VII. Valós függvények integrálszámítása (GMI. 95-115.o) (21)

1) Primitív függvény, határozatlan integrál (GMI. 95-100.o)

Az $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ fv.-hez, ha differenciálható, hozzárendelhető az $f': \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ derivált függvény.

Kérdés: $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$-hez létezik-e $F: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$, hogy $F' = f$?

Ha pl. $f(x) = \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor $F(x) = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$-el $F'(x) = \cos x$.

1. def. Ha adott az $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ fv., akkor a $F: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható fv.-t az f primitív függvényének, vagy határozatlan integráljának nevezzük, ha $F' = f$ teljesül.

Az F fv-re $\int f$, az $F = \int f$ x helyen felvett értékére az $F(x) = \int f(x)\,dx$ jelölést használjuk, míg $F = \int f$ meghatározását (határozatlan) integrálásnak mondjuk.

(Természetesen a változó lehet t vagy u pl., akkor: $\int f(t)\,dt$, ...)

Példák: 1) Ha $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$, úgy $F(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$

2) Ha $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x>0)$, úgy $F(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$ $(x>0)$

Egyértelmű-e $\int f(x)\,dx$? Ha $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$, úgy $F(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$ $(x>0)$ is primitív fv. $\forall$ $C \in \mathbb{R}$ esetén.

Tétel. Ha $F: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ primitív fv-e (határozatlan int.-ja) az $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ fv-nek, úgy $G: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ primitív fv., ha $\exists$ $C \in \mathbb{R}$, hogy $G(x) = F(x) + C$ $(x \in \langle a,b \rangle)$.

Az elemi fv.-ek deriváltjait ismerjük (táblázatba is foglaltak), ebből könnyen megadhatjuk (táblázatba foglalhatjuk) az úgynevezett alapintegrálokat (ld. kiadott anyag).

Fontosak és könnyen bizonyíthatók az alábbi szabályok:

a) Ha $f, g: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ esetén $\exists$ $\int f$ és $\int g$, továbbá $p, q \in \mathbb{R}$ adott konstansok, akkor $\exists$ $\int (pf + qg)$ és $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\boxed{\int (p f(x) + q g(x))\,dx = p \int f(x)\,dx + q \int g(x)\,dx + C \quad (x \in \langle a,b \rangle).}$$

Pl. 1) $\int(2x^3+3\cos x)\,dx = 2\frac{x^4}{4}+3\sin x + C \quad (x\in\mathbb{R})$

2) Ha ismerjük a határbevételt: $R'(x)=300-0{,}2x$, akkor a bevétel: $R(x)=\int(300-0{,}2x)\,dx=300x-0{,}2\frac{x^2}{2}+C$. Ugyanakkor $R(0)$ nyilván 0, így $C=0$, tehát: $R(x)=300x-0{,}1x^2 \quad (x\in\mathbb{R})$.

3) Ha a határköltség $C'(x)=1+x+3x^2$, akkor $C(x)=\int(1+x+3x^2)\,dx = x+\frac{x^2}{2}+3\frac{x^3}{3}+C$. Ha a fix költség pl. $C(0)=150$, így $C=0$, tehát $C(x)=x+\frac{x^2}{2}+x^3+150 \quad (x\in\mathbb{R})$.

b) Ha $f, F:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ olyanok, hogy $\int f(x)\,dx=F(x)+C \ (x\in\langle a,b\rangle)$, akkor $\exists$ $\boxed{\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C=\frac{1}{a}\int f(t)\,dt\Big|_{t=ax+b}+C}$

Pl. $\int(3x+5)^3\,dx=\frac{1}{3}\frac{(3x+5)^4}{4}+C$, mert $\int x^3=\frac{x^4}{4}+C$

c) Ha $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ differenciálható, $\alpha\neq-1$, akkor

$$\boxed{\int[f(x)]^\alpha f'(x)\,dx=\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (x\in\langle a,b\rangle)}.$$

Pl. 1) $\int(3x^2+5)^4\,6x\,dx=\frac{(3x^2+5)^5}{5}+C$, mert $(3x^2+5)'=6x$.

2) $\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\int(\ln x)\frac{1}{x}\,dx=\frac{[\ln x]^2}{2}+C$, mert $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

d) Ha $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ differenciálható és $f>0$, akkor

$$\boxed{\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln(f(x))+C \quad (x\in\langle a,b\rangle)} \qquad \left(\int\frac{f'}{f}=\ln|f|+C,\ \text{ha } f\neq0\right)$$

Pl. 1) $\int \operatorname{ctg} x\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx=\ln(\sin x)+C \quad (x\in\,]0,\pi[)$.

2) $\int\frac{1}{x\ln x}\,dx=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx=\ln(\ln x)+C \quad (x>1)$.

e) A parciális integrálás szabálya (tétele):

Ha $f,g:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ differenciálhatók és $\exists\int f'g \Rightarrow \exists\int fg'$ és $C\in\mathbb{R}$, hogy $\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx+C}$.

Pl. 1) $\int \underset{f}{x}\,\underset{g'}{e^x}\,dx=\underset{f}{x}\,\underset{g}{e^x}-\int\underset{f'}{1}\cdot\underset{g}{e^x}\,dx+C=xe^x-e^x+C$.

2) $\int\ln x\,dx=\int\underset{g'}{1}\,\underset{f}{\ln x}\,dx=\underset{g}{x}\,\underset{f}{\ln x}-\int\underset{f'}{\frac{1}{x}}\,\underset{g}{x}\,dx+C=x\ln x-x+C$.

Megjegyzés: Ha $P_n(x)$ n-edfokú polinom, akkor az alábbi integrálok a parciális integrálással (egy v. több lépésben) meghatározhatók:

$\int P_n(x)e^x dx$; $\int P_n(x)\sin x\, dx$; $\int P_n(x)\cos x\, dx$; $\int P_n(x)\operatorname{sh} x\, dx$; $\int P_n(x)\operatorname{ch} x\, dx$;
$\int P_n(x)\ln x\, dx$; $\int P_n(x)\operatorname{arctg} x\, dx$; $\int P_n(x)\operatorname{arcctg} x\, dx$; $\int P_n(x)\arcsin x\, dx$;
$\int P_n(x)\arccos x\, dx$.

e) A helyettesítéses integrálás szabálya (tétele):
Ha $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ és $g:\langle c,d\rangle\to\langle a,b\rangle$ olyanok, hogy
$\exists\, g'$ és $\int f$, akkor $\exists \int (f\circ g)\,g'$ és $C\in\mathbb{R}$, hogy

(H) $\boxed{\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt\Big|_{t=g(x)} + C \quad (x\in\langle a,b\rangle)}$,

Ha $\exists\, g^{-1}$ (g inverze) is, úgy

(H^*) $\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} + C \quad (x\in\langle a,b\rangle)}$.

Pl. 1) $\int \underbrace{2x}_{g'}\, \underbrace{\sin(x^2)}_{f(g)}\,dx = \int \underbrace{\sin t}_{f}\,dt\Big|_{t=x^2} + C = -\cos(x^2)+C \quad (x\in\mathbb{R})$.

2) $\int \cos(\frac{1}{2}x)\,dx = 2\int \underbrace{\cos(\frac{1}{2}x)}_{f(g)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{g'}\,dx = 2\int \underbrace{\cos t}_{f}\,dt\Big|_{t=\frac{1}{2}x} + C = 2\sin\frac{1}{2}x + C$.

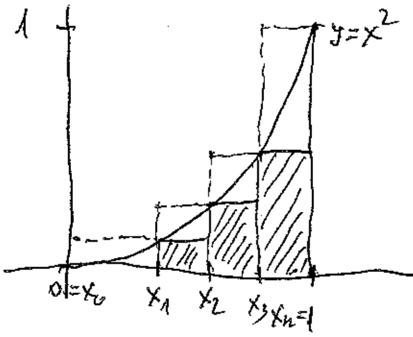
3) Az előbbi int. meghatározása az alábbi nem precíz, de célravezető módon is történhet:
$\frac{1}{2}x = t \Leftrightarrow x = 2t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2 \Rightarrow dx = 2\,dt \Rightarrow$
$\int \cos\frac{1}{2}x\,dx = \int \cos t\cdot 2\,dt\Big|_{t=\frac{1}{2}x} + C = 2\sin\frac{1}{2}x + C$

Megjegyzések:
1) $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ esetén a $g(t)=\sin t$ $(t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$ a jó helyettesítés;
2) $\int R(e^x)\,dx$ esetén a $g(t)=\ln t$ $(t=e^x)$ $(t>0)$ a jó helyettesítés;
3) $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$-re $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=g^{-1}(x)$, $g(t)=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}$ jó lesz;
4) $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$-re $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t=g^{-1}(x)$, $x=2\operatorname{arctg} t=g(t)$ a jó.
Ekkor: $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2} \Rightarrow \boxed{dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt}$, továbbá
$\boxed{\sin x=\frac{2t}{1+t^2}}$; $\boxed{\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}}$ vezet eredményre.

2) A Riemann-integrál (GMI. 100.–115.o)

Háttér: 1) Cél pl. a görbe alatti terület közelítése, meghatározása.

Pl. a $D=\{(x,y) \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2\}$ halmaz területe.



$x_i=\frac{i}{n}\ (i=0,\dots,n)$; $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

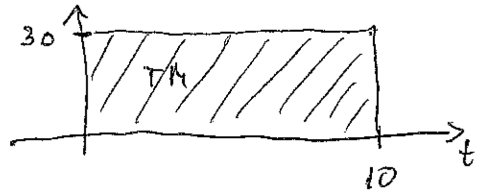
$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \frac{1^2+2^2+\dots+(n-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

$$\frac{1}{3} \leftarrow s \le T \le S \rightarrow \frac{1}{3} \overset{?}{\Longrightarrow} \boxed{T=\frac{1}{3}}$$

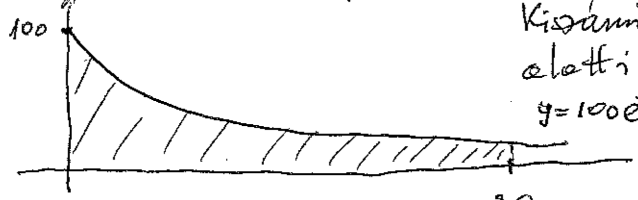
2) Ha adott a termelési függvény, úgy adott idő intervallumban, hogyan adható meg az előállított termék mennyisége?

Pl. • Ha egy üzem naponta 30 tonna terméket állít elő, mennyit gyárt 10 nap alatt?

TM = 30·10 = 300 tonna: az $y=30$ ($t\in[0,10]$) fv. görbéje alatt terület mérőszáma.



• Ha a termelési függvény: $y=100e^{-0{,}1x}$ kérdés 20 nap alatt mennyit termelünk?



Kiszámítandó a fv. görbéje alatti terület a $[0,20]$ intervallumon. $y=100e^{-0{,}1x}$

Ez hogyan számítható?

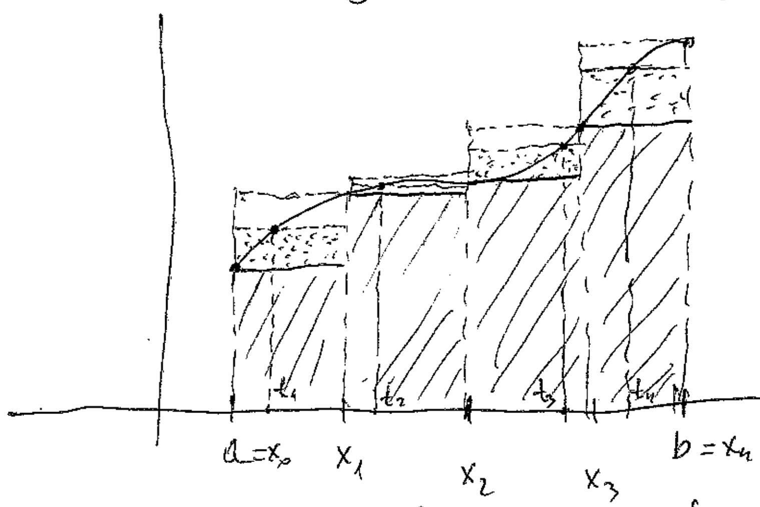
Ezek kezeléséhez építünk fel egy határozott integrált, ami esetünkben a Riemann-integrál lesz.

1. def. A $P=\{x_i \mid a=x_0<x_1<\dots<x_i<\dots x_n=b\}\subset[a,b]$ halmazt az $[a,b]$ egy felosztásának, az x_i-ket osztópontoknak, $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\dots,n)$ a felosztás részintervallumainak, míg $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ mellett a $\|P\|=\sup_i\{\Delta x_i\}$ számot a felosztás finomságának nev.

P_2 finomítása (továbbosztása) P_1-nek, ha $P_1\subset P_2$.

$\langle P_k\rangle$ normális felosztássorozata $[a,b]$-nek, ha $\|P_k\|\to 0$.

2. *def.* Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos fv., P $[a,b]$ egy felosztása, továbbá
$$M_i \doteq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad m_i \doteq \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad (i=1,\dots,n).$$
A $\boxed{S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i}$; $\boxed{s(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i}$; $\boxed{O(f,P)=S(f,P)-s(f,P)}$ számokat az f P-hez tartozó felső, alsó ill. oszcillációs összegének, míg $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ esetén a
$\boxed{\sigma(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i}$ számot az f P-hez és $t_1,\dots,t_n$-hez tartozó integrálközelítő összegének nevezzük.



Ezek bizonyos, a görbe alatti
$D=\{(x,y)\mid x\in[a,b],\ 0\le y\le f(x)\}$
síkidom „területét" közelítő értékek.

Egyszerűen beláthotó a következő

Tétel. A $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos fv. esetén:

a) $s(f,P)\le \sigma(f,P)\le S(f,P)$ $\forall P$ és $\sigma(f,P)$ esetén;

b) $s(f,P_1)\le s(f,P_2)$ és $S(f,P_1)\ge S(f,P_2)$ $\forall$ $P_1\subset P_2$ esetén;

c) $s(f,P_1)\le S(f,P_2)$ $\forall$ P_1, P_2 esetén.

3. *def.* Adott $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos fv.-re az
$$\underline{J}=\underline{\int_a^b} f=\sup_P\{s(f,P)\}, \qquad \overline{J}=\overline{\int_a^b} f=\inf_P\{S(f,P)\}$$
számokat f $[a,b]$ feletti alsó ill. felső Darboux-integráljának nevezzük.
Ezek léteznek és $s(f,P)\le \underline{J}\le\overline{J}\le S(f,P)$ teljesül.

4. *def.* Azt mondjuk, hogy az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha $\underline{J}=\overline{J}$ és ezt a közös értéket az f Riemann-integráljának nevezzük $[a,b]$-n. Jel: J, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(x)\,dx$.

Példák: 1) $f(x)=c$ $(x\in[a,b])$ esetén $\forall P$ felosztásra
$m_i = M_i = c \Rightarrow s(f,P) = S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} c\,\Delta x_i = c(b-a)$
$\Rightarrow \exists\ \underline{J} = \overline{J} = c(b-a) \Rightarrow \exists \int_a^b c\,dx = c(b-a).$

2) Az $\boxed{f(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } x\in[a,b]\cap Q\\ 0, & \text{ha } x\in[a,b]\cap CQ\end{cases}}$ fv. esetén $\forall P$-re

$m_i = 0,\ M_i = 1 \Rightarrow s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i = 0,\ S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} 1\,\Delta x_i = b-a$
$\Rightarrow \underline{J} = 0,\ \overline{J} = b-a \Rightarrow \underline{J} \neq \overline{J} \Rightarrow$ f nem R-integrálható.

Megjegyzések: 1) Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl., nemnegatív és R-integrálható, úgy a $D=\{(x,y) \mid x\in[a,b],\ 0\le y\le f(x)\}$ síkidom területe legyen $\int_a^b f(x)\,dx$ (görbe alatti terület)

2) Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a termelési fv. (nyilván korlátos és nemnegatív), akkor az $[a,b]$ időintervallumban a termelés mennyisége legyen $\int_a^b f(x)\,dx$.

Pl. $y=f(x)=100\,e^{-0,1x}$ esetén a 20 nap alatt termelt mennyiség: $\int_0^{20} 100\,e^{-0,1x}\,dx$.

3) Ha $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ olyan korl. és R-intó fv-ek, hogy $f\le g$ $[a,b]$-n, akkor a $D=\{(x,y) \mid x\in[a,b],\ f(x)\le y\le g(x)\}$ síkidom (a két görbe közötti halmaz) T területe legyen.
$T=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx.$

4) $\int_a^a f(x)\,dx = 0;\quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

A R-integrálhatóság kritériumai (GHI. 105.-107.o)

1. tétel. Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv. $\Leftrightarrow$ R-intó, ha $\exists\ J\in\mathbb{R}$, $\forall\varepsilon>0$ $\exists\ \delta(\varepsilon)$, $\forall P$ felosztásra melyre $\|P\|<\delta(\varepsilon) \Rightarrow |\sigma(f,P)-J|<\varepsilon$ $\forall\ \sigma(f,P)$-re.

2. Tétel Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv $\Leftrightarrow$ R-intó, ha $[a,b]$ $\forall\ \langle P_k\rangle$ normális felosztássorozatára $\forall \langle\sigma(f,P_k)\rangle$ konvergens. (Ekkor $\exists$ egy közös határérték és ez éppen J.)

3. tétel. Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv. $\Leftrightarrow$ R-intó, ha $\forall\ \varepsilon>0$-ra $\exists\ P$ felosztása $[a,b]$-nek, hogy $\vartheta(f,P)<\varepsilon$. (Riemann-kritérium)

4. tétel. Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv. $\Leftrightarrow$ R-intó, ha $\forall\ \langle P_k\rangle$ norm. felosztássorozathoz tartozó $\langle\vartheta(f,P_k)\rangle$ sorozat nullsorozat.

A Riemann-integrálhatóság elegendő feltételei

1. tétel. Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos $\Rightarrow$ R-intó.

2. tétel. Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow$ R-intó.

3. tétel. Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl., $c\in\,]a,b[$ és f R-intó $[a,c]$ és $[c,b]$-n $\Rightarrow$ R-intó $[a,b]$-n is és

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx}$$

(az int. additivitása az intervallumra).

A R-int. műveleti tulajdonsága, középértéktételek (GM I. 107.-108.o.)

1. tétel. Ha az $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv.-ek R-integrálhatók, $p,q\in\mathbb{R}$ adott konstansok, akkor $pf+qg$ is R-integrálható és

$$\boxed{\int_a^b (pf+qg)=p\int_a^b f+q\int_a^b g}.$$

2. tétel (középértéktétel). Ha $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. és R-intó, $m\le f(x)\le M$, $0\le g(x)$ $(x\in[a,b])$, akkor

$$\boxed{m\int_a^b g(x)\,dx\le\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\le M\int_a^b g(x)\,dx}$$

1. köv: Ha $g\equiv 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)}$

2. köv. Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folyt. $\Rightarrow\exists\ c\in[a,b]$, hogy

$$\boxed{\int_a^b f=f(c)(b-a)}$$

(Azt is mondjuk, hogy $f(c)$ az f átlagos értéke $[a,b]$-n.)

Pl. Ha $C(x)=400+x+0{,}03x^2$ a költség fv, akkor az átlagos költség $x=0$ és $x=10$ között $\bar{c}=\frac{1}{10}\int_0^{10}(400+x+0{,}03x^2)\,dx$, míg $x=0$ és $x=40$ között $\bar{c}=\frac{1}{40}\int_0^{40}(400+x+0{,}03x^2)\,dx$.

A R-integrál kiszámításának „eszközei" (GM I. 109.–113. o)

1. **tétel** (Newton–Leibniz formula). Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv R-ható $\exists\ F:[a,b]\to\mathbb{R}$ primitív fv.-e ($F'=f$), akkor

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)}.$$

Pl. 1) $f(x)=x^2\ (x\in[0,1]) \Rightarrow \exists\ F(x)=\int x^2dx = \frac{x^3}{3} \Rightarrow \int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

2) $f(x)=\sin x\ (x\in[0,\pi]) \Rightarrow \exists\ F(x)=\int \sin x\,dx = -\cos x \Rightarrow$
$\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = 1-0=1$.

3) $f(x)=100e^{-0{,}1x}\ (x\in[0,20]) \Rightarrow \exists\ F(x)=\int 100e^{-0{,}1x}dx = \frac{100e^{-0{,}1x}}{-0{,}1} =$
$= -1000e^{-0{,}1x} \Rightarrow \int_0^{20} f(x)dx = \left[-1000e^{-0{,}1x}\right]_0^{20} = 1000-1000e^{-2} =$
≈ 863

4) $\bar{c} = \frac{1}{10}\int_0^{10}(400+x+0{,}3x^2) = \frac{1}{10}\left[400x+\frac{x^2}{2}+0{,}3\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = 415$.
(az átlagköltség a $[0,10]$ időintervallumban)
$\bar{c} = \frac{1}{40}\int_0^{40}(400+x+0{,}3x^2)dx = \frac{1}{40}\left[400x+\frac{x^2}{2}+0{,}1x^3\right]_0^{40} = 580$.
(az átlagköltség a $[0,40]$ időintervallumban)

2. **tétel** (a parciális integrálás tétele R-int.-re).
Ha $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ differenciálhatók és $f',g':[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonosak, akkor $\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}$.

Pl. $\int_0^\pi \underset{f}{x}\,\underset{g'}{\sin x}\,dx = [-x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x\,dx = \pi$

3. **tétel** (helyettesítéses int. tétele R-int.-re)
Ha $g:[a,b]\to[c,d]$-re $\exists\ g'$ és folytonos, $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ folytonos $\Rightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx}.$$

Improprius integrálok (ld. GM. I. 113.–115. o)

Definíció: Ha az $f: [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ függvény $\forall\, [a,t[\subset [a,+\infty[$-en korlátos és Riemann-integrálható és

$$\exists \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx \doteq \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

véges határérték, akkor azt az f improprius R-intjának nevezzük $[a,+\infty[$-en.

Hasonlóan: $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \doteq \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx$ $\quad (]-\infty,b]$-n$)$;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \doteq \lim_{\substack{t \to +\infty \\ s \to -\infty}} \int_s^t f(x)\,dx \quad (]-\infty,+\infty[\text{-en}).$$

$$\int_a^b f \doteq \lim_{t \to b-0} \int_a^t f \quad ([a,b[-n) \quad \text{stb.}$$

Pl. 1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^{+\infty} x^{-2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t x^{-2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^t = 1-0=1;$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^t = 1-0=1.$

3) A Riemann-integrál további alkalmazásai

a) Görbe ívhossza:

Ha $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható fv. (görbe), akkor ívhossza: $\boxed{\ell(f) = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}$.

Pl. az $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $(x \in [-1,1])$ félkör ívhossza?

b) Forgástest térfogata:

Az $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos fv. $(f \geq 0)$ x-tengely körüli forgatásával kapott $A = \{(x,y,z) \mid a \leq x \leq b,\ y^2+z^2 \leq f^2(x)\}$ test térfogata: $\boxed{V(A) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$.

Pl. A félkör forgatásával keletkező gömb térfogata:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \pi\,\frac{4r^3}{3} = \frac{4r^3\pi}{3}$$

Alapintegrálok

$\int a\, dx = ax + C \quad (x\in\mathbb{R})$, speciálisan: $\int 1\, dx = x + C \ (x\in\mathbb{R})$;

$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C \quad (x>0)$; $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C \quad (x\neq 0)$;

$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha\neq -1) \quad (x>0 \vee x\in\mathbb{R})$;

$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C \quad (x\in\mathbb{R})$; $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C \quad (x\in\mathbb{R})$;

$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x\in\,]0,\pi[\ \vee \ x\in\,]k\pi,(k+1)\pi[\,)$;

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + C \quad (x\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\ \vee \ x\in\,]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[\,)$;

$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (x\in\mathbb{R})$, $a>0$, $a\neq 1$;

$\int e^x\, dx = e^x + C \quad (x\in\mathbb{R})$;

$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x + C \quad (x\in\mathbb{R})$;

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C \quad (x\in\,]-1,1[\,)$;

$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C \quad (x\in\mathbb{R})$; $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C \quad (x\in\mathbb{R})$;

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \operatorname{arsh} x + C \quad (x\in\mathbb{R})$;

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \operatorname{arch} x + C \quad (\text{ha } x>1 \vee x<1)$;