Lajkó Károly

FÜGGVÉNYEGYENLETEK

előadás

Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Kecskemét, 2012. március 14.-18.

I. Függvényegyenletek feladatokban

A) Függvényegyenletek a természetes számok halmazán (rekurzív sorozatok):

1) Az $f: N \to \mathbb{R}$ függvény bármely $n \in N$ esetén teljesíti az $\boxed{f(n+1) = 2f(n) - f(n-1)}$ függvényegyenletet és $\boxed{f(0)=2,\ f(1)=3}$. Határozzuk meg f-et n függvényében.
<u>Átfogalmazva</u>: $\langle a_n \rangle$ olyan sorozat, melyre $\boxed{a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}\ ;\ a_0 = 2,\ a_1 = 3}$. $a_n = ?$

2) Az $f: N \to \mathbb{R}$ függvény bármely $n \in N$ esetén teljesíti az $\boxed{f(n+1) - 2f(n) + f(n-1) = 1}$ függvényegyenletet és $\boxed{f(0)=1,\ f(1)=2}$. Határozzuk meg f-et n függvényében.
<u>Átfogalmazva</u>: $\langle a_n \rangle$ olyan sorozat, melyre $\boxed{a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 1\ ;\ a_0 = 1,\ a_1 = 2}$ $a_n = ?$ (HBM-2000)

3) Állítsuk elő az $\langle a_n \rangle$ sorozat a_n tagját n függvényében, ha $\boxed{a_1 = 1,\ a_{n+1} = n a_n + n^2 - n - 1}$. (OKTV-2002).
<u>Átfogalmazás</u>: $f: N \to \mathbb{R}$ $\forall n \in N$-re teljesíti az $\boxed{f(n+1) = n f(n) + n^2 - n - 1}$ fv. egyenletet és $\boxed{f(1) = 1.}$ $f(n) = ?$

4) $\langle a_n \rangle$ olyan sorozat, melyre $\boxed{a_n + a_{n-1} = n^2\ (n \in N),\ a_{19} = 94}$. $a_n = ?$ (AIME-1994).
<u>Átfogalmazás</u>: $f: N \to \mathbb{R}$ olyan fv., hogy $\boxed{f(n) + f(n-1) = n^2\ (n \in N)}$, $\boxed{f(19) = 94}$ $f(n) = ?$

5) $f: N \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy
$\boxed{f(n) = 3f(n-1) - 2f(n-2)\ (n \in N,\ n \geq 2)}$; $\boxed{f(1) = 3,\ f(2) = 7}$.
$f(n) = ?$
<u>Átfogalmazás</u>: $\langle a_n \rangle$ olyan sorozat, melyre
$\boxed{a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}\ (n \in N,\ n > 2),\ a_1 = 3,\ a_2 = 7}$ $a_n = ?$

6) $f: N \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $\boxed{f(n) = f(n-1) + a^n \ (\forall n \in N, n > 1)}$ ahol $a \in \mathbb{R}$ konstans. $f(n) = ?$, ha $\boxed{f(1) = b} \in \mathbb{R}$.

7) $f: N \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $\boxed{a f(n) = f(n-1) + g(n) \ (n \geq 2)}$, ahol $a \in \mathbb{R}$ konstans; $g: N \to \mathbb{R}$ adott függvény. $f(n) = ?$

8) $f: N \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $\forall\, n \geq 3, n \in N$-re
$$\boxed{f(n) = (\alpha + \beta) f(n-1) - \alpha\beta f(n-2) \ ; \ f(1) = \alpha + \beta, f(2) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2},$$
ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ adott konstansok. $f(n) = ?$

9) $f: N \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $\forall\, n \geq 3, n \in N$-re
$$\boxed{f(n) = a f(n-1) + b f(n-2), \quad f(1) = A, \ f(2) = B},$$
ahol $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a^2 + b^2 \neq 0$, $a^2 \geq -4b$. $f(n) = ?$

10) $f: N \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall\, n \geq 3, n \in N$-re
$$\boxed{f(n) = f(n-1) + f(n-2) \ ; \ f(1) = 1, f(2) = 1}. \ f(n) = ?$$
(Fibonacci-sorozat).

11) Oldjuk meg az <u>$n \geq 1, n \in N$-re</u> teljesülő

a) $\boxed{f(n+2) = 5 f(n+1) - 6 f(n)}$,

b) $\boxed{f(n+2) = 4 f(n+1) - 4 f(n)}$,

c) $\boxed{f(n+2) = f(n)}$,

függvényegyenleteket.

12) Határozzuk meg azt az $\langle a_n \rangle$ sorozatot, melyre
$$\boxed{a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0 \quad (n \geq 1), \ a_1 = 10, a_2 = 16}$$
teljesül.

B) Egyváltozós függvényegyenletek megoldása helyettesítésekkel (csoportok és függvényegyenletek)

1) Az $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ függvény teljesíti az $\boxed{f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x+6}$ $(x\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$ fv. egyenletet. $f(x)=?$ (KÖMAL).

2) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$\boxed{a\,f(x-1)+b\,f(1-x)=c\,x} \quad (x\in\mathbb{R})$$

függvényegyenletet, ahol $a,b,c\in\mathbb{R}$ konstansok, hogy $a\neq b$. $f(x)=?$

3) Az $f:\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}\to\mathbb{R}$ fv. teljesíti az

$$\boxed{f(x)+k\,x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x+1}} \quad (x\neq 0,-1)$$

függvényegyenletet, ahol $k\in\mathbb{R}$ olyan, hogy $0<k^2\neq 1$. $f(x)=?$ (OKTV – 2001)

4) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény teljesíti az $\boxed{f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}\,f(x)}$ $(x\in\mathbb{R})$ függvényegyenletet. Bizonyítsuk be, hogy f periódikus. (KÖMAL)

5) Az $f:\mathbb{R}\setminus\{0,a\}\to\mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$\boxed{f(x)+f\left(\frac{a^2}{a-x}\right)=x} \quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{0,a\})$$

függvényegyenletet, ahol $a\in\mathbb{R}$ konstans. $f(x)=?$

6) Az $f:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$\boxed{f\left(\frac{x}{1-x}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)=x} \quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\})$$

függvényegyenletet. $f(x)=?$

7) Az $f:\mathbb{R}\setminus\{0,-1,1\}\to\mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$\boxed{x\,f(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1} \quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,1\})$$

függvényegyenletet. $f(x)=?$

8) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény teljesíti a

$$\boxed{2f(x)+f(1-x)=3-x\,f(1)} \quad (x\in\mathbb{R})$$

függvényegyenletet. $f(x)=?$

9) Az $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$\boxed{(x-2)\,f(x)+f\left(-\frac{2}{x}\right)-x\,f(2)=5} \quad (x\neq 0)$$

függvényegyenletet. $f(x)=?$

10) Az $f:\mathbb{R}\setminus\{0,1,\}\to\mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$\boxed{f\left(\frac{x}{x-1}\right)+x\,f\left(\frac{1}{x}\right)=2} \quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,\})$$

függvényegyenletet. $f(x)=?$

11) Az $f:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$\boxed{f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$$

függvényegyenletet. $f(x)=?$

12) Határozza meg az f függvényt, ha teljesíti az

$$\boxed{f(x)+f\left(\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}\right)=\sqrt[n]{1+x^n}} \quad (x\neq 0, x\neq 1)$$

függvényegyenletet, ahol n páratlan természetes szám.

C) Függvényegyenletek megoldása az analízis elemeinek felhasználásával

1) Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvényeket, melyek teljesítik az alábbi függvényegyenletet:

a) $\boxed{f(2x) = f(x)}$ $(x\in\mathbb{R})$;

b) $\boxed{f(2x+1) = f(x)}$ $(x\in\mathbb{R})$;

c) $\boxed{3f(2x+1) = f(x)+5x}$ $(x\in\mathbb{R})$;

d) $\boxed{f(x) = \frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}\right)+x}$ $(x\in\mathbb{R})$;

e) $\boxed{f(3x)+\frac{1}{4}f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}f(x)+1}$ $(x\in\mathbb{R})$.

2) Adjuk meg az alábbi függvényegyenletek ~~valós~~ folytonosan differenciálható megoldásait $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ valós függvényekre:

a) $\boxed{f(2x) = 2f(x)}$ $(x\in\mathbb{R})$;

b) $\boxed{f(3x+2) = 3f(x)}$ $(x\in\mathbb{R})$.

3) Adja meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre teljesülő

(C) $\boxed{f(x+y) = f(x)+f(y)}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Cauchy-féle függvényegyenlet differenciálható megoldásait;

4) Határozza meg azon $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenciálható függvényeket, melyek teljesítik az

(*) $\boxed{f(x)+f(x+2y) = 2f(x+y)}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

függvényegyenletet. (Átfogalmazva: azon differenciálható függvényeket, melyek bármely a, b, c számtani sorozatot az $f(a), f(b), f(c)$ számtani sorozatba visznek át.)

5) Határozza meg azokat az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvényeket, melyek teljesítik az alábbi függvényegyenletet:

a) $\boxed{f(x+y) = f(x)+f(y)}$ $(x,y\in\mathbb{R})$ (C);

b) $\boxed{2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x)+f(y)}$ $(x,y\in\mathbb{R})$ (Jensen-egyenlet),

c) (*)

d) $\boxed{f(x+y) = f(x)+f(y)-xy}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

6) Adja meg azokat az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényeket, melyekre

$\boxed{[f(x)+f(z)][f(y)+f(t)] = f(xy-zt)+f(xt+yz)}$ $(x,y,z,t\in\mathbb{R})$.

(Nemzetközi Diákolimpia 2002)

D) Többváltozós függvényegyenletek megoldása helyettesítésekkel

1) Határozza meg az alábbi függvényegyenletet teljesítő valós függvényeket:

a) $\boxed{f(xy) = y^k f(x)}$ $(x,y\in\mathbb{R})$; $k\in\mathbb{N}$ rögzített;

b) $\boxed{f(x+y) - f(x-y) = 4xy}$ $(x,y\in\mathbb{R})$;

c) $\boxed{f(x+y) + f(y-x) - (y+2)f(x) + y(x^2-2y) = 0}$ $(x,y\in\mathbb{R})$;

d) $\boxed{f(x+y) + 2f(x-y) + f(x) + 2f(y) = 4x+y}$ $(x,y\in\mathbb{R})$;

e) $\boxed{f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)(1+y) = 2xy(3y-x^2)}$ $(x,y\in\mathbb{R})$;

f) $\boxed{f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y}$ $(x,y\in\mathbb{R})$;

g) $\boxed{f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y-2}$ $(x,y\in\mathbb{R})$;

h) $\boxed{f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)\cos x}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

2) Legyen $H:\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}$ adott függvény. Vizsgáljuk a

$$\boxed{H\big(f(x+y), f(x-y), f(x), f(y), x, y\big) = 0} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

függvényegyenlet megoldhatóságát egyszerű helyettesítésekkel.

E) Rekurzív sorozatok konvergenciája

1) Bizonyítsuk be, hogy az $\boxed{x_1=\sqrt{2},\ x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}}$ rekurzióval adott $\langle x_n\rangle$ sorozat konvergens.

2) Ha $\langle x_n\rangle$ olyan, hogy $x_0>0$, $\boxed{x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)}$, akkor bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

3) $\langle x_n\rangle$ és $\langle y_n\rangle$ olyan sorozatok, hogy $\boxed{x_1=a,\ y_1=b,\ x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},\ y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}}$
Biz. be, hogy $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

4) Legyen $\langle x_n\rangle$ és $\langle y_n\rangle$ olyan, hogy $\boxed{x_1=a,\ y_1=b,\ x_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n},\ y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}}$
Biz. be, hogy $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sqrt{ab}$.

II. Útmutatások (I.-hez)

A) 1) $\boxed{f(n+1) = 2f(n) - f(n-1), \quad f(0) = 2, \ f(1) = 3}$

$p(n) \doteq f(n) - f(n-1)$, $p(1) = 1$ -re kapjuk, hogy

$p(n+1) = p(n)$, $p(1) = 1$, így $\boxed{p(n) = 1}$ $(n \geq 1)$.

Ezért $f(n+1) - f(n) = 1 \Rightarrow \boxed{f(n) = n+2}$.

2) $\boxed{f(n+1) - 2f(n) + f(n-1) = 1, \ f(0) = 1, \ f(1) = 2}$.

$p(n) \doteq f(n) - f(n-1)$, $p(1) = 1$-re kapjuk, hogy

$p(n+1) - p(n) = 1$, $p(1) = 1 \Rightarrow \boxed{p(n) = n}$

Ezért $f(n) - f(n-1) = n \overset{n=1,2,\ldots n\text{-re } +}{\Longrightarrow} f(n) - f(0) = 1 + \ldots + n$,

azaz $\boxed{f(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}}$.

3) $\boxed{a_{n+1} = n a_n + n^2 - n - 1, \ a_1 = 1}$

$a_{n+1} + (n+1) = n(a_n + n)$-ből $b_n \doteq a_n + n$, $b_1 = 2$

adja, hogy $b_{n+1} = n\, b(n)$, $b_1 = 2$, melyből teljes indukcióval kapjuk, hogy $b_n = 2(n-1)!$, így

$\boxed{a_n = 2(n-1)! - n}$.

4) $\boxed{a_n + a_{n-1} = n^2, \ a_{19} = 94}$

$a_1 = 1 - a_0$, $a_2 = 4 - a_1 = 3 + a_0$, $a_3 = 9 - a_2 = 6 - x_0$ miatt a

sejtés: $a_n = \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n a_0$, amit teljes ind.-val biz.

De $a_{19} = \frac{19 \cdot 20}{2} - a_0 = 94$, így $a_0 = 190 - 94 = 96$, azaz

$\boxed{a_n = \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n 96}$.

5) $\boxed{f(n) = 3f(n-1) - 2f(n-2), \ f(1) = 3, \ f(2) = 7}$

$f(3) = 3f(2) - 2f(1) = 15 = 2^4 - 1$, $f(4) = 3f(3) - 2f(2) = 31 = 2^5 - 1$, így

sejtés: $\boxed{f(n) = 2^{n+1} - 1}$, ami teljes ind.-val biz.

6) $\boxed{f(n) = f(n-1) + a^n, \ f(1) = b}$

$n = 2, 3, \ldots, n$-re felírva, majd $+$ $\Rightarrow f(n) - f(1) = a^2 + \ldots + a^n$, így

$\boxed{f(n) = b + \frac{a^2(a^{n-1}-1)}{[illegible]}, \ a \neq 1}$. $\boxed{f(n) = b + n - 1, \ a = 1}$

7) $\boxed{a f(n) = f(n-1) + g(n)} \quad \boxed{f(1) = b}$

$$n = 2, 3, \dots, n \implies \left.\begin{array}{l} a f(2) = f(1) + g(2) \\ a f(3) = f(2) + g(3) \\ \vdots \\ a f(n) = f(n-1) + g(n) \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} a f(2) = f(1) + g(2) \\ a^2 f(3) = a f(2) + a g(3) \\ \vdots \\ a^{n-1} f(n) = a^{n-2} f(n-1) + a^{n-2} g(3) \end{array}\right\} \implies$$

$$\implies a^{n-1} f(n) = f(1) + g(2) + a g(3) + \dots + a^{n-2} g(n) \implies f(n) = \dots$$

8) $\boxed{f(n) = (\alpha+\beta) f(n-1) - \alpha\beta f(n-2)\ , \quad f(1) = A\ , \quad f(2) = B}$

a) $\underline{\alpha \neq \beta}$

$$\underbrace{f(n) - \beta f(n-1)} = \alpha\left[f(n-1) - \beta f(n-2)\right] \qquad \underbrace{f(n) - \alpha f(n-1)} = \beta\left[f(n-1) - \alpha f(n-2)\right]$$

$$g(n) = \alpha\, g(n-1) \quad (n \geq 2) \qquad h(n) = \beta\, h(n-1) \quad (n \geq 2)$$

$$g(n) = \alpha^{n-2} g(2)\ , \quad g(2) = B - \beta A \qquad h(n) = \beta^{n-2} h(2),\ h(2) = B - \alpha A$$

$$f(n) - \beta f(n-1) = \alpha^{n-2} g(2) \qquad f(n) - \alpha f(n-1) = \beta^{n-2} h(2)$$

$$(\alpha - \beta) f(n) = \alpha^{n-1} g(2) - \beta^{n-1} h(2)$$

$$\boxed{f(n) = \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^{n-1}(B - \beta A) - \beta^{n-1}(B - \alpha A)\right]}$$

b) $\underline{\alpha = \beta}$

$$\underbrace{f(n) - \alpha f(n-1)} = \alpha\left[f(n-1) - \alpha f(n-2)\right]$$

$$k(n) = \alpha\, k(n-1) \quad (n \geq 2),\ k(2) = B - \alpha A$$

$$k(n) = \alpha^{n-2}(B - \alpha A)$$

$$f(n) - \alpha f(n-1) = \alpha^{n-2}(B - \alpha A) \implies \underbrace{\frac{f(n)}{\alpha^n}} - \underbrace{\frac{f(n-1)}{\alpha^{n-1}}} = \frac{B - \alpha A}{\alpha^2}$$

$$l(n) - l(n-1) = \frac{B - \alpha A}{\alpha^2}$$

$$\implies l(n) = l(1) + (n-1)\frac{B - \alpha A}{\alpha^2} \implies \dots$$

$$\implies \boxed{f(n) = (n-1) B \alpha^{n-2} - (n-2) A \alpha^{n-1}}$$

9) $\boxed{f(n) = a f(n-1) + b f(n-2)\ , \quad f(1) = A,\ f(2) = B}$

$\exists\ \alpha, \beta\ )\ a = \alpha + \beta\ , b = -\alpha\beta$ (α, β az $x^2 - ax - b = 0$ gyökei)

$\implies$ visszavezethető 8)-ra.

10) $\boxed{f(n) = f(n-1) + f(n-2)\ , \quad f(1) = 1\ , f(2) = 1}$

9)-ben $a = b = 1 \implies \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ , \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \implies$ (8)-ból)

$$\boxed{f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}$$

11) – 12) $n \to n-2$ -vel 9) ill. 8) speciális esetei

B) 1) $\boxed{f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x+6 \quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{0\})}$

$x\to\frac{1}{x} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}+6$ $\Rightarrow f(x)=$

2) $\boxed{a f(x-1)+b f(1-x)=cx \quad (x\in\mathbb{R})}$ $(a\neq b)$

$x\to x+1 \Rightarrow a f(x)+b f(-x)=c(x+1)$

$x\to -x \Rightarrow a f(-x)+b f(x)=c(1-x)$ $\Rightarrow \boxed{f(x)=\frac{c}{a-b}(x+1)}$

3) $\boxed{f(x)+kx^2 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x+1} \quad (x\neq 0,-1)}$ $(k\neq\pm 1)$

$x\to\frac{1}{x}$ .... (ld. 1)) $\Rightarrow$ $\boxed{f(x)=\frac{k(x^2-x)}{(k^2-1)(x+1)}}$

4) $\boxed{f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x) \quad (x\in\mathbb{R})}$

ld. KÖMAL

5) $\boxed{f(x)+f\left(\frac{a^2}{a-x}\right)=x \quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{0,a\})}$ $(a\in\mathbb{R})$

$x\to\frac{a^2}{a-x} \Rightarrow f\left(\frac{a^2}{a-x}\right)+f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right)=\frac{a^2}{a-x}$

$x\to\frac{ax-a^2}{x} \Rightarrow f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right)+f(x)=\frac{ax-a^2}{x}$ $\xRightarrow{\text{egy. r. mo.}} f(x)=\ldots$

6) $\boxed{f\left(\frac{x}{1-x}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)=x \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}}$

$x\to -\frac{1}{x} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{x+1}\right)+f(x)=-\frac{1}{x}$

$x\to -\frac{1}{x+1} \Rightarrow f\left(-\frac{x+1}{x}\right)+f\left(-\frac{1}{x+1}\right)=x+1$ $\xRightarrow{\text{egy. r. mo.}} f(x)=\ldots$

$x\to -\frac{x+1}{x} \Rightarrow f(x)+f\left(-\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x}{x+1}$

7) $\boxed{xf(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1 \quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,1\})}$

$x\to\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+2f\left(-\frac{1}{x}\right)=1$

$x\to -\frac{1}{x} \Rightarrow -\frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right)+2f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=1$ $\xRightarrow{\text{egy. r. mo.}} f(x)=\ldots$

$x\to\frac{x+1}{1-x} \Rightarrow \frac{x+1}{1-x}f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)+2f(x)=1$

8) $\boxed{2f(x)+f(1-x)=3-xf(1) \quad (x\in\mathbb{R})}$

$x\to 1-x \Rightarrow 2f(1-x)+f(x)=3-(1-x)f(1)$

$x\to 1 \Rightarrow 2f(1)+f(0)=3-f(1)$ $\xRightarrow{\text{egy. r. mo.}} f(x)=\frac{6-3x}{5}.$

$x\to 0 \Rightarrow 2f(0)+f(1)=3$

9) $x\to -\frac{2}{x}$, $x\to 2$, $x\to -1$ helyettesítésekkel.

12) $x\to\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}} \wedge x\to\sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}$ helyettesítésekkel $\Rightarrow f(x)=\ldots$

C) 1) a) $\boxed{f(2x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})}$

$\Rightarrow f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) = \dots = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$\frac{x}{2^n} \to 0 \xRightarrow{f \text{ folyt}} f\left(\frac{x}{2^n}\right) \to f(0) \quad \Rightarrow \boxed{f(x) = f(0) = c \ (x \in \mathbb{R})}$

b) $\boxed{f(2x+1) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})}$

$x \to \frac{x-1}{2} \Rightarrow f(x) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) = f\left(\frac{x-3}{4}\right) = \dots = f\left(\frac{x-(2^n-1)}{2^n}\right) \ \forall n \in \mathbb{N}.$

$\frac{x-(2^n-1)}{2^n} \to -1 \Rightarrow \boxed{f(x) = f(-1) = c}$.

c) $\boxed{3f(2x+1) = f(x) + 5x \quad (x \in \mathbb{R})}$

$x \to \frac{x-1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} f\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{5}{3} \frac{x-1}{2}$

$x \to \frac{x-1}{2}$ - - - - -

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{3^{n+1}} \underbrace{f\left(\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\right)}_{\downarrow f(-1)}}_{\downarrow 0} + \frac{5}{3}\frac{x-1}{2} + \frac{5}{3^2}\frac{x-3}{4} + \dots + \frac{5}{3^{n+1}}\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}$$

$$\boxed{f(x)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3}\frac{x-1}{2} + \frac{5}{9}\frac{x-3}{4} + \dots + \frac{5}{3^{n+1}}\frac{x-2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right) = x - \frac{5}{2} + 1 = \boxed{x - \frac{3}{2}}$$

d) és e) hasonlóan mint c)

2) a) $\boxed{f(2x) = 2f(x) \quad (x \in \mathbb{R})}$

$\Rightarrow 2f'(2x) = 2f'(x) \Rightarrow g(x) = f'(x)$-re $g(2x) = g(x) \xRightarrow{a)} g(x) = c$

$\Rightarrow f'(x) = c \Rightarrow f(x) = cx + d \Rightarrow \boxed{f(x) = cx}$

b) $\boxed{f(3x+2) = 3f(x) \quad x \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow f'(3x+2) = f'(x) \xRightarrow{x \to \frac{x-2}{3}} f'(x) = f'\left(\frac{x-2}{3}\right) \Rightarrow$

$f'(x) = f'\left(\frac{x-2}{3}\right) = f'\left(\frac{x-8}{9}\right) = \dots = f'\left(\frac{x-3^n+1}{3^n}\right) \to f'(-1) = k$

$\Rightarrow f(x) = kx + b \xRightarrow{\text{beh.}} k = b \Rightarrow \boxed{f(x) = k(x+1)}$.

3) Egyszerű.

4) $\boxed{f(x) + f(x+2y) = 2f(x+y) \quad (x, y \in \mathbb{R})}$

x-szerinti diff-sal $\Rightarrow \quad 2f'(x+2y) = 2f'(x+y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$

$\xRightarrow{x=-y} \quad f'(y) = f'(0) = k \quad \Rightarrow \boxed{f(y) = ky + l}$ (megoldás)

5) a) $\boxed{f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}), \ f \text{ folytonos}}$

$\Rightarrow f(nx) = nf(x) \Rightarrow f(n) = nf(1) \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1) \ (m, n \in \mathbb{N})$

$f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \cdot f(1)$, $f(-x) = -f(x) \Longrightarrow f(r) = r f(1) \ (r \in \mathbb{Q})$.

$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists \langle r_n \rangle \ (r_n \in \mathbb{Q}), r_n \to x \xRightarrow{\text{f folyt}} \lim_{n\to\infty} f(r_n) = f(x) \Rightarrow \boxed{f(x) = x f(1) = cx}$

b) $\boxed{2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x)+f(y) \quad (x,y\in\mathbb{R})}$, f folytonos

$x=0 \Rightarrow 2f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)+f(0) \Rightarrow 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x+y)+f(0) \Rightarrow$

$f(x+y)+f(0) = f(x)+f(y) \Rightarrow A(x) = f(x)-f(0)$ -ra $A(x+y)=A(x)+A(y)$

$\Rightarrow A(x) = cx \Rightarrow f(x) = cx + f(0) \Rightarrow \boxed{f(x) = cx+b}$

c) $\boxed{f(x)+f(x+2y) = 2f(x+y) \quad (x,y\in\mathbb{R})}$, f folytonos.

$x=u,\ x+2y=v \Rightarrow x+y = \frac{u+v}{2} \Rightarrow f(u)+f(v) = 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) \ (u,v\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = cx+b}$.

d) $\boxed{f(x+y) = f(x)+f(y) - xy \quad (x,y\in\mathbb{R})}$, f folytonos

$x=y=0 \Rightarrow f(0)=0$; $y\to -x \Rightarrow \boxed{f(x)+f(-x)+x^2=0 \ (x\in\mathbb{R})}$;

$x\to -x, y\to -y \Rightarrow f(-(x+y)) = f(-x)+f(-y)-xy$

$\overset{-}{\Rightarrow} f(x)-f(-x)+f(y)-f(-y) = f(x+y)-f(-(x+y)) \quad (x,y\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow A(x) = f(x)-f(-x)$ additív: $A(x+y) = A(x)+A(y) \ (x,y\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow \boxed{f(x)-f(-x) = c_1x \quad (x\in\mathbb{R})} \xRightarrow{\square+\square} \boxed{f(x) = -\frac{1}{2}x^2+cx \ (x\in\mathbb{R})}$

6) $\boxed{[f(x)+f(z)][f(y)+f(t)] = f(xy-zt)+f(xt+yz) \quad (x,y,z,t\in\mathbb{R})}$.

- $x=y=z=t=0 \Rightarrow 4f^2(0) = 2f(0) \Leftrightarrow \underline{f(0)=0}$ vagy $\underline{f(0)=\frac{1}{2}}$

- $\underline{f(0)=\frac{1}{2}}$: $x=0, y=t \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\left[\frac{1}{2}+f(z)\right]2f(t) = f(-zt)+f(zt) \\ \left[\frac{1}{2}+f(t)\right]2f(z) = f(-zt)+f(zt)\end{array}\right\} \Rightarrow f(z)=f(t) \Rightarrow \boxed{f(t)=\frac{1}{2}}$.

- $\underline{f(0)=0}$; $y=1; x=t=0 \Rightarrow f(z)f(1) = f(z) \Leftrightarrow f(z)(f(1)-1)=0$

a) $\boxed{f(z)=0 \ (z\in\mathbb{R})}$

b) $\underline{f(1)=1}$ (és persze $f(0)=0$):

$x=0;\ t=y=1 \Rightarrow f(z)2f(1) = f(-z)+f(z) \Rightarrow \underline{f(-z)=f(z)}$

$x=t=0 \Rightarrow \underline{f(y)f(z) = f(yz)} \xRightarrow{y=z} f^2(y) = f(y^2) \Rightarrow f(u)\geq 0$

$\xRightarrow{y=\frac{1}{z}} \boxed{f(z)f\left(\frac{1}{z}\right) = f(1) = 1} \Rightarrow \boxed{f(z)>0} \ (z\neq 0)$

$y=t=1 \Rightarrow 2f(x)+2f(z) = f(x-z)+f(x+z)$

$\Rightarrow \underline{f(x+z) = 2[f(x)+f(z)] - f(x-z)}$

$f(0)=0=0^2,\ f(1)=1=1^2 \xRightarrow{?} \underline{f(k) = k^2 \ (k\in\mathbb{Z})}$

Bit. teljes ind: tf $k-1$-re igaz, így

$\underline{f(k)} = f[(k-1)+1] = 2[f(k-1)+1] - f(k-2) = 2[(k-1)^2+1]-(k-2)^2 = \underline{k^2}$

$\frac{p}{q}>0$-ra $\underline{f\left(\frac{p}{q}\right)} = f(p)f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{f(p)}{f(q)} = \frac{p^2}{q^2} = \underline{\left(\frac{p}{q}\right)^2} \xRightarrow{f(z)=f(-z)} \boxed{f(r)=r^2}$

- f szig. mon. növ. ha $(x\geq 0)$, szig. m. csökk., ha $x\leq 0$.

- $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists\ r_n, R_n\in\mathbb{Q}\ (n\in\mathbb{N})$ $r_n<x<R_n$ és $r_n, R_n \to x$ $\xrightarrow{\text{mon}}$ $\boxed{f(x) = x^2 \ (x\in\mathbb{R})}$

D) 1) a) $\boxed{f(xy) = y^k f(x) \quad (x,y\in\mathbb{R})}$: $x=1 \Rightarrow \boxed{f(y) = y^k f(1) = c y^k}$.

b) $\boxed{f(x+y) - f(x-y) = 4xy \quad (x,y\in\mathbb{R})}$: $x=y=\frac{t}{2} \Rightarrow \boxed{f(t) = t^2 + f(0) = t^2 + c}$

$y=0 \Rightarrow$

c) $\underline{x=0} \Rightarrow f(y) = y^2 + \frac{1}{2}f(0)y + f(0) \overset{\text{bel.}}{\Longrightarrow} f(0)=0 \Rightarrow \boxed{f(x)=x^2}$

d) $\underline{y=0} \Rightarrow f$ előállítása

e) $\boxed{f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)(1+y) = 2xy(3y-x^2) \quad (x,y\in\mathbb{R})}$

$$\left.\begin{aligned}
&x=0, y=t \Rightarrow f(t) + f(-t) = 2f(0)(1+t)\\
&x=t-1, y=1 \Rightarrow f(t-2) + f(t) = 2(t-1)(2t-t^2-4)\\
&x=-1, y=t-1 \Rightarrow f(t-2) + f(-t) = 2f(-1)t - 2(t-1)(3t-4)
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$f(t) = t^3 + t\,(f(0) - f(-1) - 1) + f(0) \overset{\text{bel.}}{\Longrightarrow} \boxed{f(x) = x^3}$

f) $\boxed{f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y \quad (x,y\in\mathbb{R})}$

$$\left.\begin{aligned}
&x=0, y=t \Rightarrow f(t) + f(-t) = 2f(0)\cos t\\
&x=\tfrac{\pi}{2}+t, y=\tfrac{\pi}{2} \Rightarrow f(\pi+t) + f(t) = 0\\
&x=\tfrac{\pi}{2}, y=\tfrac{\pi}{2}+t \Rightarrow f(\pi+t) + f(-t) = -2f\tfrac{\pi}{2}\sin t
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{f(t) = a\cos t + b\sin t}$$

g) $\underline{x=0, y=t}$; $\underline{x=t, y=2t}$; $\underline{x=2t, y=t}$; $\underline{x=t, y=t} \overset{\text{egy. rnd.}}{\Longrightarrow} f$ előáll.

h) f)-hez hasonlóan

2) Több eset van. $\leq$ $x=0$; $y=0$; $\{x=0, y=t$; $x=0, y=-t$

E) 1) Ha $\boxed{x_1=\sqrt{2},\ x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}} \Rightarrow \langle x_n\rangle$ __konvergens.__

Tétel: Ha $\langle x_n\rangle$ mon. növ. és felülről korlátos $\Rightarrow$ konvergens.

- $x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = x_2$; tf. $x_{n-1} < x_n \Rightarrow x_n = \sqrt{2+x_{n-1}} < \sqrt{2+x_n} = x_{n+1}$
- $\langle x_n\rangle$ korl. : $n=1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2}+1$

  tf $x_n < \sqrt{2}+1 \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+\sqrt{2}+1} < \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1$

  $\Rightarrow \langle x_n\rangle$ f. korlátja $\sqrt{2}+1$
- Tétel $\Rightarrow \langle x_n\rangle$ konv.

2) $\boxed{x_0>0,\quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)} \Rightarrow \underline{\lim_{n\to\infty} x_n = 1}$.

$$\left.\begin{aligned}
&x_n + \frac{1}{x_n} \geq 2 \Rightarrow x_{n+1} \geq 1 \Rightarrow \langle x_n\rangle \text{ alulról korl.}\\
&x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \leq x_n \Rightarrow \langle x_n\rangle \text{ mon. csökk.}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\text{konv.}}$$

$\Rightarrow \exists\, a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \underline{a=1}$.

III. Két feladatsor $\boxed{H(f(x+y), f(x-y), f(x), f(y), x, y) = 0}$ alakú függvényegyenletekre

1. feladatsor

Adjuk meg a $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ esetén teljesülő alábbi függvényegyenletek megoldásait.

1. $f(x) + f(x+y) = f(y) + f(x-y)$;
2. $f(x) + f(x+y) = 2f(y) + 2f(x-y)$;
3. $f(x) + f(x+y) = 2f(y) + 2f(x-y) + ay + b$;
4. $f(x) + f(x+y) = 2f(y) + 2f(x-y) + cy^2 + ay + b$;
5. $f(x) + f(x+y) = [f(y)]^2 + [f(x-y)]^2$;
6. $f(x) + f(x+y) = [f(y)]^3 + [f(x-y)]^3$;
7. $f(x) + f(x+y) = [f(y)]^n + [f(x-y)]^n$, $n \in N, n > 3$;
8. $f(x) + f(x+y) = 2f(y) + 2f(x-y) + g(y)$;
9. $f(x) + f(x+y) = g(y) + g(x-y)$;
10. $f(x) + f(x+y) = g(y) + h(x-y)$;
11. $f(x) + k(x+y) = g(y) + h(x-y)$.

2. feladatsor

1. Bizonyítsa be, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} c, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

függvény teljesíti az

$$f(x)\,f(x+y)=f(y)\,f(x-y) \quad (x,y\in\mathbb{R}) \qquad (1)$$

fv. egyenletet. ($\mathbb{Q}$ a rac. számok halmaza.)

2. Biz. be, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} c, & x\in\mathbb{Z} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\end{cases}$ fv. teljesíti (1)-et. ($\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza)

3. Határozza meg az alábbi fv. egyenletek valós megoldásait, ha $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$-re teljesülnek.

3.1. $f(x)\,f(x+y)=f(y)\,f(x-y)$;

3.2. $f(x)\,f(x+y)=[f(y)]^2\,[f(x-y)]^2$;

3.3. $f(x)\,f(x+y)=[f(y)]^2\,[f(x-y)]^2\,a^{y+4}$;

3.4. $f(x)\,f(x+y)=[f(y)]^2\,[f(x-y)]^2\,g(y)$,
ha g teljesíti a $g(0)\,g(x+y)=g(x)\,g(y)$ fv. egyenletet $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$ esetén;

3.5. $f(x)\,f(x+y)=[f(y)]^2\,[f(x-y)]^2\,g(y)$,
ha g pozitív, vagy g tetszőleges;

3.6. $f(x)\,f(x+y)=[f(y)]^2\,[f(x-y)]^2\,g(x)$
($g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ismeretlen) ;

3.7. $f(x)\,f(x+y)=[f(y)]^2\,[f(x-y)]^2\,F(x,y)$

IV. A két feladatsor megoldása

a) Az 1. feladatsor megoldása

1. Feladat. Adja meg az

$$f(x)+f(x+y)=f(y)+f(x-y) \quad (x,y\in\mathbb{R}) \qquad (1)$$

függvényegyenlet $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ típusú megoldásait.

Megoldás. $y=0$ helyettesítéssel kapjuk (1)-ből, hogy

$$2f(x)=f(0)+f(x) \quad (x\in\mathbb{R}),$$

ami adja, hogy $\boxed{f(x)=c \quad (x\in\mathbb{R})}$, ahol $c=f(0)$ tetszőleges konstans. Bármely konstans függvény valóban megoldása (1)-nek.

2. Feladat. Határozza meg az

$$f(x)+f(x+y)=2f(y)+2f(x-y) \quad (x,y\in\mathbb{R}) \qquad (2)$$

fv. egyenlet összes valós megoldását.

Megoldás. (2)-ből az $x=y=0$ helyettesítéssel $2f(0)=4f(0)$ következik, ami adja hogy $f(0)=0$.
Helyettesítsünk (2)-be $x=0$-t, akkor

$$f(0)+f(y)=2f(y)+2f(-y) \quad (y\in\mathbb{R}),$$

illetve rendezéssel

$$f(y)+2f(-y)=0 \quad (y\in\mathbb{R})$$

következik. Ebből az $y\to -y$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$f(-y)+2f(y)=0 \quad (y\in\mathbb{R}).$$

Az utóbbi két egyenletből álló egyenletrendszer megoldható $f(y)$-ra, a megoldás: $\boxed{f(y)=0 \quad (y\in\mathbb{R})}$. Ez (2) egyetlen lehetséges megoldása, s valóban megoldás is.

3. Feladat. Határozza meg az

$$f(x) + f(x+y) = 2f(y) + 2f(x-y) + ay + b \quad (x,y \in \mathbb{R}) \quad (3)$$

fv. egyenlet valós megoldásait.

1. Megoldás. (3) az $x=y=0$ helyettesítéssel adja, hogy

$$2f(0) = 4f(0) + b \iff f(0) = -\frac{b}{2}.$$

(3)-ból az $x=0$, illetve az $x=0$, $y \to -y$ helyettesítéssel kapjuk az

$$f(y) + 2f(-y) = -ay - \frac{3}{2}b$$
$$f(-y) + 2f(y) = ay - \frac{3}{2}b$$

egyenletrendszert $f(y)$ és $f(-y)$-ra ($\forall y \in \mathbb{R}$ esetén).
Egyszerűen kapjuk, hogy

$$\boxed{f(y) = ay - \frac{b}{2} \quad (y \in \mathbb{R})},$$

ami megoldása (3)-nak is.

2. Megoldás. Ha a

$$-(ax - \tfrac{b}{2}) - [a(x+y) - \tfrac{b}{2}] = -2(ay - \tfrac{b}{2}) - 2[a(x-y) - \tfrac{b}{2}] - (ay + b)$$

azonosság és (3) megfelelő oldalait összeadjuk, azt kapjuk, hogy a

$$F(x) = f(x) - (ax - \tfrac{b}{2}) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény teljesíti a (2) fv. egyenletet, így az előbbi feladat miatt $F(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$, ami F definíciója miatt adja, hogy $\boxed{f(x) = ax - \frac{b}{2} \quad (x \in \mathbb{R})}$.

4. Feladat. Adja meg az

$$f(x) + f(x+y) = 2f(y) + 2f(x-y) + cy^2 + ay + b \quad (x,y \in \mathbb{R})$$

fv. egyenlet összes megoldását.

Megoldás. A 3. feladat 1. megoldásában használt módszer adja, hogy $f(x) = -\frac{c}{3}x^2 + ax - \frac{b}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$ a lehetséges megoldás. A behelyettesítés adja, hogy csak $c = 0$ esetén kapunk megoldást, ami

$f(x) = ax - \frac{b}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$ lesz.

Megjegyzés. Egyszerűen belátható, hogy az

$$f(x) + f(x+y) = 2f(y) + 2f(x-y) + a \cdot \sin y + b \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

fv. egyenletnek $\Leftrightarrow \exists$ megoldása ha $a = 0$ és akkor

$$f(x) = -\frac{b}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

5. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) + f(x+y) = [f(y)]^2 + [f(x-y)]^2 \quad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad (5)$$

fv. egyenlet $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú megoldásait.

1. Megoldás. (5)-ből az $x = y = 0$ helyettesítéssel $f(0) = [f(0)]^2$ következik, így $f(0) = 0$ vagy $f(0) = 1$.

(5) az $x = 0$, illetve $x = 0$, $y \to -y$ helyettesítéssel adja a

$$f(0) + f(y) = [f(y)]^2 + [f(-y)]^2$$
$$f(0) + f(-y) = [f(-y)]^2 + [f(y)]^2$$

egyenletrendszert $f(y)$, $f(-y)$-ra ($\forall\, y \in \mathbb{R}$ esetén), ami mutatja, hogy $f(-y) = f(y)$ $(y \in \mathbb{R})$, azaz f páros.

Az első egyenlet ekkor a

$$2[f(y)]^2 - f(y) - f(0) = 0 \quad (y \in \mathbb{R}) \qquad (*)$$

alakba írható.

Ha $\boxed{f(0) = 0}$, úgy $(*)$ $f(y)[2f(y) - 1] = 0$ $(y \in \mathbb{R})$ alakú lesz, ami adja, hogy $f(y) \in \{0, \frac{1}{2}\}$. Tegyük fel, hogy $\exists\, x_0$, $f(x_0) = \frac{1}{2}$, akkor (5)-be $x = y = x_0$-t helyettesítve:

$f(x_0) + f(2x_0) = [f(x_0)]^2 \Leftrightarrow f(2x_0) = -\frac{1}{4}$, ami lehetetlen.

A megoldás tehát ekkor: $\boxed{f(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})}$.

Ha $f(0) = 1$, akkor $(*)$ $2[f(y)]^2 - f(y) - 1 = 0$ $(y \in \mathbb{R})$ alakú, ami egyszerűen adja, hogy $f(y) \in \{-\frac{1}{2}, 1\}$ $\forall\, y \in \mathbb{R}$-re.

Hasonlóan mint előbb, ha $\exists$-ne x_0, $f(x_0) = -\frac{1}{2}$, úgy ellentmondásra jutnánk az $x = y = x_0$ helyettesítés után.

A megoldás ekkor: $\boxed{f(x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R})}$

Belátható, hogy az $\boxed{f(x)=0\ (x\in\mathbb{R})}$ ill. $\boxed{f(x)=1\ (x\in\mathbb{R})}$ fv.-ek valóban megoldásai (5)-nek.

2. Megoldás. Az $x=y=0$ helyettesítés (mint előbb is) adja, hogy $f(0)=0$ vagy $f(0)=1$.
Az $y=0$ helyettesítés (5)-ben adja, hogy

$$[f(x)]^2 = 2f(x) - f(0) \quad (x\in\mathbb{R}),$$

ami (5)-tel együtt adja, hogy f teljesíti az

$$f(x) + f(x+y) = 2f(y) + 2f(x-y) - 2f(0) \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

fv. egyenletet.
Utóbbi mutatja, hogy a $F(x) = f(x) - f(0)$ $(x\in\mathbb{R})$ fv. teljesíti a 2. feladat fv. egyenletét $\Rightarrow F(x)=0$ $(x\in\mathbb{R})$, illetve $f(x) = f(0)$ $(x\in\mathbb{R})$.
Így az $\boxed{f(x)=0\ (x\in\mathbb{R})}$ és az $\boxed{f(x)=1\ (x\in\mathbb{R})}$ fv.-ek lehetnek megoldásai (5)-nek, ami igaz is.

6. Feladat. Adja meg az

$$f(x) + f(x+y) = [f(y)]^3 + [f(x-y)]^3 \quad (x,y\in\mathbb{R}) \qquad (6)$$

fv. egyenlet valós megoldásait.

1. Megoldás. Kövessük az előbbi feladat 1. megoldásának gondolatmenetét. A megoldások: $\boxed{f(x)=0,\ f(x)=1,\ f(x)=-1\ (x\in\mathbb{R})}$

2. Megoldás. (6)-ból az $x=y=0$ helyettesítéssel $f(0)=[f(0)]^3$ következik, így $f(0)\in\{-1,0,1\}$.
(6) az $y=0$ helyettesítéssel adja: $[f(x)]^3 = 2f(x) - f(0)$ $(x\in\mathbb{R})$.
Ezért (6)-ból következik, hogy

$$f(x) + f(x+y) = 2f(y) + 2f(x-y) - 2f(0) \quad (x,y\in\mathbb{R}),$$

ahogy a 5. feladat 2. megoldásánál is, így újra azt kapjuk, hogy $f(x) = f(0)$ $(x\in\mathbb{R})$.
A megoldások: $\boxed{f(x)=0\ (x\in\mathbb{R})}$, $\boxed{f(x)=1\ (x\in\mathbb{R})}$, $\boxed{f(x)=-1\ (x\in\mathbb{R})}$.

7. Feladat. Határozza meg az

$$f(x) + f(x+y) = [f(y)]^n + [f(x-y)]^n \quad (x,y\in\mathbb{R}) \quad (7)$$

fv. egyenlet valós megoldásait, ha $n\geq 1$ természetes szám.

Megoldás. $n=1,2,3$ esetén a megoldások ismertek (ld. korábbi feladatok).

Tegyük fel, hogy $n>3$, $n\in\mathbb{N}$.

Az $x=y=0$ helyettesítés (7)-ben adja, hogy $f(0)=[f(0)]^n$, azaz $f(0)\left[[f(0)]^{n-1}-1\right]=0$, így $f(0)\in\{0,1\}$, ha páros, míg $f(0)\in\{-1,0,1\}$, ha n páratlan.

Helyettesítsünk (7)-be $y=0$-t, akkor

$$2f(x) = [f(0)]^n + [f(x)]^n \quad (x\in\mathbb{R}),$$

s ez és (7), az $[f(0)]^n = f(0)$-t is használva, adja:

$$f(x)+f(x+y) = 2f(y)+2f(x-y)-2f(0) \quad (x,y\in\mathbb{R}),$$

ahogy az előző feladatokban is, így az $F(x)=f(x)-f(0)\ (x\in\mathbb{R})$ fv. teljesíti (2)-t: $\Rightarrow F(x)=0\ (x\in\mathbb{R}) \Rightarrow f(x)=f(0)\ (x\in\mathbb{R})$.

Tehát a megoldások $n>3$ esetén:

- $\boxed{f(x)=0\ (x\in\mathbb{R})}$ v. $\boxed{f(x)=1\ (x\in\mathbb{R})}$, ha n páros;
- $\boxed{f(x)=0\ (x\in\mathbb{R})}$ v. $\boxed{f(x)=1\ (x\in\mathbb{R})}$ v. $\boxed{f(x)=-1\ (x\in\mathbb{R})}$, ha n páratlan.

8. Feladat. Adja meg az összes $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fv-t, mely teljesíti a

$$f(x)+f(x+y) = 2f(y)+2f(x-y)+g(y) \quad (x,y\in\mathbb{R}) \quad (8)$$

fv. egyenletet.

Megoldás. Írjuk (8)-at a

$$g(y) = f(x)+f(x+y)-2f(y)-2f(x-y) \quad (x,y\in\mathbb{R}) \quad (8')$$

alakba. Ebből az $y\to -y$ helyettesítéssel

$$g(-y) = f(x)+f(x-y)-2f(-y)-2f(x+y) \quad (x,y\in\mathbb{R}) \quad (8'')$$

következik. (8')-ből és (8'')-ből az $x=0$ helyettesítéssel:

$$g(y) = f(0) - f(y) - 2f(-y) \quad (y\in\mathbb{R}), \qquad (8^*)$$
$$g(y) = f(0) - f(-y) - 2f(y) \quad (y\in\mathbb{R}). \qquad (8^{**})$$

A (8') és (8'') ill. (8^*) és (8^{**}) egyenletek összeadásával

$$g(y) + 2g(-y) = 3f(x) - 2f(y) - 4f(-y) - 3f(x+y) \quad (x,y\in\mathbb{R}),$$
$$g(y) + 2g(-y) = 3f(0) - 5f(y) - 4f(-y) \quad (x,y\in\mathbb{R}), \quad (\Delta)$$

majd ezek összehasonlításával (rendezés után)

$$f(x+y) + f(0) = f(x) + f(y) \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

adódik.
Utóbbi mutatja, hogy az $A(x) \doteq f(x) - f(0)$ $(x\in\mathbb{R})$ fv. additív, azaz teljesíti az

$$A(x+y) = A(x) + A(y) \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

úgynevezett Cauchy-alapegyenletet.
Így egyrészt: $f(x) = A(x) + f(0)$ $(x\in\mathbb{R})$,
másrészt (8^*) és (Δ)-ból: $g(x) = A(x) - 2f(0)$ $(x\in\mathbb{R})$
következik, melyek $f(0)$ bármilyen választása mellett teljesítik (8)-at.
A megoldás tehát: $f(x) = A(x) + c$ $(x\in\mathbb{R})$,
$g(x) = A(x) - 2c$ $(x\in\mathbb{R})$,
ahol $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ additív fv., $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

Megjegyzések: 1) Ha $A(y)=0$ (ez additív) és $c=0$, úgy kapjuk a 2. feladat megoldását.
2) g folytonossága adja A folytonosságát, így $A(y) = ay$ $(y\in\mathbb{R})$, ahol $a\in\mathbb{R}$ tetsz. konstans. Ekkor $g(y) = ay - 2c$ $(y\in\mathbb{R})$, s ezért $c = -\frac{b}{2}$-vel kapjuk a 3. feladat megoldását.

9. Feladat. Adjuk meg az

$$f(x) + f(x+y) = g(y) + g(x-y) \quad (x,y \in \mathbb{R}) \qquad (9)$$

fv. egyenlet összes $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldásait.

Megoldás. (9) az $x=y=0$ helyettesítéssel adja, hogy $f(0)=g(0)$, míg ez $y=0$ helyettesítéssel, hogy

$$2f(x) = g(0) + g(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ami (9)-cel együtt adja az

$$f(x) + f(x+y) = 2f(y) + 2f(x-y) - 2f(0) \quad (x,y \in \mathbb{R})$$

fv. egyenletet.

Utóbbi mutatja, hogy a $F(x) := f(x) - f(0)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény teljesíti a (2) fv. egyenletet a 2. feladatban és így $F(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = f(0) \ (x \in \mathbb{R})}$ $\Rightarrow$ $\boxed{g(x) = f(0) \ (x \in \mathbb{R})}$.

Belátható, hogy ezek a függvények, $c = f(0)$ bármilyen választásánál, teljesítik (9)-et

Megjegyzés. 9. Feladat megoldása egyszerűen adja a 5., 6. és 7. feladatok megoldásait, ugyanis az

$$[f(x)]^2 = g(x) \text{ vagy } [f(x)]^3 = g(x) \text{ vagy } [f(x)]^n = g(x) \ (x \in \mathbb{R})$$

jelölésekkel az 5., 6. és 7. feladat átmegy a 9. feladatba. Így a 9. feladat szerint $f(x) = c$ $(x \in \mathbb{R})$, másrészt a bevezetett jelölések miatt

$$c^2 = c \text{ vagy } c^3 = c \text{ vagy } c^n = c$$

is kell, hogy teljesüljön, ami $f(x) = c$-ből adja megfelelő feladatok korábbi megoldásait.

10. <u>Feladat</u>. Határozza meg az

$$f(x)+f(x+y)=g(y)+h(x-y) \quad (x,y\in\mathbb{R}) \qquad (10)$$

fv. egyenlet $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ megoldásait.

<u>Megoldás</u>. (10)-ből az $y=0$ helyettesítéssel

$$2f(x)=g(0)+h(x) \quad (x\in\mathbb{R})$$

következik, ami (10)-zel együtt adja a

$$g(y)=f(x)+f(x+y)-2f(x-y)+g(0) \quad (x\in\mathbb{R}), \qquad (*)$$

ill. ez az $y\to -y$ helyettesítéssel a

$$g(-y)=f(x)+f(x-y)-2f(x+y)+g(0) \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad (**)$$

fv. egyenletet.

(*) és (**) az $x=0$ helyettesítéssel a

$$g(y)=f(0)+f(y)-2f(-y)+g(0) \qquad (y\in\mathbb{R}) \qquad (\Delta_1)$$

ill.

$$g(-y)=f(0)+f(-y)-2f(y)+g(0) \qquad (y\in\mathbb{R}) \qquad (\Delta_2)$$

alakba írható.

Számítsuk ki $g(y)+2g(-y)$ értékét (*) és (**) ill. (Δ_1) és (Δ_2) segítségével, majd hasonlítsuk össze a kapott egyenleteket, rövid számolással kapjuk, hogy f teljesíti az

$$f(x+y)+f(0)=f(x)+f(y) \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

fv. egyenletet. Ez pedig adja, hogy a $F(x):=f(x)-f(0)$ $(x\in\mathbb{R})$ fv. additív.

Ezután már egyszerűen jön, hogy

$\boxed{f(x)=A(x)+f(0)}$; $\boxed{h(x)=2A(x)+2f(0)-g(0)}$, $\boxed{g(x)=3A(x)+g(0) \ (x\in\mathbb{R})}$.

Egyszerű számolás adja, hogy ezek a függvények teljesítik a (10) fv. egyenletet $f(0)$ és $g(0)$ tetszőleges választásával.

b) A 2. feladatsor megoldása

1. Biz. be, hogy az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} c, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ fv.

teljesíti az
$$f(x)\, f(x+y) = f(y)\, f(x-y) \quad (x,y) \in \mathbb{R} \qquad (1)$$
függvényegyenletet. ($\mathbb{Q}$ a racionális számok halmaza).

Megoldás. Ha $c=0$, akkor $f \equiv 0$, ami valóban teljesíti (1)-et.
Ha $c \neq 0$, akkor négy esetet különböztetünk meg:

- $x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+y,\ x-y \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = f(y) = f(x+y) = f(x-y) = 0 \Rightarrow (1)$.
- $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = f(y) = 0 \Rightarrow$ (1) teljesül.
- $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow x+y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, hiszen $-x \in \mathbb{Q}$ és ha $x+y \in \mathbb{Q}$ lenne, akkor $y = -x + (x+y) \in \mathbb{Q}$ teljesülne, ami ellentmondás. Így $f(y) = f(x+y) = 0$ adja, hogy (1) teljesül.
- $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x-y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, mert ha $x-y \in \mathbb{Q}$ lenne, akkor $x = (x-y) + y \in \mathbb{Q}$ következne, ami ellentmondás. Így $f(x) = f(x-y) = 0 \Rightarrow (1)$.

Tehát $c \neq 0$ esetén is igaz az állítás.

2. Biz. be, hogy az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} c, & x \in \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$ fv. teljesíti az (1) egyenletet. ($\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza)

Megoldás. Azonos az 1.f megoldásával $\mathbb{Q}$ helyett $\mathbb{Z}$-t használva.

3.1. Határozza meg az összes olyan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, mely $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ esetén teljesíti az (1) egyenletet.

Megoldás. (1)-ből az $y=0$ helyettesítéssel
$$[f(x)]^2 = f(0)\, f(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad (2)$$
következik, ami $f(0) = 0$ esetén adja, hogy $f \equiv 0 \Rightarrow (1)$.
Ha $f(0) = c \neq 0$, úgy (2) $\Leftrightarrow$ teljesül, ha $f(x)\,(f(x) - c) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$, s ez adja, hogy $f(x) \in \{0, c\}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén. Így csak az
$$f(x) = \begin{cases} c, & x \in A \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases} \qquad (3)$$
alakú függvények teljesíthetik (1)-et valamilyen $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazra.
Megmutatjuk, hogy pontosan azok az A halmazok a jók, amelyekre

teljesülnek a következők: $x, y \in A \Rightarrow x+y \in A$, $0 \in A$ és $x \in A \Rightarrow -x \in A$ (azaz A az $\mathbb{R}$ additív részcsoportja).
Először azt mutatjuk meg, hogy ha $A \subseteq \mathbb{R}$ additív részcsoport, akkor a (3) alakú fv.-ek teljesítik (1)-et.
Négy esetet vizsgálunk (ahogy az 1. feladatnál is):

- $x, y \in A \Rightarrow x+y \in A$ és $-y \in A \Rightarrow x-y = x+(-y) \in A \Rightarrow$ $f(x) = f(y) = f(x+y) = f(x-y) = c \Rightarrow f$ teljesíti (1)-et.
- $x, y \in \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow f(x) = f(y) = 0 \Rightarrow f$ teljesíti (1)-et.
- $x \in A, y \in \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow x+y \in \mathbb{R} \setminus A$, mert $x+y \in A$ esetén, $-x \in A$ miatt $y = (x+y) + (-x) \in A$ adódna, ami ellentmondás. Így $f(y) = f(x+y) = 0$, ami adja (1)-et f-re.
- Ha $x \in \mathbb{R} \setminus A, y \in A$, akkor $x-y \in \mathbb{R} \setminus A$, mert $x-y \in A$ esetén $x = (x-y)+y \in A$ adódna, ami ellentmondás. Így $f(x) = f(x-y) = 0 \Rightarrow (1)$.

Másrészt megmutatjuk, hogy ha a (3) alakú f teljesíti (1)-et, akkor $A \subseteq \mathbb{R}$ additív részcsoport.
$f(0) = c \neq 0$ adja, hogy $\underline{0 \in A}$.
Legyen $\underline{y \in A}$ és végezzük el (1)-ben az $x=0$ helyettesítést, akkor $f(0)f(y) = f(y)f(-y)$ következik, ami $f(0) = f(y) = c$ miatt adja, hogy $f(-y) = c \Rightarrow \underline{-y \in A}$.
Ugyanakkor $\underline{z_1, z_2 \in A}$ esetén (1)-ből az $x = z_1+z_2$, $y = z_1$ helyettesítéssel $f(z_1+z_2)f(2z_1+z_2) = f(z_1)f(z_2)$ következik, melynek jobb oldala $\neq 0 \Rightarrow f(z_1+z_2) \neq 0 \Rightarrow$ $f(z_1+z_2) = c \Rightarrow \underline{z_1+z_2 \in A}$.
A tehát valóban csoport.
(1) megoldásai a (3) alakú fv.-ek $\Leftrightarrow A \subseteq \mathbb{R}$ add. részcsoport, illetve az $f \equiv 0$ fv.

Megjegyzések: 1) Eredményünk $A = \mathbb{Q}$ ill. $A = \mathbb{Z}$-re adja az előző két feladat megoldását.
2) $f(x) \equiv 0$ és az $A = \mathbb{R}$ esetén kapott $f(x) \equiv c$ az egyenlet folytonos megoldásai

3) Léteznek (legalább A pontjaiban) nem folytonos megoldások is. Ha $A = \mathbb{Q}$ és $c = 1$, akkor egy sehol sem folytonos megoldást kapunk (ez a Dirichlet függvény).

3.2. Adja meg az összes olyan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt mely $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ esetén teljesíti az

$$f(x)\, f(x+y) = [f(y)]^2\, [f(x-y)]^2 \qquad (5)$$

függvényegyenletet.

<u>Megoldás.</u> (5) az $x=y=0$ helyettesítéssel adja az $[f(0)]^2 = [f(0)]^4$ ill. a vele ekvivalens $[f(0)]^2([f(0)]^2-1)=0$ egyenlőséget, mely $\Leftrightarrow$ teljesül, ha $f(0)=0$ vagy $f(0)=1$ vagy $f(0)=-1$.

Ha $\underline{f(0)=0}$, akkor az (5)-ből az $y=0$ helyettesítéssel kapott $[f(x)]^2 = [f(0)]^2[f(x)]^2$ $(x \in \mathbb{R})$ egyenlőség adja, hogy $\underline{f \equiv 0}$, mely valóban teljesíti (5)-öt.

Ha $\underline{f(0)=1}$ vagy $\underline{f(0)=-1}$, akkor az $x=0, y=t$, majd az $x=0, y=-t$ helyettesítéssel kapjuk (5)-ből az

$$\left.\begin{aligned} f(0)\, f(t) &= [f(t)]^2\, [f(-t)]^2, \\ f(0)\, f(-t) &= [f(-t)]^2\, [f(t)]^2 \end{aligned}\right\} (*)$$

egyenletrendszert az $f(t), f(-t)$-re $\forall\, t \in \mathbb{R}$ esetén.

Az egyenletek összehasonlítása mutatja, hogy $f(t) = f(-t)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$-re, azaz f páros függvény.

Ezt felhasználva, például az első egyenlet adja, hogy $\forall\, t \in \mathbb{R}$-re $f(0)\, f(t) = [f(t)]^4 \Leftrightarrow f(t)\left([f(t)]^3 - f(0)\right) = 0$, ami adja, hogy f értékkészlete a $\{0, \sqrt[3]{f(0)}\}$ halmaz.

Így $f(0) = \pm 1$ esetén csak az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases} \quad \text{vagy} \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x \in A \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases} \qquad (6)$$

függvények teljesíthetik (5)-öt, valamilyen $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazzal.

Megmutatjuk, hogy a (6) alakú függvények pontosan akkor megoldások, ha A additív részcsoportja $\mathbb{R}$-nek. Ennek során a 3.1. feladat megoldásának gondolatmenetét követjük.

Annak belátására, hogy ha A részcsoport, akkor a (6) alakú függvények megoldásai (5)-nek, az alábbi négy esetet tekintjük:

- $x, y \in A \Rightarrow x+y,\ x-y \in A \Rightarrow f(x) = f(y) = f(x+y) = f(x-y) = \pm 1$, ami nyilván adja, hogy (5) teljesül.
- $x, y \in \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow f(x) = f(y) = 0 \Rightarrow (5)$.
- $x \in A,\ y \in \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow x+y \in \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow f(x+y) = f(y) = 0 \Rightarrow (5)$.
- $x \in \mathbb{R} \setminus A,\ y \in A \Rightarrow x-y \in \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow f(x) = f(x-y) = 0 \Rightarrow (5)$.

Azt kell még belátni, hogy ha valamilyen $A \subseteq \mathbb{R}$ esetén (6) teljesíti (5)-öt, akkor A csoport.

$f(0) = \pm 1$ adja, hogy $\underline{0 \in A}$.

Ha $\underline{t \in A}$, akkor a (*) egyenletrendszer első egyenlete adja, hogy $(\pm 1)(\pm 1) = (\pm 1)^2 [f(-t)]^2$, így $f(-t) = \pm 1 \Rightarrow \underline{-t \in A}$.

Ha $\underline{z_1, z_2 \in A}$ és f (ami (6) alakú persze) teljesíti (5)-öt, akkor (5)-ből az $x = z_1 + z_2$, $y = z_1$ helyettesítéssel következik

$$f(z_1+z_2)\, f(2z_1+z_2) = [f(z_1)]^2 [f(z_2)]^2 = 1 \Rightarrow f(z_1+z_2) \neq 0$$

$$\Rightarrow f(z_1+z_2) = \pm 1 \Rightarrow \underline{z_1 + z_2 \in A}.$$

A tehát valóban csoport.

<u>Összegezve</u>: Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $\Leftrightarrow$ teljesíti az (5) függvényegyenletet, ha $f \equiv 0$, vagy (6) alakú, ahol $A \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges additív részcsoport lehet.

A folytonos megoldások: $f \equiv 0$, $f \equiv 1$, $f \equiv -1$.

Léteznek nem folytonos, ill. $A = \mathbb{Q}$ esetén sehol sem folytonos megoldások is (közöttük a Dirichlet függvény).

3.3. Határozza meg azon $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényeket, melyek $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$ esetén teljesítik az

$$f(x)\,f(x+y)=[f(y)]^2\,[f(x-y)]^2\,a^{y+4} \qquad (7)$$

függvényegyenletet, ahol $1\neq a\in\mathbb{R}$ adott konstans.

1. <u>megoldás</u>. A 3.2. feladat megoldásának gondolatmenetét pontosan követve is megkaphatjuk a megoldásokat.

2. <u>megoldás</u>. A $g(x)=a^x$ $(x\in\mathbb{R})$ exponenciális függvény $a^{x+y}=a^x a^y$ $(x,y\in\mathbb{R})$ additiós tulajdonságát felhasználva egyszerűen belátható, hogy

$$a^{-x+2}\,a^{-(x+y)+2}=\left[a^{-y+2}\right]^2\left[a^{-(x-y)+2}\right]^2 \quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

A (7) függvényegyenlet és az utóbbi azonosság megfelelő oldalait összeszorozva kapjuk az

$$f(x)a^{-x+2}\,f(x+y)\,a^{-(x+y)+2}=\left[f(y)\,a^{-y+2}\right]^2\left[f(x-y)\,a^{-(x-y)+2}\right]^2 \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

függvényegyenletet, ami mutatja, hogy a

$$F(x)=f(x)\,a^{-x+2} \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad (\Delta)$$

szerint definiált F függvény teljesíti a

$$F(x)\,F(x+y)=[F(y)]^2\,[F(x-y)]^2 \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$

azaz a 3.2. feladat (5) függvényegyenletét, így igaz a következő

$$F(x)\equiv 0 \ \vee\ F(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus A\end{cases} \ \vee\ F(x)=\begin{cases}-1, & x\in A\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus A,\end{cases}$$

ahol $A\subseteq\mathbb{R}$ additív csoport.

Ezután (Δ) adja, hogy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ teljesíti (7)-et, ha

$$f(x)\equiv 0 \ \vee\ f(x)=\begin{cases}a^{x-2}, & x\in A\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus A\end{cases} \ \vee\ f(x)=\begin{cases}-a^{x-2}, & x\in A\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus A,\end{cases}$$

ahol $A\subseteq\mathbb{R}$ tetszőleges additív csoport.

<u>Megjegyzés</u>. A folytonos megoldások $A=\mathbb{R}$ választással az
$f(x)=0 \quad (x\in\mathbb{R}) \vee f(x)=a^{x-2} \quad (x\in\mathbb{R}) \quad \vee \quad f(x)=-a^{x-2} \quad (x\in\mathbb{R})$
alakban adódnak. Ha $A\subset\mathbb{R}$ valódi részcsoport, akkor a nem azonosan nulla megoldások legalább A pontjaiban nem folytonosak, míg $A=\mathbb{Q}$ esetén sehol sem folytonosak.

3.4. megoldása [ ]-ben, míg a 3.5., 3.6. és 3.7. feladatok megoldása [ ]-ben található.

Irodalom

[1] Aczél, J., Néhány általános módszer ...., MTA III. Osztály közleményei, 9 (1959), 375–422.

[2] Aczél, J., Lectures on functional equations and their applications, Math. in Science and Engineering vol. 19, Academic Press, New York – London, 1966.

[3] Ádám, Zs., Lajkó, K., Further sequenced problem for func. eq., Proc. of the Conf. held in Ruzomberok, 49-58, 2007.

[4] Ádám, Zs., Lajkó, K., Maksa, Gy., Mészáros, F., Sequenced problems for func. eq., Teaching Math. and Comp. Science, 4 (2006/1), 179-192.

[5] ———, Two functional equations on groups, Annales Math. Silesianae 21 (2007), 7–13.

[6] Brodszkij, V. Sz., Szlipenko, A. K., Functional eq. in exercises (in Russian), Visa Skola, Kijev, 1983.

[7] Lajkó, K., Függvényegyenletek feladatokban, Debrecen, 2006. (elektronikusan is).

\+ András Szilárd – Kovács Lajos, Függvényegyenletek