Matematika II.

Fontosabb határértékek, szabályok

1) $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$; $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ $(x_0 \geq 0)$;

$\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$;

$\lim\limits_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$ $(x_0>0)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} c = c$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = +\infty$ (ha $a>1$); $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = 0$ (ha $0<a<1$);

$\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = +\infty$ (ha $a>1$); $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$ (ha $0<a<1$);

$\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = -\infty$ (ha $a>1$); $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = +\infty$ (ha $0<a<1$);

2) a) Ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, akkor

$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = A+B$; $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\,g(x)] = AB$; $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ $(g(x)\neq 0, B\neq 0)$.

Ez igaz akkor is, ha $x_0 = +\infty$ vagy $x_0 = -\infty$.

b) Ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (vagy $-\infty$), akkor

$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = +\infty$ (v. $-\infty$); $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\,g(x)] = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to x_0} c\,f(x) = +\infty$ (ill. $-\infty$), ha $c>0$; $\lim\limits_{x\to x_0} c\,f(x) = -\infty$ (ill $+\infty$), ha $c<0$.

c) Ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (v. $-\infty$) és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, akkor

$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = +\infty$ (ill. $-\infty$); $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = \begin{cases} +\infty\ (-\infty), \text{ ha } A>0 \\ -\infty\ (+\infty), \text{ ha } A<0 \end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$; $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty\ (-\infty), \text{ ha } A>0 \\ -\infty\ (+\infty), \text{ ha } A<0 \end{cases}$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} x^k = x_0^k$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x^k = +\infty$ $(k\in N)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} x^k = +\infty$, ha k páros,

$\lim\limits_{x\to -\infty} x^k = -\infty$, ha k páratlan; $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{x_0^k}$ $(k\in N, x_0\neq 0)$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^k} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ $(k\in N)$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

Matematika II. 2. feladatsor

1) Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát $\mathbb{R}$-ben:

$f(x)=3x+1$; $f(x)=|x+2|+3$; $f(x)=6x^2-3x+2$;

$f(x)=\dfrac{5}{x-5}$; $f(x)=\dfrac{5}{x^2+4x-21}$; $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$;

$f(x)=\sqrt{x+50}$; $f(x)=\sqrt[5]{9-x^2}$; $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{6-x^2}}$;

$f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-9}}$; $f(x)=\lg(x+3)$; $f(x)=\lg(x^2+2x-24)$;

$f(x)=\cos(3x+2)$; $f(x)=\arcsin(x-8)$; $f(x)=\dfrac{7x-5}{\sin 2x}$

2) Vizsgálja az alábbi függvények paritását:

$f(x)=3|x|$ $(x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x^2+4$ $(x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x^3+2x$ $(x\in\mathbb{R})$;

$f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$ $(x\in\mathbb{R})$; $f(x)=\sqrt{1+x^3}$; $f(x)=\lg|x|$ $(x\neq 0)$;

3) Számítsa ki az alábbi határértékeket:

$\lim\limits_{x\to 2}(3x+6)=$; $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3x+9)=$; $\lim\limits_{x\to 8}\lg(x^2+3x+12)=$;

$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+4}{x-1}=$; $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}4^x(3x-7)=$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4+2x^2}{x^6+3x^3+2x^2}=$

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-5)}{x+2}=$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}-1}=$; $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{8x-2}{x+4}=$;

$\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{1}{1+x}=$; $\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{1}{1+x}=$; $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{6x^4+3x^2+5x}{4x^3+7x^2}=$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=$; $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2+5}{x-1}=$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2-2x+3)=$; $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^3+3x^2+5)=$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x}{1+x^2}=$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-6}{x^2-9}=$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+6}{3x^2+1}=$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-5x^3+3}{2x^3+4x}=$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+5}{x-1}=$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-5x^3+3x+1}{x^2+2x+1}=$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=$;

4) Vizsgálja az 1), 2) és 3)-beli függvények folytonosságát!