Kombinatorika feladatok

1. Tündérországban csak 2 magánhangzót és 2 mássalhangzót használnak. A szavakban legalább 1 mássalhangzó és legalább 1 magánhangzó van. Hány különböző hárombetűs szó létezik Tündérországban, ha 1 szóban azonos betűk nincsenek?

(A) 4 (B) 12 (C) 16 (D) 24 (E) 36

2. Adott hat pont, amelyek közül semelyik három sincs egy egyenesen. Hány négyszöget határoznak meg ezek a pontok? (A négyszögek mindegyik csúcsát az adott hat pontból választjuk ki.)

(A) 36 (B) 30 (C) 15 (D) 6 (E) Egyik sem.

3. Hány olyan háromjegyű szám van, melyben a számjegyek csökkenő vagy növekvő sorrendben követik egymást?

(A) 120 (B) 168 (C) 204 (D) 216 (E) 240

4. Egy szöcske ugrál a számegyenesen. Ugrásainak hossza 1 egység. A számegyenesen a 0-t jelölő pontból a +5-öt jelölő pontba 9 ugrással jutott el. Hányféleképpen tehette ezt meg?

(A) 18 (B) 25 (C) 36 (D) 45 (E) 72

5. Az $ANGOL$ szó betűinek elkészítjük mind a 120 lehetséges sorrendjét és ABC-rendbe szedve egymás után írjuk. Mi a 86. szó utolsó betűje ebben a listában?

(A) A (B) N (C) G (D) O (E) L

6. Egy építőkészlet 96 köve kétféle anyagból készül (műanyag és fa), 3 méretben (kicsi, közepes és nagy), 4 színben (kék, piros, zöld, sárga) és 4 formában (kör, hatszög, négyzet, háromszög). Hány olyan kő van a készletben, mely a „műanyag közepes nagyságú piros kör”-től pontosan két tulajdonságban tér el?

(A) 29 (B) 39 (C) 48 (D) 56 (E) 62

7. Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szorzata legfeljebb 5?

Zrínyi Ilona Matematikaverseny országos döntője, 1998., 5. osztályosok versenye

8. A háromjegyű számok között melyikből van több, amelyiknek minden számjegye páros, vagy amelyiknek minden számjegye páratlan? Miért?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1996., 5. osztályosok versenye

9. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben a páratlan számjegyek száma páratlan? Állításodat indokold!

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1993., 5. osztályosok versenye

10. Hányféleképpen választhatunk ki 1 és 20 között 2 egész számot úgy, hogy összegük páros legyen?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1994., 6. osztályosok versenye

11. Egy jégbarlang bejáratától öt úton juthatunk el az első terembe, innen hat út vezet a másodikba, majd innen három út a harmadikba. Hányféle úton juthatunk el az első teremből a harmadik terembe?

(A) 3 (B) 5 (C) 18 (D) 30 (E) 90

12. Hány egyenes húzható egy kocka nyolc csúcsán át úgy, hogy minden egyenes két csúcsot tartalmazzon?

(A) 4 (B) 12 (C) 20 (D) 24 (E) 28

13. 4 fiú és 3 lány úgy ült le egy 7 személyes padra, hogy sem két lány, sem két fiú nem ült egymás mellett. Hány ültetési sorrend képzelhető el?

(A) 24 (B) 30 (C) 35 (D) 21 (E) 144

14. Hányféleképp tudsz sorbarakni 5 egybevágó háromszöglapot, melyek közül 2 piros és 3 kék?

(A) 11 (B) 10 (C) 9 (D) 8 (E) 74

15. Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek egyik és csak az egyik számjegye *a)* 5-ös; *b)* 0?

16. Hány olyan háromjegyű szám van, amely számban nincs *a)* 5-ös; *b)* 0 számjegy?

17. Hány olyan háromjegyű szám van, amely számban van *a)* 5-ös; *b)* 0 számjegy?

18. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben szerepel a 0 számjegy?

Zrínyi Ilona Matematikaverseny megyei fordulója, 1993., 5. osztályosok versenye

19. Hány olyan hatjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek összege 3?

Zrínyi Ilona Matematikaverseny megyei fordulója, 1997., 6. osztályosok versenye

20. Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, melynek minden számjegye kisebb, mint 4?

Zrínyi Ilona Matematikaverseny megyei fordulója, 1996., 5. osztályosok versenye

21. Adott a síkon 10 pont úgy, hogy közülük semelyik három sincs egy egyenesen. Hány olyan egyenes van, amely az adott pontok közül kettőn átmegy?

22. Az 1, 2, 2, 3, 3, 3 számjegyek különböző sorrendjeivel hány

a) 6-jegyű szám; *b)* 6-jegyű páros szám képezhető?

23. n elem harmadosztályú ismétléses és ismétlés nélküli variációi számának különbsége 65. Határozzuk meg n értékét!

24. Adott a síkon 20 pont, amelyek közül bármely három nem illeszkedik egy egyenesre. Hány háromszöget határoznak meg ezek a pontok?

25. Egy 15 fős társaság tagjai között 5 különböző könyvet sorsolnak ki. Hányféleképp végződhet a sorsolás, ha

a) egy személy csak egy könyvet nyerhet; *b)* egy személy több könyvet is nyerhet?

26. Egy csomag magyar kártyából kihúzunk 10 lapot. Hány esetben lesz a kihúzott lapok között

a) legalább 7 zöld; *b)* legfeljebb 7 zöld?

27. Az 5-ös lottón hány olyan húzás lehetséges, amelyben a kihúzott számok között

a) szerepel a 7 és a 13; *b)* nem szerepel a 7 és a 13?

28. Számold össze, hány pozitív osztója van a 72-nek!

29. Számold össze, hány pozitív osztója van 16 200-nak!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1991., 5. osztályosok versenye

30. Két párhuzamos egyenes egyikén 5, a másikon 7 pontot jelöltünk meg. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai ezen pontok közül valók?

31. Adott a síkon két párhuzamos egyenes, az egyiken 10, a másikon 20 pont. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1995., 7. osztályosok versenye

32. Egy iskolai rendezvényen 12 lány és 15 fiú vesz részt. Hányféleképpen választhatunk ki közülük négy táncoló párt?

33. 15 fiút és 15 lányt sorshúzással két azonos létszámú csoportba osztunk. Hányféle olyan sorsolás lehet, amikor az egyik csoportba 5 fiú és 10 lány kerül?

34. Egy csomag magyar kártyából kihúzunk 5 lapot. Hányféleképp történhet ez, ha a kihúzott lapok között legalább 3 piros lap van?

35. A szultán születésnapján néhány rabot szabadon akar bocsátani. A 100 cellás börtönben 100 börtönőr van. Az 1. őr minden ajtót kinyit. A 2. őr minden 2. ajtót bezár. A 3. őr minden 3. ajtót kinyit, ha zárva volt, s bezár, ha nyitva volt. Hasonlóan nyit-zár a többi őr is. Mely cellák ajtaja marad nyitva?

36. Egy körmérkőzéses versenyen (mindenki mindenkivel játszik) eddig 65 mérkőzést játszottak le és még mindenkinek 2 mérkőzése van hátra. Hányan indultak a versenyen?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1992., 7. osztályosok versenye

37. Egy körmérkőzéses versenyen – mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik – eddig 25 mérkőzést játszottak le és még mindenkinek 4 mérkőzése van hátra. Hányan indultak a versenyen?

38. Egy körmérkőzéses versenyen induló játékosok közül ketten lemondták a részvételüket, ezért 17-tel kevesebb mérkőzésre került sor. Hány játékos indult a bajnokságon?

39. Egy körmérkőzéses asztalitenisz bajnokság szervezői a mérkőzések számát ötvennel kívánták csökkenteni, ezért 4 versenyzővel kevesebbet hívtak meg. Hányan vettek részt a bajnokságon?

40. A sakktáblára hányféleképpen lehet feltenni 8 bástyát úgy, hogy ne üssék egymást?

41. Melyek azok a háromjegyű számok, amelyeknek pontosan 5 pozitív osztója van?

42. Egy csomag magyar kártyából kihúzunk 10 lapot. Hány esetben lesz a kihúzott lapok között

a) pontosan 2 zöld; *b)* pontosan 2 zöld és 3 piros?

43. A 128, 69, 117, 51, 26, 40, 16, 37, ... sorozatot úgy képezzük, hogy az utolsó szám számjegyeinek négyzetét összeadjuk, s ez lesz a következő elem a sorozatban. (Például 16 után $1^2 + 6^2 = 1 + 36 = 37$ következik.) Melyik szám lesz a sorozat 100. eleme?

44. Egy számsorozat első tagja 2, második 3, további tagjait pedig úgy képezzük, hogy minden egyes tag 1-gyel kisebb legyen, mint a két szomszédjának szorzata.

Mi lesz a sorozat 100. eleme?

45. Egy sorozat első eleme 2, a második 3. A következő elemet mindig úgy számoljuk, hogy az utolsóból kivonjuk az az előtti elemet. Így a harmadik elem: $3 - 2 = 1$.

Mi lesz a sorozat 100. eleme?

46. A 3, 6, 12, 5, 10, 1, … sorozat következő elemét úgy kapjuk az előzőből, hogy annak utolsó számjegyét megduplázzuk és ehhez hozzáadjuk az utolsó jegy elhagyásával kapott számot. (Például 134 után a $2 \cdot 4 + 13 = 21$ következne.)

Mi lesz a megkezdett sorozat 100. eleme?

47. Valaki úgy megy fel a lépcsőn, hogy egy-egy lépésével vagy 1, vagy 2 lépcsőfokot lép át. Hányféleképpen juthat fel a 10. lépcsőfokra?

48. Hányféleképpen lehet egy 2×10-es téglalapot 2×1-es dominókkal kirakni?

49. Hány olyan nyolc számból álló, csak 0-t vagy 1-et tartalmazó sorozat van, amelyben nem fordul elő két szomszédos 1-es?

50. Igazoljuk a Fibonacci-sorozat alábbi tulajdonságait. ($f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$)

a) $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

c) $f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

d) $f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \cdots + nf_n = (n-1)f_{n+2} - f_{n+1} + 2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

51. Igazoljuk a következő oszthatóságokat.

a) $4 \mid 7^n + 3^{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots,$

b) $9 \mid 7^n + 3n - 1$, $n = 1, 2, \ldots,$

c) $7 \mid 5 \cdot 9^{n-1} + 2^{4n-3}$, $n = 1, 2, \ldots,$

d) $17 \mid 7 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}$, $n = 1, 2, \ldots,$

e) $19 \mid 5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$, $n = 1, 2, \ldots,$

f) $17 \mid 6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots,$

g) $9 \mid n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$, $n = 1,\ 2,\ \ldots\ ,$

h) $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$, $n = 1,\ 2,\ \ldots\ ,$

i) $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$, $n = 0,\ 1,\ \ldots\ ,$

j) $16 \mid 3^{2n+2} + 8n - 9$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$

52. Tudjuk, hogy $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 3a_n - 2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Mutassuk meg, hogy $a_n = 3^n + 1$.

53. Tudjuk, hogy $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Mutassuk meg, hogy $a_n = 3^n - 1$.

54. Tudjuk, hogy $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Mutassuk meg, hogy $a_n = 3^n - 2^n$.

55. Tudjuk, hogy $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_{n+2} = 9a_{n+1} - 20a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Mutassuk meg, hogy $a_n = 5^n - 4^n$.

56. Tudjuk, hogy $a_1 = 3$, $a_2 = 15$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Mutassuk meg, hogy $a_n = 4^n - 1$.

57. Tudjuk, hogy $a_1 = 29$, $a_2 = 85$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Mutassuk meg, hogy $a_n = 2^n + 3^{n+2}$.

58. Tudjuk, hogy $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Mutassuk meg, hogy $a_n = 2^n + n$.

59. Néhány egyenes a síkot tartományokra bontja. Mutassuk meg, hogy ezek a részek két színnel kiszínezhetők úgy, hogy az oldalszomszédos tartományok különböző színűek legyenek.

60. Mutassuk meg, hogy $(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

61. Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

62. Mutassuk meg, hogy egy négyzet feldarabolható n db négyzetre, ahol $n \geq 6$.

63. Mutassuk meg, hogy egy háromszög feldarabolható n db, hozzá hasonló háromszögre, ahol $n \geq 6$.

64. Mutassuk meg, hogy $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

65. Mutassuk meg, hogy $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, ha $n \in \mathbb{N}$ és $x \geq -1$ *(Bernoulli-egyenlőtlenség)*.

66. Igazoljuk, hogy $6 \mid n^3 - n$, $n = 1, 2, \ldots$

67. Igazoljuk, hogy $p \mid n^p - n$, ahol p prímszám, $n \in \mathbb{N}$ *(kis Fermat-tétel)*.

68. Mutasd meg, hogy $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$.

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 2004., 7. osztályosok versenye

69. Mutassuk meg, hogy $2^n > n^2$, ha $n > 4$ egész szám.

70. *Hol a hiba a következő bizonyításban?*

Állítás: Bármely n pozitív egészre $a^{n-1} = 1$, ahol $a > 0$ tetszőleges szám.

Bizonyítás: Ha $n = 1$, akkor $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$.

Ha feltesszük, hogy a tétel igaz az 1, 2, … , n esetre, akkor azt kapjuk, hogy $a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$; tehát a tétel $(n+1)$ esetére is igaz.

71. A bal felső sarokból indulva előre, ill. lefele lépkedve hányféleképpen olvasható ki a *KOMBINATORIKA* szó?

K	O	M	B	I	N	A	T	O
O	M	B	I	N	A	T	O	R
M	B	I	N	A	T	O	R	I
B	I	N	A	T	O	R	I	K
I	N	A	T	O	R	I	K	A

72. Hányféleképpen juthatunk el A-ból B-be, ha az X-el jelölt mezőkre nem léphetünk és lépni csak oldalszomszédos mezőre lehet jobbra vagy lefele?

A				
		X		
X				X
		X		
				B

73. Hányféleképpen olvashatja le Kriszta kedvenc macskája nevét az ábráról, ha csak jobbra vagy lefelé léphet?

M	A	F		
A	F	F	I	A
		I	A	
		A		

74. Hányféle úton olvasható ki az *ABACUS* szó az ábrán?

A
B B
A A A
C C C C
U U U U U
S S S S S S

75. A sorozatokban milyen szám illik a kérdőjel helyére?

a) 7, 11, 8, 12, 9, 13, ?, ...

b) 17, 15, 20, 18, 23, 21, ?, ...

c) 1, 2, 4, 5, 10, 11, 22, ?, ...

d) 1, 2, 6, 12, 36, 72, ?, ...

e) 4, 7, 21, 24, 72, 75, ?, ...

f) 5, 2, 6, 2, 8, 3, ?, ...

g) 1, 4, 9, 25, ?, 49, ...

h) 100, 81, 64, ?, 36, 25, ...

i) 2, 3, 5, 8, 12, 17, ?, ...

j) 2, 3, 5, 8, 13, 21, ?, ...

k) 1, 2, 6, 24, 120, ?, ...

l) 100, 101, 103, 107, 115, 122, ?, ...

m) 77, 49, 36, 18, ?

76. Számolja ki a binomiális tétel segítségével!

a) $(x-1)^3$; *b)* $(a+2)^4$; *c)* $1,02^4$; *d)* $1,01^5$; *e)* 99^4; *f)* 999^3.

77. Bizonyítsa be a binomiális tétel segítségével a következő összefüggéseket!

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$;

b) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\dots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$;

c) $\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+2^3\binom{n}{3}+\dots+2^n\binom{n}{n}=3^n$.

78. Igazolja az alábbi összefüggéseket!

a) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$; *b)* $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$; *c)* $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$; *d)* $\binom{n}{k}\binom{k}{s}=\binom{n}{s}\binom{n-s}{k-s}$.

79. Adjuk meg az $\{1,2,3,4,5,6\}$ halmaznak minél több olyan részhalmazát, hogy közülük bármely kettőnek az uniója kiadja az alaphalmazt.

80. Adjuk meg az $\{1,2,3,4,5,6\}$ halmaznak minél több olyan részhalmazát, hogy közülük semelyik kettőnek se legyen közös eleme.

81. Adjuk meg az $\{1,2,3,4,5,6\}$ halmaznak minél több olyan részhalmazát, hogy közülük bármely kettőnek egy közös eleme legyen.

82. Adjuk meg az $\{1,2,3,4,5,6\}$ halmaznak minél több olyan részhalmazát, hogy közülük bármely kettőnek egy közös eleme legyen, ám bármely három halmaznak ne legyen közös eleme.

83. Adjuk meg az $\{1,2,3,4,5\}$ halmaznak minél több olyan részhalmazát, hogy közülük egyik se tartalmazza részként valamely másikat.

84. Egy iskolába 600 diák jár, minden osztályba 30-an. Minden diáknak mindennap 5, minden tanárnak mindennap 4 órája van. Minden órán egy egész osztály és egy tanár van együtt. Hány tanára van az iskolának?

(A) 20 (B) 24 (C) 25 (D) 30 (E) 32

85. Mutassuk meg, hogy egy 9 elemű halmaz bármely négy 7 elemű részhalmazának közös része nem üres.

86. Az A_1, A_2, ... , A_k halmazok végesek. Mutassuk meg, hogy

$$|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_k|\le\frac{1}{k}(|A_1|+|A_2|+\dots+|A_k|).$$

87. Adjuk meg a természetes számoknak három olyan végtelen részhalmazát úgy, hogy a részhalmazok közül bármely kettőnek végtelen sok közös eleme legyen, ám a három részhalmaznak ne legyen közös eleme.

88. Legalább mekkora létszámú az az osztály, ahol biztosan van két olyan diák, akinek ugyanannyi foga van?

89. Egy fiókban 10 fekete és 10 barna, ugyanolyan méretű zokni van. Hány darabot kell találomra kivenni, hogy biztosan legyen köztük egy pár (azonos színű) zokni?

90. Egy zsákban 10 pár fekete és 10 pár barna, ugyanolyan méretű kesztyű van. Hány darabot kell találomra kivenni, hogy biztosan legyen köztük egy pár (azonos színű) kesztyű?

91. Egy dobozban azonos méretű zoknik vannak: összesen öt párra való fehér, tíz párra való fekete és tizenöt párra való barna zokni. Hány darabot kell ezekből látatlanban kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük egy pár? (A jobb- és ballábas zoknikat nem különböztetjük meg.)

Zrínyi Ilona Matematikaverseny megyei fordulója 1991., 6. osztályosok versenye

92. Van 70 golyónk, közülük 20 piros, 20 zöld, 20 sárga, és a maradék 10 közül néhány fekete, a többi fehér. Legkevesebb hány darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte 10 azonos színű golyó?

93. Egy átlátszatlan zacskóban 18 db golyó van, 5 piros, 6 fehér és 7 zöld színű. Hány darabot kell kivenni közülük bekötött szemmel úgy, hogy biztosan legyen a kivettek között

a) mindhárom színű golyóból 3 darab;

b) mindhárom színű golyóból;

c) legyen valamelyik színből az összes golyó?

94. Leírtam az összes háromjegyű pozitív egész számot egy-egy kártyára, és egy üres kalapba tettem őket. Legkevesebb hány számkártyát kell becsukott szemmel kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük kettő, melyben megegyezik a számjegyek összege?

95. Mutasd meg, hogy öt, 10-nél nagyobb prímszám közül mindig kiválasztható kettő, melyek különbsége osztható 10-zel!

96. Hány olyan szám van az 1, 2, 3, ... , 99, 100 számok között, amely a 2 és a 3 számok közül legalább az egyikkel osztható?

97. Hány olyan szám van az 1, 2, 3, ... , 99, 100 számok között, amely a 2 és a 3 számok közül csak az egyikkel osztható?

98. Hány olyan szám van az 1, 2, 3, ... , 99, 100 számok között, amely a 2, 3 és az 5 számok közül legalább az egyikkel osztható?

99. Hány olyan szám van az 1, 2, 3, ... , 99, 100 számok között, amely a 2, 3 és az 5 számok közül csak az egyikkel osztható?

100. Hány olyan szám van az első 1995 pozitív egész szám között, amelyik a 3, 4 és 5 számok közül legfeljebb kettőnek többszöröse?

(A) 33 (B) 865 (C) 1164 (D) 1197 (E) 1962

101. Az első 1000 természetes szám közül hány olyan szám van, amely sem 2-vel, sem 3-mal nem osztható?

(A) 166 (B) 167 (C) 333 (D) 500 (E) 833

102. Egy fordító asztalán lévő 12 db könyv közül 7 db nem francia nyelvű és 4 db regény. A regények közül 3 db nem francia nyelvű. Hány olyan könyv van, amely francia nyelvű, de nem regény?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

103. Hány olyan pozitív egész szám van, amely osztója a 2000 vagy a 2005 számok valamelyikének?

104. Egy zsákban 11 piros, 8 fehér és 6 fekete golyó van. Hány golyót kell kivenni véletlenszerűen, hogy biztosan legyen közte

a) fehér vagy fekete;
b) fehér és fekete;
c) két különböző szín;
d) valamelyik színből mind;
e) két színből mindegyik;
f) valamelyik színből három?

105. Egy szabályos (egyenlő oldalú) háromszög alakú céltábla oldala 1 m. A céltáblát 10 lövés eltalálta. Igazold, hogy van két olyan találat, amelyek 34 cm-nél közelebb vannak egymáshoz.

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1984., 5. osztályosok versenye

106. Egy 8 cm oldalú négyzetbe találomra berajzolunk 260 pontot. Bizonyítsd be, hogy a pontok között biztosan lesz kettő, amelyek egymástól mért távolsága 1 cm-nél kisebb.

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1984., 7. osztályosok versenye

107. Egy 30 fős osztály tanulói három nyelvet tanulnak: angolt, németet és franciát. Minden diák legalább egy nyelvet tanul: angolt 14-en, németet 15-en, franciát 11-en, pontosan két nyelvet pedig összesen 6-an. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

108. Egy osztály tanulói három túrát terveztek. Mindegyik túrán 15 tanuló vett részt. Az első túra résztvevői közül heten mentek el a másodikra, nyolcan pedig a harmadikra. A második túra öt résztvevője vett részt a harmadik túrán. Négy olyan tanuló volt, aki háromszor túrázott. Hány tanuló volt jelen a három túrának legalább az egyikén?

(A) 15 (B) 21 (C) 26 (D) 29 (E) 33

109. Hogyan lehet egy 1 kg-os, egy 3 kg-os és egy 9 kg-os mérősúllyal kétkarú mérlegen lemérni 1 és 13 kg között minden lehetséges egész értéket (beleértve az 1 és a 13 kg-ot is)?

110. Négy darab súllyal egy kétkarú mérlegen végig lehet mérni 1 és 40 kg között minden lehetséges egész értéket (beleértve az 1 és a 40 kg-ot is). Melyik ez a négy súly?

111. Van egy 3 literes és egy 5 literes kannánk. Hogyan lehet ezekkel 4 liter vizet kimerni?

112. Hogy lehet pontosan 6 liter vizet hozni a folyóból, ha egy 4 literes és egy 9 literes edényünk van?

113. Két embernek 8 liter bora van egy 8 literes edényben. Hogyan felezhetik meg ezt a bort, ha a 8 literes edényen kívül csak egy 5 literes és egy 3 literes edény áll rendelkezésükre?

114. Nagyapó nem eszik meg akármit: a főtt tojást például pontosan akkor, ha az se több se kevesebb, pontosan 15 percig főtt. Egy nap téged kér meg, hogy készíts neki reggelit, s Te csak két időmérő eszközt találsz az egész házban: két homokórát. A nagyobbikban 11 perc alatt pereg le a homok, a kisebbikben 7 perc alatt.

Hogyan tudod lemérni a 15 percet?

115. Pierre, a pék franciakenyeret süt. Sajnos elromlott az órája, és csak két homokórája van, amivel időt tud mérni. Az egyik homokórával 15 percet, a másikkal 20 percet tud mérni. A kenyeret pontosan 25 percig kell a kemencében tartani.

Hogyan lehet ezt megtenni?

116. Domokos szeretne 13 percet lemérni, azonban az idő méréséhez csak egy 5 és egy 7 perces homokórát tud felhasználni.

Hogyan lehet az 5 és a 7 perces homokórával 13 percet mérni?

117. Egy szobában 10 szék van sorban egymás mellett. A székek kezdetben üresek. Időnként valaki bejön a szobába, leül egy üres székre, és ugyanekkor egyik szomszédja (ha van) fölált és kimegy. Legfeljebb hány szék lehet foglalt egyszerre a szobában?

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója 1991., 7. osztályosok versenye

118. Egy fontos ,,titkos" jelentést 10 oldalra gépeltek le és az egyes oldalakat megkapta egy-egy ember és hazavitte. Mind a 10 embernek van telefonja.

Hogyan lehetne minél kevesebb telefonbeszélgetéssel megszervezni, hogy a jelentés teljes tartalmát mind a 10 ember megismerje? (A telefonbeszélgetéskor a két ember az összes rendelkezésre álló információt kölcsönösen kicseréli.)

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója 1993., 8. osztályosok versenye

119. *Vérvizsgálat:* Bergengócia harcban áll a szomszédos Burkusországgal. Bergengócia kis ország, szegény ország, kicsi hadserege van. 128 fős a hadsereg. A kiváló hírszerzésnek köszönhetően megtudják, hogy a burkusok alattomos módon megfertőzték az egyik bergengóc katonát egy nagyon veszélyes vírussal. A vírus 10 napi lappangás után tovább fertőzi a vírushordozó katonával érintkezőket. Gyorsan cselekedniük kell.

Bármilyen kiváló is a hírszerzés, nem tudják, hogy melyik ez a fertőzött katona. Ha megtalálják, akkor gondos orvosi kezeléssel a fertőzés megállítható, és a katona is meggyógyítható.

Nem marad más számukra, mint hogy vért vesznek a katonáktól, és a vérhez alkalmas reagenst adva, kiderül, hogy van-e a vérben vírus, vagy sem. Sajnos ez lassú eljárás, 1 nap kell, mire vegyszer hatása értékelhető. Ez a vizsgálat, a reagens vegyszer ráadásul nagyon költséges. Ha egyesével mind a 128 katonán elvégzik a vizsgálatot, a hadsereg költségvetése csődbe jut.

Hogyan lehetne a vizsgálatok számát jelentősen csökkenteni, akár 10-nél kevesebb vizsgálattal megtalálni a fertőzött katonát?

120. *A hamis mérleg:* Egy isten háta mögötti helyen, egy kis boltban venni szeretnénk 1 kg lisztet. A boltban van kétkarú mérleg, vannak mérősúlyok, és van liszt is nagyobb mennyiségben.

Azonban, ha a mérleg mindkét serpenyőjébe egy-egy 1 kg-os mérősúlyt teszünk, a mérleg nyelve nincs egyensúlyban. Bárhogyan is szeretnénk, nem tudjuk a mérleget hitelesen beállítani, hamisan mér a mérleg.

Hogyan tudunk kimérni 1 kg lisztet?

121. 3 érme közül egy hamis, s ez könnyebb, mint a másik kettő, amelyek egyenlő súlyúak. Egy kétkarú mérlegen súlyok felhasználása nélkül egy mérlegeléssel keresd ki közülük a hamis érmét.

Hogyan lehet ezt megtenni?

122. 9 érme közül egy hamis, s ez könnyebb, mint a többi (a többi egyenlő súlyú). Egy kétkarú mérlegen súlyok felhasználása nélkül két mérlegeléssel keresd ki közülük a hamis érmét.

Hogyan lehet ezt megtenni?

123. 27 érme közül egy hamis, s ez nehezebb, mint a többi (a többi egyenlő súlyú). Egy kétkarú mérlegen súlyok felhasználása nélkül három mérlegeléssel keresd ki közülük a hamis érmét.

Hogyan lehet ezt megtenni?

124. Van 10 db, páronként különböző súlyú golyónk és egy kétkarú mérlegünk. Válaszd ki minél kevesebb mérlegeléssel a legkönnyebb golyót!

125. Van 8 külsőre egyforma, de csupa különböző súlyú golyónk. Adjon meg olyan módszert, hogy egy kétkarú (súlyok nélküli) mérlegen minél kevesebb méréssel ki tudjuk választani a legnehezebb golyót!

126. Van 8 külsőre egyforma, de csupa különböző súlyú golyónk. Írj le olyan módszert, hogy egy kétkarú (súlyok nélküli) mérlegen minél kevesebb méréssel ki tudjuk választani ennek alapján a két legnehezebb golyót!

Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1994., 7. osztályosok versenye

127. Egy üzletnek 10 bőröndöt szállítottak és hozzájuk egy külön borítékban 10 kulcsot. Minden kulccsal csak egy bőrönd nyitható. Legkevesebb hány próbálkozással találhatjuk meg biztosan a 10 bőrönd mindegyikéhez a megfelelő kulcsot?

(A) 10 (B) 45 (C) 55 (D) 90 (E) 100

128. *Hamis pénzek:* 10 láda pénz között az egyik ládában csupa 11 grammos érme van, a többiben 10 grammosak az érmék. Okos Domokosnak csak egyetlen mérésre van lehetősége, s azután tudnia kell, hogy melyik a nehezebb érméket tartalmazó láda.

A méréshez kap egy egykarú mérleget mérősúlyokkal.

Hogyan találja meg a nehezebb érméket tartalmazó ládát?

129. Az ötágú csillagon megjelölt 10 köröcske közül minél többre helyezzünk korongot. Korongot a következő módon lehet felrakni: valamelyik üres köröcskébe teszünk egyet, majd valamelyik szomszédos köröcskét átugorva (mindegy, hogy ott van korong vagy nincs) és egy üres köröcskére érkezve, a korong ott marad. Ugrani csak valamelyik egyenes vonal mentén lehet.

130. *Három rabló:* Két rabló, Tódor és Domokos úgy szokott megosztozni a zsákmányon, hogy az egyik kétfelé osztja azt, és a másik azt a részt veszi el, amelyiket akarja. Ez így igazságos, mert mindkettőnek megvan a lehetősége arra, hogy megszerezze a zsákmány felét.

Ez így ment éveken át, amikor is befogadták maguk közé Jeromost, s ettől kezdve hármasban jártak fosztogatni. A régi osztozkodási módszer helyett új eljárásra van szükség.

Hogyan osztozkodjon a három rabló, ha azt szeretnék biztosítani, hogy bármelyikük megkapja a zsákmány harmadát, bármit is csinál a másik kettő?

131. Az euklideszi algoritmus segítségével határozza meg az alábbi számpárok legnagyobb közös osztóját.

a) 91, 169 *b)* 96, 320 *c)* 315, 2475 *d)* 802, 2005 *e)* 3737, 131313

132. Az alábbi öt rajz közül melyik az, amelyet nem lehet úgy egyetlen vonallal megrajzolni, hogy közben a ceruzát nem emeljük fel, és egyetlen szakaszon sem haladunk kétszer végig?

133. Adjon meg gráfot, amelynek

a) 6 csúcsa van és mindegyik harmadfokú;

c) 6 csúcsa és 4 éle van.

134. Adjon meg olyan 8 csúcsú összefüggő egyszerű gráfot, amelynek 16 éle van.

135. Adjon meg olyan nem összefüggő 6 csúcsú gráfot, amely gráf minden csúcsának 2 a fokszáma.

136. Egy gráf csúcsai: 2, 3, 4, 6, 8, 9; kösd össze, ha van 1-nél nagyobb közös osztója. Van-e a gráfnak teljes négyszöge? Van-e Euler-vonala, Hamilton-köre a gráfnak?

137. Adjon meg 6 csúcsú 3-adrendű reguláris gráfot.

138. Adjon meg olyan 4 csúcsú gráfot, amely izomorf a komplementerével.

139. Rajzolja fel az összes 3 csúcsú páronként nem izomorf egyszerű gráfot.

140. Hány éle van egy 8 csúcsú útnak? Hány éle van egy 8 csúcsú körnek?

141. Rajzoljon fel olyan 5 csúcsú gráfot, amelyben nincs háromszög, és nincs 3 izolált pont.

142. Van-e Hamilton-kör a Petersen-gráfban?

143. Adott a síkon 100 pont, amelyek között semelyik három nincs egy egyenesen. A pontokat összekötő szakaszok mindegyikét pirosra vagy kékre festjük.

Igazold, hogy van a pontok között legalább kettő olyan, amelyből azonos számú piros szakasz indul ki!

Varga Tamás Matematikaverseny országos döntője, 1994/95., 7. osztályosok versenye

144. Egy társaságban némely emberek kezet fogtak egymással. Mutassuk meg, hogy biztosan van közöttük kettő, aki ugyanannyi emberrel fogott kezet.

145. Mutassuk meg, hogy véges gráfban mindig van két olyan pont, amelyek fokszáma megegyezik. (Ha megengedünk többszörös éleket, akkor az állítás nem igaz. Keressünk ellenpéldát.)

146. Egy teremben 30 ember gyűlt össze. Vannak közöttük olyanok, akik ismerik egymást, és olyanok is, akik nem (az ismeretség kölcsönös). Mutassuk meg, hogy a 30 ember között van 2 olyan, akiknek a teremben azonos számú ismerőse van!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1998., 5. osztályosok versenye

147. *a)* Van-e olyan 10 pontú gráf, amelyben minden pont fokszáma 3?
b) Van-e olyan 11 pontú gráf, amelyben minden pont fokszáma 3?

148. Adjon meg olyan gráfot, amelynek 5 csúcsa van és mindegyik harmadfokú.

149. *a)* Van-e olyan 10 pontú gráf, amelyben minden pont fokszáma 3?
b) Van-e olyan 11 pontú gráf, amelyben minden pont fokszáma 3?

150. Egy 7 csúcsú gráfban az élek száma 15, és 6 csúcsának a fokszámai rendre: 3, 3, 4, 4, 5, 5. Mennyi a hetedik csúcs fokszáma?

151. Felsorolom egy 5 csúcsú egyszerű gráf csúcsainak fokszámait, öt különböző esetet. Ezek közül az egyik kakukktojás, mert nem létezik olyan gráf. Melyik ez?
(A) 1, 1, 1, 1, 0 (B) 2, 2, 2, 2, 2 (C) 3, 3, 3, 3, 3 (D) 2, 2, 3, 3, 4 (E) 2, 2, 2, 4, 4

152. Késő este egy autóbuszon heten utaztak, mindenki a végállomáson szállt le. A játékos kedvű sofőr mindegyik utastól megkérdezte, hány embert ismer utastársai közül. Sorra a következő válaszokat kapta: 1, 2, 3, 6, 5, 3, 1. A sofőr rövid gondolkodás után rájött, valaki nem mondott igazat. Hogyan okoskodott a sofőr? (Az ismeretség kölcsönös!) Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója 1993., 7. osztályosok versenye

153. Bizonyítsuk be, ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráfban van kör.

154. Egy gráf csúcsai: 2, 3, 4, 6, 8, 9; kösd össze, ha van 1-nél nagyobb közös osztója. Ez a gráf síkbarajzolható-e? Mennyi a kromatikus száma?

155. Egy gráf csúcsai: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Két csúcsot kössön össze, ha a hozzájuk tartozó számok szorzata páros. A kapott gráf síkbarajzolható-e? Van-e Euler-vonala? Van-e Hamilton-köre? Van-e teljes négyszöge? Mennyi a kromatikus száma? Páros gráf-e?

156. Rajzoljon fel olyan 6 csúcsú gráfot, amelynek kromatikus száma 2, ill. olyat, amelynek 3.

157. Rajzolja meg a 3 ház-3 kút gráf komplementerét.
A 3 ház–3 kút páros gráf-e? Miért?
Mennyi a kromatikus száma a 3 ház–3 kút gráfnak?
Van-e Euler vonala a 3 ház-3 kút gráfnak?
Van-e Hamilton köre a 3 ház-3 kút gráfnak?

158. Ha a teljes ötszög gráf egyik élét elhagyjuk, a kapott gráf síkbeli-e?

159. Bizonyítsuk be, hogy hattagú társaságnak mindig van vagy három olyan tagja, akik egymással ismeretségben vannak, vagy három olyan tagja, akik között nincs két ismeretségben levő.

160. Rajzoljon egy 7 csúcsú, körmentes gráfot a lehető legtöbb éllel.

161. Legfeljebb hány éle van egy 10 csúcsú, háromszögmentes gráfnak?

162. Legfeljebb hány éle van egy 12 csúcsú, négyszögmentes gráfnak?