsákmány felét.

Ez így ment éveken át, amikor is befogadták maguk közé Jeromost, s ettől kezdve hármásban jártak fosztogatni. A régi osztzkodási módszer helyett új eljárásra van szükség.

Hogyan osztozkodjon a három rabló, ha azt szeretnék biztosítani, hogy bármelyikük megkapja a zsákmány harmadát, bármit is csinál a másik kettő?

8. Egy fontos „titkos” jelentést 10 oldalra gépeltek le és az egyes oldalakat megkapta egy-egy ember és hazavitte. Mind a 10 embernek van telefonja.

Hogyan lehetne minél kevesebb telefonbeszélgetéssel megszervezni, hogy a jelentés teljes tartalmát mind a 10 ember megismerje? (A telefonbeszélgetéskor a két ember az összes rendelkezésre álló információt kölcsönösen kicseréli.)

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója 1993., 8. osztályosok versenye

9. *Átkelés.* Tudor, Vidor, Szendi és Szundi egy sötét, szűk alagúton szeretnének átjutni. Van egy néhány percig égő lámpásuk. Tudor 1, Vidor 2, Szendi 4 és Szundi 5 perc alatt képes megtenni a távot. A sötétben félnek, ezért az alagútban lámpás nélkül nem mehetnek és a szűk alagútban egyszerre legfeljebb ketten férnek el.

Szervezd meg az átkelést úgy, hogy a lámpást minél kevesebb ideig kelljen használni.

10. Vérvizsgálat: Bergengócia harcban áll a szomszédos Burkusországgal. Bergengócia kis ország, szegény ország, kicsi hadserege van. 128 fős a hadsereg. A kiváló hírszerzésnek köszönhetően megtudják, hogy a burkusok alattomos módon megfertőzték az egyik bergengóc katonát egy nagyon veszélyes vírussal. A vírus 10 napi lappangás után tovább fertőzi a vírushordozó katonával érintkezőket. Gyorsan cselekedniük kell.

Bármilyen kiváló is a hírszerzés, nem tudják, hogy melyik ez a fertőzött katona. Ha megtalálják, akkor gondos orvosi kezeléssel a fertőzés megállítható, és a katona is meggyógyítható.

Nem marad más számukra, mint hogy vért vesznek a katonáktól, és a vérhez alkalmas reagenst adva, kiderül, hogy van-e a vérben vírus, vagy sem. Sajnos ez lassú eljárás, 1 nap kell, mire vegyszer hatása értékelhető. Ez a vizsgálat, a reagens vegyszer ráadásul nagyon költséges. Ha egyesével mind a 128 katonán elvégzik a vizsgálatot, a hadsereg költségvetése csődbe jut.

Hogyan lehetne a vizsgálatok számát jelentősen csökkenteni, akár 10-nél kevesebb vizsgálatot megtalálni a fertőzött katonát?

11. Bajnokság-szervezés. Szervezd meg egy 8 csapatból álló bajnokság fordulót úgy, hogy mindenki mindenkivel egy mérkőzést játsszon, és minden fordulóban 4 mérkőzést játsszanak.

Euler-kör, Hamilton-kör

Nagyapáim dédapjai ugyanazok-e, mint dédapáim nagyapjai?

Königsbergi hidak (1736). Egy vonallal megrajzolható ábrák. (Az első gráfelméleti monográfiát König Dénes írta, 1936-ban.)

Hamilton kör: dodekaéder-játék.

Gráf: pontokból és bizonyos pontokat összekötő élekből álló alakzat.

Véges gráf: ha pontjainak száma véges.

Hurokél: az olyan él, amelynek két végpontja azonos.

Egyszerű gráf: az olyan gráf, melyben nincs többszörös él és hurokél.

Euler-vonal: olyan zárt vonal, amely a gráf minden élet pontosan egyszer futja be. (*Euler-kör* és *Euler-út* fogalma is.)

Hamilton-kör: olyan kör, amely a gráf minden csúcán egyszer és csak egyszer halad át.

Pont (csúcs) fokszáma (foka): amennyi él indul abból a pontból.

Tétel: Egy G gráfban akkor és csak akkor van Euler-kör, ha G minden pontjának fokszáma páros, és G összefüggő. A G összefüggő gráfban akkor és csak akkor van Euler-út, ha két csúcának fokszáma páratlan és a többi fokszám páros.

Hamilton-kör létezésére több elégséges feltételt adtak. Jól kezelhető szükséges és elégséges feltétel azonban nem ismeretes.

Tétel: [Dirac] Ha egy n pontú G gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.

A gráfelmélet egyszerű tételei

Teljes gráf: az olyan véges gráf, amelynek bármely két csúcsa között pontosan egy él vezet.

Reguláris gráf: ha egy gráf minden pontjának fokszáma ugyanaz a k szám, akkor a gráfot k -adfokú reguláris gráfnak nevezzük.

Összefüggő gráf: ha egy gráf bármely csúcsából bármely másikba eljuthatunk egymáshoz csatlakozó éleken, akkor összefüggő gráfról beszélünk.

Komplementer gráf: Egy adott G gráf komplemente az a G' gráf, melynek a csúcsai ugyanazok, mint G -nek, továbbá a két gráfnak nincs közös éle, és együtt teljes gráfot alkotnak.

Részgráf: a G' a G részgráfja, ha G' a G bizonyos éleiből és csúcsaiból áll.

Izolált pont: olyan csúcs, amelynek a fokszáma 0.

Izomorf gráfok: a G és G' gráfok izomorfak, ha az $1, 2, \dots, n$ számokkal mindkét gráf csúcsai úgy megszámozhatók, hogy mindkét gráfban ugyanott legyenek élek. (Tehát, ha i és j között van él G -ben, akkor G' -ben is, illetve ha G -ben nincs él i és j között, akkor G' -ben sincs.)

1. Adjon meg olyan 8 csúcsú összefüggő egyszerű gráfot, amelynek 16 éle van.
2. Adjon meg olyan nem összefüggő 6 csúcsú gráfot, amely gráf minden csúcsának 2 a fokszáma.
3. Egy gráf csúcsai: 2, 3, 4, 6, 8, 9; kösd össze, ha van 1-nél nagyobb közös osztója. Van-e a gráfnak teljes négyszöge? Van-e Euler-vonala, Hamilton-köre a gráfnak?
4. Adjon meg 6 csúcsú 3-adrendű reguláris gráfot.
5. Adjon meg olyan 4 csúcsú gráfot, amely izomorf a komplementerével.
6. Rajzolja fel az összes 3 csúcsú páronként nem izomorf egyszerű gráfot.
7. Rajzoljon fel olyan 5 csúcsú gráfot, amelyben nincs háromszög, és nincs 3 izolált pont.

1. **Tétel:** Minden gráfban a fokszámok összege páros.
2. **Tétel:** Minden gráfban páros a páratlan fokszámú pontok száma.
3. **Tétel:** A legalább 2-pontú egyszerű gráfnak van két azonos fokszámú pontja.
4. **Tétel:** A teljes n -gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$.
5. **Tétel:** Gráf vagy komplementere összefüggő.

8. Mutassuk meg, hogy véges gráfban mindig van két olyan pont, amelyek fokszáma megegyezik. (Ha megengedünk többszörös éleket, akkor az állítás nem igaz. Keressünk ellenpéldát.)

9. Egy teremben 30 ember gyűlt össze. Vannak közöttük olyanok, akik ismerik egymást, és olyanok is, akik nem (az ismeretség kölcsönös). Mutassuk meg, hogy a 30 ember között van 2 olyan, akiknek a teremben azonos számú ismerőse van!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1998., 5. osztályosok versenye

10. Adott a síkon 100 pont, amelyek között semelyik három nincs egy egyenesen. A pontokat összekötő szakaszok mindegyikét pirosra vagy kékre festjük.

Igazold, hogy van a pontok között legalább kettő olyan, amelyből azonos számú piros szakasz indul ki!

Varga Tamás Matematikaverseny országos döntője, 1994/95., 7. osztályosok versenye

11. Egy társaságban némely emberek kezét fogtak egymással. Mutassuk meg, hogy biztosan van közöttük kettő, aki ugyanannyi emberrel fogott kezét.

12. a) Van-e olyan 10 pontú gráf, amelyben minden pont fokszáma 3?
- b) Van-e olyan 11 pontú gráf, amelyben minden pont fokszáma 3?

13. Egy 7 csúcsú gráfban az élek száma 15, és 6 csúcsának a fokszámai rendre: 3, 3, 4, 4, 5, 5. Mennyi a hetedik csúcs fokszáma?

14. Felsorolom egy 5 csúcsú egyszerű gráf csúcsainak fokszámait, öt különböző esetet. Ezek közül az egyik kakukktójás, mert nem létezik olyan gráf. Melyik ez?

- (A) 1, 1, 1, 1, 0 (B) 2, 2, 2, 2, 2 (C) 3, 3, 3, 3, 3 (D) 2, 2, 3, 3, 4 (E) 2, 2, 2, 4, 4

15. Késő este egy autóbuzson heten utaztak, mindenki a végállomáson szállt le. A játékos kedvű sofőr mindegyik utastól megkérdezte, hány embert ismer utastársai közül. Sorra a következő válaszokat kapta: 1, 2, 3, 6, 5, 3, 1. A sofőr rövid gondolkodás után rájött, valaki nem mondott igazat. Hogyan okoskodott a sofőr? (Az ismeretség kölcsönös!)

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója 1993., 7. osztályosok versenye

Síkbeli gráfok. Gráfok színezése

A három ház-három kút probléma. Síkbarajzolható gráfok.

Kuratowski-tétel: Egy gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz teljes ötszög részgráfot, és nincs 3 ház-3 kút részgráfja.

Négyszín-sejtés. (Ma már: négyszíntétel.)

1852-ben Francis Guthrie Britannia térképén a grófságokat színezve azt találta, hogy 3 szín kevés ehhez, míg 4 színnel jól színezhető a térkép (azaz, a szomszédos tartományok különböző színűek). Hamarosan eljutott a kérdés matematikusokhoz (De Morgan, Hamilton), hogy vajon kiszínezhető-e minden térkép 4 színnel. 1879-ben Kempe közölt egy bizonyítást erre, amelyről 1890-ben Heawood megmutatta, hogy hibás, ám azon az úton 5 színre igazolható az állítás. A kutatások arra vezettek, hogy 1476 alapesetet kell megvizsgálni, és ez 1976-ban megtörtént. Appel és Haken számítógépet is használva bebizonyította a négyszínsejtést. A számítógép 1200 órán át dolgozott, a bizonyítás 800 oldalas. A „szép bizonyítást” még ma is keresik.

Kromatikus szám. Egy gráf csúcsait úgy színezzük, hogy ha két csúcsot él köt össze, akkor azok különböző színűek. Az ilyen színezéshez szükséges színek minimális száma a gráf kromatikus száma.

1. Adott egy gráf:

a) a csúcsai: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Két csúcsot kössön össze, ha a hozzájuk tartozó számok szorzata páros.

b) a csúcsai: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Két csúcsot kössön össze, ha a hozzájuk tartozó számok összege páros.

c) a csúcsai: 2, 3, 4, 6, 8, 9; köss össze két csúcsot, ha van 1-nél nagyobb közös osztója.

A kapott gráf síkbarajzolható-e?

Van-e Euler-vonala?

Van-e Hamilton-köre?

Van-e teljes négyszöge?

Mennyi a kromatikus száma?

2. Rajzoljon fel olyan 6 csúcsú gráfot, amelynek kromatikus száma 2, ill. olyat, amelynek 3.

3. Rajzolja meg a 3 ház-3 kút gráf komplementerét.

A 3 ház-3 kút páros gráf-e? Miért?

Mennyi a kromatikus száma a 3 ház-3 kút gráfnak?

Van-e Euler vonala a 3 ház-3 kút gráfnak?

Van-e Hamilton köre a 3 ház-3 kút gráfnak?

4. Van-e olyan 8 élű, 6 csúcsú gráf, amely nem rajzolható síkba?

Az Euler-féle poliédertétel. Fagráfok

Euler poliéder tétele: Ha egy konvex poliéder csúcsainak, lapjainak és éleinek számát rendre c , l és e jelöli, akkor

$$c + l = e + 2$$

Bizonyítjuk.

Fagráf: összefüggő, körmentes, egyszerű gráf.

Tétel: Az n szögpontú G gráf akkor és csak akkor fagráf, ha

(a) összefüggő és körmentes;

vagy (b) bármely két pontját egyetlen út köti össze;

vagy (c) összefüggő és bármely élét elhagyva, két komponensű gráfot kapunk;

vagy (d) összefüggő és $n - 1$ éle van;

vagy (e) összefüggő és $n - 1$ éle van.

Tétel: Ha egy legalább 2 pontú összefüggő gráfnak kevesebb éle van, mint pontja, akkor a gráfnak van elsőfokú pontja.

Tétel: Minden legalább 2 pontú fában van legalább két elsőfokú pont.

Tekintsük a leghosszabb utat. Ennek mindkét végpontja elsőfokú pont. Tegyük fel, hogy az egyik végpont nem elsőfokú, azaz vezet belőle még egy él a fa valamely pontjába. Az út többi pontjába nem vezethet, hiszen ekkor kört tartalmazna a fa. Ha pedig egy újabb pontba vezet az él, akkor az eredeti utat ezzel megtoldva egy hosszabb utat kapnánk, ez pedig ellentmond a feltevésnek.

Tétel: Az n -pontú egyszerű összefüggő gráfnak legalább $n - 1$ éle van.
Biz. indukcióval.

Tétel: Egy n -pontú összefüggő gráf pontosan akkor fa, ha $n - 1$ éle van.

Szélsőérték-problémák: Ramsey, Turán

Szélsőérték-problémák:

n csúcsú gráfban legfeljebb hány él lehet, ha az síkbeli gráf?

n csúcsú gráfban legfeljebb hány él lehet, ha a gráf kromatikus száma 2?

1. Rajzoljon egy 7 csúcsú, körmentes gráfot a lehető legtöbb éllel.

2. Legfeljebb hány éle van egy 10 csúcsú, háromszögmentes gráfnak?

3. Legfeljebb hány éle van egy 12 csúcsú, négyszögmentes gráfnak?

Turán-tétele: az n csúcsú gráfban maximálisan $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ él lehet anélkül, hogy háromszöget tartalmazzon.

Ramsey-típusú feladatok

Legelőször 1894-ben rendezték meg a ma *Kürschák-versenynek* nevezett matematikaversenyt középiskolásoknak. Az 1947. évi verseny három feladatának egyike a következő:

1. **Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy hattagú társaságnak mindig van vagy három olyan tagja, akik egymással ismeretségben vannak, vagy három olyan tagja, akik között nincs két ismeretségben levő.

A feladatra a bizonyítást Friderikusz Sándor: Szigorúan nyilvános (Budapest, 1988) c. könyvéből idézzük, az Erdős Pállal, a „magyar matematika utazó nagykövetével” készített riportból: *Egy Erdős-feladvány: egy vacsora vendégeit találomra választjuk ki a telefonkönyvből, de az elfogadott szabály, hogy vagy legalább háromnak ismernie kell egymást, vagy legalább 3-nak nem szabad ismernie egymást. Legalább hány vendég kell ahhoz, hogy eleget tegyünk ezeknek az elfogadott szabályoknak?*

Az Erdős-féle megoldás a következő: kezdjük egy 6 tagú asztaltársasággal. Az olvasó képzelje magát közéjük. Ha a másik 5 vendégre néz, akkor vagy legalább 3 ismerőst lát, vagy legalább 3 ismeretlent. Mondjuk, hogy 3 ismeretlennel ül szemközt (a bizonyítás úgymint egyforma). Vegyük sorra a lehetőségeket: a) mindhárom vendég ismeri egymást – tehát ők alkotják az ismerősök hármását; b) a 3 ember közül nem mindenki ismeri a többit, lennie kell tehát közöttük 2-nek, aki még nem találkozott. Mivel ön nem ismeri őket, önnel együtt ez a páros a kölcsönös ismeretlenek hármását alkotja.

Mindebből az következik, hogy 6 vendég mindig elég hozzá, hogy előforduljon az egyik vagy a másik hármás. Azt is be lehet bizonyítani, hogy 5 vendég nem mindig elég. Az egész feladvány egyelőre pofonegyszerűnek látszik. De nem sokáig marad az.

Tegyük fel, hogy nem 3, hanem 4 kölcsönös ismerőst vagy kölcsönös ismeretlent akarunk látni a vacsoránál! Némi erőfeszítéssel rá lehet jönni a megoldásra: legalább 18 vendégre van szükség. És ha legalább 5 kölcsönösen ismerőst vagy ismeretlen jelenlétét óhajtjuk? Itt már megáll a tudomány. Senki sem tudja pontosan meghatározni a szükséges vendégszámot. Erdős Pál szerint a válasz valahol 42 és 55 között van. Állítólag 40 napig tartó számítás vezetett ehhez a becsléshez, de pontos eredmény nincs.

Na és ha 6 kölcsönös barátot vagy idegent akarunk meghívni? A probléma szinte már komikus: a helyes vendégszám 100 körül van. A kérdés közvetlen megközelítésére nincsen mód.

Staar Gyula: A megélt matematika (Gondolat, 1990) c. kötetben írja a következőket az Erdős Pállal készített beszélgetésben (A világegyetemi tanár): Erdős hátat fordít a táblának. – Legyen n és k pozitív egész szám – mondja. Legyen n az a minimális vendégszám, amely biztosítja k számú kölcsönös ismerős vagy ismeretlen jelenlétét. Ha megjelenne egy gonosz szellem, s így szólna: „Mondd meg az n értékét, ha k értéke 5, máskülönben elpusztítom az emberiséget!” – akkor tanácsos lenne munkába állítani a világ

minden számítógépét, hogy megoldják a feladatot. Ha azonban a gonosz szellem $k = 6$ -hoz tudakolja az n értékét, akkor jobb, ha inkább a gonosz szellemet próbáljuk meg eltenni láb alól. Ha pedig, majd egyszer, pusztán gondolkodással megeljük a helyes választ, nem kell többé félnünk tőle, mert olyan okosak lettünk, hogy már nem árthat nekünk.

Ugyanerről más köntösben a Népszabadság 1985. szeptember 13-i (pénteki) számában is olvashatunk: Egyszer, az azóta elhunyt Szalai Sándor akadémikus, a neves szociológus izgatottan telefonált egyik matematikusunk, T. Sós Vera lakására. (Igaz, mikor nem volt izgatott Szalai Sándor?) Elmondta, hogy százszámra végeztek felméréseket középiskolások között, és minden osztályban találtak legalább négy egymással barátkozó vagy éppen legalább négy egymástól elzárkózó diákot. Ha más szociológus foglalkozik ezzel a kérdéssel, bizonyára szép elmélet születik belőle a „klikkekről”. Szalai azonban matematikusként kezdte pályáját, és megvolt benne a matematikai intelligencia: ez tétette föl vele a kérdést, hogy vajon szociológiai vagy logikai, illetve matematikai törvényszerűség van-e a háttérben.

Az utóbbiról van szó. Szalai ezt nem ismerhette, aminthogy nem minden matematikus ismeri: ez a Ramsey-tétel, illetve mára már a Ramsey-elmélet egyik tétele, amellyel T. Sós Vera még iskoláskorában, egy Kürschák-matematikaversenyen találkozott. Ez az oka az említett „klikkek”, illetve „antiklikkek” szükségszerű létrejöttének.

Érezhető a Ramsey-tételben az, amit a filozófus Hegel fogalmazott meg: „Mennyiségi változás minőségi változást eredményez.”

Ha jobban megnézzük, akkor észrevesszük a hasonlóságot az 1. Feladat és az 1993-ban a Kalmár László Matematikaverseny országos döntőjén 8. osztályosoknak kitűzött következő feladat között:

2. Feladat. Adott a síkon 6 pont, ezek közül semelyik 3 sem esik egy egyenesbe. Ketten, A és B felváltva meghúznak egy-egy adott pontpárt összekötő, még be nem rajzolt szakaszt, A pirossal, B kézzel. Az veszt, aki először kénytelen olyan szakaszt meghúzni, hogy így saját színével háromszög keletkezik. Lehet-e döntetlen ebben a játékban? És 5 pont esetén?

Ramsey-tétel: Minden 6 pontú gráfban van 3 olyan pont, hogy bármely kettő között fut él, vagy van 3 olyan pont, hogy köztük nem fut él.

Minden (n, k) természetes számpárhoz létezik olyan $R(n, k)$ természetes szám, hogy bármely $R(n, k)$ pontú gráfban vagy van n pontú teljes részgráf, vagy van k pontú üres részgráf, azaz k izolált pont (k olyan pont, melyek közül semelyik kettő sincs összekötve).

$R(3; 3) = 6$, $R(3; 4) = 9$, $R(3; 5) = 14$, $R(3; 6) = 18$, $R(3; 7) = 23$, $R(3; 8) = 28$, $R(3; 9) = 36$,
 $R(4; 4) = 18$, $R(4; 5) = 25$, $43 \leq R(5; 5) \leq 52$, $102 \leq R(6; 6) \leq 169$.

A házassági probléma

A házasság-problémát König Dénes vetette fel. Arthur király udvarában él n lovag és n udvarhölgy. A király szeretné összeházasítani őket oly módon, hogy minden házasság kölcsönös szimpátiára épüljön, ezért megbízza Merlint, a varázslót, mondja meg, lehetséges-e ez.

A bizottsági elnökök problémája. Tekintsünk néhány bizottságot és azok tagjait. Egy ember szerepelhet több bizottságban is. Minden bizottság élére elnököt kell választani a tagjai közül úgy, hogy egy ember legfeljebb egy bizottságnak legyen az elnöke.

Ez a hozzárendelési feladat, melynek megoldására (maximális élszámú párosítás) hatékony algoritmust ismerünk, ezt nevezik magyar módszernek.

König–Hall-tétel (házassági tétel): Egy n nő és n férfi alkotta gráfban, ha minden k számú nő legalább k férfit ismer, akkor van lehetőség a párosításra (házaspárok kijelölésére).

Páros gráf: ha a csúcsok két közös elem nélküli halmazba oszthatók úgy, hogy élek csak különböző halmazba tartozó csúcsokat kötnek össze.

Párosítás: az éleknek egy olyan P halmaza, ha semelyik két élnek sincs közös végpontja

Független érendszer: páronként közös pont nélküli élek.

Lefogó ponthalmaz: minden él legalább egyik végpontja a lefogó ponthalmazban van.

König Dénes tétele: Minden páros gráfban a független élek maximális száma egyenlő a lefogó pontok minimális számával.