Matematika II. 4. feladatsor

Differenciálható függvények vizsgálata

1) Hol monoton növekedők ill. csökkenők az alábbi fv.-ek?

$f(x)=5x+2\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=-3x+2\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x^2-4x+7\ (x\in\mathbb{R})$;
$f(x)=-x^2-4x+1\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x^2+x-6\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=2x^2-3x-4\ (x\in\mathbb{R})$;
$f(x)=\dfrac{3x-5}{x-2}\ (x\neq 2)$; $f(x)=x+\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$; $f(x)=x^3-12x+20\ (x\in\mathbb{R})$;
$f(x)=x^3-5x^2-8x+3\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=\sin^2 x\ (x\in\mathbb{R})$;

2) Határozza meg az alábbi függvények lokális maximum- ill. minimum helyeit és értékeit:

$f(x)=x^2-4x+7\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=-x^2-4x+1\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x^2+x-6\ (x\in\mathbb{R})$;
$f(x)=x+\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$; $f(x)=x^3-12x+20\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x^3-5x^2-8x+3\ (x\in\mathbb{R})$;
$f(x)=\sin^2 x\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x\ln x\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x+\sin x\ (x\in\mathbb{R})$;
$f(x)=x^4-2x^2+2\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=\sqrt{2-x}\ (x\leq 2)$;

3) Hol konvexek (konkávok) ill. hol van inflexiós helyük az alábbi függvényeknél?

$f(x)=-x^2+3x-7\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x^2-x+12\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x^2+x+6\ (x\in\mathbb{R})$;
$f(x)=x^3+15x^2+6x+1\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x^3-5x^2-8x+3\ (x\in\mathbb{R})$;
$f(x)=x+\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$; $f(x)=\dfrac{3x-5}{x-2}\ (x\neq 2)$; $f(x)=x+\sin x\ (x\in\mathbb{R})$;
$f(x)=e^{-x^2}\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=\sqrt{2-x}\ (x\leq 2)$; $f(x)=x\ln x\ (x>0)$.

4) Végezze el a teljes fv. vizsgálatot az alábbi függvényeknél:

$f(x)=x^2+x-6\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=2x^2-3x-4\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=-x^2-4x+1\ (x\in\mathbb{R})$;
$f(x)=x^3-5x^2-8x+3\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x^4-2x^2+2\ (x\in\mathbb{R})$;
$f(x)=x+\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$; $f(x)=\dfrac{3x-5}{x-2}\ (x\neq 2)$; $f(x)=\sin^2 x\ (x\in\mathbb{R})$;
$f(x)=x\ln x\ (x>0)$; $f(x)=e^{-x^2}\ (x\in\mathbb{R})$; $f(x)=\dfrac{a}{1+x^2}\ (x\in\mathbb{R}, a>0)$;
$f(x)=a e^{-ax}\ (x\in\mathbb{R}, a>0)$; $f(x)=x e^{-ax^2}\ (x\in\mathbb{R}, a>0)$.

5) Taylor-, Mclaurin-sorok megadása az alábbi fv.-eknél:

$f(x)=x^6-5x^5+2x^4-3x^3+2x^2+6\ (x\in\mathbb{R})$ $a=2$-ben;
$f(x)=\cos x\ (x\in\mathbb{R})$ $a=0$ ill $a=\frac{\pi}{3}$ esetén; $f(x)=\sin x\ (x\in\mathbb{R})$ $(a=0, a=\frac{\pi}{6})$;
$f(x)=e^x\ (x\in\mathbb{R})$ $(a=0$-ban$)$, $f(x)=\operatorname{sh} x$; $f(x)=\operatorname{ch} x$ $(a=0$-ban$)$;

6) L'Hospital szabály alkalmazása: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}=$;
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\dots$; $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\dots$.

Monotonitás, szélsőérték, konvexitás

1) Ha $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható és

$f'(x) \geq 0 \quad (x \in \langle a,b\rangle) \Rightarrow f$ monoton növekedő $\langle a,b\rangle$-n;

$f'(x) \leq 0 \quad (x \in \langle a,b\rangle) \Rightarrow f$ monoton csökkenő $\langle a,b\rangle$-n;

2) Ha $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható és $x_0 \in]a,b[$, továbbá

$f'(x_0) = 0$ és $f'(x) < 0 \ (x < x_0),\ f'(x) > 0 \ (x > x_0) \Rightarrow f(x_0)$ lokális min.;

$f'(x_0) = 0$ és $f'(x) > 0 \ (x < x_0),\ f'(x) < 0 \ (x > x_0) \Rightarrow f(x_0)$ lokális max.;

Ha létezik $f''(x_0)$ is, úgy

$f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ lokális maximum;

$f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ lokális minimum:

3) Ha $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható és

$f''(x) \geq 0 \ (x \in \langle a,b\rangle) \Rightarrow f$ konvex $\langle a,b\rangle$-n;

$f''(x) \leq 0 \ (x \in \langle a,b\rangle) \Rightarrow f$ konkáv $\langle a,b\rangle$-n;

4) $x_0 \in]a,b[$ inflexiós hely, ha $(x_0, f(x_0))$-ban egy konvex és egy konkáv „ív találkozik". ($f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$).

A teljes fv. vizsgálat szempontjai

1) D_f meghatározása;
2) Paritás, periodicitás vizsgálata;
3) Zérushelyek meghatározása;
4) Határérték meghatározása D_f határpontjaiban;
5) Folytonosság vizsgálata, szakadási helyek meghatározása;
6) Differenciálhatóság vizsgálata; f', f'' meghatározása;
7) Monotonitás vizsgálata
8) Lokális és globális szélsőértékek meghatározása;
9) Konvex és konkáv ívek meghatározása, inflexiós helyek megh.;
10) Aszimptoták meghatározása
($x = x_0$ egyenes függőleges aszimptota, ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \vee \lim\limits_{x\to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty$
$y = y_0$ egyenes vízszintes aszimptota, ha $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = y_0 \vee \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = y_0$)
11) A függvény ábrázolása;
12) R_f (az értékkészlet) megadása.

Matematika II. 5. feladatsor

(Szöveges szélsőérték-feladatok)

1. Felül nyitott, négyzet alapú doboz készítéséhez $2\,m^2$ lemezt használhatunk. Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit, hogy térfogata a legnagyobb legyen? Mekkora ez a térfogat?
2. Felül nyitott, $4\,m^3$ térfogatú négyzet alapú tárolót építünk. Milyenek legyenek a méretei, hogy a lehető legkevesebb anyagot használjuk fel (a felszíne a legkisebb legyen)?
3. Adott egy a oldalú négyzet (lemez), melynek minden sarkából kivágunk egy-egy x oldalú négyzetet. Milyen x-re lesz a megmaradt lemezből, az oldalak felhajtásával kapott, felül nyitott ($a-2x$ oldalú) négyzet alapú edény térfogata minimális? (Legyen speciálisan $a=2$ vagy $a=9$.)
4. Felül nyitott, henger alakú 1 liter térfogatú mérőedényt készítünk. Hogyan válasszuk a henger alapsugarát és magasságát, hogy minél kevesebb lemezt használjunk? Mennyi lesz a felhasznált lemez felszíne?
5. Egy tűzfal mellett $10000\,m^2$-es téglalap alakú telket alakítunk ki. Milyenek legyenek a méretei, hogy kerülete minimális legyen? Mekkora ez a minimális kerület?
6. Bontsuk fel az $a>0$ számot két pozitív szám, x és y szorzatára, hogy
   a) $x+y$ minimális legyen.
   b) x^2+y^3 minimális legyen.
7. Az ábrán látható ablak keresztmetszete $2\,m^2$ (kerülete $6\,m$). Milyen legyen r és h értéke, hogy az ablak kerülete (keresztmetszete) minimális (maximális) legyen?