7. feladatsor

2) Riemann-integrál és alkalmazásai

a) Számítsa ki az alábbi Riemann-integrálokat:

$\int_{-2}^{1}(x^2+3x+1)\,dx$; $\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx$; $\int_{-4}^{7}\sqrt{x}\,dx$; $\int_{-4}^{-2}\frac{1}{x^2}\,dx$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}^2 x\,dx$;

$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2-5x}}\,dx$; $\int_{1}^{e}\frac{\ln^2 x}{x}\,dx$; $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx$; $\int_{1}^{2}\frac{e^{3x^{\frac{1}{4}}}}{e^{3x}+1}\,dx$;

$\int_{0}^{\pi} x\operatorname{sen} x\,dx$; $\int_{0}^{1}(x+1)e^x\,dx$; $\int_{0}^{9}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$; $\int_{0}^{\pi}\sin^3 x\,dx$;

b) Vizsgálja az alábbi improprius-integrálokat:

$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$; $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^4}\,dx$; $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$; $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3}{x^2+1}\,dx$; $\int_{0}^{+\infty}3e^{-2x}\,dx$; $\int_{0}^{+\infty}x e^{-3x}\,dx$;

c) Számítsa ki az alábbi síkidomok területét:

- Az $f(x)=x^2$ $(x\in[0,1])$ fv. és az x-tengely által adott síkidom;
- Az $f(x)=2x\sqrt{x-3}$ $(x\in[3,4])$ fv. és az x-tengely által határolt síkidom;
- Az $f(x)=x^2-7x+12$ fv. és a tengelyek által határolt véges síkidomok;
- Az $f(x)=\cos x$ és $g(x)=\frac{1}{2}$ fv-ek közötti terület, ha $x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$;
- Az $f(x)=x^2$ és $g(x)=x+2$ által határolt véges terület;
- Az $f(x)=x^2$ és $g(x)=\sqrt{x}$ — " — ;
- Az $f(x)=-x^2+8x-9$ és $g(x)=\frac{x^2}{2}-4x+9$ — " — ;

d) Számítsa ki az alábbi görbék ívhosszát:

$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ $(x\in[2,4])$; az $x^2+y^2=25$ kör negyede;

e) Számítsa ki az alábbi forgástestek felszínét:

- $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ $(x\in[-5,5])$ fv. x-tengely körüli forgatása;
- $f(x)=\sqrt{4-2x}$ $(x\in[\frac{1}{2},2])$ — " — ;
- $f(x)=2\sqrt{x}$ $(x\in[0,4])$ — " — ;
- $f(x)=x^2$ $(x\in[0,2])$ fv. y-tengely körüli forgatása;

f) Számítsa ki az alábbi forgástestek térfogatát:

- $f(x)=\operatorname{sen} x$ $(x\in[0,\pi])$ fv. forg. az x-tengely körül;
- $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ $(x\in[-r,r])$ félkör forg. — " — ;
- $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$ $(x\in[1,4])$ fv. — " — ;
- $f(x)=\ln x$ $(2\le x\le 6)$ az x-körül, illetve $0\le y\le 6-\infty$ y-körül;

g) Számítsa ki az $L_1=\{(x,y)\mid x\in[0,4],\ 0\le y\le\sqrt{x}\}$, $L_2=\{(x,y)\mid x\in[0,\frac{\pi}{2}],\ 0\le y\le\sin x\}$ lemezek súlypontjának x_s, y_s koordinátáit!