Matematika II

8. Többváltozós függvények

1) Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

$f_1(x,y) = \dfrac{x^2-3y}{x-y}$; $f_2(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$; $f_3(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$;

$f_4(x,y) = \ln(4-x^2-y^2) + \sqrt{x^2+1-y}$

2) Vizsgálja az alábbi sorozatok konvergenciáját:

$\left\langle \left(\frac{1}{n}, 1\right) \right\rangle$; $\left\langle \left(\frac{2}{n^2}, 1+\frac{2}{n}\right) \right\rangle$; $\left\langle \left(\frac{n+1}{3n+2}, \frac{1}{n^2+1}\right) \right\rangle$; $\left\langle \left(n, \frac{n+1}{n}\right) \right\rangle$

3) Biz. be, hogy az $f_1(x,y) = c$ és $f_2(x,y) = x+y$ fv-ek folytonosak az értelmezési tartományukban.

4) Számítsa ki az alábbi fv-ek elsőrendű parciális deriváltjait:

$f_1(x,y) = x^2+y^2+2xy$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$; $f_2(x,y) = x^2y + e^x - \ln y$ $(y>0)$;

$f_3(x,y) = (x^2-y^2)^2$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$; $f_4(x,y) = x\sqrt{y-x}$ $(y>x)$;

$f_5(x,y) = x e^{xy}$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$; $f_6(x,y) = y^2 - \ln(xy)$ $((x,y)\in\mathbb{R}_+^2)$.

5) Számítsa ki az alábbi fv-ek másodrendű parc. deriváltjait:

$f_1(x,y) = x^3y - 3xy^2 - 4$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$; $f_2(x,y) = x^2y + e^{xy}$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$

6) Számítsa ki az $f(x,y) = x^2+y^2$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ fv. $(1,1)$-beli $e = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ iránymenti deriváltját.

7) Vizsgálja az alábbi fv-ek lokális szélsőértékeit:

$f_1(x,y) = x^2+xy+y^2-3x-3y$; $f_2(x,y) = x^3+y^3-3xy$; $f_3(x,y) = 4-4x^2-y^2$;

$f_4(x,y) = x^3+y^3+6xy$; $f_5(x,y) = y^2-x^2$;

8) Számítsa ki az alábbi többszörös integrálokat:

$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} xy \,dx\,dy$; $\iint\limits_{[0,1]\times[0,2]} 6xy^3 \,dx\,dy$; $\iiint\limits_{[0,1]^3} xy^2\sqrt{z} \,dx\,dy\,dz$;

$\iint\limits_S (4-(x^2+y^2)) \,dx\,dy$, ha $S = \{(x,y) \mid x\in[0,1],\ x^2 \le y \le x\}$;

$\iint\limits_S \cos(x+y) \,dx\,dy$, ha $S = \{(x,y) \mid y\in[0,\pi],\ 0 \le x \le y\}$