

6. feladatsor

Integrálszámítás

1) Számítsa ki a következő határozatlan integrálokat:

a) $\int (2x^2 + 3x - 4) dx$; $\int (3 - x^2)^2 dx$; $\int \frac{2x^5 + x^3 - x^2 + 3}{x^2} dx$;
 $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$; $\int \left(\sqrt{x} + \frac{5}{4x} - \frac{1}{x^3}\right) dx$; $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$;
 $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}} dx$; $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$;

b) $\int (3x+5)^3 dx$; $\int \sqrt[3]{3x+2} dx$; $\int \sqrt[4]{7x-16} dx$; $\int \sin(6x+4) dx$;
 $\int (e^{-x} + e^{2x}) dx$; $\int (e^{5x-4} + 3^{2-2x}) dx$; $\int \frac{1}{\cos^2(3x+5)} dx$;
 $\int \frac{1}{1+4x^2} dx$; $\int \frac{2}{\sqrt{1-9x^2}} dx$; $\int \frac{1}{3+x^2} dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$;

c) $\int (3x^2+5)^4 6x dx$; $\int (2x^3+4)^5 x^2 dx$; $\int x^2 \sqrt[3]{2+x^3} dx$;
 $\int \sin x \cos x dx$; $\int \sin^4 x \cos x dx$; $\int \frac{\ln x}{x} dx$;

d) $\int \operatorname{ctg} x dx$; $\int 3 \operatorname{tg} x dx$; $\int \frac{2x}{5x^2+2} dx$; $\int \frac{1}{x \ln x} dx$; $\int \frac{5x^2}{x^3+4} dx$;
 $\int \frac{e^x}{3+e^x} dx$; $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx$; $\int \frac{4 \sin x}{5 \cos x + 4} dx$; $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+1} dx$

e) $\int x e^{x^2} dx$; $\int x \cos(x^2+1) dx$; $\int \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$; $\int e^{\sin x} \cos x dx$;

f) $\int \cos \frac{1}{2} x dx$; $\int \frac{1}{\cos^2 5x} dx$; $\int \frac{1}{7x-4} dx$; $\int \frac{1}{25+x^2} dx$; $\int \sqrt{1-x^2} dx$;
 $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$; $\int x^2 \sqrt[3]{x+1} dx$; $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$; $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$;

g) $\int x e^x dx$; $\int x \sin x dx$; $\int (x+3) \operatorname{ch} x dx$; $\int x^2 e^x dx$; $\int x^2 \cos x dx$;
 $\int \ln x dx$; $\int (2x+1) \ln x dx$; $\int x^2 \ln x dx$; $\int \operatorname{arctg} x dx$; $\int x \operatorname{arctg} x dx$;
 $\int \sin^2 x dx$; $\int \sin^3 x dx$; $\int e^x \cos x dx$;

h) $\int \frac{3}{x+2} dx$; $\int \frac{2}{(x+3)^2} dx$; $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$; $\int \frac{1}{x^2+4x+8} dx$;
 $\int \frac{2x-3}{x^2-6x+10} dx$; $\int \frac{2x+5}{x^2+4x+5} dx$; $\int \frac{3x-1}{x^2-4x-21} dx$; $\int \frac{1}{(x-2)(x+4)} dx$;

i) $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$; $\int \frac{1}{\sin x} dx$; $\int \frac{1}{\sin x(1+\cos x)} dx$;

7. feladatsor

2) Riemann-integrál és alkalmazásai

a) Számítsa ki az alábbi Riemann-integrálokat:

$$\int_{-2}^1 (x^2 + 3x + 1) dx; \int_{\pi}^{\pi} \sin x dx; \int_7^7 \sqrt{x} dx; \int_{-4}^{-2} \frac{1}{x^2} dx; \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d_f^2 x dx;$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-5x}} dx; \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx; \int_0^{2\frac{\pi}{3}} \cos 2x dx; \int_1^2 \frac{e^{3x^{\frac{1}{4}}}}{e^{3x} + 1} dx;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx; \int_0^1 (x+1) e^x dx; \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx;$$

b) Vizsgálja az alábbi improprius-integrálokat:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx; \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx; \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{x^2+1} dx; \int_0^{+\infty} 3e^{-2x} dx; \int_0^{+\infty} x e^{-3x} dx;$$

c) Számítsa ki az alábbi síkidomok területét:

- Az $f(x) = x^2$ ($x \in [0,1]$) fv. és az x -tengely által adott síkidom;
- Az $f(x) = 2x\sqrt{x-3}$ ($x \in [3,4]$) fv. és az x -tengely által határolt síkidom;
- Az $f(x) = x^2 - 7x + 12$ fv. és a tengelyek által határolt véges síkidomok;
- Az $f(x) = \cos x$ és $g(x) = \frac{1}{2}$ fv.-ek közötti terület, ha $x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$;
- Az $f(x) = x^2$ és $g(x) = x+2$ által határolt véges terület;
- Az $f(x) = x^2$ és $g(x) = \sqrt{x}$ által határolt terület;
- Az $f(x) = -x^2 + 8x - 9$ és $g(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 9$ által határolt terület;

d) Számítsa ki az alábbi görbék ívhosszát:

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \quad (x \in [2,4]); \text{ az } x^2 + y^2 = 25 \text{ kör negyede};$$

e) Számítsa ki az alábbi forgástestek felszínét:

- $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ ($x \in [-5,5]$) fv. x -tengely körüli forgatása;
- $f(x) = \sqrt{4-2x}$ ($x \in [\frac{1}{2}, 2]$) fv. x -tengely körüli forgatása;
- $f(x) = 2\sqrt{x}$ ($x \in [0,4]$) fv. x -tengely körüli forgatása;
- $f(x) = x$ ($x \in [0,2]$) fv. y -tengely körüli forgatása;

f) Számítsa ki az alábbi forgástestek térfogatát:

- $f(x) = \sin x$ ($x \in [0, \pi]$) fv. forg. az x -tengely körül;
- $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ ($x \in [-r, r]$) félkör forg. az x -tengely körül;
- $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ ($x \in [1,4]$) fv. forg. az x -tengely körül;
- $f(x) = \ln x$ ($2 \leq x \leq 6$) az x -körül, ill. $0 \leq y \leq 6$ -ra y -körül;

g) Számítsa ki az $L_1 = \{(x,y) \mid x \in [a,b], 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$, $L_2 = \{(x,y) \mid x \in [a,\frac{\pi}{2}], 0 \leq y \leq \sin x\}$ lemezek súlypontjának x_s, y_s koordinátáit!