VIII. Többváltozós függvények

1) Az $\mathbb{R}^k$ euklideszi tér

Definíció. Legyen $\mathbb{R}^1 \doteq \mathbb{R}$ és ha $k \in \mathbb{N}$-re $\mathbb{R}^k$ értelmezett, akkor $\mathbb{R}^{k+1} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$.
$\mathbb{R}^k$ elemeit $(x_1, \dots, x_k)$-val jelöljük és rendezett szám k-asoknak nevezzük, ahol

$$(x_1, \dots, x_k) = (y_1, \dots, y_k) \iff x_1 = y_1, \dots, x_k = y_k .$$

Egyszerűbben: $\mathbb{R}^k \doteq \overset{1}{\mathbb{R}} \times \dots \times \overset{k}{\mathbb{R}}$, azaz $\mathbb{R}^k$ az $\mathbb{R}$ önmagával vett k-szoros Descartes-féle szorzata.
Modellek: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ esetén a síkbeli Descartes-féle koordináta r.
$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ esetén a térbeli — " — .

A $0 \doteq (\overset{1}{0}, \dots, \overset{k}{0})$ elemet nullelemnek nevezzük.
Ha $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$, úgy az összeadást, ill. a skalárral való szorzást

$$x + y \doteq (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k), \text{ ill. } \lambda x \doteq (\lambda x_1, \dots, \lambda x_k) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

szerint értelmezzük.
Tétel. $\mathbb{R}^k$ a két műveletre nézve vektortér (lin. tér).

Definíció. Ha $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ akkor

$$\|x\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}, \text{ ill. } d(x,y) \doteq \|x - y\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2}$$

legyen x normája, ill. x és y távolsága (metrika)

Tétel. a) $d(x,y) \geq 0$, és $d(x,y) = 0 \iff x = y$;
b) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^k$;
c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^k$.

Megjegyzés: $\mathbb{R}^k$-t a d távolsággal euklideszi térnek is nevezik (k-dimenziós).

Definíció. Az $a \in \mathbb{R}^k$ pont (vektor) r sugarú nyílt gömbkörnyezete a $\boxed{K(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid d(x,a) < r\}}$ halmaz

$\mathbb{R}^k$ topológiájának alapfogalmai (belső pont; külső pont; határpont; nyílt halmaz, zárt halmaz és tulajdonságai; torlódási pont; izolált pont; zárt halmazok jellemzése; nyílt lefedés; kompakt halmaz és jellemzése a Heine-Borel tétel) analógok $\mathbb{R}$ megfelelő fogalmaival.

Definíció. Egy $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$ függvényt $\mathbb{R}^k$-beli sorozatnak nevezzük. A jelölések azonosak a valós ($\mathbb{R}$-beli) esettel.
Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat korlátos, ha $\{x_n\}$ korlátos, azaz $\exists\ x \in \mathbb{R}^k$ és $r > 0$, hogy $d(x, x_n) < r$.
Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat konvergens, ha
$\exists\ x \in \mathbb{R}^k$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow d(x, x_n) < \varepsilon$.
x-et a sorozat határértékének nevezzük. Jel: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
$\langle x_n \rangle$ divergens, ha nem konvergens.

Tétel. a) Ha az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat konvergens, akkor egy. hé-enan.
b) Ha $\langle x_n \rangle$ konvergens, akkor korlátos.
c) Az $\langle x_n \rangle$ sorozat $\Leftrightarrow$ konv. és hé-e x, ha az $x_n = (x_{1n}, \dots, x_{kn})$ jelöléssel az $\langle x_{1n} \rangle, \langle x_{2n} \rangle, \dots, \langle x_{kn} \rangle$ koordináta sorozatok konvergensek és $x = (x_1, \dots, x_k)$ esetén $x_{in} \to x_i$ $(i = 1, \dots, k)$.
d) Ha $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle \in \mathbb{R}^k$ konvergensek, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_n \to x$, $y_n \to y$, akkor $\langle x_n \rangle + \langle y_n \rangle \doteq \langle x_n + y_n \rangle \to x + y$,
$\lambda \langle x_n \rangle \doteq \langle \lambda x_n \rangle \to \lambda x$

Pl $\langle x_n \rangle = \left\langle \left(\frac{n+1}{n+2}, \frac{1}{n^2} \right) \right\rangle$

$\frac{n+1}{n+2} \to 1$, $\frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow x_n \to (1, 0)$

B) Többváltozós függvények folytonossága és hé-e.

Definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ típusú függvényeket k-változós valós(értékű) függvényeknek nevezzük.
Pl. 1) $f(x,y) = x+y+2$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ egy kétváltozós valós függvény, mely szemléltethető $\mathbb{R}^3$-ban.
2) $C(x,y) = 5+5x+2y$ $(x,y \geq 0)$ k a költségfüggvény (x az anyag, y a termelők.)

Definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ fv. korlátos, ha $f(E)$ korlátos; alulról ill. felülről korlátos, ha $f(E)$ alulról ill. felülről korlátos.
A $\sup f(E)$, $\inf f(E)$ számokat f pontos felső ill. pontos alsó korlátjának (supremumának ill. infimumának) nevezzük.
Ha $\exists\, x_1, x_2 \in E$, $\sup f(E) = f(x_1)$, $\inf f(E) = f(x_2)$, akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik abszolút maximuma, ill. abszolút minimuma
f-nek $x_0 \in E$-ben helyi (lokális) maximuma, ill. minimuma van ha $\exists\, K(x,\delta)$, hogy $x \in K(x_0,\delta) \wedge E$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$, ill. $f(x) \geq f(x_0)$ teljesül

Definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ fv. folytonos $x_0 \in E$-ben, ha $\forall \langle x_n \rangle$ $(x_n \in E)$ sorozatra, hogy $x_n \to x_0$, $f(x_n) \to f(x_0)$ következik.
f folytonos az $E_1 \subseteq E$ halmazon, ha E_1 $\forall$ pontjában folytonos
Ha f nem folytonos $x_0 \in D_f$-ben, akkor azt mondjuk, hogy itt szakadása van, x_0-t pedig szakadási helynek nevezzük.
Tétel. Ha $f, g : E \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ folytonosak x_0-ban, akkor $f+g$ és λf is folytonosak x_0-ban.
Ha $f : E \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $g : f(E) \to \mathbb{R}$ olyanok, hogy f folyt. $x_0 \in E$-ben g folytonos $f(x_0)$-ban, akkor $F = g \circ f = g(f)$ folyt. x_0-ban.

3) Többváltozós függvények differenciálszámítása

Itt olyan $f: D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvényekkel foglalkozunk, ahol D nyílt halmaz.

Definíció. Legyen $f: D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ adott fv., $x_0 \in D$, $e \in \mathbb{R}^k$, $e = (e_1, \dots, e_k)$, hogy $\|e\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} e_i^2} = 1$.

A $\boxed{D_e f(x_0) \doteq \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}}$ számot

(ha létezik) az f fv. x_0-beli e-iránymenti differenciálhányadosának (deriváltjának) nevezzük.

Pl. $f(x,y) = x^2 + y^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$, $x_0 = (1,1)$, $e = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (e_1, e_2)$

Definíció. Legyen $f: D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ adott fv., $x_0 \in D$, $e_i = (\overset{1}{0}, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, \overset{k}{0})$ (az i-edik koordináta irányába mutató egységvektor). Ha létezik a

$$\boxed{D_i f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}}$$

(véges) határérték, akkor azt az f fv. i-edik változója szerinti parciális deriváltjának nevezzük.

Nyilván igaz, hogy $D_i f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = D_{e_i} f(x_0)$, azaz $D_i f$ egy speciális iránymenti derivált.

Szokásos az $f_{x_i}(x_0)$ jelölés is.

Speciálisan pl. $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre legyen $(x_0, y_0) \in D$, akkor

$$D_1 f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \doteq \boxed{\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}},$$

$$D_2 f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) \doteq \boxed{\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}}$$

az x ill. y változó szerinti parciális deriváltak.

Kiszámításuk: A fv-t, mint x_i $(i = 1, \dots, k)$, vagy x, vagy y fv-ének tekintjük és differenciáljuk, a többi vált.-t konstansnak tek.

Pl. 1) $f(x,y) = 5 + 2x + 3y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$f_x(x,y) = 2$; $f_y(x,y) = 3$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) $f(x,y) = e^{x+y}(\sin x + \cos y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$f_x(x,y) = e^{x+y}(\sin x + \cos y) + e^{x+y}\cos x$

$f_y(x,y) = e^{x+y}(\sin x + \cos y) + e^{x+y}(-\sin y)$

3) $C(x,y) = 5 + 5x + 2y$ a költség fv. $\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial x} = 5$, $\frac{\partial C}{\partial y} = 2$ a határk. (x és y szerint).

(Az egyváltozós fv-ek differenciálásánál tanult műveleti szabályokat, alapvető deriváltakat használjuk!)

Definíció. Ha $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ adott fv. $x_0 \in D$, továbbá $\exists$ $D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ az x_0 egy $K(x_0, \delta)$ környezetének minden pontjában és $\exists$ $D_i f$-nek a j-edik változó szerinti parciális deriváltja x_0-ban akkor a

$$D_j(D_i f)(x_0) = D_j D_i f(x_0) = D_{ij} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = f_{x_i x_j}(x_0)$$

számot az f x_0-beli <u>másodrendű</u>, i-edik és j-edik változó szerinti <u>parciális derivált</u>jának nevezzük.

Pl $f(x,y) = x^2 + y^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ $\Rightarrow$

$\exists$ $f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = 2$ $\Rightarrow$

$\exists$ $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = 0$, $f_{yx}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = 2$

Értelmezhetők (hasonlóan) magasabbrendű parciális deriváltak is.

<u>Tétel</u> (<u>Young</u>): Ha az $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fv-nek $\exists$ a másodrendű par. deriváltjai és folytonosak x_0-ban, úgy

$$f_{x_i x_j}(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)$$

<u>Tétel (a lok. sz.é. szükséges feltétele)</u>. Ha az $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fv-nek (x_0,y_0)-ban lokális szélsőértéke van, $\exists\, f_x(x_0,y_0)$ és $f_y(x_0,y_0)$ $\Rightarrow$ $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$.

<u>Tétel (a lok. sz.é. egy elegendő feltétele)</u>. Ha az $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fv-nek $\exists$-nek a másodrendű parciális deriváltjai és folytonosak (x_0,y_0)-ban, $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$, akkor ha

a) $\boxed{\Delta_1 = f_{xx}(x_0,y_0)>0}$, $\boxed{\Delta_2 = f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}^2(x_0,y_0)>0}$, úgy f-nek (x_0,y_0)-ban <u>lokális minimuma van</u>

b) $\boxed{\Delta_1 = f_{xx}(x_0,y_0)<0}$, $\boxed{\Delta_2>0}$ $\Rightarrow$ (x_0,y_0)-ban <u>lok. max. van</u>.

c) ~~[illegible]~~ <u>$\Delta_2<0$</u> $\Rightarrow$ $\nexists$ lok. sz.é.

d) ~~[illegible]~~ $\Delta_2=0$, <u>akkor lehet is, nem is lok. sz.é.</u>

<u>Pl.</u> 1) $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-3y \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$

$\exists\, f_x(x,y)=2x+y-3$, $\quad f_y(x,y)=x+2y-3$.

Ott lehet lok. sz.é., ahol

$$\left.\begin{cases}2x+y-3=0\\ x+2y-3=0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow x=1, y=1, \text{ azaz } \underline{(1,1)\text{-ben}}.$$

$\exists\, f_{xx}(x,y)=2$, $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=1$, $f_{yy}(x,y)=2$ $\Rightarrow$
$f_{xx}(1,1)=2$, $f_{xy}(1,1)=f_{yx}(1,1)=1$, $f_{yy}(1,1)=2$ $\Rightarrow$
$\Delta_1=2>0$, $\quad \Delta_2=2\cdot2-1=3>0$ $\Rightarrow$
$(1,1)$-ben lok. minimum van, értéke: <u>$f(1,1)=-3$</u>.

2) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$.

3) Profit maximalizálása. $P(x,y)=\underbrace{(50-x)}_{\text{1. keresleti fv.}}x+\underbrace{(60-2y)}_{\text{2. keresleti fv.}}y-\underbrace{2xy}_{\text{költség fv.}}$ esetén.

4) Riemann-integrál $\mathbb{R}^k$-ban

Legyen $Q \doteq [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^k$ egy tégla $\mathbb{R}^k$-ban ($k=2$-re $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ téglalap $\mathbb{R}^2$-ben, $k=3$-ra $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ téglatest) $\mathbb{R}^3$-ban)
Tekintsünk egy $f: Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvényt.
Q mértékén (térfogatán) a $V(Q) = (b_1-a_1)\cdots(b_k-a_k)$ számot értjük.
$P = P_1 \times \dots \times P_k$ <u>Q egy felosztása</u>, ha P_j $(j=1,\dots,k)$ felosztása $[a_j, b_j]$-nek
Egy ilyen felosztás megadja Q résztéglákra osztását (részintervallumok). A résztéglák átmérői hosszai halmazának ~~...~~ supremuma definiálja <u>P finomságát</u>, melyet $\|P\|$ jelöl.
$\langle P^k \rangle$ <u>normális felosztássorozata</u> Q-nak, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \|P^n\| = 0$.

Jelölje $m_{i_1\dots i_k}$ ill. $M_{i_1,\dots i_k}$ f infimumát, ill. supremumát a P felosztás résztégláin.
Most is értelmezhető $s(f,P)$, $S(f,P)$, $O(f,P)$ és $\sigma(f,P)$ (az <u>alsó</u>, <u>felső</u>, <u>oszcillációs</u> és <u>integrál-közelítő összegek</u>), és teljesül pl., hogy
a) $s(f,P) \le \sigma(f,P) \le S(f,P)$ $\forall$ P-re és $\sigma(f,P)$-re;
b) $s(f,P^1) \le S(f,P^2)$ $\forall$ P^1, P^2-re.
Értelmezhető most is az alsó. ill. felső Darboux-össz.:
$\underline{J} = \sup\limits_P \{s(f,P)\}$, $\overline{J} = \inf\limits_P \{S(f,P)\}$
<u>$f: Q \to \mathbb{R}$ R-integrálható Q-n ha $\underline{J} = \overline{J}$.</u>
<u>Ezt az $\underline{J} = \overline{J} = J = \int\limits_Q f$ számot f R-intjának nevezzük Q-n.</u>

A R-integrálhatóság $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv-ekre megfogalmazott kritériumai itt is igazak.

Igaz továbbá, hogy egy $f: Q\to\mathbb{R}$ folytonos függvény Riemann-integrálható.

Ha $f, g: Q\to\mathbb{R}$ korl. fv-ek R-integrálhatók, $p, q\in\mathbb{R}$ tetsz. konstansok, akkor $pf+qg$ is R-integrálható és

$$\boxed{\int_Q (pf+qg) = p\int_Q f + q\int_Q g}$$

Belátható, hogy ha $Q=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_k,b_k]$, $f: Q\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor

$$\boxed{\int_Q f = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\dots\left(\int_{a_k}^{b_k} f(x_1,\dots,x_k)\,dx_k\right)\dots\right)dx_1}$$

(Fubini tétel: az $\mathbb{R}^k$-beli integrál Q-n meghatározható valós integrálok ismételt kiszámolásával: ismételt integrálással.)

Ez ennél általánosabban is igaz. Nézzük $k=2$-re:

Ha $Q=[a,b]\times[c,d]$, $f: Q\to\mathbb{R}$ korlátos és R-integrálható Q-n, azaz $\exists\ \int_Q f = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$ és

$\forall\ x\in[a,b]$ esetén $\exists\ \int_c^d f(x,y)\,dy$

vagy

$\forall\ y\in[c,d]$ esetén $\exists\ \int_a^b f(x,y)\,dx$

akkor

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

vagy

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy.$$

Pl. 1) $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} xy\,dx\,dy$ $\exists$ mert $f(x,y)=xy$ folytonos $\Rightarrow$

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} xy\,dx\,dy = \int_0^1\left[\int_0^1 xy\,dy\right]dx = \int_0^1\left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1}dx =$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

2) $\iiint\limits_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} xy^2\sqrt{z}\,dx\,dy\,dz$

3) $\iint\limits_T x e^{xy}\,dx\,dy$, ha $T=[0,1]\times[-1,0]$

A Riemann-integrál értelmezhető $S\subset\mathbb{R}^k$ korlátos halmazon is (ld. pl. GM. I. 152–155.o).
Kiemelnénk a következő eredményt:

Legyen $[a,b]\subset\mathbb{R}$ adott intervallum, $\varphi_1,\varphi_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, hogy $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ $(x\in[a,b])$, $S_1=\{(x,y)\mid x\in[a,b],\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ (ún. egyszerű tartomány).
Ha $f:S_1\to\mathbb{R}$ folytonos fv., akkor $\exists\iint\limits_{S_1} f$ és

$$\boxed{\iint\limits_{S_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx}$$

Hasonlóan, ha $[c,d]\in\mathbb{R}$, $\psi_1,\psi_2:[c,d]\to\mathbb{R}$, folytonosak, hogy $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$ $(y\in[c,d])$, $S_2=\{(x,y)\mid y\in[c,d],\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$ (ez egy másik típusú egyszerű tartomány).
Ha $f:S_2\to\mathbb{R}$ folytonos fv., akkor $\exists\iint\limits_{S_2} f$ és

$$\boxed{\iint\limits_{S_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy}$$

Pl. 1) $\iint\limits_S (x^2+y)\,dx\,dy = ?$, ha $S=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le\sqrt{x}\}$.

2) $\iint\limits_S \cos(x+y)\,dx\,dy = ?$, ha $S=\{(x,y)\mid 0\le y\le\pi,\ 0\le x\le y\}$.

IX.) Differenciálegyenletek

1) Differenciálegyenlet fogalma és megoldása

Jelöljön y egy keresett függvényt, $y(x)$ a helyettesítési értékét x-ben. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adott folytonos fv., akkor a

$$(1) \qquad \boxed{y' = f(x,y)} \qquad (\text{ill. } y'(x) = f(x, y(x)))$$

egyenletet elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenletnek nevezzük.

Ha $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény (D nyílt halmaz), akkor a

$$(2) \qquad \boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})}$$

egyenletet n-edrendű közönséges explicit differenciálegyenletnek nevezzük. (Ez $n=1$-re (1)-et adja)

Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény (ahol $I \subset \mathbb{R}$ intervallum) megoldása (1)-nek I-n, ha

$$(*) \begin{cases} 1) & y \ n\text{-szer differenciálható}, \\ 2) & (x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \in D \quad \forall x \in I, \\ 3) & y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in I \end{cases}$$

teljesül.

Adott $F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ folytonos fv. esetén tekinthető a

$$(3) \qquad \boxed{F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0}$$

egyenlet, melyet közönséges n-edrendű diff. egyenletnek nev.

A megoldás I-n az előbbihez hasonlóan értelmezhető.

Pl. 1) $y' = 2xy^2 - 5$, $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2xy^2 - 5$,

2) $y'' + 3y' - 4y - \sin x = 0$

3) $y' = -\dfrac{y}{x}$ $\quad f(x,y) = -\dfrac{y}{x}$ $\quad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0\}$

Megjegyzés: Ha f ill. F $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ ill. $y, y', \ldots, y^{(n)}$ lineáris fv-e, akkor (1) ill (2) lineáris diff. egy-ek.

Cél: Az összes megoldás meghatározása

2) Kezdeti érték probléma (Cauchy – feladat)

Ha $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos fv., $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ adott pont, úgy a

(3) $\boxed{y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0}$

problémát ~~elsőrendű~~ elsőrendű explicit közönséges diff. egy.-re vonatkozó kezdeti érték problémának vagy Cauchy-feladatnak nevezzük.

(3)-nak az $y : I \to \mathbb{R}$ fv. megoldása, ha (*) és $y(x_0) = y_0$ is teljesül.

Ugyanezek értelmezhető az n-edrendű k. expl. de.-re:

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \,, \quad y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \; (i = 0, \dots n-1)}$$

Hasonló a helyzet a nem explicit esetben is

Pl. $y' = -\frac{y}{x}$, $y(1) = 1$ Cauchy-feladatnak mi a mo.-e?

Később beláthatjuk, hogy $y' = -\frac{y}{x}$ mo.-a $y(x) = \frac{c}{x}$ $(x > 0)$.

De $y(1) = \frac{c}{1} = 1 \iff c = 1$, így a mo. $\boxed{y = \frac{1}{x} \; (x>0)}$,

ami valóban áthalad az $(1,1)$ ponton.

3) Elemi úton megoldható de. típusok

a) Szeparábilis differenciálegyenletek

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ $(g \neq 0)$ adott folytonos fv.-ek. Az

(sz) $\boxed{y' = f(x)\, g(y)}$

de.-et szeparábilis (szétválasztható változójú) diff. egyenletnek nev.

Belátható, hogy az $y : [a,b] \to [c,d]$ diff-ható fv. $\iff$ mo.-a (sz)-nek, ha

(sz mo) $\boxed{\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\, dt \Big|_{y = y(x)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt}$

$(x, x_0 \in [a,b]\,;\; y, y_0 \in [c,d])$.

Megjegyzések

1) Itt $y(x_0)=y_0$ is teljesül, így megkapjuk az $y'=f(x)g(y)$, $y(x_0)=y_0$ Cauchy-feladat mo.-ását is.

2) Használhatjuk a következő (nem teljesen korrekt, de jó eredményt adó) eljárást is:

$$\boxed{y'=f(x)g(y)} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \Rightarrow \frac{1}{g(y)}dy=f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx}$$

ill. $\int_{y_0}^{y}\frac{1}{g(t)}dt=\int_{x_0}^{x}f(t)dt$ is használható.

Példák: 1) $\boxed{y'=2xy}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

- $y\equiv 0$ megoldás
- $y>0$: $\int \frac{1}{y}dy=\int 2x\,dx \Rightarrow \ln y=x^2+c \Rightarrow$
  $y=e^{x^2+c}=e^c e^{x^2} \Rightarrow y=Ce^{x^2}$ $(C>0)$
- $y<0$ --- $\Rightarrow y=Ce^{x^2}$ $(C<0)$

Az összes megoldás: $\boxed{y=ce^{x^2}\ (x\in\mathbb{R}), c\in\mathbb{R}}$

2) $y'=-\frac{y}{x}$ $(x\neq 0)$

- $y=0$ megoldás $\mathbb{R}_+$-on és $\mathbb{R}_-$-on
- $\int\frac{1}{y}dy=-\int\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \boxed{y=\frac{c_1}{x}\ (x>0),\ y=\frac{c_2}{x}\ (x<0)}$

3) $y'=f(x) \Leftrightarrow \boxed{y=\int f(x)dx+c}$ $\boxed{y'=\sin x}$

4) $y'=g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=g(y) \Rightarrow \frac{1}{g(y)}dy=1\cdot dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\int\frac{1}{g(y)}dy+c=x}$$

$y'=e^y$ ....

b) Elsőrendű lineáris de-ek

Ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ adott függvények, úgy az $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ fv.-re teljesülő

(LIH) $\quad y' = f(x)\,y + g(x)$

de-et elsőrendű lineáris ~~de~~ inhomogén, míg az

(LH) $\quad y' = f(x)\,y$

de-et elsőrendű lineáris homogén de-nek nevezzük.

Tétel. Az $y_H : [a,b] \to \mathbb{R}$ fv. $\iff$ mo-a (LH)-nak, ha

(LH mo.) $\quad \boxed{y_H(x) = C e^{\int f(x)dx}}$

Ez nyilvánvaló, hisz (LH) egy spec. szeparábilis egy., így
$y = 0$ mo., ha $y \neq 0$, úgy

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,y \Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = f(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int f(x)\,dx$$

ha $y > 0 \Rightarrow \ln y = \int f(x)dx + c \Rightarrow y = e^{c} e^{\int f(x)dx} = C e^{\int f(x)dx}$ $(C>0)$

ha $y < 0 \Rightarrow \ln|y| = \int f(x)dx + c \Rightarrow y = C e^{\int f(x)dx}$ $(C<0)$

$$\boxed{y_H = C e^{\int f(x)dx} \quad (C \in \mathbb{R})}$$

Tétel. Az $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ fv. $\iff$ mo.-a (LIH)-nak, ha

$$\boxed{y(x) = y_H(x) + y_p(x)}$$

ahol $y_H(x) = C e^{\int f(x)dx}$ (LH) ált. megoldása, míg y_p (LIH) egy partikuláris megoldása.

y_p az alábbi eljárással adható meg (konstansvariálás módszere):

- Tekintsük a (LIH)-ból képzett (LH)-t, ekkor
  $y_H(x) = C e^{\int f(x)dx}$ adja annak mo-ásait
- Keressük y_p-t az

$$\boxed{y_p(x) = C(x)\, e^{\int f(x)\,dx}}$$ alakban.

Ekkor $y_p'(x) = C'(x) e^{\int f(x)dx} + C(x) e^{\int f(x)dx} \cdot f(x)$

Ezeket (LIH)-be helyettesítve:

$$C'(x) e^{\int f(x)dx} + \cancel{C(x) f(x) e^{\int f(x)dx}} = \cancel{f(x) C(x) e^{\int f(x)dx}} + g(x)$$

illetve
$$C'(x) = g(x)\, e^{-\int f(x)dx}$$
adódik, melyből $C(x)$ integrálással adódik:
$$C(x) = \int \left[g(x)\, e^{-\int f(x)dx} \right] dx.$$

Ezt kell $y_p(x)$ fenti alakjába beírni.

Pl. 1) $y' + 3y = e^{-x} \Rightarrow \boxed{y' = -3y + e^{-x}}$

- A hozzátartozó homogén egyenlet:

$$\boxed{y_H' = -3y_H} \iff \frac{dy_H}{dx} = -3y_H \Rightarrow \frac{1}{y_H} dy_H = -3dx$$
$$\Rightarrow \int \frac{1}{y_H} dy_H = -3\int 1\,dx \Rightarrow \ln|y_H| = -3x + \ln|C|$$
$$\Rightarrow |y_H| = |C| e^{-3x} \Rightarrow \boxed{y_H(x) = C e^{-3x}}$$

- Keressük y_p-t $\boxed{y_p(x) = C(x) e^{-3x}}$ alakban

$y_p'(x) = C'(x) e^{-3x} + C(x) e^{-3x}(-3)$

Ezt az inhomogén egyenletbe behelyettesítve:

$$C'(x) e^{-3x} + \cancel{C(x) e^{-3x}(-3)} = \cancel{-3C(x) e^{-3x}} + e^{-x} \Rightarrow$$
$$C'(x) e^{-3x} = e^{-x} \Rightarrow \boxed{C'(x) = e^{2x}} \Rightarrow C(x) = \int e^{2x} dx$$
$$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \Rightarrow$$

- $y_p(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot e^{-3x} = \frac{1}{2} e^{-x} \Rightarrow$
- $\boxed{y = C e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{-x}}$, ami megoldás.

c) Homogén fokszámú de.-ek

Az $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$ de-et homogén fokszámú egy-nek nev.

Az $\frac{y(x)}{x} = u(x) \Leftrightarrow y(x) = x\,u(x) \Rightarrow y'(x) = u(x) + x\,u'(x)$

helyettesítéssel az egyenlet

$$x\,u'(x) + u(x) = f(u(x))$$

azaz $x\,u' + u = f(u) \Leftrightarrow \boxed{u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)}$

alakba írható, ami egy szétválasztható változójú egyenlet, melynek ismerjük a megoldási módszerét. Ha u-t meghatároztuk, akkor $y(x) = x\,u(x)$ adja az eredeti egyenlet megoldásait is.

Pl. $\boxed{y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}}$ $(x \neq 0,\ x^2 - y^2 \neq 0)$ x^2-tel osztva a jo.p.észa.

$\Rightarrow y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ $\quad u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux \Rightarrow y' \cancel{=} u + xu'$ $\Rightarrow u + xu' = \frac{u}{1-u^2} \Rightarrow$

$u' = \frac{1}{x}\left(\frac{u}{1-u^2} - u\right) \Rightarrow u' = \frac{1}{x}\,\frac{u^3}{1-u^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\,\frac{u^3}{1-u^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1-u^2}{u^3}\,du = \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \int\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right)du = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow$

$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + c \Rightarrow -\frac{1}{2u^2} = \ln|ux| + c \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \ln\left|x\,\frac{y}{x}\right| + c \Rightarrow \boxed{\ln|y| = -\frac{x^2}{2y^2} - c}$

d) Az $y' = f(ax + by + c)$ alakú diff. egy-ek

$u = ax + by + c$ helyettesítés $(a \neq 0,\ b \neq 0)$

Pl. $\boxed{y' = (x + y - 4)^2}$

$u = x + y - 4 \Rightarrow y = u - x + 4 \Rightarrow y' = u' - 1 \Rightarrow u' - 1 = u^2$

$\Rightarrow \boxed{u' = u^2 + 1} \Rightarrow \frac{du}{dx} = u^2 + 1 \Rightarrow \int \frac{1}{u^2+1}\,du = \int 1\,dx \Rightarrow$

arctg $u = x + c \Rightarrow u = \mathrm{tg}(x + c) \Rightarrow x + y - 4 = \mathrm{tg}(x + c) \Rightarrow$ mo.

4) Másodrendű de-ek

$y'' = f(x, y, y')$ ill. $F(x, y, y', y'') = 0$ alakúak

a) Speciális esetek (hiányos egyenletek)

- $\boxed{y'' = f(x)}$ $\Rightarrow y' = \int f(x)\,dx + c_1 \Rightarrow y = \int\left[\int f(x)\,dx + c_1\right] + c_2$

Pl. $\boxed{(1+\sin x)^2 y'' + \cos x = 0} \Rightarrow y'' = -\dfrac{\cos x}{(\sin x + 1)^2} \Rightarrow$

$$y' = -\int (\sin x + 1)^{-2} \cos x\,dx = \frac{1}{\sin x + 1} + c_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{y} = \int\left(\frac{1}{\sin x + 1} + c_1\right) = \int \frac{1}{\sin x + 1}\,dx + c_1 x + c_2 =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + 1} \frac{2}{1+t^2}\,dt \Big|_{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}} + c_1 x + c_2 =$$

$$= \int \frac{2}{(t+1)^2}\,dt \Big|_{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}} + c_1 x + c_2 = \boxed{-\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + c_1 x + c_2}$$

- $\boxed{F(x, y', y'') = 0}$ $y' = u \Rightarrow \boxed{F(x, u, u') = 0}$ elsőrendű

Pl. $\boxed{y'' = y' + x^2 - 2x}$ $y' = u \Rightarrow \boxed{u' = u + x^2 - 2x}$

Mo: Hom egy: $u_H' = u_H \Rightarrow \dfrac{du_H}{dx} = u_H \Rightarrow \dfrac{1}{u_H} du_H = 1\,dx$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{u_H} du_H = \int 1\,dx \Rightarrow \boxed{u_H(x) = c_1 e^x}$$

Inh: $\boxed{u_p = c_1(x) e^x}$ $u_p' = c_1'(x) e^x + c_1(x) e^x$

$$c_1'(x) e^x + \cancel{c_1(x) e^x} = \cancel{c_1(x) e^x} + x^2 - 2x$$

$$c_1'(x) = (x^2 - 2x) e^{-x} \Rightarrow c_1(x) = \int (x^2 - 2x) e^{-x}\,dx + c$$

$$c_1(x) = -x^2 e^{-x}$$

$$\Rightarrow u_p = -x^2 e^{-x} e^x = -x^2$$

$$\Rightarrow u(x) = c_1 e^x - x^2 \Rightarrow y = \int u\,dx \Rightarrow$$

$$\boxed{y} = \int (c_1 e^x - x^2)\,dx = \boxed{c_1 e^x - \frac{x^3}{3} + c_2}$$

- $\boxed{F(y, y', y'') = 0}$ $y' = p(y)$, $y'' = p'(y) \cdot y' = p'(y)\,p$

b) Konstansegyütthatós másodrendű lin. homogén de-ek

$$(\Delta)\quad \boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0}$$

A megoldást $y = e^{\lambda x}$ alakban keressük, ekkor $y' = \lambda e^{\lambda x} \Rightarrow y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \Rightarrow$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_2 e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow$$

$$(0)\quad \boxed{\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0} \quad (\Delta) \text{ karakterisztikus egyenlete.}$$

- (0) megoldásai a $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valós számok, így (Δ) mo.

$$\boxed{y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$$

- (0) megoldása $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$ valós számok, így a (Δ) mo.

$$\boxed{y = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x}}$$

- (0) megoldásai a $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ill. $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ komplex számok, akkor a (Δ) mo.:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}\left[C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x\right]}$$

Pl. 1) $y'' - y' - 6y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2 \Rightarrow$

$$\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}}$$

2) $y'' - 8y' + 16y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 4 \Rightarrow$

$$\boxed{y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}}$$

3) $4y'' + 4y' + 37y = 0 \Leftrightarrow y'' + y' + \frac{37}{4} y = 0 \Rightarrow$

$\lambda^2 + \lambda + \frac{37}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm 3i$

$$\Rightarrow \boxed{y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x\right)}$$