Gazdasági Matematika I.

I. Halmazok, relációk, függvények

- A Gazdasági Matematika I. elektronikus jegyzet I. fejezete (9.–17. o.) összefoglalja a témakörben szerzett korábbi (iskolai) ismereteket.
- A halmazalgebra fontosabb fogalmait és tételeit feladatokon keresztül dolgozzuk fel gyakorlaton.
- A (relációk) függvények témakörben leírtakra később még visszatérünk.

II. Valós számok

- A GM I. jegyzet II. fejezete (19.–31. o.) új megközelítésben (axiomatikusan) tárgyalja a valós számok bevezetését.

→ A testaxiómák az alapműveletek (+ és ·) azon tulajdonságait rögzítik, melyekből a további (a középiskolában is használt) szabályok levezethetők.

→ A rendezési axiómák az egyenlőtlenséget (rendezést) vezetik be az előbb definiált testben.

Fontos új elem itt a pontos felső (alsó) korlát fogalma.

Az $S \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről (alulról) korlátos, ha $\exists\ K\ (k) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in S$-re $x \leq K$ $(k \leq x)$.

$S \subset \mathbb{R}$ korlátos, ha felülről és alulról is korlátos.

$S \subset \mathbb{R}$-nek α pontos felső korlátja, ha

- α felső korlát, azaz $\forall x \in S$-re $x \leq \alpha$;
- S $\forall \beta$ felső korlátjára $\alpha \leq \beta$ teljesül

Hasonlóan definiálható a pontos alsó korlát is.

Erre épít az új (a középiskolában nem használt)

→ Teljességi axióma: $\forall S \subset \mathbb{R}$ nemüres, felülről korlátos halmaznak van pontos felső korlátja. Ezt $\sup S$ módon is jelöljük.

Az így bevezetett rendezett teljes testet a valós számok halmazának nevezzük.

- A testaxiómák fontosabb következményei közül kiemelnénk:
  - A műveletekkel kapcsolatos ismeretek összefoglalását, melyekre gyakorlaton visszatérünk.
  - Az $\mathbb{N}$ ($\subset \mathbb{R}$) (a természetes számok halmazának) axiomatikus bevezetését, az egész számok ($\mathbb{Z}$), a racionális számok ($\mathbb{Q}$) és az irracionális számok ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) definícióját, valamint e halmazok fontosabb jellemzőinek megadását.
- A rendezési axiómák fontosabb következményei közül fontosak az alábbiak.
  - Az egyenlőtlenségek (korábbról is ismert) „számolási szabályainak" rögzítése;
  - A valós szám abszolútértékének ($|x|$) definícióját, legfontosabb tulajdonságait;
  - A nyílt-, zárt-, ... intervallum fogalmát;
  - A távolság ($d(x,y) \doteq |x-y|$) és nyílt környezet ($K(a,r) \doteq \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,a) < r\}$) bevezetését és azok tulajdonságait;

  Az egyenlőtlenségek megoldásának (bizonyításának) fontosabb módszereit gyakorlaton tárgyaljuk.
- A teljességi axióma következményei között több olyan is szerepel, ami „újdonság" a hallgatónak.
  - $\mathbb{N}$ (a természetes számok halmaza) felülről nem korlátos;
  - $\forall\ x > 0$ ($x \in \mathbb{R}$) és $y \in \mathbb{R}$ esetén $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $y < nx$ (Archimedeszi tulajdonság);
  - $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ valós számra $\exists\, r \in \mathbb{Q}$, $x < r < y$ ($\mathbb{Q}$ mindenütt sűrű $\mathbb{R}$-ben).

- $\forall\, x \geq 0$ valós szám és $n \in \mathbb{N}$ esetén pontosan egy $y \geq 0$ valós szám létezik, hogy $y^n = x$; Adott x és n esetén ezt az y számot az <u>x n-edik gyökének</u> nevezzük. Jelölésben: $\sqrt[n]{x}$.
  (Egy nemnegatív x számnak létezik n-edik gyöke és az egyértelműen meghatározott.)
  Ez biztosítja az <u>$x \to \sqrt[n]{x}$</u> (<u>$f(x) = \sqrt[n]{x}$</u>) <u>függvény</u> bevezetését $x \geq 0$ esetén.
  Ha n páratlan, úgy $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezhető $\sqrt[n]{x}$ (ahogy ez a középiskolában is szerepel).
- Ha $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, úgy az $x \geq 0$ valós szám r-edik hatványát $x^r \doteq \sqrt[n]{x^m}$ szerint definiáljuk; Ez adja pl., hogy rögzített $a > 0$ valós szám esetén az $x \to a^x$ ($f(x) = a^x$) úgy nevezett a-alapú exponenciális függvény $\forall\, x \in \mathbb{Q}$-ra értelmezett. Később megnézzük majd, hogy az értelmezés hogyan terjeszthető ki $\forall\, x \in \mathbb{R}$-re.

A gyökvonás azonosságait, azok alkalmazását a gyökös kifejezésekre vonatkozó feladatokban gyakorlaton dolgozzuk fel.

- Fontos új elem a következő is:
  Ha $S \subset \mathbb{R}$ felülről nem korlátos, akkor legyen $\sup S = +\infty$.
  Ha $S \subset \mathbb{R}$ alulról nem korlátos, akkor legyen $\inf S = -\infty$.
  Az $\mathbb{R}_b = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ halmazt <u>a bővített valós számok halmazának</u> nevezzük.
  Bevezetjük a rendezést és definiálunk új számolási szabályokat (pl $x + (+\infty) = +\infty$, $x - (+\infty) = -\infty$, ...)
- A valós számok egy modellje a számegyenes
- Néhány további ismeret (nevezetes egyenlőtlenségek, számosság) is szerepel.

III. Sorozatok (GM I. 33.–40.o.)

1. def. Egy $f: N \to \mathbb{R}$ függvényt $\mathbb{R}$-beli sorozatnak nevezünk. $f(n)$ jelöli a sorozat n-edik tagját, melyet szokás $f(n) = a_n$ (v. $f(n) = x_n$, vagy más) módon jelölünk. $\{a_n\}$ (v. $\{x_n\}$ v...) az elemek halmazát, míg $\langle a_n \rangle$ (v. $\langle x_n \rangle$ v...) magát a sorozatot jelöli.

Példák:

1) Az $\langle \frac{1}{n} \rangle$ sorozat tagjai $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

2) Az $\langle a_n \rangle$ számtani sorozat, ha $\forall$ k-ra $a_{k+1} - a_k = d$ (ahol $d \in \mathbb{R}$ állandó). Ekkor: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$.

3) $\langle a_n \rangle$ $(a_n \neq 0)$ mértani sorozat, ha $\forall$ k-ra $\frac{a_{k+1}}{a_k} = q$ (ahol $q \in \mathbb{R}$ állandó). Ekkor $\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$.

4) Kamatszámítás éves kamatozással:
t_0 induló tőke, p%-os éves kamat mellett, milyen összegre növekszik az n-edik év végére?
Ekkor $\frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{p}{100} = 1 + r = q$ (állandó), így $\langle t_n \rangle$ mértani sorozat: $\Rightarrow$ $\boxed{t_n = t_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = t_0(1+r)^n}$

5) Kamatszámítás évi k-szori kamatozással (pl. k=3, 6, 12):
Ha t_0 az induló tőke p %-os az éves kamat, így a havi kamat $\frac{p}{k}$ %, az 1. év végén az összeg $t_1 = t_0\left(1 + \frac{p}{k \cdot 100}\right)^k$, illetve az n-edik év végén:
$\boxed{t_n = t_0\left(1 + \frac{p}{k \cdot 100}\right)^{nk}}$

Mi a helyzet folyamatos kamatozás mellett?

2. def. $\langle a_n \rangle$ korlátos (alulról, felülről korlátos), ha $\{a_n\}$ korlátos (alulról, felülről korlátos).

Pl.: $\langle \frac{1}{n} \rangle$ korlátos

3. def. $\langle a_n \rangle$ monoton növekedő (csökkenő), ha $\forall\, n \in N$-re $a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} \leq a_n)$, szigorúan m. növ. (csökk.), ha $\forall\, n \in N$-re $a_{n+1} > a_n$ $(a_{n+1} < a_n)$.

Pl.: $\langle \frac{1}{n} \rangle$ szig. mon. csökkenő.

4. def. $\langle a_n \rangle$ konvergens, ha $\exists\, a \in \mathbb{R}$, $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$-re $|a_n - a| < \varepsilon$.
a-t az $\langle a_n \rangle$ határértékének nevezzük.
Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ vagy $a_n \to a$.

Pl.: 1) A $\langle c \rangle$ konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$, $c \to c$.
2) Az $\langle \frac{1}{n} \rangle$ konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\frac{1}{n} \to 0$.

Megjegyzés: Környezetes átfogalmazás is van.

5. def. $\langle a_n \rangle$ divergens, ha nem konvergens.
($\forall\, a \in \mathbb{R}$-esetén $\exists\, \varepsilon > 0$, $\forall\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$-re $\exists\, n \geq n(\varepsilon)$, $|a_n - a| \geq \varepsilon$)

Pl.: $\langle (-1)^n \rangle$ divergens.

6. def. $\langle a_n \rangle$ $+\infty$-hez ($-\infty$-hez) konvergál, ha $\forall\, M \in \mathbb{R}$-re $\exists\, n(M)$, $\forall\, n \geq n(M)$-re $a_n > M$ ($a_n < M$) teljesül.

Pl.: $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$.

Tételek:

1) Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, akkor egy határértéke van.
2) Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, akkor korlátos. (Fordítva általában nem igaz: $\langle (-1)^n \rangle$ korlátos, de nem konvergens.)
3) Ha $a_n \to a$, $b_n \to b$ akkor
$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a + b$; $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a$; $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$ és
$b \neq 0$, $b_n \neq 0$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.
4) a) Ha $|a_n| \to +\infty$ $(a_n \neq 0)$, akkor $\frac{1}{a_n} \to 0$.
b) Ha $a_n \to 0$ $(a_n \neq 0)$, akkor $\left|\frac{1}{a_n}\right| \to +\infty$
5) Ha $x \in \mathbb{R}$ adott, akkor az $\langle x^n \rangle$ sorozat
a) $|x| < 1$ esetén konvergens és $x^n \to 0$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$);
b) $|x| > 1$ esetén divergens;
c) $x > 1$ esetén $x^n \to +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x^n = +\infty$).
6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$, ha $x_n \to +\infty$.

Alkalmazás: folyamatos kamatjóváírás képlete:

$$\boxed{t_n = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{p}{100k}\right)^{kn} = \lim_{k\to\infty} \left[\left(1 + \frac{p}{100k}\right)^{\frac{100k}{p}}\right]^{\frac{np}{100}} = e^{\frac{p}{100}n} = e^{Tn}}$$

IV. Sorok (G.M. I. 41.–48.)

1\. <u>def.</u> Ha $\langle a_n \rangle$ adott sorozat, akkor azt az $\langle S_n \rangle$ sorozatot, melyre $S_n \doteq a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ <u>végtelen sornak</u> nevezzük.

S_n a sor <u>n-edik részletösszege</u>, a_n az <u>n-edik tagja</u>.

Jelölés: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; (= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots)$

Ha adott a_0 is, úgy $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, így a sor jel.: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Pl.: 1) <u>Mértani sor</u>: $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n$

$$\boxed{S_n = a + aq + \dots + aq^n = a\frac{q^{n+1}-1}{q-1}}$$

2) <u>Járadékszámítás</u> (gyűjtő járadék): n éven át minden év elején elhelyezünk t_0 összeget p %-os kamatozás mellett. Milyen tőkénk lesz az n-edik év végén?

$$S_n = t_0\left(1+\frac{p}{100}\right) + t_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 + \dots + t_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = t_0\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1}{1+\frac{p}{100}-1}$$

2\. <u>def.</u> $\sum a_n$ <u>konvergens</u>, ha $\langle S_n \rangle$ konvergens.

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ <u>a sor összege</u>.

1\. <u>Tétel</u> (a konv. szükséges feltétele). Ha $\sum a_n$ <u>konv.</u>, akkor <u>$a_n \to 0$</u>.

Pl. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n$ konv., ha $|q| <$ és $\boxed{S = \frac{a}{1-q}}$, hiszen

$$S_n = a\frac{q^{n+1}-1}{q-1} \to \frac{a}{1-q} \quad (\text{mert } q^{n+1} \to 0, \text{ha } |q|<1).$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nem konvergens, de $\frac{1}{n} \to 0$.

3\. <u>def.</u> $\sum a_n$ abszolút konvergens, ha $\sum |a_n|$ konvergens.

2\. <u>Tétel</u> (<u>D'Alembert-féle hányados kritérium</u>). $\sum a_n$ adott, hogy $a_n \neq 0$.

a) Ha $\exists\; 0 \le q < 1$ és $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \ge n_0$-ra $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q$, akkor $\sum a_n$ <u>abszolút konvergens</u> (és így konvergens is)

b) Ha $n \ge n_0$-ra $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1$, akkor $\sum a_n$ divergens.

Pl. A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ sor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén absz. konv., így konvergens.

Megjegyzés: Az $\boxed{\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})}$ az exponenciális (e^x) fv.

V. Valós függvények

1) Alapfogalmak (ld. GM I., 12.–17. o)

1. def. Valós függvényen egy olyan hozzárendelést (leképezést) értünk, amely egy $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz minden eleméhez egy $B \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan egy elemét rendeli. ($A, B \neq \emptyset$)
Ha f jelöli a függvényt, akkor $x \in A$-ra $y = f(x) \in B$ az x elem képe (f x helyen felvett értéke, a helyettesítési érték).
$f: A \to B$ azt jelöli, hogy f A-t B-be képezi, míg $\{x, f(x)\}$ az f gráfját (esetleg magát f-et) jelöli.
A $D_f \doteq A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, y \in \mathbb{R},\ f(x) = y\}$ az f értelmezési tartománya, $R_f \doteq \{y \in B \mid \exists\, x \in D_f,\ f(x) = y\}$ az f értékkészlete, $C \subset A$ esetén $f(C) \doteq \{y \in B \mid \exists\, x \in C,\ y = f(x)\}$ a C képe f-re, $f|_C = \{(x, f(x)) \mid x \in C\}$ az f leszűkítése C-re.

2. def. Az $f: A \to B$ fv. inverzén az $f^{-1} = \{(y, f^{-1}(x)) \mid y = f(x)\}$ halmazt értjük. f invertálható, ha f^{-1} is függvény.

3. def. Ha adottak az $f: A \to B$ és $g: B \to C$ függvények, akkor az $F(x) = (g \circ f)(x) \doteq g(f(x))$ $(x \in A)$ fv.-t összetett fv-nek nev.

Valós függvényre az $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\vee$ $g: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vagy más) jelölést használjuk a továbbiakban.
Az eddigiek alapján ismertek a következő függvények:

$f(x) = C$ $(x \in \mathbb{R})$ $(y = C\ (x \in \mathbb{R}))$ a konstans függvény;
$f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ $(y = x\ (x \in \mathbb{R}))$ az identikus fv.;
$f(x) = ax + b$ $(x \in \mathbb{R})$ $(y = ax + b,\ x \in \mathbb{R})$ a lineáris fv.;
$f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ $(y = |x|,\ (x \in \mathbb{R}))$ abszolútérték fv.;
$f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ .... $f(x) = x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ $(y = x^2, \dots, y = x^n, (x \in \mathbb{R}))$;
$f(x) = ax^2 + bx + c$ $(x \in \mathbb{R})$ $(y = ax^2 + bx + c,\ x \in \mathbb{R})$ másodfokú fv.;

$f(x) = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_0$ $(x \in \mathbb{R})$ <u>n-ed fokú pol. fv.</u>;

<u>$f(x) = \frac{1}{x}$</u> $(x \neq 0)$ $(y = \frac{1}{x},\ x \neq 0)$; <u>$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$</u> $(x \neq -\frac{d}{c})$;

<u>$f(x) = \sqrt{x}$</u> $(x \geq 0)$ $(y = \sqrt{x},\ x \geq 0), \dots,$ $f(x) = \sqrt[n]{x}$ $\left(\begin{array}{l} x \geq 0, \text{ ha } n \text{ páros} \\ x \in \mathbb{R}, \text{ ha } n \text{ páratlan} \end{array}\right)$;

$f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ $(x \geq 0)$ $(y = \sqrt[n]{x^m},\ x \geq 0)$;

$f(x) = a^x$ $(x \in \mathbb{Q},\ a > 0)$ $(y = a^x,\ x \in \mathbb{Q})$ <u>a-alapú exponenciális fv.</u>;

Ismertek továbbá a fenti fv.-ekből az alapműveletek, az összetett és inverz fv. képzés segítségével képzett fv.-ek. <u>Ábrázolásuk</u> a Descartes-féle (derékszögű) koordináta-rendszerben történik.

Ismertnek tekinthetjük a középiskolából „hozott" <u>trigonometrikus fv.-eket</u>, az <u>exponenciális</u> és <u>logaritmus</u> függvényt, de ezek „precízebb értelmezéséről" még szólunk.

Az alábbi (részben) ismert fogalmak is fontosak (GM-I. 50-51.o)

4. <u>def.</u> Az $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>korlátos</u> (<u>alulról</u> ill. <u>felülről korlátos</u>), ha $f(E)$ korlátos (alulról ill. felülről korlátos).
A $\sup f(E)$, $\inf f(E)$ számokat f <u>pontos felső</u> ill. <u>p. a. korlátjának</u> (<u>szuprémumának</u>, <u>infimumának</u>) nevezzük.
Ha $\exists\ x_1, x_2 \in E$, $\sup f(E) = f(x_1)$ és $\inf f(E) = f(x_2)$, akkor azt mondjuk, hogy f-nek $\exists$ <u>abszolút maximuma</u> és <u>minimuma</u> E-n
f-nek $x_0 \in E$-ben <u>helyi</u> (<u>lokális</u>) <u>maximuma</u> ill. <u>minimuma</u> van, ha $\exists\ K(x_0, \delta)$, $\forall\ x \in K(x_0, \delta) \cap E$-re $f(x) \leq f(x_0)$ ill. $f(x) \geq f(x_0)$.

5. <u>def.</u> Az $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. <u>monoton növekedő</u> (<u>csökkenő</u>), ha $\forall\ x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$-re $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).
(Szigorú monotonitásnál szigorú egyenlőtlenség van.)
Értelmezhető, hogy f <u>x_0-on növekvőleg (csökkenően) halad át</u>.

6. def. Ha $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $x \in E$-re $-x \in E$, továbbá $f(-x) = f(x)$ ill. $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in E$-re, akkor f-et párosnak ill. páratlannak nevezzük.

7. def. Ha $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy adott $p \neq 0$ számra x és $x+p$ is eleme E-nek és $f(x+p) = f(x)$ $\forall x \in E$, akkor f-et p-szerint periodikusnak nevezzük.

2) Valós függvények folytonossága (G. M. I. 52.–56.o.)

1. def. Az $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. folytonos $x_0 \in E$-ban, ha $\forall \langle x_n \rangle$ ($x_n \in E$) sorozatra, hogy $x_n \to x_0$ következik, hogy $f(x_n) \to f(x_0)$. f folytonos E-n, ha $\forall x_0 \in E$-ban folytonos.

Pl. $f(x) = c$ $(x \in \mathbb{R})$ vagy $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$-ben folytonos.

2. def. Az $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. jobbról (balról) folytonos az $x_0 \in E$-ben, ha $\forall$ x_0-hoz jobbról (balról) konvergáló $\langle x_n \rangle$ ($x_n \in E$) sorozatra $f(x_n) \to f(x_0)$.

Pl. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ $x_0 = 0$-ban jobbról folytonos, de balról nem.

3. def. Az $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek szakadása van x_0-ban, ha nem folytonos x_0-ban. x_0-t szakadási helynek nev.

1. Tétel. Ha $f, g: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosak x_0-ban, akkor $f+g$, $f \cdot g$ és $g(x_0) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is folytonos x_0-ban.

Pl. $f_1(x) = 5x$ $(x \in \mathbb{R})$, $f_2(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ folytonosak $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

2. Tétel. Ha $f: E \to \mathbb{R}$, $g: f(E) \to \mathbb{R}$ olyan fv.-ek, hogy f folytonos $x_0 \in E$-ben, g folytonos $y_0 = f(x_0)$-ban, akkor $F = g \circ f = g(f)$ folytonos x_0-ban.

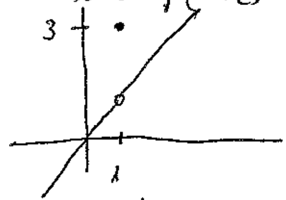
Pl. $F(x) = (2x^2+1)^{40}$ $(x \in \mathbb{R})$ folytonos $\forall x_0 \in \mathbb{R}$-re.

Megjegyzés: A korábban tekintett fv.-ek folytonosan értelmezési tartományukon.

3) Valós függvények határértéke

1. Definíció. Legyen az $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. az x_0 egy $K(x_0, \delta)$ környezetében (esetleg x_0-t kivéve) értelmezett. Azt mondjuk, hogy f-nek x_0-ban az $A \in \mathbb{R}$ a határértéke, ha $\forall$ olyan $\langle x_n \rangle$ ($x_n \in D_f \setminus \{x_0\}$) sorozatra melyre $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to A$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Pl. $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$, akkor $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$



2. def.: f-nek x_0-ban a határértéke $+\infty$ ($-\infty$), ha $\forall\, x_n \to x_0$ esetén $f(x_n) \to +\infty$ ($f(x_n) \to -\infty$).
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Pl. $f(x) = \begin{cases} \left|\frac{1}{x}\right| & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

3. def. f-nek x_0-ban A (vagy $+\infty$, vagy $-\infty$) a jobboldali (baloldali) határértéke ha $\forall\, x_n \to x_0$ ($x_n \in D_f$, $x_n > x_0$) sorozat esetén $f(x_n) \to A$ (vagy $+\infty$, vagy $-\infty$).
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$ ($v +\infty, v -\infty$); $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$ ($v+\infty, v-\infty$).

4. def. Legyen $f: D_f \to \mathbb{R}$ olyan fv., hogy D_f felülről (alulról) nem korlátos. Azt mondjuk, hogy f határértéke $+\infty$-ben (ill. $-\infty$-ben) az $A \in \mathbb{R}$ szám (vagy $+\infty$, vagy $-\infty$), ha $\forall$ D_f-beli $\langle x_n \rangle$ sorozatra, melyre $x_n \to +\infty$ (vagy $x_n \to -\infty$) $\Rightarrow f(x_n) \to A$ (vagy $+\infty$, vagy $-\infty$).
Jelölés: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ ($v \dots$) ; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$($v \dots$).

Pl. 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

A fv. határértékre vonatkozó fontosabb tételek (pl. az u.n. műveleti tulajdonságok), továbbá a fontosabb függvények határértékének meghatározását segítő eredmények megtalálhatók a 3. feladatsor hátoldalán.

4) További elemi függvények (GM I. 68.–72. o.)

V / 1)-ben jeleztük, hogy visszatérünk néhány középiskolából „hozott" fv. (pl. exp, $\log_a$, sin, cos, ...) pontosabb értelmezésére.

Rámutattunk (ld. Sorok), hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ sor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens, így $\forall x \in \mathbb{R}$-hez a sor x-beli összegét rendelve egy függvényt definiálhatunk, amit nevezzünk exponenciális függvénynek.

Jelölésben: $\boxed{\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$

Megmutatható, hogy ez folytonos függvény és $\exp(x) = e^x$, ha $x \in \mathbb{Q}$. Ekkor élhetünk a $e^x \doteq \exp x \quad (x \in \mathbb{R})$ definícióval, ami az $x \to a^x \ (x \in \mathbb{R})$ speciális esete $a = e$ mellett.

Az $e^x \doteq \exp(x) \ (x \in \mathbb{R})$ függvény sz. monoton növekedő, pozitív értékeket vesz fel: $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$, invertálható és inverze az $\boxed{\ln \doteq \exp^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}}$ úgynevezett természetes alapú logaritmus fv, mely folytonos.

Tulajdonságai hasonlóak $\log_a$ középiskolában tanult tul.-val.

Ezután legyen $\boxed{a^x = \exp_a(x) \doteq \exp(x \ln a) \quad (x \in \mathbb{R})}$ ($a > 0, a \neq 1$ mellett) az a-alapú exponenciális fv.

Ez is folytonos függvény, továbbá szigorúan monoton, így létezik inverz függvénye az: $\log_a \doteq \exp_a^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ folytonos és szigorúan monoton a-alapú logaritmus fv.

$x^\mu \doteq \exp(\mu \ln x) \quad (x > 0)$ az általános hatvány fv.

A $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

sorok is $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek. Ezekkel definiálhatjuk a ~~[illegible]~~ cos, sin, ch, sh folytonos fv.-eket.