VI. Valós függvények differenciálszámítása (GM-I. 73–93.o) (12)

1) Alapfogalmak:

Célunk egy, a függvények változását leíró „apparátus" felépítése.
A továbbiakban $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ típusú fv.-ekkel dolgozunk.

1. def. Ha $x, x_0 \in \langle a,b \rangle$, úgy az $f(x) - f(x_0)$ különbség a fv. megváltozása az $[x;x_0]$ (v $[x_0, x]$) intervallumon, míg az
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
hányados, amit különbségi hányadosnak, vagy differenciahányadosnak nevezzük és – kicsit pontatlanul – ~~az egy~~ fv. egységre vonatkozó megváltozásának ~~is~~ mondunk.
Utóbbi geometriai tartalma az $(x_0, f(x_0))$ és $(x, f(x))$ pontokon áthaladó szelő iránytangense.

Közgazdaságtani alkalmazások:

- többletköltség: $C(x+1) - C(x)$ (ha $C(x)$ a költség fv.)
  $C(x) = kx + b$ esetén $C(x+1) - C(x) = k(x+1) - kx = k$
  $C(x) = x^2 + 6x + 1000$ esetén $C(x+1) - C(x) = \dots = 2x + 7$.
- többletbevétel: $R(x+1) - R(x)$ (ha $R(x)$ a bevételi fv.)
  $R(x) = \ell x$ esetén $R(x+1) - R(x) = \ell(x+1) - \ell x = \ell$
  $R(x) = (16 - 0{,}02x)x$ esetén $R(x+1) - R(x) = \dots = 16x - 0{,}02x^2$
- többletprofit: $P(x+1) - P(x)$ (ha $P(x) = R(x) - C(x)$ a profit fv.)
  $R(x) = 47x$, $C(x) = 100 + x + x^2$ $(0 \le x \le 25)$
  $P(x+1) - P(x) = \dots = 45 - 2x$

Jobb jellemzést kaphatunk a következő fogalommal:

2. def. Az $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ fv. differenciálható az $x_0 \in \langle a,b \rangle$ pontban, ha létezik a
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$
véges határérték. Ezt az f x_0-beli differenciálhányadosának (deriváltjának) nevezzük.

Geometriai tartalma a szelők határhelyzetének, az érintőnek az iránytangense (meredeksége).

Közgazdaságtani alkalmazások:

Határköltség: $\overline{MC} = C'(x)$

Ha $C(x) = kx + b \Rightarrow \overline{MC} = C'(x) = k$ (= többletk.)

Ha $C(x) = x^2 + 6x + 1000 \Rightarrow \overline{MC} = C'(x) = \underline{2x+6}$ ($\neq$ többletk.)

Határbevétel: $\overline{MR} = R'(x)$

Ha $R(x) = \ell x \Rightarrow \overline{MR} = R'(x) = \ell$ (= többletbevétel)

Ha $R(x) = (16 - 0{,}02x)x \Rightarrow \overline{MR} = R'(x) = 16 - 0{,}02x^2$

Határprofit: $\overline{MP} = P'(x)$

<u>Megjegyzés</u>: Értelmezhető a jobb- ill. baloldali derivált is adott pontban, mint jobb- ill. baloldali határérték.

3. <u>def.</u> Az $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvényt differenciálhatónak nevezzük, ha $\langle a,b\rangle$ minden pontjában differenciálható. Ekkor a (D) szerint definiált $f': \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvényt az f <u>differenciálhányados (derivált) függvényének</u> nevezzük.

<u>Megjegyzés</u>: Ha f differenciálható x_0-ban (vagy $\langle a,b\rangle$-n), akkor folytonos is x_0-ban (ill. $\langle a,b\rangle$-n).
Az $f(x) = |x|$ $(x\in\mathbb{R})$ fv. nem differenciálható $x_0 = 0$-ban, de ott is folytonos.

2) Elemi függvények deriváltfüggvényei (1. rész)

A 4. feladatsor hátoldalán a teljes „lista" megtalálható.
Néhány eset bizonyítása:

- $\boxed{f(x) = C \ (x\in\mathbb{R})} \Rightarrow f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{C-C}{x-x_0} = 0 \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$.
  $\Rightarrow f'(x) = (C)' = 0 \ (x\in\mathbb{R})$
- $\boxed{f(x) = x \ (x\in\mathbb{R})} \Rightarrow f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1 \ \forall x_0\in\mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = (x)' = 1 \ (x\in\mathbb{R})$
- $\boxed{f(x) = x^n \ (x\in\mathbb{R})} \Rightarrow f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1}) = n x_0^{n-1}$
  $\forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = (x^n)' = n x^{n-1} \ \forall x\in\mathbb{R}$.
- $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow \exists f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (x \in]-\varrho, \varrho[)$.
  $\Rightarrow$ 1) $(e^x)' = \exp'(x) = e^x = \exp(x) \ (x\in\mathbb{R})$.
  2) $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$; $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ $(x\in\mathbb{R})$.

3) Differenciálhatóság és műveletek

1. Tétel. Ha $f, g : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ differenciálhatók $x \in \langle a,b \rangle$-ban, úgy $f+g$, $f \cdot g$ és $g(x) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is diff-tó x-ben és

$$[f(x)+g(x)]' = (f+g)'(x) = f'(x)+g'(x); \; [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Következmények:

$$[c f(x)]' = c f'(x); \; [f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x); \; \left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)};$$

$$[\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x)]' = \lambda_1 f_1'(x) + \dots + \lambda_n f_n'(x).$$

Ha $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \Rightarrow \exists P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

Ha $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \Rightarrow \exists f'(x)$, ha $Q_m(x) \neq 0$.

2. Tétel (az összetett fv. differenciálhatósága).

Ha $g : \langle c,d \rangle \to \mathbb{R}$, $f : \langle a,b \rangle = g(\langle c,d \rangle) \to \mathbb{R}$ olyanok, hogy $\exists g'(x_0)$ $(x_0 \in \langle c,d \rangle)$ és $\exists f'(y_0)$ $(y_0 = g(x_0))$, akkor a $F = f \circ g$ $(F(x) = f(g(x)))$ összetett fv. is differenciálható x_0-ban és

$$\boxed{F'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)}.$$

Ha a feltételek $\forall x \in \langle a,b \rangle$-re fennállnak, akkor

$$\boxed{[f(g(x))]' = f'(g(x))\, g'(x) \quad (x \in \langle c,d \rangle)}$$

Pl. $[\exp_a(x)]' = (a^x)' = [\exp(x \ln a)]' = \exp(x \ln a) \ln a = a^x \ln a$.

3. Tétel (az inverz fv. differenciálhatósága). Ha $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton és folytonos, létezik $f'(x_0) \neq 0$, akkor f^{-1} diff-tó $f(x_0)$-ban és

$$\boxed{(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}} \text{ ill. } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad (y_0 = f(x_0)).$$

Ha $\forall x \in \langle a,b \rangle$-re teljesülnek a feltételek $\Rightarrow \boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$.

További példák:

1) $\boxed{(\ln x)' = [\exp^{-1}(x)]' = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x} \quad (x>0)}$;

2) $[\log_a x]' = [\exp_a^{-1}(x)]' = \frac{1}{\exp_a'(\log_a x)} = \frac{1}{\exp_a(\log_a x)\ln a} = \frac{1}{x \ln a} \; (x>0)$,

3) $\boxed{[x^{\mu}]' = [\exp(\mu \ln x)]' = \exp(\mu \ln x)\cdot\frac{\mu}{x} = x^{\mu}\frac{\mu}{x} = \mu x^{\mu-1}}$

$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \; (x>0)$;

$(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \ldots$

4) $\boxed{(\operatorname{tg} x)'} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$

$\boxed{(\operatorname{ctg} x)'} = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \ldots = \boxed{-\frac{1}{\sin^2 x}}$

4) Magasabbrendű deriváltak

1.def. Adott $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ fv-re $\boxed{f^{(0)} \doteq f}$ az f 0-odik deriváltja. Ha $n \in \mathbb{N}$ esetén $\exists\, f^{(n-1)}:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ és differenciálható, akkor f n-edik deriváltja $f^{(n)} \doteq (f^{(n-1)})'$. Ha $\forall n \in \mathbb{N}$-re $\exists\, f^{(n)}$, akkor azt mondjuk, hogy f akárhányszor differenciálható.

Pl. 1) $(x^n)^{(k)} = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}$ $(x\in\mathbb{R})$, ha $k<n$; $(x^n)^{(n)} = n!$ $(x\in\mathbb{R})$

$(x^n)^{(k)} = 0$ $(x\in\mathbb{R})$, ha $k>n$;

2) $(e^x)^{(n)} = e^x \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad (x\in\mathbb{R})$;

3) $(\sin x)^{(n)} = ?$; $(\cos x)^{(n)} = ?$; $(\ln x)^{(n)} = ?$

Tétel. Ha $f,g:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ $\forall x\in\langle a,b\rangle$-re n-szer differenciálhatók ⇒

$(cf)^{(n)}(x) = c f^{(n)}(x)$; $(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$

$$\boxed{(f\cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x)\, g^{(n-i)}(x)} \quad \text{(Leibniz-szabály)}$$

$\forall\, x \in \langle a,b\rangle$ esetén.

2.def. Ha $f:]p,q[\to \mathbb{R}$ akárhányszor differenciálható, akkor a

(TS) $$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k} \quad (x, a \in]p,q[)$$

sort az f a-hoz tartozó Taylor-sorának, míg a

(TP) $$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k} \quad (x, a \in]p,q[)$$

polinomot ((TS) n-edik részletösszegét) f a-hoz tartozó Taylor-polinomjának nevezzük.

Ha $0 \in]p,q[$, úgy az $a=0$-hoz tartozó Mclaurin-sort ill. polinomot kapjuk:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k} \quad \text{ill.} \quad \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k} \quad \text{alakban.}$$

Megjegyzések:

1) Minden konvergens hatványsor összegfüggvényének Taylor- (Mclaurin) sora.
Pl. $e^x \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ esetén e^x Mclaurin-sora $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

2) Taylor-tétel. Ha $f: K(a,r) \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $n \in \mathbb{N}$-re $\exists f^{(n)}$, akkor $\forall x \in K(a,r)$ esetén $\exists \xi(x) \in K(a,r) \setminus \{a\}$, hogy $\forall x \in K(a,r)$-re

$$\boxed{f(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!}(x-a)^n} = \underline{T_{n-1}(x) + R_n(x)}$$

3) Ha $R_n(x) \to 0$ ($n \to \infty$ esetén) (pl., ha $|f^{(n)}(x)| < M$ $\forall x$ és $n \in \mathbb{N}$), akkor $f(x) = $ (TS)

Pl. Határozzuk meg az $f(x) = \ln(1+x)$ $(x \in (-1, \infty))$ fv. Mclaurin-sorát.

5) Differenciálható függvények vizsgálata

1. Tétel (a lokális szélsőérték szükséges feltétele). Ha az $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ fv.-nek az $x_0 \in]a,b[$ pontban lokális szélsőértéke van és $\exists f'(x_0)$, akkor $f'(x_0)=0$.

Ez mutatja, hogy ott lehet lokális szélsőérték egy belső pontban, ahol $f'(x_0)=0$ (ha diff-tó x_0-ban).

Pl. 1) $f(x)=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$-nek $x_0=0$-ban lok. min. van és $f'(x)=2x$ $(x\in\mathbb{R})$ miatt $f'(0)=0$.

2) $f(x)=x^3$ $(x\in\mathbb{R})$-nek 0-ban nincs lok. szé-e, de $f'(x)=3x^2$ miatt $f'(0)=0$.
Ez mutatja, hogy a feltétel általában nem elegendő!

2. Tétel (a monotonitás elegendő feltétele). Ha $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható, akkor

a) $f'(x)\geq 0$ $(x\in\langle a,b\rangle) \Rightarrow f$ monoton növekedő $\langle a,b\rangle$-n;

b) $f'(x)\leq 0$ $(x\in\langle a,b\rangle) \Rightarrow f$ monoton csökkenő $\langle a,b\rangle$-n;

c) $f'(x)=0$ $(x\in\langle a,b\rangle) \Rightarrow f(x)=C$ $(x\in\langle a,b\rangle)$, azaz f konstans.

Pl. 1) $f(x)=5x+2$ $(x\in\mathbb{R}) \Rightarrow \exists f'(x)=5\geq 0 \Rightarrow f$ mon. növekedő

2) $f(x)=x^2-4x+7$ $(x\in\mathbb{R}) \Rightarrow \exists f'(x)=2x-4$, továbbá
$f'(x)=2x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2 \Rightarrow f$ mon. növ a $[2,+\infty[$-ben,
$f'(x)=2x-4\leq 0 \Leftrightarrow x\leq 2 \Rightarrow f$ mon. csökk a $]-\infty,2]$-ben.

Megjegyzés. Ha még az is igaz, hogy $\nexists \langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle$, hogy itt $f'(x)=0$, akkor a) esetén f szig. mon. növ.;
b) esetén f szig. mon. csökkenő.

3. Tétel (a lokális szélsőérték egy elégséges feltétele).
Ha $f : K(x_0,r) \to \mathbb{R}$ differenciálható, $f'(x_0)=0$ és

a) $f'(x)\geq 0$ $(x\in]x_0-r,x_0])$ $\wedge$ $f'(x)\leq 0$ $(x\in [x_0,x_0+r[) \Rightarrow x_0$-ban lok. max.

b) $f'(x)\leq 0$ (— " —) $\wedge$ $f'(x)\geq 0$ (— " —) $\Rightarrow x_0$-ban lok. min van.

(f' előjelet vált x_0-ban!)

Pl. $f(x)=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$, $f'(x)=2x=0 \Leftrightarrow x=0$ és $f'(x)=2x\leq 0$, ha $x\in]-\infty,0]$ és $f'(x)=2x\geq 0$, ha $x\in [0,+\infty[\Rightarrow$ 0-ban lok. min. van.

4. Tétel (a lokális szélsőérték 2. elégséges feltétele).

Ha $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható és $f'(x_0)=0$ $(x_0 \in]a,b[)$ és

a) $\exists f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$-ban lok. max. van;

b) $\exists f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$-ban lok. min. van.

Pl. $f(x) = x^2+2x+1$ $(x \in \mathbb{R}) \Rightarrow \exists f'(x) = 2x+2$ $(x \in \mathbb{R})$

$f'(x) = 2x+2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$, $\exists f''(x) = 2 > 0$ így $f''(-1) > 0$,

ezért f-nek $x_0 = -1$-ben lok. min. van.

Konvex (konkáv) függvények

1. def. Az $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ függvényt konvexnek (konkávnak) nevezzük $\langle a,b \rangle$-n, ha $\forall x_1, x_2 \in \langle a,b \rangle$ és $\forall p,q \in [0,1]$, $p+q=1$ esetén

$\boxed{f(px_1+qx_2) \leq pf(x_1)+qf(x_2)}$ $(f(px_1+qx_2) \geq pf(x_1)+qf(x_2))$.

Geometriailag e fogalmak megfogalmazhatók a szelők, illetve érintők segítségével is (az utóbbi esetben, ha $\exists f'$).

Differenciálható függvények esetén igaz a következő

5. Tétel (a konvexitás, konkávitás 1. elegendő feltétele).

Ha $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható és

a) f' monoton növekedő $\Rightarrow f$ konvex $\langle a,b \rangle$-n;

b) f' monoton csökkenő $\Rightarrow f$ konkáv $\langle a,b \rangle$-n;

Kétszer diff.-tóság esetén pedig a

6. Tétel (a konv., konkávitás 2. elegendő feltétele). Ha $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ esetén $\exists f''$ és

a) $f''(x) \geq 0$ $(x \in \langle a,b \rangle) \Rightarrow f$ konvex $\langle a,b \rangle$-n;

b) $f''(x) \leq 0$ $(x \in \langle a,b \rangle) \Rightarrow f$ konkáv $\langle a,b \rangle$-n.

Pl. $f(x) = 3x^2-2x+1$ $(x \in \mathbb{R}) \Rightarrow f'(x) = 6x-2 \Rightarrow f''(x) = 6$ $(x \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow f$ konvex $\mathbb{R}$-en.

2. def. $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$-nek $x_0 \in]a,b[$ inflexiós helye ($(x_0, f(x_0))$ inflexiós pontja) ha itt egy konvex és konkáv ive találkozik.

L'Hospital-szabály

Ha $f, g : K(a,r) \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$
akkor létezik-e a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ határérték, és hogyan számítható ki?

7. Tétel (L'Hospital-szabály). Legyen f és g értelmezett a $K(a,r)\setminus\{a\}$ halmazon (vagy az $]a, a+r[$ vagy $]a-r, a[$ intervallumokon) és itt differenciálható, továbbá $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ és $g(x)\, g'(x) \neq 0$. ($\frac{0}{0}$ alak)

Ha $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, akkor $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ és $= A$.

Pl. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$ és a két fv. differenciálható $\forall x \in \mathbb{R}$. Továbbá $x \cdot 1 \neq 0$, ha $x \in K(0,r)\setminus\{0\}$ és $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$, így a L'Hospital-szabály miatt $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Megjegyzések:

1) Ha f és g értelmezési tartománya felülről vagy alulról nem korlátos, így a tétel $a = +\infty$ illetve $a = -\infty$ esetén is igaz.

2) Ha az adott feltételek úgy teljesülnek, hogy $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ ($v. -\infty$), így is igaz a tétel állítása. ($\frac{\infty}{\infty}$ alak)

3) Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ ($0\cdot\infty$ alak), akkor $f(x)\, g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ $\left(v.\ \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\right)$ átírással alkalmazhatjuk a tételt.

Pl. 1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+1}{5x^2+x+2} = \dots$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \dots$

A teljes függvényvizsgálat szempontjai

1) D_f meghatározása;
2) Paritás, periodicitás vizsgálata;
3) Zérushelyek meghatározása;
4) A határértékek vizsgálata D_f határpontjaiban;
5) Folytonosság vizsgálata, szakadási helyek meghatározása;
6) Differenciálhatóság vizsgálata, f', f''... meghatározása;
7) Monotonitás vizsgálata;
8) Lokális és globális szélsőértékhelyek és szélsőértékek meghatározása;
9) Konvexitás (konkávitás) vizsgálata, inflexiós helyek (és pontok) meghatározása;
10) Aszimptoták meghatározása;

(Az $x = x_0$ egyenes függőleges aszimptota, ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, vagy $\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty$;

Az $y = y_0$ egyenes vízszintes aszimptota, ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ vagy $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$.)

11) A függvény ábrázolása;
12) R_f (az értékkészlet) megadása.