KONVEX GEOMETRIA

Tantárgykód: MTB2104

Konvex burok. Képtár probléma

Konvex alakzatok közös része (metszete) is konvex.

Egy alakzat konvex burka az alakzatot tartalmazó konvex alakzatok metszete. (Szemléletesen: ha egy alakzat köré gumiszalagot feszítünk ki, akkor a zsinór a konvex burok alakját veszi fel.)

1. Egy 6 oldalú konvex sokszög szögei között legfeljebb hány hegyesszög lehet?

2. Egy 6 oldalú sokszög szögei között legfeljebb hány hegyesszög lehet?
(Egy n-oldalú sokszögben legfeljebb $\left[\frac{2n}{3}\right] + 1$ hegyesszög lehet.)

3. Mutassuk meg, hogy minden sokszögben van olyan átló, mely a sokszög belsejében halad.

4. Igazoljuk, hogy egy n-oldalú sokszög belső szögeinek összege $(n-2) \cdot 180°$.

5. Adott a síkon 6 pont, közülük semelyik három sem esik egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük három olyan pont, amelyek által meghatározott háromszögnek van egy legalább 120°-os szöge!

6. Adott a síkon 6 pont, közülük semelyik három sem esik egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük két olyan (nem feltétlenül diszjunkt) ponthármas, amelyek által meghatározott két háromszögben a legkisebb szög különböző.

Tegyük fel, hogy egy múzeum igazgatója biztosítani akarja, hogy a múzeum minden pontját folyamatosan őrizze egy őr. Az őröknek rögzített őrhelyük van, de meg tudnak fordulni. Hány őrre van szükség? (Victor Klee, 1973)

7. *Képtár-probléma:* Hány őr szükséges egy 9 falú múzeumhoz? (Egy n-oldalú sokszögben mindig kiválasztható $\left[\frac{n}{3}\right]$ olyan pont, hogy ezekből a sokszög bármely pontja látható.)

Más változatok: Tegyük fel, hogy minden őr a múzeum egy falát felügyelheti, az őr tehát sétál a fala mentén és mindent lát, amit a fal mentén látni lehet egy pontból. Ekkor $\left[\frac{n}{4}\right]$ sétáló falőr elég az őrzéshez.

Egy n-oldalú ortogonális sokszög védelméhez $\left[\frac{n}{4}\right]$ teremőr mindig elég.

Vizsgálják az ortogonális börtönudvar falainak külső védelmét is, és más problémákat.

8. Rajzoljatok egy négyzetrácsos (,,kockás") papírra olyan sokszögeket (lehetnek konkáv sokszögek is), amelyek oldalegyenesei rácsegyenesek. Azt tapasztaljátok, hogy minden ilyen sokszög oldalainak száma páros. Indokoljátok meg, miért! Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulója, 1985., 5. osztályosok versenye

Olvasnivalók

[1] Reiman István, *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft, 1999, pp. 14–18.
[2] Martin Aigner – Günter M. Ziegler, *Bizonyítások a Könyvből*, TypoTEX, 2004, pp. 217–219.
[3–4] Szabó László, *Klasszikus képtárproblémák I–II.*, Polygon, 1993. (november) 37–64. old., 1996. (december) 45–61. old.

A sík parkettázása

Egy adott sokszöggel a sík parkettázható, ha az egész síkot ilyen sokszögekkel hézagtalanul és átfedés nélkül (egyrétűen) leboríthatjuk.

9. Melyek azok a szabályos sokszögek, amelyekkel a sík parkettázható?

10. Bizonyítsuk be, hogy bármilyen
a) háromszöggel b) négyszöggel c) középpontosan szimmetrikus hatszöggel
lehet parkettázni.

11. Bizonyítsuk be, hogy 6-nál nagyobb oldalszámú konvex sokszöggel nem lehet parkettázni.

12. Lehet-e szabályos ötszög és tízszög alakú lapokból parkettát készíteni?

Olvasnivalók

[1] Reiman István, *Parketták a geometria szemszögéből*, (interneten megtalálható).
[2] Skljarszkij – Csencov – Jaglom, *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, 2/1. Geometria I. (Planimetria)*, (81–83. feladatok), Tankönyvkiadó (új kiadás: TypoTEX), 1972.
[3] Hugo Steinhaus, *Matematikai kaleidoszkóp*, Gondolat, 1984, pp. 81–89.

A Sperner lemma

13. Sperner lemma. Egy H háromszög belsejét bontsuk fel háromszögekre úgy, hogy egyetlen belső háromszög oldalán se legyen háromszögcsúcs. Az így kapott csúcsokat színezzük az 1, 2, 3 színekkel, kikötve, hogy H három csúcsa különböző színű legyen. A H oldalain levő csúcsok színe megegyezik az oldal valamelyik végpontjának a színével, H belső csúcsainak színezése tetszőleges.

Ekkor van olyan háromszög H belsejében, melynek csúcsai különböző színűek.

14. Egy konvex tízszög belsejében felvettünk 12 pontot. Az így kapott pontokat egymással és a sokszög csúcsaival egymást nem metsző egyenes szakaszokkal kötöttük össze mindaddig, amíg a sokszögtartományt háromszögekre daraboltuk. Hány háromszög keletkezett így?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1992., 6. osztályosok versenye

15. Egy háromszög belsejében felveszünk néhány pontot. A felvett pontokat egymással és a háromszög csúcsaival úgy kötjük össze egyenes szakaszokkal, hogy az összekötő szakaszok a háromszög belsejében ne messék egymást és a háromszöget ,,kis" háromszögekre bontsák. Igazoljuk, hogy a kis háromszögek száma mindig páratlan!

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1992., 7. osztályosok versenye

16. Az ábrán látható hatszöget háromszögekre bontottuk úgy, hogy a következő két tulajdonság igaz: a) két háromszögnek vagy van közös oldala – ekkor az egyik háromszög fehér, a másik vonalazott – vagy csak közös csúcsa van, vagy nincs közös pontja; b) a hatszög mindegyik oldala egy vonalazott háromszög egyik oldala.

Fel lehet-e ugyanígy háromszögekre bontani egy konvex ötszöget?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1994., 7. osztályosok versenye

Olvasnivalók

[1] Reiman István, *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft, 1999, pp. 354–355.
[2] Jakab Tamás, *Sperner Törpfalván*, (interneten megtalálható).

Euler poliédertétele

Egy konvex poliéder éleinek számát jelölje e, lapjainak számát l, csúcsainak számát c. Ekkor $l + c = e + 2$.

17. Mutassuk meg, hogy egy konvex poliéder lapszögeinek összege csak az élek és a lapok számától függ. $(= 2(E - L) \cdot 180°)$

18. a) Bizonyítsuk be, hogy egy poliéder éleinek száma legalább 6.

b) Igazoljuk, hogy nincs olyan poliéder, melynek 7 éle van.

c) Mutassuk meg, hogy bármely 7-nél nagyobb számra van olyan poliéder, melynek annyi éle van.

19. A focilabda olyan test, melyet 32 oldallap határol, s minden lapja szabályos ötszög vagy szabályos hatszög. Hány éle van e testnek?

20. Hány szabályos test létezik? (Szabályos test:= egybevágó szabályos sokszöglapokból áll, és minden csúcsban ugyanannyi lap találkozik.)

Olvasnivalók

[1] Hajós György, *Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó, 1966, pp. 194–196.
[2] *Euler tételének egy geometriai bemutatása*, http://matek.fazekas.hu/portal/kutatomunkak/euler/euler.pdf.
[3] Pólya György, *Indukció és analógia*, Gondolat, 1988, pp. 52–75.
[4] Lakatos Imre, *Bizonyítások és cáfolatok*, Gondolat, 1976.

Két feladat

21. Melyik állítás igaz?

(A) Ha a P sokszög benne van a Q sokszögben, akkor P területe kisebb, mint Q területe.
(B) Ha a P sokszög benne van a Q sokszögben, akkor P kerülete kisebb, mint Q kerülete.
(C) Ha a P sokszög konvex és benne van a Q sokszögben, akkor P kerülete kisebb, mint Q kerülete.

22. Egy konvex görbének P középpontja, ha a görbe bármely P-n átmenő húrja egyenlő hosszú. Lehet-e egy zárt görbének három középpontja?

A *Természet Világa* 1988. 8. számában olvashatjuk *Neumann János* levelét *Fejér Lipóthoz*: ,,Nevezetesebb matematikai eredmény nincs, csak kisebb feladatokkal foglalkoztam. Ezek közül való pl. ez, amelyiket még nem sikerült elintéznem: Egy convex A görbének P középpontja, ha A-nak minden P-n átmenő húrja egyenlő hosszú. Lehet-e egy és ugyanazon convex görbének két egymástól különböző középpontja?"

Rácsgeometriai feladatok

Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

23. A rácsháromszög területének kétszerese egész szám.

24. Minden rácssokszög területének kétszerese egész.

25. Egy rácssokszög területe nem lehet kisebb $\frac{1}{2}$-nél.

26. Ha a rácssokszög a határán h, belsejében b számú rácspontot tartalmaz, akkor $2b+h-2$ üres rácsháromszögre vágható szét, bármilyen szétvágás esetén.

27. Minden üres rácsháromszög területe $\frac{1}{2}$.

28. (*Pick-képlet*) Ha a rácssokszög határán h, belsejében b számú rácspont van, akkor tetülete

$$b+\frac{h}{2}-1.$$

29. Ha egy rácsháromszög területe egész, akkor a határán a csúcsokon kívül is van rácspont.

30. Az üres konvex rácsnégyszög paralelogramma.

31. Ha egy rácsháromszög határain a csúcsokon kívül nincs rácspont, és a belsejében levő rácspontok egy egyenesen sorakoznak, akkor ez az egyenes tartalmazza a háromszög egyik súlyvonalát.

32. Az üres konvex rácssokszög vagy háromszög vagy paralelogramma.

33. Az A és B rácspontok távolsága d, az AB szakaszon nincs rácspont. Ebben az esetben nincs olyan rácspont, amely az AB egyenestől $\frac{1}{d}$-nél kisebb távolságra lenne.

34. Csak négyoldalú szabályos rácssokszög létezik.

35. Az egyenlő oldalú rácssokszög oldalainak száma páros.

36. Minkowski tétele: Ha egy origóra szimmetrikus konvex sokszög területe nagyobb 4-nél, akkor a belsejében vagy a határán tartalmaz még legalább egy origótól különböző rácspontot.

Olvasnivaló

[1] Reiman István, *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft, 1999, pp. 275–282.
[2] Reiman István, *Fejezetek az elemi geometriából (spec. mat. tankönyv)*, Tankönyvkiadó, 1987, pp. 118–130.

A Jensen–egyenlőtlenség alkalmazásai

Ha az $f(x)$ függvény az $[a;b]$ intervallumon (alulról) konvex, akkor $x,y\in[a;b]$ esetén

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

37. Alkalmazzuk a Jensen–egyenlőtlenséget az x^n függvényre, és a logaritmusfüggvényre.

38. Mutassuk meg, hogy adott körbe írt háromszögek közül a szabályos háromszög kerülete a legnagyobb.

39. Mutassuk meg, hogy adott körbe írt háromszögek közül a szabályos háromszög területe a legnagyobb.

40. Mutassuk meg, ha α, β, γ egy hegyesszögű háromszög szögei, akkor

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma\ge 3\sqrt{3}$$

41. Mutassuk meg, hogy egy adott kör köré írható háromszögek közül a szabályosnak legkisebb a területe.

42. Mutassuk meg, ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}$$

A sík és a tér felosztásai. Darabolások

43. Legfeljebb hány részre (tartományra) bonthatja fel a körlapot 7 húrja?

44. Legfeljebb hány tartományra bontja fel a síkot
a) 7 egyenes; **b)** 7 kör; **c)** 7 háromszög; **d)** 7 négyzet?

45. Legfeljebb hány tartományra bontja fel a teret 7 sík?

46. Hány részre osztják a teret a kocka lapsíkjai? Hány részre osztják a teret a tetraéder lapsíkjai?

47. A kockát **a)** három síkkal; **b)** négy síkkal vágd szét 8 egyforma részre!

48. Egy 6 cm élű kocka minden csúcsát levágjuk egy-egy olyan síkkal, amely a csúcsból kiinduló éleket a csúcstól 2 cm távolságra metszi. Hány lapja, éle és csúcsa van az így kapott testnek?

Kalmár László Matematikaverseny, 5. osztályosok versenye: 1988. megyei forduló; 1994. országos döntő
Zrínyi Ilona Matematikaverseny megyei fordulója 1995., 6. osztályosok versenye

49. Lehet-e a kockát egy síkkal úgy metszeni, hogy a síkmetszet **a)** szabályos háromszög; **b)** szabályos hatszög legyen?

50. Fel lehet-e darabolni egy kockát egybevágó gúlákra? Fel lehet-e darabolni 3 egybevágó gúlára?

51. Egy kockát tetraéderekre darabolunk. Legalább hány tetraédert kapunk?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője 1995., 8. osztályosok versenye

52. Egy 3 cm élű kockát fel kell darabolnunk 1 cm élű kockákra. Egy-egy vágás után a kapott darabokat elmozgathatjuk, másképp tehetjük egymás mellé, és a következő vágásnál ezeket együtt vágjuk át.
Legkevesebb hány vágás szükséges ahhoz, hogy 27 darab 1 cm élű kockát kapjunk?

53. Hogyan lehet szétvágni egy négyzetet 20 kisebb (nem feltétlenül azonos méretű) négyzetre? Keress több megoldást!

54. Fel lehet-e darabolni egy kockát 20 kockára? És 50 darab kockára?

Kalmár László Matematikaverseny országos döntője 1993., 7. osztályosok; megyei fordulója 2000., 5. osztályosok versenye

55. Fel lehet-e darabolni egy kockát 48 kockára? Fel lehet-e darabolni egy kockát 49 kockára?

Megjegyzés. Megmutatható, hogy egy kocka mindig feldarabolható n darab kisebb kockára, ha $n \geq 48$. Érdekes feladat annak vizsgálata, hogy $n < 48$ esetén mely n értékek esetén lehet egy kockát feldarabolni n darab kisebb kockára.

Olvasnivalók

[1] Reiman István, *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft, 1999, pp. 299–302.
[2] Lehel Jenő, *Feladatok a kombinatorikus geometriából*, A Matematika Tanítása (1983), 76–88. old.

Alakzatok szétvágása kisebb átmérőjű részekre

Egy alakzat **átmérője** d, ha az alakzat bármely két pontjának a távolsága legfeljebb d, és van két olyan pontja, melyek távolsága d.
Lássuk be az alábbi állításokat!

56. Bármely zárt, konvex görbének van négy olyan pontja, melyek egy négyzet csúcsai.

57. Egyetlen vágással két palacsinta mindegyike elfelezhető.

Megjegyzés: A feladat 3-dimenziós általánosítása a *Sonkásszendvics-tétel:* Ha fehér kenyérből, sötét kenyérből és egy szelet sonkából szendvicset készítünk, akkor be lehet állítani a kés lapját egy olyan síkba, hogy a kés egyszerre vágja ketté mindhárom réteget úgy, hogy mindhármat elfelezi.

58. Magyarország négyzetbe foglalható.

59. *(Pál Jenő [1920])* Bármely d átmérőjű síkidom belefoglalható egy olyan szabályos hatszögbe, melynek a szemközti oldalai közti távolság egyenlő d-vel.

60. *(Borsuk [1933])* Bármely d átmérőjű síkidom felbontható három, d-nél kisebb átmérőjű részre.

Olvasnivalók

[1] Elekes György, *A kombinatorikus geometriáról II.*, A Matematika Tanítása (1979), 82–89. old.
[2] Boltyanszkij – Gohberg, *Tételek és feladatok a kombinatorikus geometriából*, Tankönyvkiadó, 1970, pp. 10–13.
[3] Boltyanszkij – Gohberg, *Alakzatok felbontása kisebb részekre*, Tankönyvkiadó, 1976, pp. 8–12.
[4] Reiman István, *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft, 1999, pp. 316–319.
[5] Lehel Jenő, *Feladatok a kombinatorikus geometriából*, A Matematika Tanítása (1983), 76–88. old.
[6] Philip J. Davis – Reuben Hersh, *A matematika élménye*, Műszaki Könyvkiadó, 1984, pp. 292–300.

A Happy End probléma

A fiatal egyetemista, Klein Eszter 1932-ben észrevette, hogy 5 pontból mindig ki lehet választani négyet, melyek egy konvex négyszög csúcsai. Eszter elvitte a feladványt a barátaihoz, akik középiskolás koruk óta ismerték egymást, hiszen mindnyájan *KöMaL*-oztak. Ez egy újszerű kérdés volt, izgalmasnak találták, egykettőre igazolták.

A fiúk érdeklődését külön fokozta az, hogy a kérdés egy lánytól származik. A probléma általánosítására keresték a választ. Makai Endre és Turán Pál hamarosan belátták, ha kilenc pontot szórnak szét a síkon, ezek mindig meghatároznak egy konvex ötszöget.

Erdős Pál és Szekeres György igazolták, hogy bármely n-re létezik $f(n)$ úgy, hogy ha a síkon adott $f(n)$ általános helyzetű pont, akkor közülük kiválasztható n pont úgy, hogy azok egy konvex n-szög csúcsai. (Egy ponthalmaz általános helyzetű, ha semelyik három pontja sincs egy egyenesen.)

Bizonyították, hogy $2^{n-2} + 1 \leq f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1$.

Erdős a feladatot Happy End problémának keresztelte el. Néhány évvel később ugyanis Klein Eszter és Szekeres György összeházasodtak, és közel hetven évig éltek boldog házasságban.

A Happy End probléma születése után évtizedekkel, 1978-ban kezdték vizsgálni az élesebb állítást. Igaz-e, hogy bármely n-re létezik $g(n)$ úgy, hogy ha a síkon adott $g(n)$ általános helyzetű pont, akkor közülük kiválasztható n pont úgy, hogy azok egy *üres* konvex n-szög csúcsai. (Azaz a sokszög belsejében nincs további pont a ponthalmazból.)

A Happy End probléma vizsgálatából egy új tudományág született, a kombinatorikus geometria.

Klein Eszter feladatának változatai felbukkannak a *KöMaL* pontversenyében és középiskolás versenyeken, míg az üres sokszöges példák még nem szerepeltek versenyeken.

61. Adott a síkon 5 pont, közülük semelyik három sem esik egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük négy olyan pont, amelyek konvex négyszög csúcsait alkotják.

62. Adott a síkon 5000 pont, melyek közül semelyik három sincs egy egyenesen. Mutassuk meg, hogy van 1000 olyan konvex négyszög, melyek csúcsai ezek közül a pontok közül valók, és a négyszögeknek nincs közös pontjuk.

63. Adott a síkon n pont ($n > 4$), közülük semelyik három nem esik egy egyenesbe. Bizonyítsuk be, hogy legalább $\frac{1}{5}\binom{n}{4}$ olyan konvex négyszög van, amelyeknek csúcspontjai az adott pontok közül valók.

64. Adott a síkon 22 pont, közülük semelyik három sincs egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy párokba oszthatók úgy, hogy az egy párba tartozókat összekötő szakaszoknak legalább 5 különböző metszéspontja legyen.

65. Adott a síkon 9 pont, közülük semelyik három sem esik egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük öt olyan pont, amelyek konvex ötszög csúcsait alkotják.

Megjegyzés: Konvex ötszöghöz a feladat szerint 9 pont kell. Erdős–Szekeres–Makai sejtik (1933), hogy konvex n-szöghöz $2^{n-2} + 1$ pont kell, ez $n = 3$, 4 és 5 esetén pontos. Hatszögre ez a sejtés 17-es korlátot ad. Erdős és Szekeres eredményéből adódik, hogy 71 pont elég, ezt lehet tudni 1935 óta. 1996-ban jutottak oda, hogy 70 pont is elég, majd ezt 1997-ben 37-re csökkentették. A sejtés 17-et mond.

Üres konvex sokszögek: Jelölje $g(n)$ azt a legkisebb számot, amelyre teljesül, hogy $g(n)$ általános helyzetű pont közül mindig kiválasztható üres konvex n-szög.

66. Igazoljuk, ha m általános helyzetű pont között van üres konvex n-szög, akkor $N > m$ pont között is van.

67. Igazoljuk, hogy $g(3) = 3$ és $g(4) = 5$.

68. Igazoljuk, hogy van olyan N, amelyre a sík bármely N általános helyzetű pontja között van üres konvex 5-szög. (Bizonyított, hogy $g(5) = 10$.)

Az üres hatszög kérdése megválaszolatlan, nem tudjuk, hogy van-e olyan N, amelyre a sík bármely N általános helyzetű pontja között mindig találunk üres konvex 6-szöget.

Meglepő, hogy bármely N-re van N általános helyzetű pont, melyek között nincs üres konvex 7-szög. (Horton, 1983)

Olvasnivalók

[1] Hraskó András, *Új matematikai mozaik* (Pach János: A Happy End probléma – A kombinatorikus geometria kezdetei), TypoTEX Kiadó, 2002.
[2] Elekes György, *Érdekes kombinatorikus geometriai problémák*, Középiskolai Matematikai Lapok (1991/7), 297–302. old.
[3] Paul Hoffman, *A prímember. Erdős Pál kalandjai a matematika végtelenjében*, Scolar Kiadó, 1999.
[4] Bruce Schecter, *Agyam nyitva áll! Erdős Pál matematikai utazásai*, Vince Kiadó – Park Kiadó, 1999.
[5] Reiman István – Dobos Sándor, *Nemzetközi matematikai diákolimpiák 1959–2003*, (1969/5. feladat), TypoTEX Kiadó, 2004.
[6] Surányi János, *Matematikai versenytételek III.*, (1971/2. feladat), Tankönyvkiadó, 1992.
[7] Skljarszkij – Csencov – Jaglom, *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, 2/1. Geometria I. (Planimetria)*, (10–13. feladatok), Tankönyvkiadó (új kiadás: TypoTEX), 1972.
[8] Ioan Tomescu, *Kombinatorika és alkalmazásai*, Műszaki Könyvkiadó, 1978, pp. 184–186.
[9] Lovász László, *Kombinatorikai problémák és feladatok*, TypoTEX Kiadó, 1999.
[10] Hajnal Péter, *Gráfelmélet*, Polygon Könyvtár, Szeged, 1997, pp. 216.
[11] Szabó László, *Kombinatorikus geometria és geometriai algoritmusok*, Polygon Könyvtár, Szeged, 2003.

Helly tétele

69. Egy mezőn négy kecske legel, kötéllel kikötve egy karóhoz. A kötelek elég hosszúak ahhoz, hogy gazdájuk a fejéshez bármely hármat egy helyre tudja gyűjteni. Van-e olyan hely, ahová mind a négy kecske összeterelhető?

70. Ha a sík négy konvex halmaza közül bármely háromnak van közös pontja, akkor mind a négynek is van.

Helly tétele: Ha a sík konvex $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n \geq 4)$ halmazai közül bármely háromnak van közös pontja, akkor az összesnek is van.

71. Kovácséknál egy este sok vendég fordult meg. Nem volt olyan, aki távozott és újra visszatért. Bármely kettő találkozott egymással a lakásban. Igaz-e, hogy volt olyan időpont, amikor mindnyájan egyszerre Kovácséknál voltak?

72. Egy céllövőedző meséli kollégájának: ,,Edzés után mindig megnézem a lőlapot. Nem baj, ha a puska félrehord, mert ha a találatok egy helyen vannak, megdicsérem a fiút. De ha akár csak három lyukat látok, amik nem férnek el együtt egy tízforintos alatt, még fél órát kell gyakorolnia a célratartást."

,,Én szigorúbb vagyok, mert nálam az összes találatnak el kell férnie egy tízforintos alá." – mondja a másik edző.

Melyikőjük a szigorúbb?

73. Mutassuk meg, ha az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok közül bármely három egyszerre lefedhető egy r sugarú körrel, akkor az összes is belefoglalható egy r sugarú körbe.

74. Mutassuk meg, ha egy háromszög leghosszabb oldala d hosszúságú, a háromszög befoglalható egy $\frac{d}{\sqrt{3}}$ sugarú körbe.

Jung tétele: Ha egy (nem feltétlenül konvex) sokszög bármely két csúcsának távolsága legfeljebb d, akkor e sokszög befoglalható egy $\frac{d}{\sqrt{3}}$ sugarú körbe.

75. Mutassuk meg, ha egy körvonal véges számú, félkörnél rövidebb íve közül bármely háromnak van közös pontja, akkor az összesnek is van.

76. Adott hat körlemez a síkon, közülük kettő pirosra, kettő fehérre és kettő zöldre van színezve. Tudjuk, hogy bárhogyan is választunk is ki egy pirosat, egy fehéret és egy zöldet, van közös pontjuk. Mutassuk meg, hogy vagy a piros, vagy a fehér, vagy a zöld köröknek is van közös pontjuk.

77. Négy félsík együttesen lefedi a síkot. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük 3, amelyek együtt lefedik a síkot.

Olvasnivalók

[1] Elekes György, *A kombinatorikus geometriáról I.*, A Matematika Tanítása (1979), 59–64. old.
[2] Bárány Imre, *Helly tételéről*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (1981. február), 61–66. old.
[3] Reiman István, *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft, 1999, pp. 303–307.
[4] Reiman István, *Fejezetek az elemi geometriából (spec. mat. tankönyv)*, Tankönyvkiadó, 1987, pp. 87–105.

Nyíregyháza, 2009. február 1.

Róka Sándor